

PEMBAHASAN OSP MATEMATIKA SMA TAHUN 2026

ISIAN SINGKAT.

1. Karena ada $11 = 2 \cdot 6 - 1$, maka 1 muncul tepat di lemparan ke-1,3,5,7,9,11. Untuk lemparan ke 2, 4, 6, 8, 10 bebas di ambil dari {2, 3, 4, 5, 6} dan ini sudah independent. Sehingga, banyaknya kemungkinan adalah $5^5 = 3125$.

2. Perhatikan bahwa,

$$17a = 489 - 14b \Rightarrow 3a \equiv 13 \pmod{14} \Rightarrow 15a \equiv 65 \pmod{14} \Rightarrow a \equiv 9 \pmod{14}$$

Tapi perhatikan dari $0 < 17a < 489 \Rightarrow 0 < a < 30$, sehingga solusi $a \equiv 9 \pmod{14}$ hanyalah $a = 9$ dan $a = 23$.

$$\text{Jika } a = 9 \Rightarrow 153 + 14b = 489 \Rightarrow b = 24 \text{ maka } (a, b) = (9, 24) \Rightarrow a + b = 33.$$

$$\text{Jika } a = 23 \Rightarrow 391 + 14b = 489 \Rightarrow b = 7 \text{ maka } (a, b) = (23, 7) \Rightarrow a + b = 30.$$

Maka, nilai $a + b$ terkecil yang mungkin adalah 30, dicapai saat $(a, b) = (23, 7)$.

3. **Solusi I:** Dari kondisi soal, $(x - r)(x - s) = x^2 + 12x + 1$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$, serta dari vieta diperoleh $p + q = -4$ dan $pq = 1$, maka

$$\begin{aligned} (p - r)(q - r)(p - s)(q - s) &= (p - r)(p - s)(q - r)(q - s) \\ &= (p^2 + 12p + 1)(q^2 + 12q + 1) \\ &= (p^2 + 4p + 1 + 8p)(q^2 + 8q + 1) \\ &= 8p \cdot 8q \\ &= 64pq \\ &= 64 \end{aligned}$$

Solusi II: Awalan sama dengan solusi I,

$$\begin{aligned} (p - r)(q - r)(p - s)(q - s) &= (p - r)(p - s)(q - r)(q - s) \\ &= (p^2 + 12p + 1)(q^2 + 12q + 1) \\ &= p^2q^2 + 12p^2q + 12pq^2 + p^2 + q^2 + 144pq + 12p + 12q + 1 \\ &= (pq)^2 + 12pq(p + q) + ((p + q)^2 - 2pq) + 144pq + 12(p + q) + 1 \\ &= 1 + 12(-4) + (16 - 2) + 144 - 48 + 1 \\ &= 1 - 48 + 14 + 144 - 48 + 1 \\ &= 64 \end{aligned}$$

Solusi III: Jelas $\{p, q\} = \{\sqrt{3} - 2, -\sqrt{3} - 2\}$ dan $\{r, s\} = \{\sqrt{35} - 6, -\sqrt{35} - 6\}$. Jelas urutan p, q dan r, s tidak pengaruh. Maka, WLOG saja

$$(p, q, r, s) = (\sqrt{3} - 2, -\sqrt{3} - 2, \sqrt{35} - 6, -\sqrt{35} - 6).$$

Sekarang kita hitung:

$$\begin{aligned} (p - r)(q - r)(p - s)(q - s) &= (p - r)(p - s)(q - r)(q - s) \\ &= (4 + \sqrt{3} - \sqrt{35})(4 + \sqrt{3} + \sqrt{35})(4 - \sqrt{3} - \sqrt{35})(4 - \sqrt{3} + \sqrt{35}) \\ &= ((4 + \sqrt{3})^2 - 35)((4 - \sqrt{3})^2 - 35) \\ &= (19 + 8\sqrt{3} - 35)(19 - 8\sqrt{3} - 35) \\ &= (8\sqrt{3} - 16)(-8\sqrt{3} - 16) \\ &= 64(\sqrt{3} - 2)(-\sqrt{3} - 2) \\ &= 64(4 - 3) \\ &= 64 \end{aligned}$$

4. Misal r adalah jari-jari lingkaran Γ_2 , dan d adalah jarak titik C ke garis AB . $[ABC]$ menyatakan luas segitiga ABC .

Misal sinar garis $\overline{AB}$ memotong Γ_2 di P . Karena P berada di dalam atau pada lingkaran Γ_1 , maka:

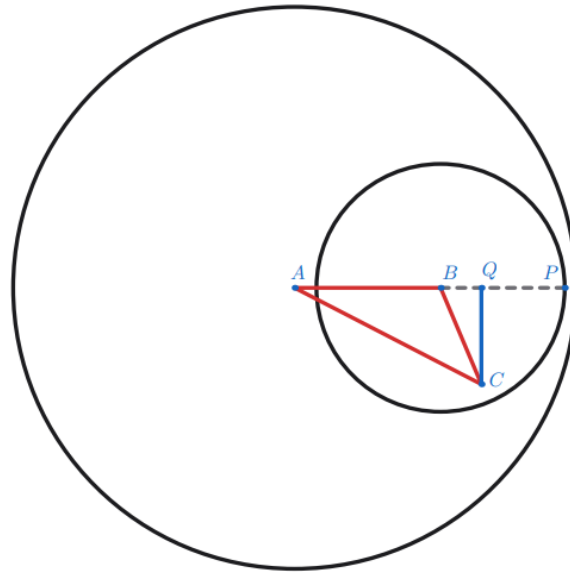
$$AP \leq 16 \Rightarrow AB + r \leq 16$$

Misal Q adalah proyeksi tegak lurus C ke AB , sehingga $d = CQ$. Akibatnya, $\triangle BQC$ siku-siku, dari pythagoras memenuhi $BQ^2 + CQ^2 = BC^2$, maka $CQ \leq BC$. Karena C berada di dalam atau pada lingkaran Γ_2 , maka $BC \leq r$. Menggabungkan,

$$CQ \leq BC \leq r$$

Perhatikan bahwa $[ABC] = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot d$. Akibatnya, menggunakan AM-GM,

