Pojok Olimpiade

Kode Pengoreksi Kesalahan (II)

(Vol 4 – No 1)

Masalah 1. Di dalam sebuah bidang, titik-titik dengan koordinat bilangan bulat merupakan titik-titik sudut dari persegi-persegi satuan. Persegi-persegi tersebut diwarnai hitam dan putih secara bergantian (seperti pada papan catur). Untuk setiap pasangan bilangan bulat positif m dan n, perhatikan sebuah segitiga siku-siku yang titik-titik sudutnya memiliki koordinat bilangan bulat dan sisi-sisi tegaknya, dengan panjang m dan n, terletak sejajar dengan sisi-sisi persegi tersebut. Misalkan S_1 adalah total luas bagian hitam dari segitiga tersebut dan S_2 adalah total luas bagian putihnya. Misalkan

$$f(m,n) = |S_1 - S_2|$$

a) Hitunglah $f(m,n)$ untuk semua bilangan bulat positif m dan n yang keduanya genap atau keduanya ganjil.

b) Buktikan bahwa $f(m,n) \le \frac{1}{2}\max\{m,n\}$ untuk semua m dan n.

c) Tunjukkan bahwa tidak ada konstanta C sedemikian sehingga $f(m,n) < C$ untuk semua m dan n.

Masalah 2. Sudut A adalah sudut terkecil dalam segitiga ABC. Titik B dan C membagi lingkaran luar segitiga tersebut menjadi dua busur. Misalkan U adalah titik interior pada busur antara B dan C yang tidak memuat A. Garis bagi tegak lurus (perpendicular bisector) dari AB dan AC memotong garis AU berturut-turut di V dan W. Garis BV dan CW berpotongan di T. Tunjukkan bahwa

$$AU = TB + TC$$

Masalah 3. Misalkan $x_1, x_2, \dots, x_n$ adalah bilangan-bilangan riil yang memenuhi kondisi:

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n| = 1$$

dan $|x_i| \le \frac{n+1}{2}$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$.

Tunjukkan bahwa terdapat suatu permutasi $y_1, y_2, \dots, y_n$ dari $x_1, x_2, \dots, x_n$ sedemikian sehingga

$$|y_1 + 2y_2 + \cdots + ny_n| \le \frac{n+1}{2}.$$

Pada Bagian I, kita telah memperkenalkan keluarga kode Hamming. Secara khusus, kode Hamming (7,4) menyandikan pesan 4-bit $p_1p_2p_3p_4$ menjadi codeword (kata sandi) 7-bit $p_1p_2p_3p_4p_5p_6p_7$ dengan menambahkan tiga bit paritas:

$$p_5 = p_1 + p_2 + p_4 \pmod 2,$$

$$p_6 = p_1 + p_3 + p_4 \pmod 2,$$

$$p_7 = p_2 + p_3 + p_4 \pmod 2.$$

ke dalam pesan aslinya. Gambar 1 menunjukkan 16 codeword yang mungkin untuk kode Hamming (7,4). Sebagai contoh, untuk menyampaikan pesan 0100, pengirim akan mengirimkan 0100101. Jika terjadi kesalahan transmisi pada posisi ke-4 sehingga urutan yang diterima menjadi 0101101, penerima akan tetap dapat memperbaiki kesalahan tersebut dengan cara mendekode urutan yang diterima sebagai codeword terdekat. (Perhatikan bahwa 0100101 berbeda dengan 0101101 hanya pada satu posisi, sementara semua codeword lainnya berbeda dengan 0101101 di lebih dari satu posisi.)

Sekarang, jika kita mengelompokkan enam bit pertama dari sebuah codeword Hamming (7,4) menjadi pasangan dua-bit (p_1p_2, p_3p_4, p_5p_6) dan menggunakan sistem aritmatika yang disebut lapangan 4-elemen (4-element field) (Gambar 2), kita mengamati sesuatu yang menarik: tiga titik $(1, p_1p_2)$, $(2, p_3p_4)$ dan $(3, p_5p_6)$ membentuk sebuah garis lurus! Sebagai contoh, 6 bit pertama dari codeword 0100101 membentuk tripel berurutan (01, 00, 10) = (1, 0, 2) dan (1,1), (2,0), (3,2) adalah tiga titik berurutan pada garis lurus $f(x) = 2x + 3$ karena

$$f(1) = 2(1) + 3 = 2 + 3 = 1;$$

$$f(2) = 2(2) + 3 = 3 + 3 = 0;$$

$$f(3) = 2(3) + 3 = 1 + 3 = 2;$$

dengan menggunakan tabel penjumlahan dan perkalian yang diberikan pada Gambar 2. Fakta ini juga berlaku untuk 15 codeword lainnya dan garis lurus $f(x)$ yang bersesuaian dengannya tercantum pada Gambar 3.

