

### Pojok Olimpiade

**Masalah 1.** Misalkan  $ABCD$  adalah sebuah papan persegi panjang dengan  $|AB| = 20, |BC| = 12$ . Papan tersebut dibagi menjadi  $20 \times 12$  persegi satuan. Misalkan  $r$  adalah sebuah bilangan bulat positif yang diberikan. Sebuah koin dapat dipindahkan dari satu persegi ke persegi lainnya jika dan hanya jika jarak antara pusat kedua persegi tersebut adalah  $\sqrt{r}$ . Tugasnya adalah menemukan urutan langkah untuk memindahkan koin dari persegi yang memiliki  $A$  sebagai titik sudutnya ke persegi yang memiliki  $B$  sebagai titik sudutnya.

- Tunjukkan bahwa tugas tersebut tidak dapat dilakukan jika  $r$  habis dibagi oleh 2 atau 3.
- Buktikan bahwa tugas tersebut dapat dilakukan jika  $r = 73$ .
- Bisakah tugas tersebut dilakukan ketika  $r = 97$ ?

**Masalah 2.** Misalkan  $P$  adalah sebuah titik di dalam segitiga  $ABC$  sedemikian sehingga

$$\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC.$$

Misalkan  $D, E$  berturut-turut adalah titik pusat lingkaran dalam (incentre) dari segitiga  $APB$  dan segitiga  $APC$ . Tunjukkan bahwa  $AP, BD$ , dan  $CE$  berpotongan di satu titik.

**Masalah 3.** Misalkan  $S = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  adalah himpunan bilangan bulat non-negatif. Temukan semua fungsi  $f$  yang terdefinisi pada  $S$  dan bernilai di  $S$  sedemikian sehingga

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n)$$

untuk semua  $m, n$  di dalam  $S$ .

**Masalah 4.** Bilangan bulat positif  $a$  dan  $b$  sedemikian sehingga bilangan  $15a + 16b$  dan  $16a - 15b$  keduanya merupakan kuadrat dari bilangan bulat positif. Tentukan nilai terkecil yang mungkin dari nilai minimum kedua bilangan kuadrat tersebut.

**Masalah 5.** Misalkan  $ABCDEF$  adalah sebuah segi enam cembung sedemikian sehingga  $AB$  sejajar dengan  $ED, BC$  sejajar dengan  $FE$ , dan  $CD$  sejajar dengan  $AF$ . Misalkan  $R_A, R_C, R_E$  berturut-turut menyatakan jari-jari lingkaran luar (circumradius) dari segitiga  $FAB, BCD, DEF$ , dan misalkan  $p$  menyatakan keliling dari segi enam tersebut. Buktikan bahwa

$$R_A + R_C + R_E \geq \frac{p}{2}$$

**Masalah 6.** Misalkan  $n, p, q$  adalah bilangan bulat positif dengan  $n > p + q$ . Misalkan  $x_0, x_1, \dots, x_n$  adalah bilangan-bilangan bulat yang memenuhi kondisi berikut:

- $x_0 = x_n = 0$ ;
- untuk setiap bilangan bulat  $i$  dengan  $1 \leq i \leq n$ , berlaku  $x_i - x_{i-1} = p$  atau  $x_i - x_{i-1} = -q$ .

Tunjukkan bahwa terdapat sepasang indeks  $(i, j)$  dengan  $i < j$  dan  $(i, j) \neq (0, n)$  sedemikian sehingga  $x_i = x_j$ .

### Teorema Ptolemy

(Vol 3 - No 1)

Jika empat titik dipilih dari sebuah bidang, peluang bahwa titik-titik tersebut segaris (kolinear) atau berada pada satu lingkaran (konsiklik) sangatlah kecil. Oleh karena itu, harus ada beberapa kondisi khusus agar hal ini terjadi. Kondisi seperti itu diberikan oleh teorema Ptolemy yang terkenal.

**Teorema Ptolemy.** Untuk titik-titik berbeda  $A, B, C, D$  pada sebuah bidang, kita memiliki  $AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD$ . Kesamaan terjadi jika dan hanya jika  $A, B, C, D$  segaris atau berada pada satu lingkaran dengan  $A, C$  memisahkan  $B, D$ .