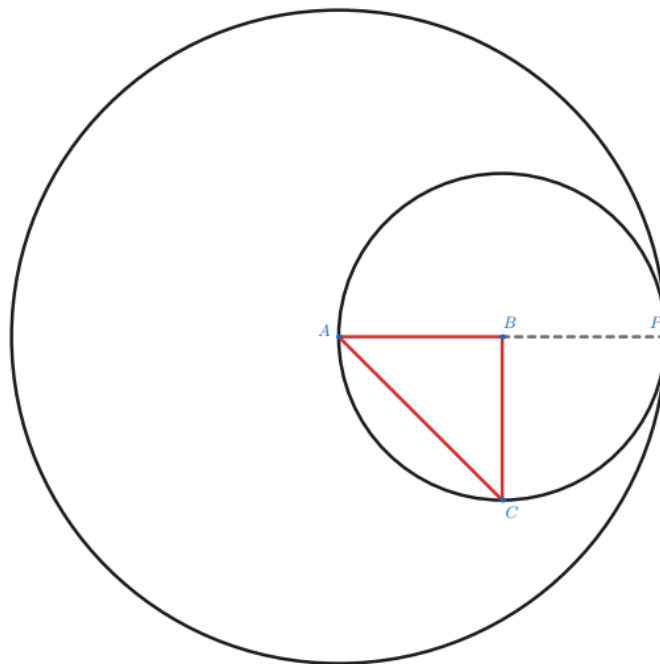
$$[ABC] = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CQ \leq \frac{1}{2} AB \cdot BC \leq \frac{1}{2} \cdot AB \cdot r \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{AB + r}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{16}{2}\right)^2 = 32$$



Kesamaan dapat diraih jika $CQ = BC$, $BC = r$, dan $AB = r = 8$.

Sehingga, $CQ = BC \Rightarrow \angle ABC = 90^\circ$, kemudian $AB = BC = r = 8$. Ini mengakibatkan ABC segitiga siku-siku samakaki, serta Γ_1, Γ_2 menyinggung internal.

Konstruksi luas 32 dapat dilihat di gambar berikut:



5. Karena $ab = 2^{10}5^{10}$, maka misalkan $(a,b) = (2^p5^r, 2^q5^s)$ di mana p,q,r,s bulat taknegatif dengan $p + q = r + s = 10$.

Kondisi $a|b^2$ ekuivalen $p \leq 2q$ dan $r \leq 2s$

Kondisi $b|a^2$ ekuivalen $q \leq 2p$ dan $s \leq 2r$

sehingga seluruh pasang (p, q) ataupun (r, s) yang memenuhi adalah $(4, 6)$, $(5, 5)$, $(6, 4)$. Karena pilihan (p, q) dan (r, s) independen, maka banyaknya pasang (a, b) yang memenuhi adalah $3 \times 3 = 9$ pasang.

6. Perhatikan bahwa $a + 7b > 0$, jika kita ingin nilai $(a + 7b)(9 - a^2 - b^2)$ maksimal, maka haruslah $9 - a^2 - b^2 > 0$. Misalkan $c = a^2 + b^2 < 9$, maka $9 - c > 0$.

Dari CS, diperoleh

$$(a + 7b)^2 \leq (12 + 72)(a^2 + b^2) \Rightarrow a + 7b \leq \sqrt{50c}.$$

Kemudian,

$$\begin{aligned} (a + 7b)(9 - a^2 - b^2) &\leq \sqrt{50c} \cdot (9 - c) \\ &= \sqrt{50c(9 - c)(9 - c)} \text{ karena } 9 - c > 0 \\ &= 5\sqrt{2c(9 - c)(9 - c)} \end{aligned}$$

Ingat karena $2c, 9 - c, 9 - c$ positif semua, maka dengan AM-GM diperoleh

$$(a + 7b)(9 - a^2 - b^2) \leq 5\sqrt{2c(9 - c)(9 - c)} \leq 5\sqrt{\left(\frac{2c + (9 - c) + (9 - c)}{3}\right)^3} = 5\sqrt{216} = \sqrt{5400}$$

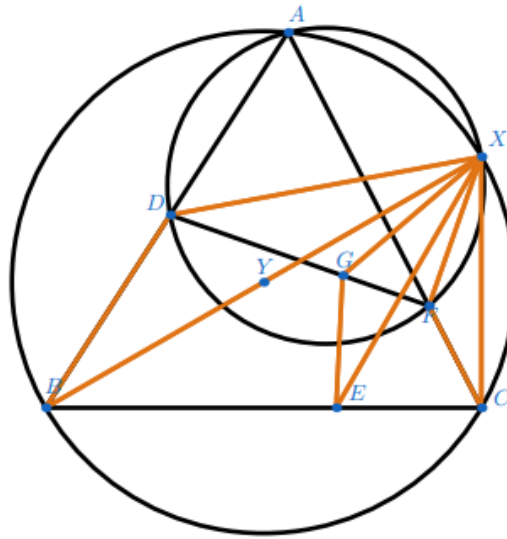
dengan kesamaan AM-GM jika $2c = 9 - c = 9 - c \Rightarrow c = 3$ dan kesamaan CS saat $a : b = 1 : 7$, sehingga ini dicapai saat

$$(a, b) = \left(\frac{\sqrt{6}}{10}, \frac{7\sqrt{6}}{10}\right).$$

Sehingga terbukti bahwa $M = \sqrt{5400}$ adalah nilai maksimal yang dapat dicapai, maka $M^2 = 5400$.

7. **Solusi I:** Ide besar soal ini adalah konsep spiral similarity.

Lemma penting: Jika $\triangle XY_1Z_1 \sim \triangle XY_2Z_2$, maka $\triangle XY_1Y_2 \sim \triangle XZ_1Z_2$.



Misalkan lingkaran luar ADF dan ABC memotong lagi di X . Dengan sifat spiral similarity, mudah dibuktikan $\triangle XDB \sim \triangle XFC$ dan $\triangle XDF \sim \triangle XBC$.

