JELAJAH NALAR

JELAJAH NALAR
Analisa Isi Kepala Tanpa Suara

Pojok Olimpiade

Masalah 1. Misalkan F adalah himpunan dari semua n-tupel $(A_1, A_2, \dots, A_n)$ di mana setiap A_i, i = 1, 2, ..., n merupakan himpunan bagian dari (1, 2, ..., 1998). Misalkan $|A|$ menyatakan jumlah elemen dari himpunan A. Carilah nilai dari

$$\sum_{(A_1, A_2, \dots, A_n)} |A_1 \cup A_2 \cup \dots A_n|$$

Masalah 2. Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan bulat positif a dan b, nilai $(36a + b)(a + 36b)$ tidak dapat berupa bilangan pangkat 2.

Masalah 3. Misalkan a, b, c adalah bilangan real positif. Buktikan bahwa

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)\left(1 + \frac{b}{c}\right)\left(1 + \frac{c}{a}\right) \geq 2\left(1 + \frac{a + b + c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$$

Masalah 4. Misalkan ABC adalah sebuah segitiga dan D adalah titik kaki garis tinggi dari A. Misalkan E dan F berada pada garis yang melewati D sedemikian rupa sehingga AE tegak lurus dengan BE, AF tegak lurus dengan CF, serta E dan F berbeda dari D. Misalkan M dan N masing-masing adalah titik tengah dari segmen garis BC dan EF. Buktikan bahwa AN tegak lurus dengan NM.

Masalah 5. Tentukan bilangan bulat n terbesar yang memiliki sifat bahwa n habis dibagi oleh semua bilangan bulat positif yang nilainya kurang dari $\sqrt[3]{n}$.

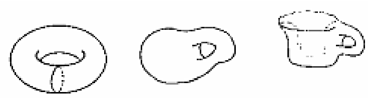
Mengenal Topologi

(Vol 4 – No 4)

Dalam topologi, terdapat banyak abstraksi dari ide-ide geometris, seperti kontinuitas (kesinambungan) dan kedekatan. Kata 'Topologi' berasal dari kata Yunani topos (tempat) dan logos (wacana). Bidang ini diperkenalkan pada tahun 1847 oleh Johann Benedict Listing (1808-1882), murid dari Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Pada masa-masa awal, orang menyebutnya analysis situs, yaitu analisis posisi."Geometri lembaran karet" adalah istilah deskriptif yang cocok untuk menggambarkannya. (Bayangkan sifat-sifat objek yang digambar pada selembar karet tidak akan berubah ketika lembaran tersebut distorsi atau diregangkan). Oleh karena itu, para topolog tidak dapat membedakan segitiga dari persegi panjang, dan mereka bahkan menganggap bola basket sama dengan bola pingpong.

Topolog menganggap dua objek adalah sama (homeomorfik) jika objek yang satu dapat dideformasi secara kontinu hingga tampak seperti objek lainnya. Deformasi kontinu meliputi pembengkokan, peregangan, dan pemampatan tanpa merekatkan atau merobek titik-titik pada objek.

Contoh 1: Berikut ini adalah objek yang saling homeomorfik (Lihat Gambar 1).



Gambar 1

Contoh 2: Berikut ini adalah objek yang tidak homeomorfik (Lihat Gambar 2).

Gambar 2

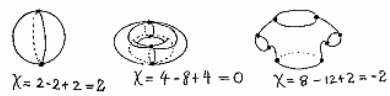
Dalam praktiknya, pembuktian deformasi kontinu tidak selalu mudah dilakukan. Faktanya, ada metode sederhana untuk melihat dua objek tidak homeomorfik, yaitu dengan mencari karakteristik Poincaré-Euler mereka (singkatnya, bilangan Euler). Untuk melihat apa itu bilangan Euler, kita perlu memperkenalkan konsep subdivisi pada suatu n-manifold (di sini ditentukan $n \leq 2$). (Sebuah n-manifold secara kasar adalah objek n-dimensi di mana setiap titik memiliki lingkungan yang homeomorfik dengan interval terbuka jika $n = 1$, atau piringan terbuka jika $n = 2$. Sebagai contoh, lingkaran adalah 1-manifold dan bola/sferis adalah 2-manifold).

Pada dasarnya, kita memulai dengan sebuah n-manifold dan membaginya (subdivisi) menjadi sejumlah titik sudut (vertices - v), tepi (edges - e), dan sisi (faces - f) yang berhingga. Titik sudut adalah sebuah titik. Tepi adalah kurva dengan ujung-ujung berupa titik sudut.

