

PEMBAHASAN OSP MATEMATIKA SMP TAHUN 2026

- Misalkan bilangan tersebut adalah $\overline{abcba}$, maka $a - b + c - b + a = 2(a - b) + c \equiv 0 \pmod{11}$. Ada tepat 1 nilai c untuk setiap pasangan (a, b) dan ada $9 \times 10 = 90$ pasangan (a, b) yang mungkin. Perhatikan bahwa $0 \leq c \leq 9$, sedangkan $2(b - a) \equiv c \pmod{11}$. Akibatnya tidak ada nilai c untuk $2(b - a) \equiv 10 \pmod{11}$. Ini berarti untuk $b - a = 5$ atau -6 , tidak ada nilai c yang memenuhi.

Untuk $b - a = 5$, maka ada 4 pasang (a, b) yang memenuhi, yaitu $(1, 6), (2, 7), (3, 8), (4, 9)$. Untuk $b - a = -6$, maka ada 4 pasang (a, b) yang memenuhi, yaitu $(6, 0), (7, 1), (8, 2), (9, 3)$.

Setiap $\overline{abcba}$ yang habis dibagi 11 punya pasangan $\overline{decde}$, dengan $d = 9 - a, e = 9 - b$ yang juga habis dibagi 11. Hal ini juga berlaku untuk palindrom lainnya walaupun bukan kelipatan 11. Setiap pasangan jumlahnya sama. Jadi, jumlah semua bilangan polindrom kelipatan 11 yang memenuhi adalah

$$\left(\frac{90 - 4 - 4}{2}\right) (10001 + 99999) = 4510000$$

- Bilangan 2 digit kelipatan 17, yaitu 17, 34, 51, 68, 85. Bilangan 2 digit kelipatan 23, yaitu 23, 46, 69, 92. Perhatikan bahwa $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 2$, setiap 5 digit terjadi perulangan akibatnya 2, 3, 4, 6, 9 bisa menjadi digit satuan dari B.

Perhatikan bahwa $6 \rightarrow 8 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow 7$, meskipun pola ini tidak terjadi perulangan, karena diawali angka 6 yang termasuk dalam digit perulangan seperti diatas, akibatnya 8, 5, 1, 7 bisa menjadi digit satuan dari B.

Jadi, jumlah semua kemungkinan digit satuan dari B = $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$.

- Diketahui $(a + b) - (c + d)$ habis dibagi 12, maka $a + b \equiv c + d \pmod{12}$. Jika dari n anggota himpunan tersebut kita menemukan $\{a, b\}$ dan $\{c, d\}$ yang saling lepas dan memenuhi kongruensi diatas, maka kasus selesai. Jika kita hanya menemukan $\{a, b\}$ dan $\{c, d\}$ tidak saling lepas dan memenuhi kongruensi diatas, WLOG $a = c$ maka $b \equiv d \pmod{12}$. Agar memenuhi kasus di atas, maka dari $n - 2$ bilangan yang tersisa selain b dan d harus ada 2 bilangan berbeda, misalnya x dan y sehingga $x \equiv y \pmod{12}$. Dengan demikian, $\left(\frac{n-2}{2}\right) > 12$, diperoleh $n \geq 8$. Jadi, $n_{\text{terkecil}} = 8$.
- $P(\text{pasangan kompak} \geq 2) = 1 - P(\text{tidak ada pasangan kompak})$

$$P(\text{pasangan kompak} \geq 2) = 1 - \frac{\frac{40((10-1)(4-1))((10-2)(4-2))}{3!}}{\binom{40}{3}} = 1 - \frac{72}{247} = \frac{175}{247}$$

Diperoleh $m = 175$ dan $n = 247$. Jadi, $m + n = 422$.

5. Titik D adalah hasil pencerminan B(5, 3) terhadap garis $x = k$, maka koordinat titik D ($2k - 5, 3$). Untuk menghitung luas ACD kita gunakan rumus tali Sepatu (shoelace)

$$\text{Luas ACD} = \frac{1}{2} |x_A(y_C - y_D) + x_C(y_D - y_A) + x_D(y_A - y_C)| = 33$$