Karena $\triangle XDF \sim \triangle XBC$ dan $DG : GF = BE : EC$, maka $\triangle XGF \sim \triangle XEC$. Dari lemma, berlaku juga $\triangle XGE \sim \triangle XFC$. Sehingga, diperoleh

$$\triangle XDB \sim \triangle XGE \sim \triangle XFC.$$

Sekarang, lihat $\triangle CBX$. Akan dibuktikan ini segitiga dengan sudut 90° , 30° , 60° . Perhatikan bahwa

$$\frac{BX}{XC} = \frac{BD}{FC} = \frac{100\sqrt{3}}{50\sqrt{3}} = 2 \text{ dan } \angle BXC = \angle BAC = 60^\circ$$

Misal Y titik tengah BC . Maka, $BY = YX = XC$. Karena $\angle YXC = 60^\circ$ dan $YX = XC$, maka XYC segitiga sama sisi. Tapi ini mengimplikasikan bahwa $YB = YX = XC$, sehingga $\angle BCX = 90^\circ$. Maka, terbukti $\triangle CBX$ memiliki sudut 90° , 30° , 60° .

Perhatikan bahwa

$$\frac{BE}{EC} = 2 = \frac{BX}{XC}$$

sehingga, EX garis bagi sudut $\angle BXC$. Maka, $\angle EXC = 30^\circ$.

Karena XEC segitiga 30° , 60° , 90° , maka dari kesebangunan $\triangle XGE \sim \triangle XFC$,

$$\frac{EG}{FC} = \frac{XE}{XC} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{EG}{50\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow EG = 100.$$

Solusi II: Kita menggunakan koordinat Kartesius. Misalkan $A(0, 0)$ dan AC sumbu- x . Mudah didapat gradien garis AB adalah $\tan(60^\circ) = \sqrt{3}$, jadi misalkan lebih lanjut $B(a, \sqrt{3}a)$, $C(b, 0)$, dan $x = 50\sqrt{3}$. Perhatikan bahwa:

$$D(a - x, \sqrt{3}(a - x))$$

$$F(b - x, 0)$$

karena $BD = 2x$ dan $CF = x$. Lalu karena $BE : EC = DG : GF = 2 : 1$,

$$E = \frac{1}{3}B + \frac{2}{3}C = \left(\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b, \frac{\sqrt{3}}{3}a\right)$$

$$G = \frac{1}{3}D + \frac{2}{3}F = \left(\frac{1}{3}(a - x) + \frac{2}{3}(b - x), \frac{\sqrt{3}}{3}(a - x)\right) = \left(\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b - x, \frac{\sqrt{3}}{3}(a - x)\right)$$

Jadi:

$$GE = \left(\frac{x}{\sqrt{3}}, x\right)$$

Sehingga, peluang $GE = x\sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}x = 100$.

8. Untuk setiap n , misalkan $f(n)$ menyatakan banyaknya permutasi $a_1, a_2, \dots, a_n$ dari $1, 2, \dots, n$ yang memenuhi syarat soal. Misal i adalah indeks yang memenuhi $a_i = n$. Tinjau bahwa karena n bilangan terbesar, jika $i \in [1, n-2]$, maka $i+2 \in [3, n]$ memenuhi $a_i > a_{i+2}$, sehingga tidak memenuhi. Akibatnya $i \in \{n-1, n\}$.

Akan kita bagi kasus:

Kasus I: $a_n = n$

Jelas bahwa syarat soal sudah terpenuhi untuk indeks n , yakni $a_{n-2} < a_n$ dan $a_{n-3} < a_n$. Sehingga, tersisa permutasi $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ dari $1, 2, \dots, n-1$ yang memenuhi syarat yang sama, maka ada tepat $f(n-1)$ kemungkinan permutasi di kasus I.

Kasus II: $a_{n-1} = n$

Misal j adalah indeks yang memenuhi $a_j = n-1$, tinjau bahwa $n-1$ adalah bilangan terbesar kedua. Jika $j \in [1, n-4] \cup \{n-2\}$, maka $j+2 \in [3, n-2] \cup \{n\}$ memenuhi $a_j > a_{j+2}$, karena $a_{j+2} \neq n$, sehingga tidak memenuhi. Jika $j = n-3$, maka $a_{n-3} > a_n$, tidak memenuhi. Akibatnya, $j = n$, atau $a_n = n-1$. Sehingga, tersisa permutasi $a_1, a_2, \dots, a_{n-2}$ dari $1, 2, \dots, n-2$ yang memenuhi syarat yang sama, maka ada sebanyak $f(n-2)$ permutasi di kasus II.

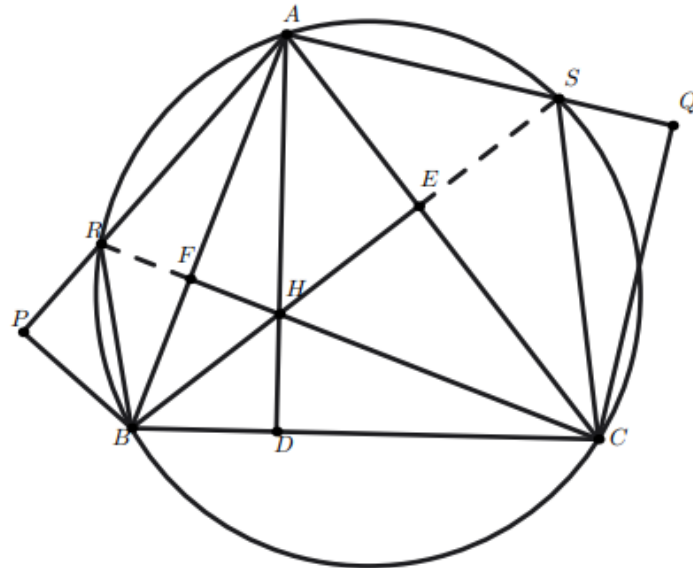
Akibatnya, kita peroleh bahwa $f(n) = f(n - 1) + f(n - 2)$. Mudah di cek bahwa $f(1) = 1$ dan $f(2) = 2$, maka:

- $f(3) = f(2) + f(1) = 3$
- $f(4) = f(3) + f(2) = 5$
- $f(5) = f(4) + f(3) = 8$
- $f(6) = f(5) + f(4) = 13$
- $f(7) = f(6) + f(5) = 21$
- $f(8) = f(7) + f(6) = 34$

Kita peroleh bahwa banyaknya permutasi yang memenuhi adalah 34.