Gambar 3

Sisi adalah wilayah yang dibatasi oleh tepi-tepi. (Lihat Gambar 3).

Bilangan Euler (χ) dari 1-manifold yang kompak (secara longgar berarti terbatas) didefinisikan sebagai jumlah titik sudut (v) dikurangi jumlah tepi (e) dan untuk 2-manifold (permukaan) kompak, didefinisikan sebagai jumlah titik sudut (v) dikurangi jumlah tepi (e) ditambah jumlah sisi (f) (lihat Gambar 4).



Gambar 4

Teorema 1. Jika dua n-manifold bersifat homeomorfik, maka mereka memiliki bilangan Euler yang sama.

Oleh karena itu, Gambar 4 dan Teorema 1 mengimplikasikan bahwa bentuk bola (sphere) dan donat (torus) tidak homeomorfik. Artinya, bola tidak dapat dideformasi secara kontinu untuk menjadi torus, begitu pula sebaliknya.

Berikut adalah dua istilah yang kita butuhkan sebelum menyatakan teorema berikutnya. Manifold yang terhubung (connected) adalah manifold di mana setiap dua titik di dalamnya dapat dihubungkan oleh suatu kurva yang berada pada manifold tersebut. Manifold bersifat terorientasi (orientable) jika ia memiliki 2 sisi, yaitu sisi dalam dan sisi luar.

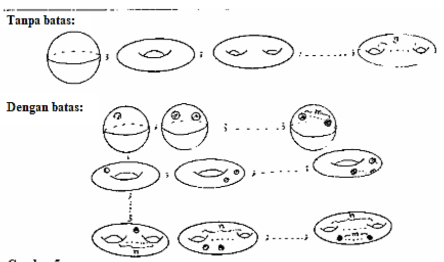
Teorema 2. Dua n-manifold $(n \leq 2)$ terhubung dan terorientasi yang memiliki jumlah komponen batas yang sama adalah homeomorfik jika dan hanya jika mereka memiliki bilangan Euler yang sama.

Berikut adalah beberapa hasil penting mengenai klasifikasi umum dari 1-manifold dan 2-manifold.

Klasifikasi I: Setiap 1-manifold kompak yang terhubung pasti homeomorfik dengan interval terbuka atau lingkaran.

Klasifikasi II: Setiap 2-manifold kompak, terhubung, dan terorientasi pasti homeomorfik dengan salah satu dari objek pada Gambar 5.

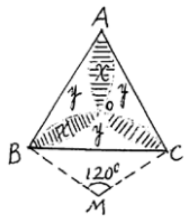
Akhirnya, kita menyebutkan sebuah masalah terbuka yang terkenal (Konjektur Poincaré), yaitu menunjukkan bahwa setiap 3-manifold kompak yang terhubung sederhana (simply connected) adalah homeomorfik dengan sferis-3 (three-sphere). Terhubung sederhana berarti setiap lingkaran pada manifold tersebut dapat disusutkan menjadi sebuah titik pada manifold itu sendiri.



Gambar 5

Menyusun Sistem Persamaan Linear dengan Cerdik untuk Menghitung Luas Daerah yang Diarsir

Terdapat sejenis masalah pencarian luas daerah yang diarsir di mana kita dapat memisalkan variabel yang sesuai berdasarkan kondisi soal, lalu menyelesaikannya melalui sistem persamaan linear. Metode yang menggabungkan geometri dan aljabar ini mengubah masalah luas geometris menjadi penyelesaian sistem persamaan linear aljabar. Karena metodenya yang baru dan alur berpikirnya yang jelas, metode ini sangat diperhatikan oleh guru dan siswa. Berikut tiga contoh analisisnya:



Bagian I: Menyusun Sistem Persamaan Linear Dua Variabel

Contoh 1: Seperti pada gambar di atas (kiri), O adalah titik pusat segitiga sama sisi ABC dengan panjang sisi $AB = 8\sqrt{3}$ cm. Maka luas daerah diarsir yang dibatasi oleh AOB, BOC, dan COA adalah ___ cm^2.