$$\frac{1}{2} |1(7 - 3) + 4(3 - 1) + ((2k - 5)(1 - 7))| = 33$$

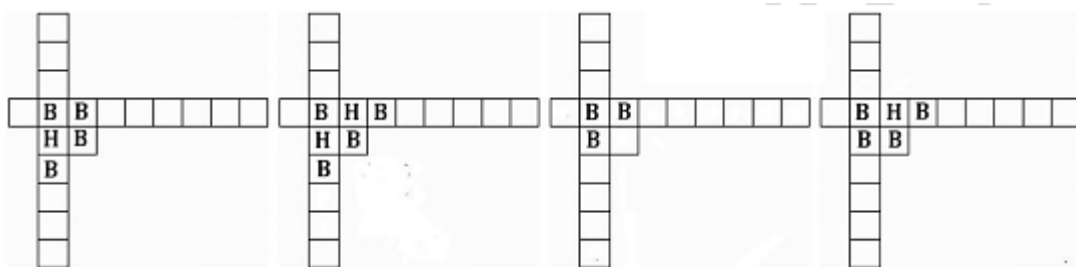
$$|42 - 12k| = 66$$

Diperoleh $42 - 12k = 66$ atau -66 , ada 2 nilai k yang memenuhi, yaitu -2 dan 9 . Jumlahnya $= 7$.

6. Misalkan $f(n)$ adalah banyaknya cara mewarnai n kotak dalam 1 baris atau 1 kolom (tanpa persimpangan) sesuai ketentuan soal. Sedangkan $f_b(n)$ dan $f_h(n)$ berturut-turut adalah $f(n)$ yang diawali biru dan hijau, maka $f(n) = f_b(n) + f_h(n) = f(n-1) + f_b(n-1) = f(n-1) + f(n-2)$, dengan $f(1) = 2, f(2) = 3$. Ini membentuk barisan Fibonacci 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34

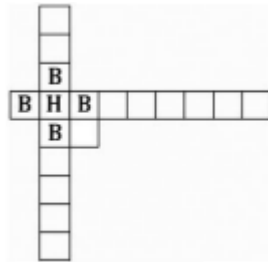
Selanjutnya, kita bagi 2 kasus, yaitu

- Jika kotak baris ke-4 (dari atas) dan kolom ke-2 (dari kiri) diwarnai biru (B), maka ada 4 kemungkinan seperti pada gambar berikut.



$$\text{Banyaknya pewarnaan} = f(1)f(3)f(3)f(6) + f(3)f(5) + f(4)f(6)f(1) + f(4)f(5) = 6100.$$

- Jika kotak baris ke-4 (dari atas) dan kolom ke-2 (dari kiri) diwarnai hijau (H), maka ada 4 kemungkinan seperti pada gambar berikut.



Banyaknya pewarnaan = $f(1)f(2)f(4)f(6) = 2 \times 3 \times 8 \times 21 = 1008$.

Jadi, Total ada $6100 + 1008 = 7108$ pewarnaan.

7. Perhatikan bahwa

$$\frac{f(2025)}{2025^k} + \frac{f(2026)}{2026^k} = \frac{(2025!)^{2025}}{2025^k} + \frac{(2026!)^{2026}}{2026^k} \text{ dan } 2025 = 2^4 \times 5^2, 2026 = 2 \times 1013$$

Agar penjumlahan pecahan di atas bukan bulat, maka

$$k_{\min} = 1 + \min(c_{2025}(f(2025)), v_{2026}(f(2026)))$$

$$k_{\min} = 1 + \min(2025v_{2025}(2025!), 2026v_{2026}(2026!)) = 1 + 4052 = 4053.$$

8. Diketahui N memiliki 2026 faktor positif, maka faktorisasi prima dari N adalah p^{2025} atau $p^{2012} \times q$. Agar N minimum maka haruslah $N = p^{1012} \times q$, dengan p dan q bilangan prima berbeda. Lalu pilih p dan q terkecil, dengan $p < q$, maka $p = 2$ dan $q = 3$. Selanjutnya kita cek $d_{1013} - d_{1012} = 3 \times 2^{505} - 2^{506} = 2^{505} = p^m$, diperoleh $p = 2$, $m = 505$. Jadi, $m - p = 503$.