URAIAN.

1. Solusi I:



Misal H merupakan titik tinggi segitiga ABC , lalu E dan F merupakan proyeksi B ke AC dan proyeksi C ke AB secara terurut.

Claim — C, H, F, R terletak pada satu garis. Analog, B, H, E, S juga segaris.

Bukti: Perhatikan bahwa karena $\angle AFC = \angle ADC = 90^\circ$, maka $AFDC$ siklis. Maka, $\angle HCB = \angle BAH$. Selanjutnya, karena AP merupakan refleksi AD terhadap AB , maka $\angle BAH = \angle BAR$. Terakhir, karena $RACB$ siklis, maka $\angle BAR = \angle RCB$.

Menggabungkan,

$$\angle HCB = \angle BAH = \angle BAR = \angle RCB$$

sehingga C, H, F, R segaris. Analog, B, H, E, S juga segaris. **Claim terbukti** $\square$

Dari claim, telah terbukti bahwa R, F, H segaris. Perhatikan bahwa karena RH tegak lurus AB , maka

$$\angle HRA = 90^\circ - \angle RAB = 90^\circ - \angle BAH = \angle RHA$$

sehingga $AR = AH$. Analog, didapat bahwa $AS = AH$. Maka,

$$AR = AH = AS$$

Terbukti bahwa $AR = AS$. Soal terbukti ■

Solusi II: Perhatikan bahwa

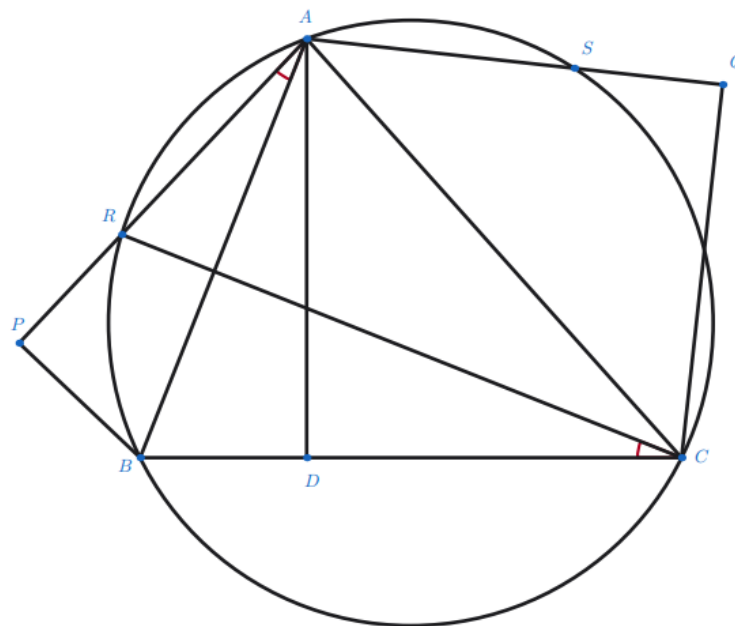
$$\begin{aligned}
 \angle ASR &= \angle ACR = \angle ACB - \angle BCR \\
 &= \angle C - \angle BAR \\
 &= \angle C - \angle BAD \\
 &= \angle C - (90^\circ - \angle DBA) \\
 &= \angle C + \angle B - 90^\circ \\
 &= 90^\circ - \angle A
 \end{aligned}$$

Sehingga, analog diperoleh juga

$$\angle ARS = 90^\circ - \angle A.$$

Sehingga terbukti bahwa

$$\angle ASR = 90^\circ - \angle A = \angle ARS \Rightarrow AR = AS.$$



Solusi III: Karena P dan Q refleksi D terhadap garis AB dan AC berturut-turut, maka jelas $\angle APB = \angle AQC = 90^\circ$. Selain itu:

$$\begin{aligned}
 \angle PRB &= 180^\circ - \angle ARB = \angle ACB = \angle ACD \\
 \angle QSC &= 180^\circ - \angle ASC = \angle ABC = \angle ABD
 \end{aligned}$$

jadi $\triangle PRB \sim \triangle DCA$ dan $\triangle QSC \sim \triangle DBA$. Dari kesebangunan tersebut didapat:

$$\frac{CD}{RP} = \frac{DA}{PB}$$

$$\frac{BD}{SQ} = \frac{DA}{QC}$$

Persamaan pertama dibagi dengan persamaan kedua menjadi:

$$\frac{CD}{RP} \times \frac{SQ}{BD} = \frac{QC}{PB} = \frac{DC}{DB} \Rightarrow \frac{SQ}{RP} = 1$$

karena $CQ = CD$ dan $BP = BD$ akibat P dan Q titik refleksi D terhadap AB dan AC berturut-turut. Didapat $SQ = RP$.

Terakhir, $AD = AP$ dan $AD = AQ$ akibat refleksi D sekali lagi, sehingga:

$$AP = AQ \Rightarrow AP - RP = AQ - SQ \Rightarrow AR = AS$$

Terbukti ■

2. Solusi I: kita klaim jawabannya adalah 9

Pertama, jelas bahwa $x, y > 0$, maka boleh membagi dengan x dan y . Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\sqrt{6x} \left(1 + \frac{1}{6x-y}\right) &= 2 \Leftrightarrow 6x \left(1 + \frac{1}{6x-y}\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{6x-y}\right)^2 = \frac{2}{3x} \\ \sqrt{2y} \left(1 - \frac{1}{6x-y}\right) &= 6 \Leftrightarrow 2y \left(1 - \frac{1}{6x-y}\right)^2 = 36 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{6x-y}\right)^2 = \frac{18}{y}\end{aligned}$$

kurangkan persamaan yang di kanan,

$$\begin{aligned}\frac{\frac{2}{3x} - \frac{18}{y}}{\frac{2y-54y}{3xy}} &= \frac{4}{6x-y} \\ 12xy - 324x^2 - 2y^2 + 54xy &= 12xy \\ 12xy - 324x^2 - 2y^2 + 54xy &= 12xy \\ -162x^2 - y^2 + 27xy &= 0 \\ -(y - 9x)(y - 18x) &= 0 \\ \left(\frac{y}{x} - 9\right) \left(\frac{y}{x} - 18\right) &= 0\end{aligned}$$

sehingga $\frac{y}{x} \in \{9, 18\}$. Maka terbukti $\frac{y}{x} \geq 9$.