Sifat "garis lurus" ini dapat dimanfaatkan untuk proses pendekodean (decoding). Sebagai contoh, asumsikan bahwa urutan yang diterima adalah 0101101. Enam bit pertama membentuk tripel berurutan (01, 01, 10) = (1, 1, 2). Kita mengamati bahwa sebuah garis lurus yang melewati (1,1) dan (2,1) seharusnya juga melewati (3,1). Artinya, (1,1), (2,1), dan (3,2) tidak terletak pada satu garis lurus, sehingga terdapat kesalahan transmisi. Untuk kode Hamming (7,4) yang mampu memperbaiki satu kesalahan, kita

message $p_1p_2p_3p_4$	codeword $p_1p_2p_3p_4p_5p_6p_7$
0000	0000000
0001	0001111
0010	0010011
0011	0011100
0100	0100101
0101	0101010
0110	0110110
0111	0111001
1000	1000110
1001	1001001
1010	1010101
1011	1011010
1100	1100011
1101	1101100
1110	1110000
1111	1111111

Gambar 1. Kode Hamming (7,4)

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

×	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

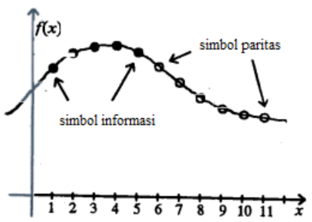
Gambar 2. Tabel Aritmatika Lapangan 4-Elemen

codeword	p_1p_2	p_3p_4	p_5p_6	$f(x)$
0000000	0	0	0	0
0001111	0	1	3	$2x+2$
0010011	0	2	1	$3x+3$
0011100	0	3	2	$x+1$
0100101	1	0	2	$2x+3$
0101010	1	1	1	1
0110110	1	2	3	x
0111001	1	3	0	$3x+2$
1000110	2	0	3	$3x+1$
1001001	2	1	0	$x+3$
1010101	2	2	2	2
1011010	2	3	1	$2x$
1100011	3	0	1	$x+2$
1101100	3	1	2	$3x$
1110000	3	2	0	$2x+1$
1111111	3	3	3	3

Gambar 3. Codeword Hamming (7,4) Membentuk Garis Lurus $f(x)$

Asumsikan bahwa hanya satu dari tiga titik tersebut yang salah. Artinya, "garis lurus" asli $f(x)$ seharusnya melewati (1,1) dan (2,1); (1,1) dan (3,2); atau (2,1) dan (3,2) yang masing-masing bersesuaian dengan $f(x) = 1$; $f(x) = 2x + 3$; atau $f(x) = 3x$. Maka, 6 bit pertama untuk codeword (kata sandi) aslinya seharusnya adalah 010101, 010010, atau 110110. Di antara tiga kemungkinan solusi ini, hanya 010010 yang memenuhi persamaan untuk bit paritas terakhir $p_7 = p_2 + p_3 + p_4$ (mod 2). Dengan demikian, kita mendekode urutan yang diterima 0101101 sebagai 0100101 yang bersesuaian dengan pesan 0100.

Prosedur pendekodean di atas tampaknya cukup rumit. Namun, prosedur ini dapat digeneralisasi untuk membangun (dan mendekode) kode pengoreksi kesalahan jamak (multiple-error correcting codes) dengan menggunakan "polinomial" alih-alih "garis lurus". Andaikan kita ingin mengirimkan sebuah pesan yang berisi k simbol $s_1 s_2 \dots s_k$. Kita dapat menggunakan k simbol ini untuk membentuk sebuah polinomial derajat ke-k, $f(x)$, sedemikian sehingga $f(i) = s_i$ $(1 \le i \le k)$. Untuk membangun kode yang dapat mengoreksi t kesalahan, kita dapat menambahkan $2t$ simbol $f(k+1), f(k+2), \dots, f(k+2t)$ ke dalam pesan asli sehingga urutan yang tersandi berisi $k+2t$ simbol yang bersesuaian dengan $k+2t$ titik berurutan pada polinomial derajat ke-k (Gambar 4). Jika terjadi kesalahan kurang dari atau sama dengan t selama transmisi, setidaknya $k+t$ simbol akan diterima dengan benar. Kemudian penerima cukup memeriksa $k+t$ simbol mana yang terletak pada polinomial derajat ke-k untuk mendekode urutan yang diterima.



