

PEMBAHASAN
OSK MATEMATIKA SMA
TAHUN 2026

1. Samakan penyebut, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) &= \frac{x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx)}{xyz} \\ &= \frac{x^2 + y^2 + z^2 - (xy + yz + zx)}{777}. \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa $x - z = (x - y) + (y - z) = 3$. Selain itu, diperoleh

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx &= \frac{2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2(xy + yz + zx)}{2} \\ &= \frac{(x^2 - 2xy + y^2) + (y^2 - 2yz + z^2) + (z^2 - 2zx + x^2)}{2} \\ &= \frac{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2}{2} \\ &= \frac{1 + 4 + 9}{2} \\ &= 7. \end{aligned}$$

Jadi, hasil yang diminta adalah

$$\frac{x}{yz} + \frac{y}{xz} + \frac{z}{xy} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = \frac{7}{777} = \frac{1}{111}.$$

2. Pada soal ini, hanya diperlukan menentukan peluang Cici menang. Perhatikan bahwa pada setiap lembaran, peluang munculnya angka dan gambar masing-masing adalah $\frac{1}{2}$. Misalkan A dan G berturut-turut kejadian munculnya angka dan gambar pada lemparan koin oleh seorang pemain. Agar Cici menang, hasil lemparannya adalah

$$AAG, \quad AAA AAG, \quad AAA AAA AAG, \quad \dots, \quad \underbrace{AAA \dots AAA}_{3k-1} A G, \quad \dots$$

Dengan kata lain, lemparan gambar pertama harus muncul pada Cici dan sebelumnya harus semuanya angka. Jika ada $3k - 1$ lemparan pertama muncul angka, kemudian muncul gambar pada lemparan berikutnya, peluangnya adalah

$$\left(\underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2}}_{3k-1} \right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{3k-1}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{3k}}$$

untuk setiap bilangan asli k . Ini berarti peluang Cici menang adalah

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^9} + \dots = \frac{\frac{1}{2^3}}{1 - \frac{1}{2^3}} = \frac{1}{7}.$$

Jadi, $(c, n) = (1, 7)$ sehingga $c + n = 8$.

3. Karena $P(x)$ habis dibagi $Q(x)$, ini berarti $P(x) = Q(x)R(x)$ untuk suatu polinomial $R(x)$. Karena $\deg P = 3$ dan $\deg Q = 2$, ini berarti haruslah $\deg R = 1$. Misalkan $R(x) = px + q$. Perhatikan bahwa

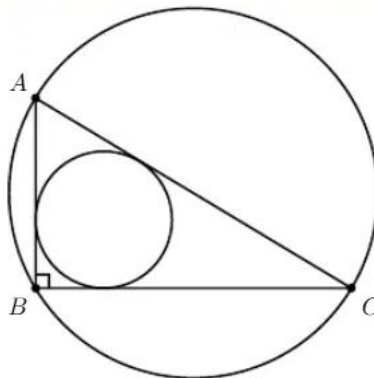
$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + bx + c &= \left(x^2 + \frac{1}{40}\right)(px + q) \\ &= px^3 + qx^2 + \frac{p}{40}x + \frac{q}{40}. \end{aligned}$$

Ini berarti haruslah memenuhi

$$1 = p, \quad a = q, \quad b = \frac{p}{40}, \quad c = \frac{q}{40}.$$

Karena $a = q$, maka $c = \frac{q}{40} = \frac{a}{40}$ sehingga $\frac{a}{c} = 40$.

4. Misalkan ABC segitiga siku-siku dengan $\angle ABC = 90^\circ$. Akibatnya, $\overline{AC}$ merupakan diameter lingkaran luarnya sehingga $AC = 2 \cdot 8 = 16$.



Misalkan $BC = a$, $CA = b$, dan $AB = c$, ini berarti $b = 16$ dan $45 = [ABC] = \frac{ac}{2}$ sehingga diperoleh $ac = 90$. Selain itu, dari Teorema Pythagoras berlaku $a^2 + c^2 = 16^2 = 256$. Ini berarti berlaku

$$(a + c)^2 = a^2 + c^2 + 2ac = 256 + 2(90) = 436 \Rightarrow a + c = \sqrt{436} = 2\sqrt{109}.$$

Dari sini diperoleh setengah keliling segitiga ABC adalah $s = \frac{a+c+b}{2} = \frac{2\sqrt{109}+16}{2} = \sqrt{109} + 8$.

8. Jadi, panjang jari-jari lingkaran dalam segitiga ABC adalah

$$r = \frac{[ABC]}{s} = \frac{45}{\sqrt{109} + 8} \cdot \frac{\sqrt{109} - 8}{\sqrt{109} - 8} = \frac{45(\sqrt{109} - 8)}{(\sqrt{109})^2 - 8^2} = \sqrt{109} - 8.$$

Jadi, $(m, n) = (109, -8)$ sehingga $m + n = 101$.

5. Akan ditinjau menjadi beberapa kasus.

Kasus 1: Bilangan tiga digit

Misalkan bilangan tersebut abc dan memenuhi $1 \leq a < b < c \leq 9$. Akan ditinjau saat $456 \leq abc \leq 499$ terlebih dahulu, ini berarti $a = 4$ sehingga haruslah $4 < b < c \leq 9$. Perhatikan bahwa b dan c dua bilangan berbeda yang dipilih dari 5,6,7,8,9, yaitu ada sebanyak $\binom{5}{2} = 10$.

Sekarang, akan ditinjau saat $500 \leq abc \leq 999$, ini berarti $5 \leq a < b < c \leq 9$. Karena a, b, c merupakan tiga bilangan berbeda yang dipilih dari 5,6,7,8,9, maka ada sebanyak $\binom{5}{3} = 10$.

Jadi, dalam kasus ini ada sebanyak $10 + 10 = 20$.