Akan kita klaim nilai minimalnya adalah 9. Sehingga, cukup dibuktikan bahwa terdapat pasangan (x, y) ke sistem persamaan awal dengan $yx = 9$. Perhatikan bahwa $y = 9x$, maka

$$\sqrt{6x} \left(1 + \frac{1}{6x - 9x}\right) = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} \left(1 - \frac{1}{3x}\right) = \frac{2}{\sqrt{6}} \Leftrightarrow \sqrt{x} - \frac{1}{3\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{6}}{6}$$

$$\sqrt{18x} \left(1 - \frac{1}{6x - 9x}\right) = 6 \Leftrightarrow \sqrt{x} \left(1 + \frac{1}{3x}\right) = \frac{6}{\sqrt{18}} \Leftrightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{3\sqrt{x}} = \frac{6\sqrt{2}}{6}$$

sehingga ekuivalen dengan

$$\left(\sqrt{x}, \frac{1}{3\sqrt{x}}\right) = \left(\frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{6}, \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{6}\right)$$

dan ini ekuivalen dengan $\sqrt{x} = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{6}$. Dengan ini, diperoleh

$$(x, y) = \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{3}, 6 + 3\sqrt{3}\right)$$

memenuhi system persamaan di soal dengan $\frac{y}{x} = 9$.

Sehingga, nilai minimal $\frac{y}{x}$ adalah 9, dan diraih saat $(x, y) = \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{3}, 6 + 3\sqrt{3}\right)$.

Solusi II: Ekuivalen dengan solusi I, hanya pemisalan berbeda. Misal $a = \sqrt{6x}$ dan $b = \sqrt{2y}$. Perhatikan bahwa $6x - y = a^2 - \frac{1}{2}b^2$, jadi kedua persamaan menjadi:

$$1 + \frac{1}{a^2 - \frac{1}{2}b^2} = \frac{2}{a}$$

$$1 - \frac{1}{a^2 - \frac{1}{2}b^2} = \frac{6}{b}$$

Menambah dan mengurangi kedua persamaan menghasilkan:

$$2 = \frac{2}{a} + \frac{6}{b} \Rightarrow 1 = \frac{1}{a} + \frac{3}{b}$$

$$\frac{2}{a^2 - \frac{1}{2}b^2} = \frac{2}{a} - \frac{6}{b} \Rightarrow \frac{1}{a^2 - \frac{1}{2}b^2} = \frac{1}{a} - \frac{3}{b}$$

Lalu:

$$1 \times \frac{1}{a^2 - \frac{1}{2}b^2} = \left(\frac{1}{a} + \frac{3}{b}\right) \left(\frac{1}{a} - \frac{3}{b}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2 - \frac{1}{2}b^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{9}{b^2}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{1}{a^2 - \frac{1}{2}b^2} &= \frac{b^2 - 9a^2}{a^2 b^2} \\ \Rightarrow a^2 b^2 &= \left(a^2 - \frac{1}{2}b^2\right)(b^2 - 9a^2) \\ \Rightarrow a^2 b^2 &= \frac{11}{2}a^2 b^2 - 9a^4 - \frac{1}{2}b^4 \\ \Rightarrow 9a^4 + \frac{1}{2}b^4 - \frac{9}{2}a^2 b^2 &= 0 \\ \Rightarrow (3a^2 - b^2)(6a^2 - b^2) &= 0\end{aligned}$$

Jika $b^2 = 3a^2$, kita punya $2y = 3 \cdot 6x$ jadi $\frac{y}{x} = 9$.

Sedangkan jika $b^2 = 6a^2$, kita punya $2y = 6 \times 6x$. Jadi $\frac{y}{x} = 18$.

Kita klaim nilai minimum $\frac{y}{x}$ adalah 9. Mirip penyelesaian dengan solusi I, kita mengambil pasangan

$$(x, y) = \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{3}, 6 + 3\sqrt{3}\right)$$

memenuhi soal dan $\frac{y}{x} = 9$.

Jadi terbukti nilai minimum $\frac{y}{x}$ adalah 9.

Solusi III: Misalkan $6x - y = c$. Karena $\sqrt{6x}, \sqrt{2y} \geq 0$, Maka, diperoleh bahwa $1 + \frac{1}{c}, 1 - \frac{1}{c} > 0$, maka $c > 1$ atau $c < -1$.

$$\sqrt{6x} \left(1 + \frac{1}{c}\right) = 2 \Leftrightarrow \sqrt{6x} = \frac{2c}{c+1} \Leftrightarrow 6x = \frac{4c^2}{(c+1)^2} \Leftrightarrow x = \frac{2c^2}{3(c+1)^2} \quad (1)$$

$$\sqrt{2y} \left(1 - \frac{1}{c}\right) = 6 \Leftrightarrow \sqrt{2y} = \frac{6c}{c-1} \Leftrightarrow 2y = \frac{36^2}{(c-1)^2} \Leftrightarrow y = \frac{18c^2}{(c-1)^2} \quad (2)$$

Di mana pada persamaan dari 2 ke 3 ekuivalen karena $\frac{2c}{c+1}, \frac{6c}{c-1} > 0$.