Gambar 4. Sebuah Kode Polinomial

Kita menggunakan kode pengoreksi kesalahan ganda (21,9) untuk mengilustrasikan ide ini. Asumsikan kita ingin mengirim pesan 9 bit, katakanlah 101010100. Pertama-tama, kita dapat mengelompokkan bit-bit informasi tersebut ke dalam simbol-simbol 3-bit sebagai (101, 010, 100) = (5, 2, 4). (Secara umum, kita dapat mengelompokkan bit informasi ke dalam simbol-simbol m-bit di mana m tidak boleh terlalu kecil. Jika tidak, kita tidak dapat menyusun polinomial $f(x)$. Mengapa? Selain itu, m juga tidak boleh terlalu besar untuk mengurangi jumlah bit paritas.). Kemudian, kita menggunakan tiga simbol pesan (5, 2, 4) untuk membentuk polinomial derajat kedua $f(x)$ sedemikian sehingga $f(1) = 5, f(2) = 2$, dan $f(3) = 4$. Yaitu

$$f(x) = \frac{5(x-2)(x-3)}{(1-2)(1-3)} + \frac{2(x-1)(x-3)}{(2-1)(2-3)} + \frac{4(x-1)(x-2)}{(3-1)(3-2)}.$$

Perhatikan bahwa kita memiliki 8 jenis simbol (karena kita mengelompokkan bit ke dalam simbol 3-bit), sehingga kita memerlukan lapangan 8-elemen (8-element field) untuk aritmatika kita. (Pada dasarnya, lapangan/field adalah sistem aritmatika yang memungkinkan kita untuk menambah, mengurang, mengali, dan membagi). Dengan menggunakan lapangan 8-elemen yang diberikan pada Gambar 5, kita dapat menyederhanakan $f(x)$ untuk mendapatkan

$$f(x) = x^2 + 7x + 5.$$

Perhatikan bahwa $f(1)$ = 5, $f(2)$ = 2, dan $f(3)$ = 4 sesuai dengan yang diinginkan.

+	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

×	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7
2	0	2	4	6	3	1	7	5
3	0	3	6	5	7	4	1	2
4	0	4	3	7	6	2	5	1
5	0	5	1	4	2	7	3	6
6	0	6	7	1	5	3	2	4
7	0	7	5	2	1	6	4	3

Gambar 5. Tabel Aritmatika Lapangan 8-Elemen

Sekarang andaikan kita ingin membangun sebuah kode yang dapat mengoreksi dua kesalahan. Kita dapat menambahkan:

$$f(4) = 4^2 + 7(4) + 3 = 6 + 1 + 3 = 4;$$

$$f(5) = 5^2 + 7(5) + 3 = 7 + 6 + 3 = 2;$$

$$f(6) = 6^2 + 7(6) + 3 = 2 + 4 + 3 = 5;$$

$$f(7) = 7^2 + 7(7) + 3 = 3 + 3 + 3 = 3;$$

ke dalam simbol-simbol pesan. Artinya, kita akan mentransmisikan sebuah urutan 21 bit (5, 2, 4, 4, 2, 5, 3) = 101010100100010101011. Jika terjadi kesalahan transmisi, katakanlah pada posisi 5 dan 15, urutan yang diterima menjadi 101000100100011101011 = (5, 0, 4, 4, 3, 5, 3). (Kode ini sebenarnya mampu mengoreksi dua kesalahan simbol, bukan hanya dua kesalahan bit). Kemudian penerima akan mencari 5 simbol yang diterima yang tidak rusak. Di antara $\binom{7}{5}$ = 21 kasus yang ada, hanya $f(1)$ = 5, $f(3)$ = 4, $f(4)$ = 4, $f(6)$ = 5, $f(7)$ = 3 yang membentuk polinomial derajat kedua. Jadi, penerima menggunakan kelima titik ini untuk merekonstruksi $f(x) = x^2 + 7x + 5$ dan mendekode pesan yang diterima sebagai ($f(1)$, $f(2)$, $f(3)$) = (5, 2, 4) = 101010100.