9. Perhatikan bahwa: $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + y^2 + xy)$ dan $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$, sehingga

$$\frac{x^2 + y^2 + xy}{x + y} = \frac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2}$$

Jika kita ambil $x = \sqrt{2k + 1}$ dan $y = \sqrt{2k - 1}$, maka

$$\frac{4k + \sqrt{4k^2 - 1}}{\sqrt{2k + 1} + \sqrt{2k - 1}} = -\frac{(2k - 1)\sqrt{2k - 1}}{2} + \frac{(2k + 1)\sqrt{2k + 1}}{2}$$

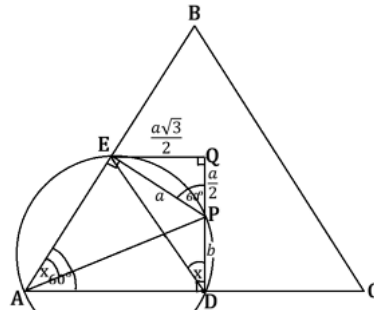
dengan $k = 1, 2, 3, \dots, n$.

$$T_n = -\frac{1\sqrt{1}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \dots + \frac{(2n + 1)\sqrt{2n + 1}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{(2n + 1)\sqrt{2n + 1}}{2}$$

Dengan demikian, $\frac{T_n + \frac{1}{2}}{\sqrt{2n + 1}} = \frac{2n + 1}{n} = n + \frac{1}{2}$. Karena $n < 2026$ dan n bilangan asli, maka

bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari $\frac{T_n + \frac{1}{2}}{\sqrt{2n + 1}}$ adalah 2025.

10. Perhatikan gambar berikut!

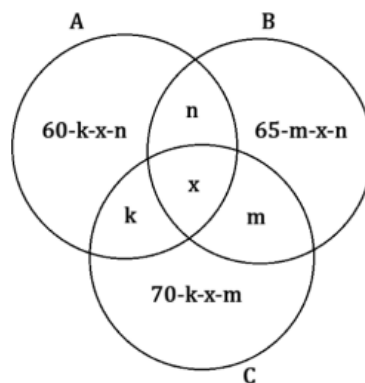


Misalkan P di dalam segitiga sama sisi ABC sehingga PD tegak lurus AC di D, PE tegak lurus AB di E, dan EQ tegak lurus PD di Q. Misalkan $PE = a$, $PD = b$. Jelas bahwa AEPD siklik. Oleh karena itu, $\angle QPD = \angle EAD = 60^\circ$ dan $\angle EAP = \angle EDQ = x^\circ$. Dengan perbandingan segitiga istimewa $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$, maka diperoleh $PQ = a/2$ dan $EQ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Dengan Pythagoras $\triangle EQD$, diperoleh $ED^2 = a^2 + b^2 + ab$.

Jelas bahwa $\triangle EAP \sim \triangle EDQ$, maka $PA^2 = \frac{EP^2}{EQ^2} (ED^2) = 43(a^2 + b^2 + ab)$. Dengan menerapkan rumus ini maka diperoleh:

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = \frac{4}{3} (3^2 + 5^2 + (3)(5) + 3^2 + 10^2 + (3)(10) + 10^2 + 5^2 + (10)(5)) = 484.$$

11. Berdasarkan keterangan pada soal, maka dapat disusun menjadi diagram venn berikut



Diketahui $k + m + n$ bilangan prima lebih dari 10 dan $195 - 2(k + m + n) - 3x$ bilangan kuadrat, serta $k + m + n + 2x = 75$. Sehingga diperoleh $45 + x$ harus bilangan kuadrat. Karena $x \leq 32$, maka nilai terbesar x adalah $8^2 - 45 = 19$. Selanjutnya kita cek $k + m + n = 75 - 2(29) = 37$ (prima).

12. Domain dari persamaan di atas adalah $4x + 5y > 0$ dan $4x - 5y > 0$, diperoleh $4x > 0$.

Jika kedua ruas dari persamaan pada soal dikuadratkan, maka $(4x + 5y)(4x - 5y) = 25$.

$$16x^2 - 25y^2 = 25 \Leftrightarrow 4x = 5\sqrt{|y|^2 + 1}$$

Perhatikan bahwa dari ketaksamaan CS, diperoleh

$$\left((\sqrt{24})^2 + 1^2\right)(|y|^2 + 1^2) \geq (\sqrt{24} \cdot 1 + |y| \cdot 1)^2 \Leftrightarrow 5\sqrt{|y|^2 + 1} - |y| \geq \sqrt{24}$$

Jadi, nilai minimum dari $\frac{1}{2}\sqrt{54}(4x - |y|) = \frac{1}{2}\sqrt{54}(5\sqrt{|y|^2 + 1} - |y|) = \frac{1}{2}\sqrt{54}(\sqrt{24}) = 18$.