Analisis: Gambar tersebut mengandung dua jenis bentuk geometris yang berbeda, kita misalkan sebagai x dan y. Berdasarkan karakteristik simetri geometrisnya, 2 buah x dan 1 buah y membentuk sebuah tembereng lingkaran dengan sudut pusat 120°. Sedangkan 3 buah x dan 3 buah y membentuk satu segitiga sama sisi ABC utuh. Karena tinggi segitiga sama sisi $ABC = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 8\sqrt{3} = 12$, dan O adalah pusat segitiga sama sisi ABC, maka $BO = \frac{2}{3} \times 12 = 9 = MB$.

$\therefore 2x + y = S_{\text{tembereng } MBC} - S_{\Delta MBC}$

$$= \frac{120\pi \cdot 8^2}{360} - \frac{1}{2} \times 8\sqrt{3} \times 4 = \frac{64\pi}{3} - 16\sqrt{3}$$

$$= \frac{1}{2} \times 8\sqrt{3} \times 12 = 48\sqrt{3}$$

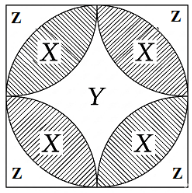
Selesaikan system persamaan berikut:

$$\begin{cases} 2x + y = \dfrac{64\pi}{3} - 16\sqrt{3} & \cdots\cdots\cdots(1) \\ 3x + 3y = 48\sqrt{3} & \cdots\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

diperoleh luas daerah arsir $3x = 64\pi - 93\sqrt{3}$ cm^2.

Bagian II: Menyusun Sistem Persamaan Linear Tiga Variabel

Contoh 2: Seperti pada gambar di bawah, di dalam persegi $ABCD$ terdapat lingkaran yang berpusat di titik pusat persegi dengan jari-jari setengah panjang sisi persegi. Selain itu, dengan titik sudut A, B, C, D sebagai pusatnya dan setengah panjang sisi sebagai jari-jari, digambar empat busur lingkaran di dalam persegi. Jika panjang sisi persegi adalah $2a$, carilah luas daerah yang diarsir.



Analisis: Gambar ini memiliki tiga jenis bentuk yang berbeda, misalkan x, y, dan z. Dari karakteristik bentuknya kita tahu: 4 buah x dan 1 buah y membentuk satu lingkaran penuh; 1 buah x dan 1 buah z membentuk sebuah juring lingkaran dengan sudut siku-siku; 4 buah x, 4 buah z, dan 1 buah y membentuk persegi utuh.

Oleh karena itu, diperoleh sistem persamaan:

$$\begin{cases} 4x + y = \pi a^2 & \cdots\cdots\cdots(1) \\ x + z = \frac{1}{4}\pi a^2 & \cdots\cdots\cdots(2) \\ 4x + y + 4z = 4a^2 & \cdots\cdots\cdots(3) \end{cases}$$

(3) − (1) menghasilkan $z = \frac{1}{4}(4 - \pi)a^2$

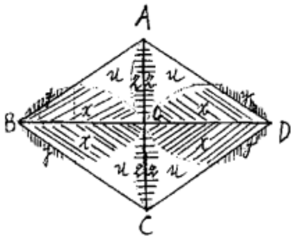
Substitusikan ke (2), maka $x = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)a^2$.

$\therefore S_{arsiran} = 4x = (2\pi - 4)a^2$.

Bagian III: Menyusun Sistem Persamaan Linear Empat Variabel

Contoh 3: Seperti pada gambar di atas (tengah), panjang dua diagonal belah ketupat $ABCD$ masing-masing adalah a

dan b. Dengan setiap sisi belah ketupat sebagai diameter, digambar setengah lingkaran ke arah dalam belah ketupat. Carilah luas bentuk kelopak bunga yang terbentuk dari 4 busur setengah lingkaran tersebut (luas daerah diarsir).



Analisis: Gambar mengandung empat jenis bentuk, misalkan x, y, z, u. Maka berdasarkan karakteristik gambar: $2x, 2y, z, u$ bersama-sama membentuk satu setengah lingkaran dengan diameter berupa sisi belah ketupat; sedangkan x, z, u bersama-sama membentuk segitiga siku-siku BOC.

Solusi: Misalkan x, y, z, u seperti yang ditunjukkan pada gambar, maka berdasarkan maksud soal diperoleh

$$\begin{cases} x+z+u=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2} & \cdots(1) \\ 2x+2z+y+u=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}}\right)^2 & \cdots(2) \end{cases}$$

(2) - (1) kemudian dikalikan dengan 4, diperoleh

$$4(x+y+z)=\frac{\pi a^2+\pi b^2-4ab}{8}$$

Ini adalah luas daerah diarsir yang dicari.