Kasus 2: Bilangan empat digit

Perhatikan bahwa dari 2000 hingga 2026, digit-digitnya tidak memenuhi urutan naik karena ada angka 0 setelah 2. Jadi, cukup ditinjau $abcd$ yang memenuhi $1000 \leq abcd \leq 1999$ yang memenuhi $a < b < c < d$. Ini berarti $a = 1$ sehingga $1 < b < c < d \leq 9$. Perhatikan bahwa b, c, d dipilih dari 2,3,...,9 sehingga ada sebanyak $\binom{8}{3} = 56$.

Dari kedua kasus, total kemungkinannya adalah $20 + 56 = 76$.

6. Dengan meninjau beberapa suku pertama, kita akan mendapatkan pola sebagai berikut.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
a_n	0	2	2	1	0	1	1	2	0	2	2	1	0	...

Perhatikan bahwa pola berulang setelah suku ke-8, yaitu $a_n = a_{n+8}$ untuk setiap bilangan asli n . Dengan kata lain, $a_{8p+q} = a_q$ untuk suatu bilangan bulat tak negatif p dan bilangan bulat q , dengan $1 \leq q \leq 8$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_8 &= 9, \\ a_9 + a_{10} + \dots + a_{16} &= 9, \\ a_{17} + a_{18} + \dots + a_{24} &= 9, \\ &\dots \\ a_{2017} + a_{2018} + \dots + a_{2024} &= 9. \end{aligned}$$

Ini berarti

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{2024} = 9 \cdot \frac{2024}{8} = 9 \cdot 253 = 2277.$$

Selain itu, diperoleh

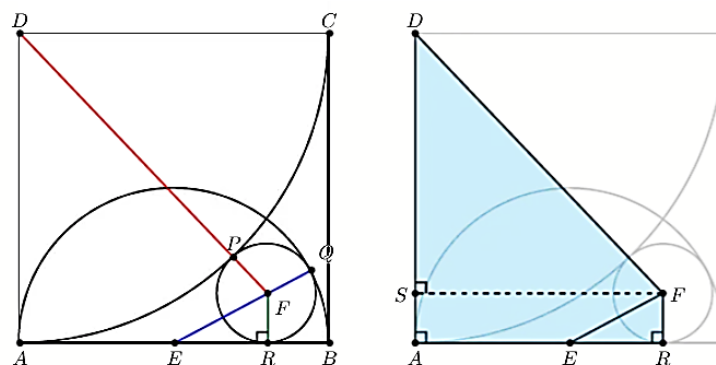
$$a_{2025} = a_{8 \cdot 253 + 1} = a_1 = 0, \quad a_{2026} = a_{8 \cdot 253 + 2} = a_2 = 2.$$

Ini berarti $a_1 + a_2 + \dots + a_{2026} = 2277 + 0 + 2 = 2279$.

7. Perhatikan bahwa $p + q + r$ merupakan bilangan genap, ini artinya tepat 1 dari p, q, r yang bernilai 2. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $p = 2$. Ini berarti $q + r = 24$ dan $2q + 2r + qr = 181$. Perhatikan bahwa
- $$qr = 181 - 2q - 2r = 181 - 2(q + r) = 181 - 2(24) = 133 = 7 \cdot 19.$$
- Ini berarti $(q, r) = (7, 19), (19, 7)$ sehingga $pqr = 2 \cdot 7 \cdot 19 = \mathbf{266}$.

8. Misalkan x_1 dan x_2 akar-akar dari $f(x) = 0$. Dari Teorema Vieta, berlaku $x_1 + x_2 = -p$ dan $x_1x_2 = q^2$. Perhatikan bahwa $x_1x_2 = q^2 > 0$ menunjukkan bahwa x_1, x_2 keduanya positif atau keduanya negatif. Karena $x_1 + x_2 < 0$, ini berarti x_1, x_2 keduanya harus negatif. Misalkan $x_1 = -y_1$ dan $x_2 = -y_2$, ini berarti $y_1 + y_2 = p$ dan $y_1y_2 = q^2$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $y_1 \leq y_2$, ini berarti $(y_1, y_2) = (1, q^2), (q, q)$.
Jika $(y_1, y_2) = (q, q)$, ini berarti $p = y_1 + y_2 = 2q$. Karena $2q$ genap, ini berarti p harus genap sehingga haruslah $p = 2$. Namun, ini memberikan $2 = 2q \Rightarrow q = 1$, kontradiksi.
Jika $(y_1, y_2) = (1, q^2)$, ini berarti $p = y_1 + y_2 = 1 + q^2$. Andaikan $q \geq 3$, ini berarti $1 + q^2$ merupakan bilangan genap sehingga p juga genap, yaitu $p = 2$. Namun, ini tidak mungkin karena $p = 1 + q^2 > 2$. Ini berarti haruslah $q = 2$ sehingga diperoleh $p = 1 + q^2 = 5$. Dapat diperiksa bahwa $f(x) = x^2 + 5x + 4$ memiliki akar-akar -4 dan -1 yang mana memenuhi. Jadi, $p + 2q = 5 + 4 = \mathbf{9}$.

9. Perhatikan persegi $ABCD$ berikut, misalkan E dan F berturut-turut titik tengah $\overline{AB}$ dan titik pusat lingkaran yang menyinggung busur AC , busur AB , dan $\overline{AB}$. Lalu, P, Q, R berturut-turut sebagai titik singgung lingkaran berpusat di F dengan busur AC , busur AB , dan $\overline{AB}$. Untuk mempermudah perhitungan, akan dilakukan *rescale* sebesar $\frac{1}{150}$ sehingga panjang sisi persegi adalah $300 \cdot \frac{1}{150} = 2$.