13. Perhatikan bahwa dalam barisan aritmatika berlaku $U_4 = U_5 - b$, $U_6 = U_5 + b$, dan $U_3 = U_5 - 2b$.

$$U_4 \times U_6 = (U_5 - 1)^2 \Leftrightarrow U_5^2 - b^2 = U_5^2 - 2U_5 + 1,$$

$$\text{diperoleh } U_5 = \frac{b^2+1}{2}, U_3 = \frac{b^2-4b+1}{2}, \text{ dan } a = U_5 - 4b = \frac{b^2-8b+1}{2}.$$

Diketahui $a < 0$, maka $\frac{b^2-8b+1}{2} < 0 \Leftrightarrow (b-4)^2 \leq 15$. Karena a bilangan bulat, maka $b = 1, 3, 5, 7$. Sehingga diperoleh $U_3 = -1, -1, 3, 11$. Hasil kalinya = 33.

14. Misalkan $r_{\text{bola}} = 2k$, $r_{\text{tabung}} = 5k$, $t_{\text{tabung}} = 40k$. Diketahui $nV_{\text{bola}} \geq 80\%V_{\text{tabung}}$, maka $\frac{4n}{3}\pi(2k)^3 \geq \frac{80}{100}\pi(5k)^2(40k) \Leftrightarrow \frac{32n}{3} \geq 800 \Leftrightarrow n \geq 75$. Jadi, Nilai minimum $n = 75$.

15. Jika a dan b bukan bilangan bulat, tetapi $a + b$ bilangan bulat, maka $[a] + [b] = a + b - 1$.

$$\text{Dengan menerapkan teori di atas, maka } \left\lfloor \frac{31n}{2026} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{31(2026-n)}{2026} \right\rfloor = 31 - 1 = 30.$$

Dengan demikian,

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{31 \cdot 1}{2026} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{31 \cdot 2}{2026} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{31 \cdot 2024}{2026} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{31 \cdot 2025}{2026} \right\rfloor \\ = 30 \times \frac{2024}{2} + \left\lfloor \frac{31 \cdot 1013}{2026} \right\rfloor = 30375 \end{aligned}$$

16. Agar ada setidaknya sepasang bilangan berurutan yang berwarna sama, maka susunan 4 sisa bilangan berdasarkan warna adalah 2-2-0-0, 3-1-0-0, dan 2-1-1-0.

- Untuk susunan 2-2-0-0. Banyaknya cara menyusun 2-2-0-0 = $\frac{4!}{2!2!} = 6$ cara.

Banyaknya cara memilih bilangan = $2 \times 3 + 3 \times 2 - 2 \times 2 = 8$ cara.

- Untuk susunan 3-1-0-0. Banyaknya cara menyusun = $\frac{4!}{2!} = 12$ cara.

Banyaknya cara memilih bilangan = $1 \times 3 = 3$ cara.

- Untuk susunan 2-1-1-0. Banyaknya cara menyusun $= \frac{4!}{2!} = 12$ cara.

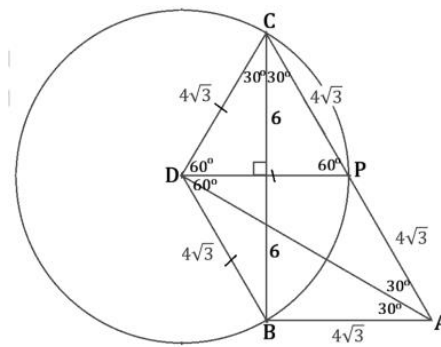
Banyaknya cara memilih bilangan = $2 \times 3 \times 3 = 18$ cara.

Peluang ada setidaknya sepasang bilangan berurutan yang berwarna sama adalah

$$\frac{6 \times 8 + 12 \times 3 + 12 \times 18}{\binom{12}{4}} = \frac{300}{495} = \frac{20}{33} = \frac{p}{q}$$

Diperoleh $p = 20$ dan $q = 33$. Jadi, $q - p = 13$.

17. Dengan pythagoras segitiga ABC, maka $AC^2 - AB^2 = BC^2 \Leftrightarrow (2AB)^2 - AB^2 = 12^2 \Leftrightarrow AB = 8\sqrt{3}$ dan $AC = 8\sqrt{3}$. Dengan demikian, $\angle BAC = 60^\circ$ dan $\angle BCA = 30^\circ$. Perhatikan gambar berikut!