Kesimpulan: Berdasarkan uraian di atas, dapat diketahui bahwa: bentuk daerah diarsir pada umumnya sebagian besar tersusun atas berbagai macam bangun datar beraturan. Oleh karena itu, saat memanfaatkan sistem persamaan untuk menyelesaikan masalah jenis ini, langkah-langkah yang perlu dilakukan adalah: Pengelompokan Variabel: Pertama-tama, berdasarkan karakteristik bangun tersebut (terutama sifat simetri), bagilah bangun tersebut menjadi beberapa kategori daerah, lalu gunakan huruf variabel untuk merepresentasikan luas dari masing-masing kategori daerah tersebut. Analisis Hubungan Komponen: Selanjutnya, amati komposisi bangun datar dengan cermat. Analisis hubungan antara setiap bagian komponen, serta hubungan antara bagian komponen dengan bangun datar secara keseluruhan. Penyusunan Sistem Persamaan: Susunlah sistem persamaan memanfaatkan rumus-rumus luas bangun datar beraturan yang berlaku. Penyelesaian Akhir: Terakhir, selesaikan sistem persamaan tersebut untuk mendapatkan luas daerah diarsir yang dicari.

****

Solusi

Soal 71. Cari semua solusi real dari sistem persamaan berikut:

$$x+\log(x+\sqrt{x^2+1})=y,$$
$$y+\log(y+\sqrt{y^2+1})=z,$$
$$z+\log(z+\sqrt{z^2+1})=x.$$

Solusi: Jika $x < 0$, maka $0 < x + \sqrt{x^2+1} < 1$. Oleh karena itu, $\log(x+\sqrt{x^2+1}) < 0$, yang berimplikasi pada $y < x < 0$. Dengan cara yang sama, kita mendapatkan $z < y < 0$ dan $x < z < 0$, sehingga menghasilkan kontradiksi $x < z < y < x$. Jika $x > 0$, maka $x + \sqrt{x^2+1} > 1$. Oleh karena itu, $\log(x+\sqrt{x^2+1}) > 0$, yang berimplikasi pada $y > x > 0$. Dengan cara yang sama, kita mendapatkan $z > y > 0$ dan $x > z > 0$, sehingga menghasilkan kontradiksi $x > z > y > x$. Jika $x = 0$, maka $x = y = z = 0$ adalah satu-satunya solusi.

Soal 72. Apakah mungkin menuliskan angka 1, 2, ..., 121 ke dalam tabel berukuran 11×11 sehingga setiap dua angka berurutan berada pada sel yang berbagi sisi yang sama, dan semua bilangan kuadrat sempurna berada di satu kolom yang sama?

Solusi: Misalkan tabel tersebut ada. Kolom kuadrat sempurna akan membagi tabel menjadi 2 bagian sisi, satu sisi berisi $11n$ sel ($0 \leq n \leq 5$) dan sisi lainnya berisi $110 - 11n$ sel. Perhatikan bahwa bilangan-bilangan di antara dua bilangan kuadrat sempurna yang berurutan, katakanlah a^2 dan $(a+1)^2$, terletak pada satu sisi karena bilangan-bilangan tersebut tidak dapat menyeberangi kolom kuadrat sempurna, dan bilangan-bilangan di antara $(a+1)^2$ dan $(a+2)^2$ terletak pada sisi yang berlawanan. Jumlah angka yang berada di antara bilangan kuadrat berturut-turut (1, 4, 9, 16, ..., 121) masing-masing adalah 2, 4, 6, 8, ..., 20 angka. Berdasarkan sifat paritas langkah, satu sisi tabel akan berisi 2 + 6 + 10 + 14 + 18 = 50 angka, sedangkan sisi lainnya berisi 4 + 8 + 12 + 16 + 20 = 60 angka. Karena 50 maupun 60 bukan kelipatan dari 11, maka terjadi kontradiksi. Jawabannya adalah tidak mungkin.

Soal 73. Buktikan bahwa jika a dan b adalah bilangan rasional yang memenuhi persamaan $a^5 + b^5 = 2a^2b^2$, maka $1 - ab$ adalah kuadrat dari suatu bilangan rasional.