Sehingga kita dapat x dan y dalam c . Masukkan kembali ke $6x - y = c$ berikut:

$$\begin{aligned}
 c &= 6x - y \\
 c &= \frac{4c^2}{(c+1)^2} - \frac{18c^2}{(c-1)^2} \\
 1 &= \frac{4c}{(c+1)^2} - \frac{18c}{(c-1)^2} \quad \text{karena } c \neq 0 \\
 1 &= \frac{4c(c-1)^2}{(c+1)^2(c-1)^2} - \frac{18c(c+1)^2}{(c+1)^2(c-1)^2} \\
 1 &= \frac{4c(c^2 - 2c + 1)}{c^4 - 2c^2 + 1} - \frac{18c(c^2 + 2c + 1)}{c^4 - 2c^2 + 1} \\
 1 &= \frac{4c^3 - 8c^2 + 4c}{c^4 - 2c^2 + 1} - \frac{18c^3 + 36c^2 + 18c}{c^4 - 2c^2 + 1} \\
 1 &= \frac{-14c^3 - 44c^2 - 14c}{c^4 - 2c^2 + 1} \\
 c^4 - 2c^2 + 1 &= -14c^3 - 44c^2 - 14c \\
 c^4 + 14c^3 + 42c^2 + 14c + 1 &= 0 \\
 (c^2 + 4c + 1)(c^2 + 10c + 1) &= 0 \\
 c^2 + 1 &= -4c \quad \text{atau} \quad c^2 + 1 = -10c
 \end{aligned}$$

Sekarang, kita akan menghitung nilai $\frac{y}{x}$. Perhatikan bahwa

$$\frac{y}{x} = \frac{\frac{18c^2}{(c-1)^2}}{\frac{2c^2}{3(c+1)^2}} = 27 \cdot \frac{(c+1)^2}{(c-1)^2} = 27 \cdot \frac{c^2 + 1 + 2c}{c^2 + 1 - 2c} \quad (3)$$

Ingat bahwa $c^2 + 1 = -4c$ atau $c^2 + 1 = -10c$. Dapat kita masukkan ke persamaan (3) bahwa

$$\frac{y}{x} \in \left\{ 27 \cdot \frac{-4c + 2c}{-4c - 2c}, 27 \cdot \frac{-10c + 2c}{-10c - 2c} \right\} = \{9, 18\}.$$

Sehingga diperoleh bahwa $\frac{y}{x} = 9$ atau $\frac{y}{x} = 18$. Sehingga, $\frac{y}{x} \geq 9$.

Nilai $\frac{y}{x} = 9$ dapat dicapai dengan nilai c yang mengakibatkan $c^2 + 4c + 1 = 0$.

Ingat bahwa $c < -1$ atau $c > 1$, sehingga $c = -2 - \sqrt{3}$. Karena seluruh persamaan (1) dan (2) sudah dua arah ketika $c > 1$ atau $c < -1$, maka terbukti bahwa

$$(x, y) = \left(\frac{2c^2}{3(c+1)^2}, \frac{18c^2}{(c-1)^2} \right)$$

saat $c = -2 - \sqrt{3}$ memenuhi $\frac{y}{x} = 9$ dan system persamaan di soal.

Sehingga terbukti nilai minimal yang mungkin dari $\frac{y}{x}$ adalah 9.

Solusi IV: Kita menggunakan cara melibatkan hyperbolic (split-complex) numbers. Misal j adalah unit bilangan hiperbolik, yaitu $j^2 = 1, j \neq \pm 1$. Kalikan persamaan kedua dengan $\frac{j}{\sqrt{2}}$:

$$\sqrt{6x} \left(1 + \frac{1}{6x - y} \right) = 2$$

$$\sqrt{y}j \left(1 - \frac{1}{6x - y} \right) = 3\sqrt{2}j$$

Jumlahkan:

$$(\sqrt{6x} + \sqrt{y}j) + \frac{\sqrt{6x} - \sqrt{y}j}{6x - y} = 2 + 3\sqrt{2}j$$

Definisikan bilangan hiperbolik $z = \sqrt{6x} + \sqrt{y}j$, jadi konjugatnya adalah $z^* = \sqrt{6x} - \sqrt{y}j$. Nilai dari normnya (yaitu, zz^*) akan sama dengan:

$$(\sqrt{6x})^2 - (\sqrt{y})^2 = 6x - y$$

Jadi persamaannya akan berubah menjadi:

$$z + \frac{z^*}{zz^*} = 2 + 3\sqrt{2}j \Rightarrow z^2 - (2 + 3\sqrt{2}j)z + 1 = 0$$

Dari rumus persamaan kuadrat:

$$z = \frac{(2 + 3\sqrt{2}j) \pm \sqrt{(2 + 3\sqrt{2}j)^2 - 4}}{2} = \frac{(2 + 3\sqrt{2}j) \pm \sqrt{18 + 12\sqrt{2}j}}{2}$$

Kita akan mencari akar kuadrat dari $18 + 12\sqrt{2}j$. Tinjau:

$$(u + vj)^2 = 18 + 12\sqrt{2}j \Rightarrow (u^2 + v^2) + 2uvj = 18 + 12\sqrt{2}j$$

Jadi $u^2 + v^2 = 18$ dan $uv = 6\sqrt{2}$, bisa didapat dengan mudah bahwa:

$$(u, v) = (\sqrt{6}, 2\sqrt{3}), (-\sqrt{6}, -2\sqrt{3}), (2\sqrt{3}, \sqrt{6}), (-2\sqrt{3}, -\sqrt{6})$$

Dengan nilai-nilai (u, v) di atas berturut-turut, kita mendapat nilai-nilai berikut untuk z (secara berturut-turut):

$$z = \frac{(2 + 3\sqrt{2}j) + (\sqrt{6} + 2\sqrt{3}j)}{2}$$

$$z = \frac{(2 + 3\sqrt{2}j) - (\sqrt{6} + 2\sqrt{3}j)}{2}$$

$$z = \frac{(2 + 3\sqrt{2}j) + (2\sqrt{3} + \sqrt{6}j)}{2}$$

$$z = \frac{(2 + 3\sqrt{2}j) - (2\sqrt{3} + \sqrt{6}j)}{2}$$

Perhatikan lagi bahwa $z = \sqrt{6x} + \sqrt{y}j$ harus memiliki bagian riil dan hiperbolik yang nonnegatif, jadi kita bisa membuang opsi kedua dan keempat untuk z . Untuk nilai pertama dan ketiga untuk z , kita langsung bisa menyamakan bagian riil dan hiperboliknya, sehingga didapat:

$$\sqrt{6x} = 1 + \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow x = \frac{5 + 2\sqrt{6}}{12}$$

dan

$$\sqrt{y} = \frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = \frac{15 + 6\sqrt{6}}{2}$$

atau,

$$\sqrt{6x} = 1 + \sqrt{3} \Rightarrow x = \frac{2 + \sqrt{3}}{3}$$

dan

$$\sqrt{y} = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} \Rightarrow y = 6 + 3\sqrt{3}$$

Kita bisa mendapat solusi-solusi eksplisit:

$$(x, y) = \left(\frac{5 + 2\sqrt{6}}{12}, \frac{15 + 6\sqrt{6}}{2} \right)$$

$$(x, y) = \left(\frac{2 + \sqrt{3}}{3}, 6 + 3\sqrt{3} \right)$$

Pasangan terakhir menghasilkan nilai $\frac{y}{x}$ yang terkecil, yaitu 9.