Sebuah pembuktian sederhana menggunakan bilangan kompleks dapat diberikan sebagai berikut. Misalkan  $a, b, c, d$  adalah bilangan kompleks yang berturut-turut berkorespondensi dengan titik-titik  $A, B, C, D$ . Karena

$$(b - a)(d - c) + (d - a)(c - b) = (c - a)(d - b)$$

dengan mengambil nilai mutlak dan menerapkan ketaksamaan segitiga, kita mendapatkan

$$\begin{aligned} AB \cdot CD + AD \cdot BC &= |b - a||d - c| + |d - a||c - b| \\ &\geq |c - a||d - b| = AC \cdot BD. \end{aligned}$$

Dari ketaksamaan segitiga, kita mendapatkan kesamaan (tanda  $=$ ) jika dan hanya jika:

$$(b - a)(d - c) = t(d - a)(c - b) \text{ untuk suatu } t > 0$$

Dalam kasus tersebut,  $(d - a)/(b - a)$  adalah kelipatan positif dari  $(d - c)/(c - b)$ . Maka:

$$\begin{aligned} \arg\{(d - a)/(b - a)\} &= \arg\{(d - c)/(c - b)\} \end{aligned}$$

yaitu,  $\angle DAB = 180^\circ - \angle DCB$ . Ini berarti  $A, B, C, D$  adalah segaris atau berada pada satu lingkaran (konsiklik) dengan  $A, C$  memisahkan  $B, D$ .

Berikut adalah dua akibat (corollary) yang sederhana dan berguna dari Teorema Ptolemy:

**Akibat 1:** Untuk segi empat tali busur  $ABCD$  di mana  $\triangle ABC$  adalah segitiga sama sisi, maka berlaku  $BD = AD + CD$ .

**Akibat 2:** Untuk segi empat tali busur  $ABCD$  dengan  $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$ , maka berlaku  $BD = AC \sin \angle BAD$ .

Korollari (akibat) pertama berlaku karena  $AB = BC = CA$  dan dengan demikian

$$\begin{aligned} AB \cdot CD + AD \cdot BC &= AC \cdot BD \\ \Rightarrow CA \cdot CD + AD \cdot CA &= AC \cdot BD \\ \Rightarrow CD + AD &= BD. \end{aligned}$$

Korollari kedua juga berlaku dengan mudah karena

$$\begin{aligned} AC \sin \angle A &= AC \sin(\angle BAC + \angle DAC) \\ &= (BC \cdot AD + AB \cdot CD) / AC = BD \end{aligned}$$

dengan menggunakan rumus sudut majemuk. (Sebenarnya, korollari 2 benar jika  $A, B, C, D$  hanya bersifat konsiklik (terletak pada satu lingkaran), tidak harus dalam urutan tersebut, dan  $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$ , karena berdasarkan hukum sinus,  $BD / \sin \angle BAD$  sama dengan diameter  $AC$  dari lingkaran luar  $\triangle BAD$ .)

**Contoh 1.** Misalkan  $ABCDEF$  adalah segi enam cembung dengan  $AB = BC = CD, DE = EF = FA$  dan  $\angle BCD = \angle EFA = 60^\circ$ . Misalkan  $G$  dan  $H$  adalah dua titik di dalam segi enam sedemikian sehingga  $\angle AGB = \angle DHE = 120^\circ$ . Tunjukkan bahwa

$$AG + GB + GH + DH + HE \geq CF$$

**Solusi.** Misalkan  $X, Y$  adalah titik-titik di luar segi enam sedemikian sehingga  $\triangle ABX$  dan  $\triangle DEY$  adalah segitiga sama sisi. Maka  $ABCDEF$  kongruen dengan  $DBXAEY$  dan  $CF = XY$ . Sekarang:

$$\begin{aligned} \angle AXB + \angle AGB &= \angle DYE + \angle DHE \\ &= 180^\circ \end{aligned}$$

Dengan demikian  $AXBG$  dan  $DHEY$  adalah segiempat tali busur (siklik).

Berdasarkan korollari 1,  $XG = AG + GB$  dan  $HY = DH + HE$ . Jadi

$$AG + GB + GH + DH + HE = XG + GH + HY \geq XY = CF$$

**Contoh 2.** Misalkan  $P$  adalah sebuah titik di dalam  $\triangle ABC$  sedemikian sehingga  $\angle APB - \angle ACB = \angle APC - \angle ABC$ . Misalkan  $D, E$  masing-masing adalah titik pusat lingkaran dalam (incenter) dari  $\triangle APB$  dan  $\triangle APC$ . Tunjukkan bahwa  $AP, BD$ , dan  $CE$  berpotongan di satu titik.