Misalkan panjang jari-jari lingkaran kecil adalah r . Ini berarti

$$AE = 1, \quad DF = DP + PF = 2 + r, \quad EF = EQ - QF = 1 - r, \quad FR = r.$$

Misalkan S pada AD yang memenuhi $FS \perp AD$. Ini berarti $ARFS$ merupakan persegi panjang karena semua sudutnya siku-siku, berarti $AS = FR = r$ sehingga $SD = AD - AS = 2 - r$.

Dari Teorema Pythagoras $\triangle FER$, ini berarti

$$ER = \sqrt{EF^2 - FR^2} = \sqrt{(1-r)^2 - r^2} = \sqrt{1-2r}.$$

Ini berarti berlaku $AR = AE + ER = 1 + \sqrt{1-2r}$. Sekarang, dari Teorema Pythagoras $\triangle DFS$ berlaku

$$FS = \sqrt{FD^2 - DS^2} = \sqrt{(2+r)^2 - (2-r)^2} = \sqrt{8r} = 2\sqrt{2r}.$$

Karena $ARFS$ persegi panjang, ini berarti $AR = SF$ sehingga berlaku $1 + \sqrt{1-2r} = 2\sqrt{2r}$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} 1 + \sqrt{1-2r} &= 2\sqrt{2r} \\ \sqrt{1-2r} &= 2\sqrt{2r} - 1 \quad (\text{kuadratkan}) \\ (\sqrt{1-2r})^2 &= (2\sqrt{2r} - 1)^2 \\ 1 - 2r &= 8r + 1 - 4\sqrt{2r} \\ 4\sqrt{2r} &= 10r \quad (\text{kuadratkan}) \\ (4\sqrt{2r})^2 &= (10r)^2 \\ 16(2r) &= 100r^2 \end{aligned}$$

sehingga berlaku $r = \frac{16 \cdot 2}{100} = \frac{8}{25}$. Rescale sebesar 150, ini berarti panjang jari-jari lingkaran kecil adalah $150 \cdot \frac{8}{25} = 48$.

10. Solusi 1: Bagi Kasus

Misalkan kunci koper tersebut sebagai 12222 abc di mana a, b, c bernilai 3, 4, atau 5. Akan dibagi menjadi beberapa kasus.

Kasus 1: a, b, c saling berbeda

Jika a, b, c saling berbeda, ini berarti haruslah $\{a, b, c\} = \{3, 4, 5\}$. Banyaknya cara menyusun 12222345 adalah

$$\frac{8!}{1! 4! 1! 1! 1!} = 1680.$$

Kasus 2: Tepat dua dari a, b, c yang bernilai sama

Ini berarti untuk pemilihan abc ada enam kemungkinan: 334, 344, 335, 355, 445, dan 455. Banyaknya cara untuk menyusun 12222 aac adalah

$$6 \cdot \frac{8!}{1! 4! 2! 1!} = 5040.$$

Kasus 3: Semua a, b, c bernilai sama

Ini berarti ada $\binom{3}{1} = 3$ cara untuk pemilihan digit a, b, c yang mungkin dari 3,4,5. Banyaknya cara menyusun 12222aaa adalah

$$3 \cdot \frac{8!}{1! 4! 3!} = 840.$$

Jadi, jawabannya adalah $1680 + 5040 + 840 = 7560$ kunci yang mungkin.

Solusi 2: Aturan Perkalian Langsung

Akan diisi delapan slot angka ***** untuk kunci. Banyaknya cara pemilihan slot untuk sebuah angka 1 adalah 8 cara, sedangkan untuk pemilihan slot sisanya untuk empat angka 2 adalah $\binom{7}{4} = 35$. Tersisa tiga slot yang akan diisi 3,4, atau 5. Masing-masing slot memiliki 3 cara, jadi ada $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ cara untuk pengisian slot yang tersisa. Jadi, totalnya ada $8 \cdot 35 \cdot 27 = 7560$ cara.

11. Akan digunakan sifat berikut.

Sifat Fungsi Floor

Misalkan x bilangan real dan p bilangan bulat.

(a) $\lfloor x \rfloor = p$ jika dan hanya jika $p \leq x < p + 1$.

(b) $\lfloor x + p \rfloor = \lfloor x \rfloor + p$.

Karena ingin dicari x terbesar, akan diasumsikan $x > 0$. Karena x bilangan rasional, misalkan $x = p + \frac{m}{n}$ di mana p, m, n bilangan bulat tak negatif, $n > 0$, $m < n$, dan memenuhi $\text{FPB}(m, n) = 1$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \left(p + \frac{m}{n}\right)^2 + \left\lfloor p + \frac{m}{n} \right\rfloor &= \left\lfloor \left(p + \frac{m}{n}\right)^2 \right\rfloor + p + \frac{m}{n} + \frac{31}{100} \\ p^2 + \frac{2mp}{n} + \frac{m^2}{n^2} + p &= \left\lfloor p^2 + \frac{2mp}{n} + \frac{m^2}{n^2} \right\rfloor + p + \frac{m}{n} + \frac{31}{100} \\ p^2 + \frac{2mp}{n} + \frac{m^2}{n^2} &= \left\lfloor p^2 + \frac{2mp}{n} + \frac{m^2}{n^2} \right\rfloor + \frac{m}{n} + \frac{31}{100}. \end{aligned}$$

Karena p^2 bilangan bulat, ini berarti

$$\begin{aligned} p^2 + \frac{2mp}{n} + \frac{m^2}{n^2} &= p^2 + \left\lfloor \frac{2mp}{n} + \frac{m^2}{n^2} \right\rfloor + \frac{m}{n} + \frac{31}{100} \\ \frac{2mp}{n} + \frac{m^2}{n^2} - \frac{m}{n} - \frac{31}{100} &= \left\lfloor \frac{2mp}{n} + \frac{m^2}{n^2} \right\rfloor \quad (*) \end{aligned}$$