- Untuk setiap pasang (i, j) dengan $1 \leq i < j \leq 10$, karna $A_i \cup A_j$ bukan X , maka selalu ada elemen hilang, yaitu suatu elemen X yang tidak ada di $A_i \cup A_j$.

Ide besarnya adalah observasi seluruh elemen hilang dari seluruh $\binom{10}{2} = 45$ pasang (i, j) dengan $1 \leq i < j \leq 10$, dan membuktikan mereka beda semua.

Claim — Elemen hilang dari semua 45 pasang (i, j) berbeda semua

Bukti: Andaikan terdapat dua elemen hilang yang sama, misalkan pasang $(p, q) \neq (r, s)$ memiliki elemen hilang yang sama yaitu α . Maka α tidak muncul di $A_p \cup A_q$ dan $A_r \cup A_s$. Maka, α tidak ada di A_p, A_q, A_r, A_s .

Karena $(p, q) \neq (r, s)$ dan $p < q, r < s$, maka ada setidaknya 3 bilangan berbeda di p, q, r, s . Misal bilangannya $i < j < k$, tapi dari soal $A_i \cup A_j \cup A_k = X$. Padahal A_i, A_j, A_k tidak memiliki elemen α , maka $X = A_i \cup A_j \cup A_k$ tak memiliki α , kontradiksi.

Klaim terbukti $\square$

Maka, tiap elemen hilang dari $\binom{10}{2} = 45$ pasang (i, j) semuanya berbeda-beda, sehingga terbukti X memiliki setidaknya 45 elemen. Terbukti $\blacksquare$

4. Misalkan $v_p(n)$ menyatakan pangkat p dalam faktorisasi prima n .

Misal $X = \prod_{i=0}^{2026} \text{fpb}(a+i, b+i)$. Membuktikan X membagi $2026! \times (a-b)$ ekuivalen dengan membuktikan $v_p(X) \leq v_p(2026! \cdot (a-b))$ untuk setiap prima p .

Kita punya

$$v_p(X) = v_p\left(\prod_{i=0}^{2026} \text{fpb}(a+i, b+i)\right) = \sum_{i=b}^{2026+b} \min(v_p(a-b), v_p(i)).$$

- **Kasus I:** Apabila $p \nmid a-b$, maka $v_p(X) = 0$. Sehingga $v_p(X) \leq v_p(2026! \cdot (a-b))$.
- **Kasus II:** Apabila $p \mid a-b$ dan $p \geq 2027$, perhatikan bahwa ada maksimal 1 bilangan dalam $\{b, \dots, b+2026\}$ yang habis dibagi p . Maka,

$$v_p(X) = \sum_{b \leq i \leq b+2026, p \mid i} \min(v_p(a-b), v_p(i)) \leq v_p(a-b)$$

- **Kasus III:** $p \mid a-b$ dan $p \leq 2026$.

Kita pakai prinsip double counting:

Lemma

Bila kita punya n bilangan nonnegatif $a_1, \dots, a_n$, misal c_t banyaknya i di mana $a_i \geq t$. Maka

$$a_1 + \dots + a_n = c_1 + c_2 + \dots$$

Bukti Lemma. Keduanya sama dengan banyaknya pasangan bilangan bulat (i, j) di mana $1 \leq j \leq a_i$.

Pilih $k \in \{b, \dots, b + 2026\}$ dimana $v_p(k)$ terbesar. Kita dapat mengaplikasikan lemma pada barisan $v_p(b), \dots, v_p(k - 1), v_p(k + 1), \dots, v_p(b + 2026)$.

Untuk $t \leq v_p(k)$, kita dapat $c_t \leq \left\lfloor \frac{2027}{p^t} \right\rfloor - 1 \leq \left\lfloor \frac{2027}{p^t} \right\rfloor$, dan $c_t = 0$ untuk $t > v_p(k)$.

Dengan itu,

$$\begin{aligned} v_p(X) &\leq \min(v_p(a - b), v_p(k)) + (v_p(b) + \dots + v_p(k - 1) + v_p(k + 1) + \dots + v_p(b + 2026)) \\ &= \min(v_p(a - b), v_p(k)) + (c_1 + c_2 + \dots) \\ &\leq v_p(a - b) + \left(\left\lfloor \frac{2027}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2027}{p^2} \right\rfloor + \dots \right) \\ &= v_p(2027!(a - b)) = v_p(2026!(a - b)) \end{aligned}$$

mengingat bahwa 2027 adalah prima yang lebih dari p .

Maka $v_p(X) \leq v_p(2026!(a - b))$ untuk semua prima p , maka kita selesai.

Solusi II: Pertama, perhatikan bahwa ruas kiri bisa diubah, sehingga menjadi pernyataan

$$\gcd(a - b, b) \cdot \gcd(a - b, b + 1) \dots \gcd(a - b, b + 2026) \mid 2026! \cdot (a - b)$$

Kita ambil sembarang prima p . Untuk memudahkan penulisan, misalkan $v_p(a - b) = t$ dan $v_p(b), v_p(b + 1), \dots, v_p(b + 2026) = c_0, c_1, \dots, c_{2026}$. Kita akan membuktikan bahwa

$$\min(c_0, t) + \min(c_1, t) + \dots + \min(c_{2026}, t) \leq v_p(2026! \cdot (a - b)) = v_p(2026!) + t.$$

Bayangkan ruas kiri kita memiliki tanaman bambu dengan tinggi $c_0, c_1, \dots, c_{2026}$. Namun, karena kita hanya akan menghitung $\min(c_i, t)$, maka jika ada bagian yang lebih tinggi dari t , kita potong.