*Solusi.* Secara ekivalen, kita harus menunjukkan bahwa garis bagi sudut  $BD$  dan  $CE$  masing-masing dari  $\angle ABP$  dan  $\angle ACP$ , berpotongan di titik yang sama pada  $AP$ . Misalkan titik-titik kaki garis tegak lurus dari  $P$  ke  $BC, CA, AB$  masing-masing adalah  $X, Y, Z$ . Maka  $AZPY, BXPZ, CYPX$  adalah segiempat tali busur. Sekarang

$$\begin{aligned} \angle APB - \angle ACB &= \angle YAP + \angle XBP \\ &= \angle YZP + \angle XZP \\ &= \angle YZX \end{aligned}$$

Demikian pula,  $\angle APC - \angle ABC = \angle XYZ$ . Jadi  $XZ = XY$ . Berdasarkan korollari 2,

$$BP \sin \angle B = XZ = XY = CP \sin \angle C$$

Maka  $BP/CP = \sin \angle C / \sin \angle B = AB/AC$ . Sehingga  $AB/BP = AC/CP$ . Berdasarkan teorema garis bagi sudut, hal ini menunjukkan bahwa  $BD$  dan  $CE$  bertemu di titik yang sama pada  $AP$ .

**Contoh 3.** Misalkan  $P$  adalah sebuah titik di dalam  $\triangle ABC$  dan misalkan  $d_a, d_b, d_c$  masing-masing adalah jarak dari  $P$  ke  $BC, CA, AB$ . Tunjukkan bahwa

$$PA + PB + PC \geq 2(d_a + d_b + d_c)$$

dengan kesamaan berlaku jika dan hanya jika  $\triangle ABC$  adalah segitiga sama sisi dan  $P$  adalah titik pusat lingkaran dalam (incenter).

*Solusi.* Misalkan  $X, Y, Z$  masing-masing adalah titik kaki garis tegak lurus dari  $P$  ke  $BC, CA, AB$ . Berdasarkan korollari 2 atau hukum sinus dan hukum kosinus,

$$\begin{aligned} P \sin \angle A &= YZ \\ &= \sqrt{d_b^2 + d_c^2 - 2d_b d_c \cos(180^\circ - \angle A)}. \end{aligned}$$

Karena  $180^\circ - \angle A = \angle B + \angle C$ , dengan menjabarkan dan mengelompokkan kembali, kita mendapatkan

$$\begin{aligned} P \sin \angle A &= \{(d_b \sin \angle C + d_c \sin \angle B)^2 \\ &\quad + (d_b \sin \angle C + d_c \sin \angle B)^2\}^{1/2} \\ &\geq d_b \sin \angle C + d_c \sin \angle B. \end{aligned}$$

Dengan menggunakan pertidaksamaan seperti yang terakhir dan fakta bahwa  $x + 1/x \geq 2$ , kita memperoleh

$$\begin{aligned} PA + PB + PC &\geq \sum \frac{d_b \sin \angle C + d_c \sin \angle B}{\sin \angle A} \\ &= \sum d_a \left( \frac{\sin \angle B}{\sin \angle C} + \frac{\sin \angle C}{\sin \angle B} \right) \\ &\geq 2(d_a + d_b + d_c). \end{aligned}$$

di mana persamaan tengah diperoleh dengan menyusun ulang suku-sukunya. Akhirnya, kesamaan terjadi jika dan hanya jika  $\angle A = \angle B = \angle C$  dan  $d_a = d_b = d_c$ , yaitu,  $\triangle ABC$  adalah segitiga sama sisi dan  $P$  adalah titik pusat lingkaran dalam (incenter).

**Contoh 4.** Misalkan  $ABC$  adalah sebuah segitiga dan  $P$  adalah titik interior (di dalam)  $ABC$ . Tunjukkan bahwa setidaknya satu dari sudut-sudut  $\angle PAB, \angle PBC, \angle PCA$  kurang dari atau sama dengan  $30^\circ$ .

*Solusi.* Andaikan tidak ada satu pun dari ketiga sudut tersebut yang kurang dari atau sama dengan  $30^\circ$ . Jika salah satu dari mereka setidaknya  $150^\circ$ , maka dua lainnya akan berjumlah paling banyak  $30^\circ$ , sebuah kontradiksi. Jadi, kita dapat mengasumsikan ketiga sudut tersebut lebih besar dari  $30^\circ$  dan kurang dari  $150^\circ$ . Misalkan  $d_a$  adalah jarak dari  $P$  ke  $BC$ , maka

$$\begin{aligned} 2d_a &= 2PB \sin \angle PBC \\ &> (2 \sin 30^\circ)PB = PB. \end{aligned}$$

Tiga pertidaksamaan serupa tersebut jika dijumlahkan akan menghasilkan  $2(d_a + d_b + d_c) > PA + PB + PC$ , yang mengontradiksi pertidaksamaan Erdős-Mordell. Maka, salah satu dari ketiga sudut tersebut paling banyak  $30^\circ$ .