Karena ruas kanan (*) bernilai bulat, ini berarti

$$\frac{2mp}{n} + \frac{m^2}{n^2} - \frac{m}{n} - \frac{31}{100} = \frac{200mpn + 100m^2 - 100mn - 31n^2}{100n^2}$$

bilangan bulat. Dengan kata lain, haruslah

$$100n^2 \mid 200mpn + 100m^2 - 100mn - 31n^2.$$

Karena $100 \mid 100n^2$, ini berarti

$$100 \mid 200mpn + 100m^2 - 100mn - 31n^2 \Rightarrow 100 \mid 31n^2.$$

Mengingat $\text{FPB}(100,31) = 1$, akibatnya $100 \mid n^2$ sehingga diperoleh $10 \mid n$. Misalkan $n = 10t$, ini berarti

$$\begin{aligned} 10000t^2 \mid 2000mpt + 100m^2 - 1000mt - 3100t^2 \\ \Rightarrow 100t^2 \mid 20mpt + m^2 - 10mt - 31t^2. \end{aligned}$$

Karena $t \mid 100t^2$, ini berarti

$$t \mid 20mpt + m^2 - 10mt - 31t^2 \Rightarrow t \mid m^2.$$

Mengingat $\text{FPB}(m,n) = 1$, ini berarti $\text{FPB}(m,t) = 1$ sehingga berlaku pula $\text{FPB}(m^2,t) = 1$. Jadi, $t \mid 1$ sehingga $t = 1$. Dari sini diperoleh $n = 10$ yang berarti $0 \leq m \leq 9$. Selain itu, $100 \mid 20mp + m^2 - 10m - 31$.

Karena $10 \mid 100$, ini berarti

$$10 \mid 20mp + m^2 - 10m - 31 \Rightarrow 10 \mid m^2 - 31.$$

Didapatkan $m^2 \equiv 31 \pmod{10}$ yang berarti $m^2 \equiv 1 \pmod{10}$. Ini berarti berlaku $m \equiv 1, 9 \pmod{10}$ sehingga diperoleh $m = 1$ atau $m = 9$. Lihat persamaan (*) dapat ditulis ulang sebagai

$$\frac{m}{n} + \frac{31}{100} = \frac{2mp}{n} + \frac{m^2}{n^2} - \left\lfloor \frac{2mp}{n} + \frac{m^2}{n^2} \right\rfloor = \left\{ \frac{2mp}{n} + \frac{m^2}{n^2} \right\}.$$

Ini berarti harus memenuhi

$$0 \leq \frac{m}{n} + \frac{31}{100} < 1 \Rightarrow -\frac{31}{100} \leq \frac{m}{n} < \frac{69}{100}.$$

Karena $n = 10$, ini berarti $-\frac{31}{10} \leq m < \frac{69}{10}$ yang berarti $0 \leq m \leq 6$. Jadi, haruslah $m = 1$.

Ini berarti

$$100 \mid 20 \cdot 1 \cdot p + 1^2 - 10 \cdot 1 - 31 = 20p - 40 \Rightarrow 5 \mid p - 2.$$

Ini berarti $p = 5k + 2$ untuk suatu bilangan bulat $k \geq 0$. Agar $x = (5k + 2) + \frac{1}{10}$ terbesar, ini berarti $k = 19$ sehingga $x = 97 + \frac{1}{10}$.

Jadi, solusi terbesar x yang diinginkan adalah $\frac{a}{b} = \frac{971}{10}$. Ini berarti $a = 971$ dan $b = 10$ sehingga $a + b = 981$.

12. Perhatikan bahwa pada setiap baris hanya terdiri maksimal dua petak putih, karena jika ada tiga petak putih, jumlah bilangan pada baris tersebut akan lebih besar dari atau sama dengan $3 + 3 + 3 = 9$. Akan dibagi menjadi beberapa kasus.

Kasus 1: Tepat Dua Petak Putih di Baris Pertama (atau Kedua)

Jika ada dua petak putih pada baris pertama, maka petak putih pada baris kedua harus berada di kolom yang berbeda dengan dua petak putih sebelumnya (lihat gambar).

A	B	
		C

A		B
	C	

	A	B
C		

Perhatikan bahwa kemungkinan (A, B) yang dapat diisi adalah $(A, B) = (3, 5), (5, 3), (4, 4)$, sedangkan $C = 8$. Karena ada 3 konfigurasi penempatan petak hitam-putih, ini berarti ada $3 \cdot 3 = 9$ cara pengisian petak. Hal yang serupa apabila dua petak putih berada di baris kedua, juga ada 9 cara.

Jadi, ada $9 + 9 = 18$ cara pada kasus ini.

Kasus 2: Tepat Satu Petak Putih di Baris Pertama dan Kedua

Perhatikan bahwa petak putih pada masing-masing baris harus berada di kolom yang berbeda (lihat gambar).

Masing-masing petak putih harus berisi angka 8, jadi ada 6 cara pada kasus ini.

Total banyaknya cara mengisi papan adalah $6 + 18 = 24$ cara.