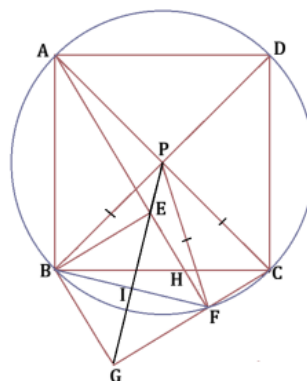
Misalkan garis n memotong lingkaran di P, maka $\angle DPC = 60^\circ$. Karena D pusat lingkaran maka $DP = DC = DB$, akibatnya $\triangle DPC$ sama sisi. Dengan kesimetrisan, $\triangle DPC$ juga sama sisi.

Luas daerah di dalam segitiga diluar lingkaran

$$= \text{luas ABC} - \text{luas juring DPB} = \frac{1}{2} (4\sqrt{3})(12) - \frac{60^\circ}{360^\circ} \pi (4\sqrt{3})^2 = 24\sqrt{3} - 8\pi = a - b\pi$$

Diperoleh $a = 24$ dan $b = 8$. Jadi, nilai $a + b = 32$.

18. Perhatikan gambar berikut!



Diketahui P pusat persegi $ABCD$, $PF = PC$, maka lingkaran luar $ABCD$ melalui F dengan diameter AC , akibatnya $CF \perp AF$ dan C, F, G segaris. Dengan demikian, $\triangle FHC \sim \triangle EBA$, akibatnya

$$\frac{HF}{HC} = \frac{EB}{AB} = \frac{9}{16}, \text{ diperoleh } HF = \frac{18}{35}\sqrt{14}.$$

Selanjutnya, dengan Pythagoras $\triangle FHC$, diperoleh $FC = 2\sqrt{2}$.

$$\text{Jelas bahwa } \triangle FHC \sim \triangle EHB, \text{ maka } \frac{EB}{EH} = \frac{FC}{HF} = \frac{5\sqrt{7}}{9} = \frac{EB + FC}{EB}$$

diperoleh $EB = \frac{81\sqrt{2} + 45\sqrt{14}}{47}$. Misalkan $I = EG \cap BF$, dengan kesimetrisan maka P, E, I, G kolinier, $PI \perp IF$, dan $FI = EI = 9a$.

Diperoleh $a = \frac{1}{9}EI = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{2}EB\sqrt{2}\right) = \frac{9+5\sqrt{7}}{47}$. Karena $\frac{PF}{FI} = \frac{AB}{BE}$, maka $\triangle IFP \sim \triangle EBA \sim \triangle FHC$.

$$\text{Jadi, } PI = 5a\sqrt{7} \text{ dan } PE = (5\sqrt{7} - 9)a = (5\sqrt{7} - 9)\left(\frac{9+5\sqrt{7}}{47}\right) = 2.$$

19. Misalkan peluang munculnya mata dadu 1 adalah a , maka $a + 2a + 3a + \dots + 6a = 1$, maka $a = \frac{1}{21}$. Dengan demikian, $P(x) = \frac{x}{21}$. Misalkan a dan b berturut-turut adalah mata dadu yang keluar pada lemparan yang ketiga untuk Rena dan Valen, maka Renang menang jika $a - b > 1$, seri jika $a - b = 1$, dan kalah jika $a - b < 1$.

Peluang Rena menang

$$= \frac{6}{21}\left(\frac{4}{21} + \frac{3}{21} + \frac{2}{21} + \frac{1}{21}\right) + \frac{5}{21}\left(\frac{3}{21} + \frac{2}{21} + \frac{1}{21}\right) + \frac{4}{21}\left(\frac{2}{21} + \frac{1}{21}\right) + \frac{3}{21}\left(\frac{1}{21}\right) = \frac{105}{441}$$

Peluang Valen menang = Peluang Rena kalah

$$= \frac{1}{21}\left(\frac{21}{21}\right) + \frac{2}{21}\left(\frac{20}{21}\right) + \frac{3}{21}\left(\frac{18}{21}\right) + \frac{4}{21}\left(\frac{15}{21}\right) + \frac{5}{21}\left(\frac{11}{21}\right) + \frac{6}{21}\left(\frac{6}{21}\right) = \frac{266}{441}$$

$$\frac{\text{Peluang Rena Menang}}{\text{Peluang Valen Menang}} = \frac{105}{441} = \frac{15}{38} = \frac{15}{n}, \text{ maka } n = 38.$$