Kemudian, kita akan lihat hitung jumlah tinggi bambu yang tersisa. Kita akan hitung setiap ketinggian $1, 2, \dots, t$ ada berapa batang bambu yang ada di level tersebut.

(Ide double counting ini sama persis dengan Lemma di solusi I oleh YIA)

Misalkan B_i menyatakan banyaknya bambu yang tingginya minimal i .

Claim — $B_i \leq \left\lfloor \frac{2027}{p^i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2026}{p^i} \right\rfloor + 1$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, t$.

Bukti: Perhatikan bahwa B_i menghitung banyaknya nilai $c_0, c_1, \dots, c_{2026}$ yang setidaknya i . Maka, sama dengan menghitung banyaknya bilangan di $\{b, b+1, \dots, b+2026\}$ dengan ν_p setidaknya i . Sehingga, ini sama dengan menghitung banyaknya bilangan kelipatan p^i di $\{b, b+1, \dots, b+2026\}$. Karena ini adalah himpunan 2027 bilangan bulat berurutan, maka terbukti bahwa

$$B_i \leq \left\lceil \frac{2027}{p^i} \right\rceil = \left\lfloor \frac{2026}{p^i} \right\rfloor + 1.$$

Di mana kita tahu $\left\lceil \frac{a}{n} \right\rceil = \left\lfloor \frac{a-1}{n} \right\rfloor + 1$ untuk seluruh $a, n \in \mathbb{N}$. **Klaim terbukti.**

Sehingga, menggabungkan semua hasil, dengan legendre,

$$\begin{aligned} \nu_p(\text{LHS}) &= \min(c_0, t) + \min(c_1, t) + \dots + \min(c_{2026}, t) \\ &= \text{jumlah tinggi bambu} \\ &= B_1 + B_2 + \dots + B_t \\ &\leq \left(\left\lfloor \frac{2026}{p} \right\rfloor + 1 \right) + \left(\left\lfloor \frac{2026}{p^2} \right\rfloor + 1 \right) + \dots + \left(\left\lfloor \frac{2026}{p^t} \right\rfloor + 1 \right) \\ &= t + \left\lfloor \frac{2026}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2026}{p^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{2026}{p^t} \right\rfloor \\ &\leq t + \left\lfloor \frac{2026}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2026}{p^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{2026}{p^t} \right\rfloor + \dots \\ &\leq t + \nu_p(2026!) \\ &= \nu_p(\text{RHS}) \end{aligned}$$

benar untuk semua prima p . Maka, LHS | RHS terbukti.

Solusi III: Ubah 2026 menjadi sembarang bilangan asli n . Kita ingin membuktikan bahwa untuk suatu bilangan asli n , berlaku

$$\gcd(a, b) \times \gcd(a+1, b+1) \times \dots \times \gcd(a+n, b+n) \mid n! \times (a-b)$$

untuk setiap pasangan bilangan asli (a, b) dengan $a \neq b$.

Akan dilakukan induksi di n . Kita akan buktikan bahwa ini benar untuk $n = 1$, lalu membuktikan bahwa jika n benar, maka $n+1$ juga benar.

- Basis Induksi: Misalkan $n = 1$, maka kita akan membuktikan bahwa

$$\gcd(a, b) \times \gcd(a+1, b+1) \mid a-b$$

Ini benar karena

$$\gcd(a, b) \times \gcd(a+1, b+1) \mid a \times (b+1) = ab + a$$

$$\gcd(a, b) \times \gcd(a + 1, b + 1) \mid b \times (a + 1) = ab + b$$

sehingga

$$\gcd(a, b) \times \gcd(a + 1, b + 1) \mid (ab + a) - (ab + b) = a - b.$$

Basis induksi terbukti.

- Langkah Induksi: Misalkan untuk suatu $n \in \mathbb{N}$ terbukti untuk setiap bilangan asli (a, b) bahwa

$$\gcd(a, b) \times \gcd(a + 1, b + 1) \times \cdots \times \gcd(a + n, b + n) \mid n! \times (a - b)$$

Sekarang diberikan sembarang bilangan asli $a \neq b$. Akan dibuktikan bahwa

$$M = \gcd(a, b) \times \gcd(a + 1, b + 1) \times \cdots \times \gcd(a + n + 1, b + n + 1) \mid (n + 1)! \times (a - b)$$

Perhatikan bahwa dari asumsi induksi di pasangan (a, b) , diperoleh

$$\gcd(a, b) \times \gcd(a + 1, b + 1) \times \cdots \times \gcd(a + n, b + n) \mid n! \times (a - b).$$

Dengan mengalikan kedua ruas dengan $\gcd(a + n + 1, b + n + 1)$, diperoleh

$$M \mid \gcd(a + n + 1, b + n + 1) \times n! \times (a - b) \Rightarrow M \mid (a + n + 1) \times n! \times (a - b)$$

Perhatikan juga bahwa dari asumsi induksi di pasangan $(a + 1, b + 1)$,

$$\gcd(a + 1, b + 1) \times \gcd(a + 2, b + 2) \times \cdots \times \gcd(a + n + 1, b + n + 1) \mid n! \times (a - b)$$

dengan mengalikan kedua ruas dengan $\gcd(a, b)$, diperoleh

$$M \mid \gcd(a, b) \times n! \times (a - b) \Rightarrow M \mid a \times n! \times (a - b)$$

Sehingga

$$M \mid (a + n + 1) \times n! \times (a - b) - a \times n! \times (a - b) = (n + 1)! \times (a - b)$$

sehingga pernyataan juga benar untuk $n + 1$. Langkah induksi terbukti.

Sehingga pernyataan terbukti untuk seluruh bilangan asli n, a, b . Maka, juga benar untuk $n = 2026$, soal terbukti ■.