13. Menggunakan ketaksamaan AM-GM, diperoleh

$$x + 50y + \frac{625}{xy^2} = x + 25y + 25y + \frac{625}{xy^2} \geq 4 \sqrt[4]{x \cdot 25y \cdot 25y \cdot \frac{625}{xy^2}} = 4 \cdot 5^2 = 100.$$

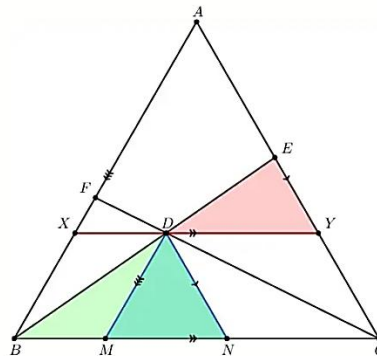
Nilai minimum tercapai saat $x = 25y = \frac{625}{xy^2}$. Karena $x = 25y$, ini berarti

$$x = \frac{625}{xy^2} \Rightarrow 625 = x^2 y^2 = (xy)^2$$

sehingga $xy = 25$. Jadi, $25 = xy = (25y)y = 25y^2$ sehingga $y = 1$ dan diperoleh $x = 25y = 25$. Ini berarti $(a, b) = (25, 1)$ sehingga $a + b + ab = 25 + 1 + 25 \cdot 1 = 51$.

14. Buat garis yang melalui D dan sejajar BC , memotong AB dan AC berturut-turut di X dan Y . Karena DMN dan ABC segitiga sama sisi, masing-masing besar sudutnya adalah 60° . Ini berarti $\angle DMN = 60^\circ = \angle ABC$ yang berarti $\angle DMN = \angle ABC$, berakibat $DM \parallel AB$ menurut sifat garis sejajar. Secara analog, $DN \parallel AC$. Karena $DX \parallel BM$ dan $DM \parallel XB$, ini berarti $DMBX$ merupakan jajar genjang sehingga berlaku $BX = DM = 3$ dan $DX = BM$. Secara analog, $DN = YC = 3$ dan $NC = DY$. Ini berarti

$$FX = FB - BX = 4 - 3 = 1 \quad \text{dan} \quad EY = EC - YC = 8 - 3 = 5.$$



Misalkan $BC = 8x$. Karena $DY \parallel BC$, ini berarti $\angle DYE = \angle BCE$. Selain itu, $\angle DEY = \angle BEC$ sehingga diperoleh $\triangle DEY \sim \triangle BEC$ (AA). Akibatnya,

$$\frac{DY}{BC} = \frac{EY}{EC} \Rightarrow DY = \frac{EY}{EC} \cdot BC = \frac{5}{8} \cdot 8x = 5x.$$

Secara analog, $\triangle FXD \sim \triangle FBC$ sehingga diperoleh

$$\frac{DX}{BC} = \frac{FX}{FB} \Rightarrow DX = \frac{FX}{FB} \cdot BC = \frac{1}{4} \cdot 8x = 2x.$$

Ini berarti $XY = DX + DY = 2x + 5x = 7x$. Karena $\angle XYA = \angle BCA = 60^\circ$ dan $\angle YAX = 60^\circ$, ini berarti $\angle AXY = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$ sehingga $\triangle AXY$ sama sisi. Jadi, $AY = XY = 7x$ sehingga berlaku $AC = AY + YC = 7x + 3$. Karena $AC = BC$, ini berarti $7x + 3 = 8x \Rightarrow x = 3 \Rightarrow BC = 8x = 24$.

15. Misalkan $n = 2^r m$ di mana r dan m bilangan bulat dengan $r \geq 0$ dan $m > 0$ ganjil. Misalkan $m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ di mana $p_1, p_2, \dots, p_k$ bilangan prima ganjil berbeda dan $a_1, a_2, \dots, a_k$ bilangan bulat tak negatif.

Jumlah Faktor Positif

Misalkan m dan n bilangan asli.

(a) Jika $\text{FPB}(m, n) = 1$, berlaku

$$\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n).$$

(b) Jika $m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ di mana $p_1, p_2, \dots, p_k$ bilangan prima berbeda dan $a_1, a_2, \dots, a_k$ bilangan bulat tak negatif, berlaku

$$\sigma(m) = \prod_{i=1}^k (p_i^0 + p_i^1 + \dots + p_i^{a_i}).$$

Karena $n \leq 225$, ini berarti $0 \leq r \leq 7$. Karena $\text{FPB}(2^r, m) = 1$, ini berarti

$$\sigma(n) = \sigma(2^r m) = \sigma(2^r) \sigma(m) = (1 + 2^1 + \dots + 2^r) \sigma(m).$$

Diketahui $\sigma(n)$ ganjil. Karena $1 + 2^1 + \dots + 2^r$ selalu ganjil, ini berarti haruslah $\sigma(m)$ ganjil. Sekarang, perhatikan

$$\sigma(m) = (1 + p_1 + p_1^2 + \dots + p_1^{a_1}) \dots (1 + p_k + p_k^2 + \dots + p_k^{a_k}).$$

Agar $\sigma(m)$ ganjil, ini berarti $1 + p_i + p_i^2 + \dots + p_i^{a_i}$ bernilai ganjil untuk setiap $i = 1, 2, \dots, k$. Karena p_i ganjil, ini tercapai saat a_i genap. Dengan kata lain, $m = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ merupakan bilangan kuadrat sempurna. Ini menunjukkan bahwa $n = 2^r t^2$ untuk suatu bilangan ganjil t .

Dengan kata lain, n harus berbentuk u^2 atau $2u^2$ untuk suatu bilangan asli u (sebagai contoh, $2^3 \cdot 5^2 = 2 \cdot (2 \cdot 5)^2$). Akan digunakan sifat berikut.

Misalkan n bilangan asli, berlaku

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Apabila $n = u^2$, ini berarti $1 \leq u \leq 15$ sehingga jumlahnya adalah

$$1^2 + 2^2 + \dots + 15^2 = \frac{15 \cdot 16 \cdot 31}{6} = 1240.$$

Apabila $n = 2u^2$, ini berarti $1 \leq u \leq 10$ sehingga jumlahnya adalah

$$2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 + \dots + 2 \cdot 10^2 = 2(1^2 + 2^2 + \dots + 10^2) = 2 \cdot \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 770.$$

Jadi, jumlah semua bilangan asli n yang memenuhi adalah $1240 + 770 = \mathbf{2010}$.