### Pojok Soal

**Soal 41.** Temukan semua bilangan bulat non-negatif  $x, y$  yang memenuhi  $(xy - 7)^2 = x^2 + y^2$ .

**Soal 42.** Apa saja nilai yang mungkin dari  $\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$  untuk  $x$  dalam seluruh rentang bilangan riil?

**Soal 43.** Berapa banyak himpunan bagian (subset) dengan 3 elemen dari himpunan  $X = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$  sedemikian sehingga hasil kali dari 3 bilangan dalam himpunan bagian tersebut habis dibagi 4?

**Soal 44.** Untuk segitiga lancip  $ABC$ , misalkan  $H$  adalah kaki garis tegak lurus dari  $A$  ke  $BC$ . Misalkan  $M, N$  masing-masing adalah kaki garis tegak lurus dari  $H$  ke  $AB$  dan  $AC$ . Definisikan  $L_A$  sebagai garis yang melalui  $A$  dan tegak lurus terhadap  $MN$ , dan dengan cara yang sama definisikan  $L_B$  dan  $L_C$ . Tunjukkan bahwa  $L_A, L_B$  dan  $L_C$  melalui satu titik persekutuan  $O$ .

**Soal 45.** Misalkan  $a, b, c > 0$  dan  $abc = 1$ . Tunjukkan bahwa

$$\frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} + \frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} + \frac{ca}{c^5 + a^5 + ca} \leq 1$$

### Solusi

**Soal 36.** Misalkan  $a, b$ , dan  $c$  adalah bilangan positif sedemikian sehingga  $a^2 + b^2 - ab = c^2$ . Buktikan bahwa  $(a - c)(b - c) \leq 0$ .

*Solusi.* Tanpa mengurangi keumuman, kita dapat berasumsi bahwa  $a \leq b$ . Karena  $a, b > 0$ , maka

$$\begin{aligned} a &\leq \sqrt{a^2 + b(b - a)} \\ &= c = \sqrt{b^2 - a(b - a)} \leq b. \end{aligned}$$

Oleh karena itu  $(a - c)(b - c) \leq 0$ .

**Soal 37.** Dua lingkaran yang tidak berpotongan  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$  masing-masing memiliki pusat  $O_1$  dan  $O_2$ .  $A_1$  dan  $A_2$  berturut-turut adalah titik pada  $\lambda_1$  dan  $\lambda_2$ , sedemikian sehingga  $A_1A_2$  adalah garis singgung persekutuan luar dari

kedua lingkaran tersebut. Ruas garis  $O_1O_2$  memotong  $\lambda_1$  di  $B_1$  dan memotong  $\lambda_2$  di  $B_2$ . Garis  $A_1B_1$  dan  $A_2B_2$  berpotongan di  $C$ , dan garis yang melalui  $C$  serta tegak lurus terhadap  $B_1B_2$  memotong  $A_1A_2$  di  $D$ . Buktikan bahwa  $D$  adalah titik tengah dari  $A_1A_2$ .

**Solusi:** Kita punya  $\angle DA_1C = 90^\circ - \angle O_1A_1B_1 = 90^\circ - \angle O_1B_1A_1 = 90^\circ - \angle CB_1O_2 = \angle A_1CD$ , yang berarti  $A_1D = CD$ . Begitu pula,  $A_2D = CD$ . Jadi  $A_1D = A_2D$ .

**Soal 38.** Buktikan bahwa dari barisan 1996 bilangan real mana pun, kita dapat memilih satu blok suku-suku berurutan yang jumlahnya berbeda paling banyak 0,001 dari suatu bilangan bulat.

**Solusi:** Misalkan bilangan-bilangan tersebut adalah  $x_1, x_2, \dots, x_{1996}$  dan misalkan  $s_i = x_1 + x_2 + \dots + x_i$  untuk  $i = 1, 2, \dots, 1996$ . Definisikan  $\{x\} = x - [x]$ , di mana  $[x]$  adalah bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan  $x$ . Perhatikan 1995 interval  $\left[0, \frac{1}{1995}\right), \left[\frac{1}{1995}, \frac{2}{1995}\right), \dots, \left[\frac{1994}{1995}, 1\right)$  dan 1996 bilangan  $\{s_1\}, \{s_2\}, \dots, \{s_{1996}\}$ . Berdasarkan prinsip sarang merpati (pigeon-hole principle), terdapat pasangan  $s_i, s_j$  dengan  $\{s_i\}, \{s_j\}$  berada dalam interval yang sama. Dengan mengeliminasi suku-suku yang sama pada  $s_i, s_j$ , kita mendapatkan blok suku-suku berurutan yang jumlahnya berbeda dari suatu bilangan bulat paling banyak sebesar  $\frac{1}{1995} < 0.001$ .