Solusi: Jika $b = 0$, maka $1 - ab = 1^2$. Jika $b \neq 0$, maka $a^6 + ab^5 = 2a^3b^2$. Oleh karena itu, $a^6 - 2a^3b^2 + b^4 = b^4 - ab^5 = b^4(1-ab)$. Dengan demikian, $1 - ab = (a^6 - 2a^3b^2 + b^4)/b^4$ merupakan kuadrat dari bilangan rasional $(a^3 - b^2)/b^2$.

Soal 74. Titik A_2, B_2, C_2 berturut-turut adalah titik tengah dari garis tinggi AA_1, BB_1, CC_1 pada segitiga lancip ABC. Carilah jumlah sudut dari $\angle B_2A_1C_2 + \angle C_2B_1A_2 + \angle A_2C_1B_2$.

Solusi: Misalkan A_3, B_3, C_3 berturut-turut merupakan titik tengah dari BC, CA, AB, dan H merupakan ortosenter (titik potong garis tinggi) dari ΔABC. Karena C_3A_3 sejajar dengan AC, maka $\angle HB_2A_3 = 90^\circ = \angle HA_1A_3$, yang menyiratkan bahwa H, B_2, A_3, A_1 adalah titik-titik yang konsiklik (terletak pada satu lingkaran yang sama). Oleh karena itu, $\angle B_2A_1H = \angle B_2A_3H$. Karena B_3A_3 sejajar dengan AB, maka $\angle HC_2A_3 = 90^\circ = \angle HA_1A_3$, yang menyiratkan bahwa H, C_2, A_3, A_1 adalah titik-titik yang konsiklik. Oleh karena itu, $\angle C_2A_1H = \angle C_2A_3H$. Kemudian $\angle B_2A_1C_2 = \angle B_2A_1H + \angle C_2A_1H = \angle B_2A_3H + \angle C_2A_3H = \angle C_3A_3B_3 = \angle BAC$ (karena $\Delta A_3B_3C_3$ sebangun dengan ΔABC). Dengan cara yang sama, $\angle B_2C_1A_2 = \angle BCA$ dan $\angle A_2B_1C_2 = \angle ABC$. Oleh karena itu, jumlah dari $\angle B_2A_1C_2$, $\angle C_2B_1A_2$, dan $\angle A_2B_1C_2$ adalah 180°.

Soal 75. Misalkan $P(x)$ adalah polinomial dengan koefisien bulat sedemikian rupa sehingga $P(21) = 17, P(32) = -247$, dan $P(37) = 33$. Buktikan bahwa jika $P(N) = N + 51$ untuk suatu bilangan bulat N, maka $N = 26$.

Solusi: Berdasarkan teorema faktor, jika $P(N) = N + 51$, maka $P(x) - x - 51 = (x - N)Q(x)$ di mana $Q(x)$ adalah polinomial berkoefisien bulat. Dengan memasukkan nilai x = 21 dan x = 37, kita mendapatkan bahwa $21 - N$ harus membagi -55, dan $37 - N$ juga harus membagi -55. Nilai N yang memenuhi kondisi ini adalah N = 26 atau 32. Namun, jika N = 32, maka P(32) = 32 + 51 = 83, kontradiksi dengan nilai P(32) = -247 yang diketahui. Maka terbukti bahwa N = 26.

Pojok Soal

Soal 76. Tentukan semua bilangan bulat positif N sedemikian rupa sehingga dalam basis 10, digit-digit dari $9N$ adalah kebalikan (urutan terbalik) dari digit-digit N, dan N memiliki paling banyak satu digit yang bernilai 0.

Soal 77. Tunjukkan bahwa jika ΔABC memenuhi

$$\frac{\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C}{\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C} = 2,$$

maka segitiga tersebut haruslah berupa segitiga siku-siku.

Soal 78. Jika $c_1, c_2, \dots, c_n (n \geq 2)$ adalah bilangan real sedemikian rupa sehingga:

$$(n-1)(c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2) \\ = (c_1 + c_2 + \ldots + c_n)^2,$$

tunjukkan bahwa semua bilangan tersebut adalah bilangan nonnegatif atau semuanya bilangan nonpositive.

Soal 79. Poligon reguler (beraturan) apa saja yang dapat diperoleh (dan bagaimana caranya) dengan memotong sebuah kubus menggunakan sebuah bidang datar?

Soal 80. Apakah mungkin untuk menutupi sebuah bidang datar dengan lingkaran (dalam jumlah tak hingga) sedemikian rupa sehingga tepat ada 1998 lingkaran yang melewati setiap titik pada bidang tersebut?