16. Misalkan XY memotong O_1O_2 di titik K . Perhatikan bahwa panjang $O_1X = O_1Y$ dan $O_2X = O_2Y$, ini berarti XO_1YO_2 merupakan layang-layang sehingga $XY \perp O_1O_2$ dan $KX = KY$.

Dari Teorema Pythagoras XO_1O_2 , diperoleh

$$O_1O_2 = \sqrt{O_1X^2 + O_2X^2} = \sqrt{4^2 + 8^2} = 4\sqrt{5}$$

Perhatikan bahwa $\overline{AB}$ ruas garis singgung persekutuan luar kedua lingkaran, akan digunakan sifat berikut.

Panjang Ruas Garis Singgung Persekutuan Luar

Jika d jarak kedua pusat lingkaran yang berjari-jari r_1 dan r_2 , maka panjang ruas garis singgung persekutuan luarnya adalah

$$\sqrt{d^2 - (r_1 - r_2)^2}$$

Perhatikan bahwa $d = O_1O_2$, ini berarti

$$AB = \sqrt{(4\sqrt{5})^2 - (4 - 8)^2} = \sqrt{64} = 8$$

Selanjutnya, akan digunakan Power of Point.

Karena $\overline{PA}$ menyinggung lingkaran O_1 , dari Power of Point (b) berlaku $PA^2 = PX \cdot PY$.

Karena $\overline{PB}$ menyinggung lingkaran O_2 , dengan cara yang sama berlaku $PB^2 = PX \cdot PY$.

Ini berarti

$$PA^2 = PX \cdot PY = PB^2 \Rightarrow PA^2 = PB^2 \Rightarrow PA = PB = \frac{AB}{2} = 4$$

Sekarang, perhatikan bahwa

$$[O_1PO_2] = [ABO_2O_1] - [APO_1] - [PBO_2]$$

Luas trapesium siku-siku O_1ABO_2 adalah

$$[ABO_2O_1] = \frac{O_1A + O_2B}{2} \cdot AB = \frac{4 + 8}{2} \cdot 8 = 48$$

Selain itu,

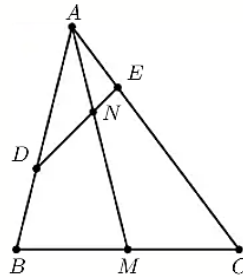
$$[APO_1] + [PBO_2] = \frac{AO_1 \cdot AP}{2} + \frac{BP \cdot BO_2}{2} = \frac{4 \cdot 4}{2} + \frac{4 \cdot 8}{2} = 24$$

Jadi, luas O_1PO_2 adalah $48 - 24 = 24$.

17. Menggunakan perbandingan luas, diperoleh

$$\frac{[ADE]}{[ABC]} = \frac{AD}{AB} \cdot \frac{AE}{AC} = \frac{7}{11} \cdot \frac{3}{11} = \frac{21}{121} \Rightarrow [ADE] = \frac{21}{121} [ABC] = \frac{21}{121} \cdot 1210 = 210.$$

Selanjutnya, akan ditentukan $DN:NE$ yang dapat dilakukan dengan dua cara.



Teorema Menelaus

Pada solusi ini, akan digunakan teorema berikut.

Perpanjang ED hingga memotong garis BC di F . Dari Teorema Menelaus $\triangle ABC$ transversal $\overline{FDE}$ berlaku

$$1 = \frac{CF}{FB} \cdot \frac{BD}{DA} \cdot \frac{AE}{EC} = \frac{CF}{FB} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{8} \Rightarrow \frac{CF}{FB} = \frac{14}{3}.$$

Ini berarti $CB:BF = 11:3$ dan misalkan $BC = 22x$. Ini berarti $BM = MC = 11x$ dan $FB = 6x$ sehingga $FB:BM:MC = 6:11:11$. Dari Teorema Menelaus $\triangle FCE$ transversal $\overline{ANM}$ berlaku

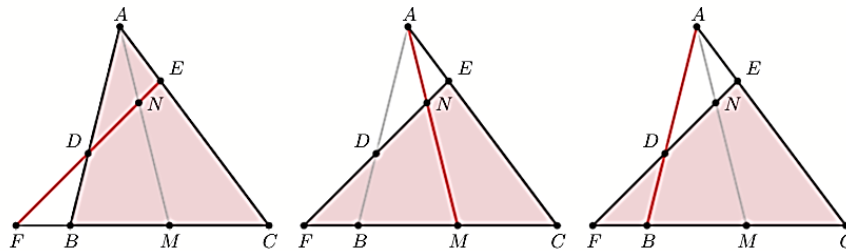
$$1 = \frac{CA}{AE} \cdot \frac{EN}{NF} \cdot \frac{FM}{MC} = \frac{11}{3} \cdot \frac{EN}{NF} \cdot \frac{17}{11} \Rightarrow \frac{EN}{NF} = \frac{3}{17}.$$

Dari Teorema Menelaus $\triangle FEC$ transversal $\overline{ADB}$ berlaku

$$1 = \frac{CA}{AE} \cdot \frac{ED}{DF} \cdot \frac{FB}{BC} = \frac{11}{3} \cdot \frac{ED}{DF} \cdot \frac{6}{22} \Rightarrow \frac{ED}{DF} = 1.$$

Misalkan $EF = 20y$. Dari $EN:NF = 3:17$ dan $ED:DF = 1:1$ berlaku $EN = 3y$, $NF = 17y$, dan $ED = DF = 10y$. Ini menunjukkan bahwa $ND = ED - EN = 10y - 3y = 7y$ sehingga

$$EN:ND = 3y:7y = 3:7.$$



Dari sifat perbandingan luas (a), ini berarti

$$\frac{[ADN]}{[ADE]} = \frac{DN}{DE} = \frac{7}{10} \Rightarrow [ADN] = \frac{7}{10} [ADE] = \frac{7}{10} \cdot 210 = \mathbf{147}.$$