**Soal 39.** Delapan siswa mengikuti sebuah kompetisi dengan delapan soal.

- Setiap soal berhasil diselesaikan oleh 5 siswa. Buktikan bahwa ada dua siswa yang jika digabungkan, mereka berdua berhasil menyelesaikan kedelapan soal tersebut.
- Buktikan bahwa hal ini tidak selalu terjadi jika angka 5 diganti dengan angka 4. (Cukup berikan satu contoh penyangkal).

**Solusi:**

a) Jika sepasang siswa tidak berhasil menyelesaikan seluruh 8 soal secara bersama-sama, maka setidaknya ada 1 soal yang keduanya gagal kerjakan. Di antara 8 siswa, terdapat 28 kemungkinan pasangan. Namun, untuk setiap soal, hanya ada 3 siswa (yang menghasilkan 3 pasangan) yang gagal mengerjakannya. Untuk 8 soal, maksimal terdapat 24 pasangan yang gagal mengerjakan setidaknya 1 soal. Karena  $28 > 24$ , berdasarkan prinsip sarang merpati, terdapat satu pasangan yang bersama-sama menyelesaikan seluruh 8 soal. (Faktanya, ada setidaknya  $28 - 24 = 4$  pasangan seperti itu!)

b) Berikut adalah sebuah contoh penyangkal (counter example): mahasiswa 1, 2 menyelesaikan soal 1, 2, 3, 4; mahasiswa 3, 4 menyelesaikan soal 3, 4, 5, 6; mahasiswa 5, 6 menyelesaikan soal 1, 6, 7, 8; mahasiswa 7, 8 menyelesaikan soal 2, 5, 7, 8.

**Soal 40.**  $ABC$  adalah sebuah segitiga sama sisi. Untuk bilangan bulat positif  $n \geq 2$ ,  $D$  adalah titik pada  $AB$  sedemikian sehingga  $AD = \frac{1}{n}AB$ .

$P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$  adalah titik-titik pada  $BC$  yang membaginya menjadi  $n$  segmen yang sama panjang. Buktikan bahwa  $\angle AP_1D + \angle AP_2D + \dots + \angle AP_{n-1}D = 30^\circ$ .

[Petunjuk: Pertimbangkan  $Q_i$  sedemikian sehingga  $ADP_iQ_i$  adalah sebuah jajaran genjang.]

**Solusi:** Misalkan  $P_0$  adalah  $B$  dan  $P_n$  adalah  $C$ . Misalkan  $Q_0$  adalah titik pada  $AB$  sedemikian sehingga  $Q_0B = \frac{1}{n}AB$  dan  $Q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) sedemikian sehingga  $ADP_iQ_i$  membentuk jajaran genjang. Maka  $\angle AP_iD = \angle Q_iAP_i$ . Sekarang  $P_iQ_i$  sejajar dengan dan memiliki panjang yang sama dengan  $AD$  dan  $P_0Q_0$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ). Selain itu,  $P_iQ_i = P_iP_{i+1}$  ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ). Ini menyiratkan bahwa  $\Delta P_iQ_iP_{i+1}$  adalah segitiga sama sisi ( $i = 0, 1, \dots, n-1$ ). Berdasarkan simetri terhadap garis bagi tegak lurus (perpendicular bisector)  $BC$ ,

kita mendapatkan  $\angle Q_iAP_i = \angle Q_{n-i-1}AP_{n-1}$ . Dengan demikian,

$$\begin{aligned} & (\angle Q_1AP_1 + \angle Q_{n-2}AP_{n-1}) \\ & + (\angle Q_2AP_2 + \angle Q_{n-3}AP_{n-2}) \\ & + \dots + (\angle Q_{n-1}AP_{n-1} + \angle Q_0AP_0) \\ & = \angle BAC \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} & \angle AP_1D + \angle AP_2D + \dots + \angle AP_{n-1}D \\ & = \frac{1}{2} \angle BAC = 30^\circ. \end{aligned}$$