18. Perhatikan bahwa $3 \mid 48z$, ini berarti

$$3 \mid 16 \binom{m}{k} + 3 \binom{n}{k+1} \Rightarrow 3 \mid 16 \binom{m}{k}.$$

Karena $\text{FPB}(3,16) = 1$, ini berarti $3 \mid \binom{m}{k}$. Untuk $m \in \{1,2\}$, perhatikan bahwa

$$\binom{1}{1} = 1, \quad \binom{2}{1} = 2, \quad \binom{2}{2} = 1$$

sehingga tidak mungkin $3 \mid \binom{m}{k}$. Untuk $m = 3$, perhatikan bahwa

$$\binom{3}{1} = 3, \quad \binom{3}{2} = 3, \quad \binom{3}{3} = 1$$

sehingga $3 \mid \binom{3}{k}$ terpenuhi untuk $k = 1$ atau $k = 2$.

Kasus 1: $k = 1$

Ini berarti

$$48z = 16 \binom{3}{1} + 3 \binom{n}{2} = 16 \cdot 3 + 3 \cdot \frac{n(n-1)}{2} = 48 + \frac{3n(n-1)}{2}$$

sehingga

$$z = \frac{48 + \frac{3n(n-1)}{2}}{48} = 1 + \frac{n(n-1)}{32}.$$

Dari sini haruslah $32 \mid n(n-1)$. Karena $\text{FPB}(n, n-1) = 1$, ini berarti $32 \mid n$ atau $32 \mid n-1$. Agar z sekecil mungkin, ini berarti n sekecil mungkin dan terpenuhi untuk $n = 32$.

Jadi, diperoleh $z = 1 + \frac{32 \cdot 31}{32} = 1 + 31 = 32$.

Kasus 2: $k = 2$

Ini berarti

$$48z = 16 \binom{3}{2} + 3 \binom{n}{3} = 48 + 3 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 48 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2}$$

sehingga

$$z = \frac{1}{48} \left[48 + \frac{n(n-1)(n-2)}{2} \right] = 1 + \frac{n(n-1)(n-2)}{96}.$$

Ini berarti haruslah $96 \mid n(n-1)(n-2)$. Karena $96 = 32 \cdot 3$, ini berarti haruslah $32 \mid n(n-1)(n-2)$.

Jika n ganjil, ini berarti $n-2$ juga ganjil sehingga berlaku $\text{FPB}(n, 32) = \text{FPB}(n-2, 32) = 1$ sehingga haruslah $32 \mid n-1$. Jadi, nilai n terkecil adalah $n = 33$ sehingga didapatkan

$$z = 1 + \frac{33 \cdot 32 \cdot 31}{96} = 341 \quad (\text{lebih besar}).$$

Jika n genap, ini berarti $n-1$ ganjil sehingga dengan alasan yang sama, berlaku $32 \mid n(n-2)$. Misalkan $n = 2t$ di mana t bilangan asli, ini berarti

$$32 \mid 2t(2t-2) = 4t(t-1) \Rightarrow 8 \mid t(t-1).$$

Karena $\text{FPB}(t, t-1) = 1$, ini berarti $8 \mid t$ atau $8 \mid t-1$. Ini berarti nilai t terkecil saat $t = 8$ sehingga n terkecil $n = 16$, berarti

$$z = 1 + \frac{16 \cdot 15 \cdot 14}{96} = 36 \quad (\text{lebih besar}).$$

Jadi, dengan nilai m terkecil, diperoleh nilai z terkecil adalah $z = 32$.

19. Definisikan operator $\star$ sebagai

$$\begin{aligned} x \star y &= x + y - xy = -(xy - x - y) = -[(x-1)(y-1) - 1] \\ &= -(x-1)(y-1) + 1. \end{aligned}$$

Akan dibuktikan bahwa operator ini bersifat komutatif dan asosiatif.

- Untuk sifat komutatif sudah jelas, yaitu

$$x \star y = -(x-1)(y-1) + 1 = -(y-1)(x-1) + 1 = y \star x.$$

- Untuk sifat asosiatif, yaitu $(x \star y) \star z = x \star (y \star z)$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} (x \star y) \star z &= (-(x-1)(y-1) + 1) \star z \\ &= -(-(x-1)(y-1) + 1 - 1)(z-1) + 1 \\ &= (x-1)(y-1)(z-1) + 1, \\ x \star (y \star z) &= x \star (-(y-1)(z-1) + 1) \\ &= -(x-1)(-(y-1)(z-1) + 1 - 1) + 1 \\ &= (x-1)(y-1)(z-1) + 1 \end{aligned}$$

yang mana memenuhi.

Karena berlaku sifat komutatif dan asosiatif, artinya bagaimanapun urutan penghapusan-mengganti bilangan yang dilakukan oleh Andi akan menghasilkan bilangan yang sama.

Jadi, cukup pilih salah satu urutan operasi. Tulis $a_n = \frac{1}{n}$ untuk $n = -567, -566, \dots, -2, 2, \dots, 567$, dengan melakukan operasi satu per satu dari kiri ke kanan, diperoleh

$$\begin{aligned} a_{-567} \star a_{-566} \star \dots \star a_{567} &= [-(a_{-567}-1)(a_{-566}-1) + 1] \star a_{-565} \star a_{-564} \star \dots \star a_{567} \\ &= [(a_{-567}-1)(a_{-566}-1)(a_{-565}-1) + 1] \star a_{-564} \star \dots \star a_{567} \\ &= [-(a_{-567}-1)(a_{-566}-1)(a_{-565}-1)(a_{-564}-1) + 1] \star \dots \star a_{567} \\ &= -(a_{-567}-1)(a_{-566}-1) \cdots (a_{-2}-1) \cdot (a_2-1) \cdots (a_{566}-1)(a_{567}-1) + 1. \end{aligned}$$

Substitusikan, hasilnya akan diperoleh menjadi

$$-\left(-\frac{568}{567}\right)\left(-\frac{567}{566}\right)\left(-\frac{566}{565}\right)\cdots\left(-\frac{4}{3}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)\cdots\left(-\frac{565}{566}\right)\left(-\frac{566}{567}\right)+1.$$

Dengan coret-corek beberapa bilangan di pembilang-penyebut, diperoleh

$$-(-1)^{566} \cdot \frac{568}{2} \cdot (-1)^{566} \cdot \frac{1}{567} + 1 = -\frac{284}{567} + 1 = \frac{283}{567}.$$

Jadi, $a = 283$ dan $b = 567$ sehingga $a + b = 850$.

20. Misalkan $a = 6 + \sqrt{26}$ dan $b = 6 - \sqrt{26}$, ini berarti $a + b = 12$ dan $ab = 6^2 - (\sqrt{26})^2 = 10$. Untuk setiap bilangan asli n , didefinisikan $S_n = a^n + b^n$ di mana $S_1 = 12$. Akan dibuktikan bahwa S_n bilangan bulat untuk setiap bilangan asli n . Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} S_{n+2} &= a^{n+2} + b^{n+2} \\ &= (a+b)(a^{n+1} + b^{n+1}) - ab^{n+1} - a^{n+1}b \\ &= (a+b)(a^{n+1} + b^{n+1}) - ab(a^n + b^n) \\ &= 12S_{n+1} - 10S_n \end{aligned}$$

yang berarti $S_{n+2} = 12S_{n+1} - 10S_n$ untuk setiap bilangan asli n . Karena

$$S_2 = a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 12^2 - 2(10) = 144 - 20 = 124$$

bilangan bulat. Akibatnya, secara induktif, diperoleh S_n juga bilangan bulat untuk setiap bilangan asli n . Perhatikan bahwa $0 < 6 - \sqrt{26} < 1$ sehingga $0 < (6 - \sqrt{26})^n < 1$. Menggunakan sifat floor (lihat nomor 1 KL) dan S_n bilangan bulat, berlaku

$$\lfloor a^n \rfloor = \lfloor S_n - b^n \rfloor = S_n + \lfloor -b^n \rfloor = S_n - 1 \Rightarrow \lfloor a^{18} \rfloor = S_{18} - 1.$$

Ambil modulo 10, untuk setiap bilangan asli n berlaku

$$S_{n+2} = 12S_{n+1} - 10S_n \equiv 2S_{n+1} \pmod{10}.$$

Ini berarti berlaku

$$S_{18} \equiv 2S_{17} \equiv 2^2S_{16} \equiv \cdots \equiv 2^{16}S_2 \equiv 2^{16} \cdot 124 \equiv 2^{16} \cdot 4 \equiv 2^{18} \pmod{10}.$$

Perhatikan bahwa 2^n dalam modulo 10 berpola 2,4,8,6,2,4,8, ... setiap 4 suku. Karena 18 dibagi 4 bersisa 2, ini berarti $2^{18} \equiv 2^2 \equiv 4 \pmod{10}$. Jadi, $\lfloor a^{18} \rfloor \equiv 4 - 1 \equiv 3 \pmod{10}$ yang menunjukkan satu digit sebelah kiri koma a^{18} adalah 3.

Akan ditentukan satu digit sebelah kanan koma. Nyatakan $\sqrt{26} = \frac{x}{100}$, perhatikan bahwa $x^2 = 260.000$. Karena $509^2 = 259.801$ dan $510^2 = 260.100$ sehingga $509 < x < 510$. Ini berarti $5,09 < \sqrt{26} < 5,1$ sehingga $0,9 < 6 - \sqrt{26} < 0,91$. Ini berarti $0,9^{18} < (6 - \sqrt{26})^{18} < 0,91^{18}$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} 0,9^{18} &= 0,81^9 = 0,81 \cdot 0,81^8 = 0,81 \cdot 0,6561^4 > 0,81 \cdot 0,65^4 = 0,81 \cdot 0,4225^2 > 0,81 \cdot 0,42^2 \\ &= 0,81 \cdot 0,1764 > 0,81 \cdot 0,17 = 0,1377 \\ 0,91^{18} &= 0,8281^9 < 0,83^9 = 0,83 \cdot 0,83^8 = 0,83 \cdot 0,6889^4 < 0,83 \cdot 0,69^4 = 0,83 \cdot 0,4761^2 \\ &< 0,83 \cdot 0,48^2 = 0,83 \cdot 0,2304 < 0,83 \cdot 0,231 = 0,19173 < 0,1918 \end{aligned}$$

Ini berarti

$$0,1377 < 0,9^{18} < b^{18} < 0,91^{18} < 0,1918 \Rightarrow 0,1377 < b^{18} < 0,1918.$$

Satu angka di belakang koma dari a^{18} sama dengan angka satuan dari $\lfloor 10a^{18} \rfloor$, yaitu

$$\lfloor 10a^{18} \rfloor = \lfloor 10S_{18} - 10b^{18} \rfloor = 10S_{18} + \lfloor -10b^{18} \rfloor.$$

Karena $-1,918 < -10b^{18} < -1,377$, ini berarti $\lfloor 10a^{18} \rfloor = 10S_{18} - 2$. Karena $S_{18} \equiv 4 \pmod{10}$, ini berarti

$$10S_{18} = \cdots 40 - 2 = \cdots 38$$

sehingga angka tepat di belakang koma adalah 8. Jadi, jumlah yang diminta adalah $3 + 8 = \mathbf{11}$