Pojok Soal

Soal 61. Temukan bilangan bulat positif terkecil yang dapat dituliskan sebagai jumlah dari sembilan, sepuluh, dan sebelas bilangan bulat positif berurutan.

Soal 62. Misalkan $ABCD$ adalah segi empat tali busur (cyclic quadrilateral) dan misalkan P dan Q adalah titik-titik yang masing-masing terletak pada sisi AB dan AD sedemikian sehingga $AP = CD$ dan $AQ = BC$. Misalkan M adalah titik potong antara AC dan PQ. Tunjukkan bahwa M adalah titik tengah PQ.

Soal 63. Tunjukkan bahwa untuk $n \ge 2$, terdapat sebuah permutasi $a_1, a_2, \dots, a_n$ dari 1, 2, …, n sedemikian sehingga $|a_k - k| = |a_1 - 1| \ne 0$ untuk k = 2, 3, …, n jika dan hanya jika n genap.

Soal 64. Tunjukkan bahwa tidak mungkin menempatkan 1995 bilangan bulat positif yang berbeda di sepanjang sebuah lingkaran sehingga untuk setiap dua bilangan yang bersebelahan, rasio antara bilangan yang lebih besar terhadap yang lebih kecil adalah bilangan prima.

Soal 65. Semua sisi dan diagonal dari sebuah segi-12 beraturan diwarnai dengan 12 warna (setiap segmen garis diwarnai dengan satu warna). Mungkinkah untuk tiga warna apa pun, terdapat tiga titik sudut yang saling terhubung satu sama lain oleh segmen-segmen garis dengan warna-warna tersebut?

****

Solusi

Soal 56. Tentukan semua bilangan prima p sedemikian sehingga $2^p + p^2$ juga merupakan bilangan prima.

Solusi: Untuk $p = 2, 2^p + p^2 = 8$ bukan bilangan prima. Untuk $p = 3, 2^p + p^2 = 17$ adalah bilangan prima. Untuk bilangan prima $p = 3n \pm 1 > 3$, kita dapat melihat bahwa

$$2^p + p^2 = (3-1)^p + (3n \pm 1)^2$$

habis dibagi 3 (setelah ekspansi/penjabaran) dan nilainya lebih besar dari 3. Jadi, p = 3 adalah satu-satunya bilangan prima yang memenuhi.

Soal 57. Buktikan bahwa untuk bilangan riil $x, y, z > 0$,

$$\frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x} \ge \frac{x+y+z}{2}.$$

Solusi 1: Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}4x^2 &= ((x+y)+(x-y))^2 \\ &= (x+y)^2 + 2(x+y)(x-y) + (x-y)^2 \\ &\geq (x+y)^2 + 2(x+y)(x-y).\end{aligned}$$

Dengan membagi kedua ruas dengan $4(x+y)$, kita memperoleh

$$\frac{x^2}{x+y} \geq \frac{x+y}{4} + \frac{x-y}{2}$$

Dengan mengganti x, y dengan variabel yang bersesuaian, pertidaksamaan serupa untuk pasangan (y, z) dan (z, x) dapat diperoleh. Menjumlahkan pertidaksamaan-pertidaksamaan tersebut memberikan hasil pertidaksamaan yang diinginkan.

Solusi 2: Pertidaksamaan Cauchy-Schwarz menyatakan bahwa

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_k^2)$$
$$\geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_kb_k)^2$$

dengan kesamaan (ruas kiri sama dengan ruas kanan) terjadi jika dan hanya jika $a_ib_j = a_jb_i$ untuk semua i, j sedemikian sehingga $1 \leq i < j \leq k$. Dengan mengambil k = 3,

$$a_1 = \sqrt{x+y}, a_2 = \sqrt{y+z}, a_3 = \sqrt{z+x},$$

$$b_1 = \frac{x}{\sqrt{x+y}}, b_2 = \frac{y}{\sqrt{y+z}}, b_3 = \frac{z}{\sqrt{z+x}},$$

Kemudian dengan membagi kedua ruas dengan $2(x+y+z)$, kita mendapatkan pertidaksamaan yang diinginkan.

Soal 58. Misalkan ABC adalah segitiga lancip dengan $BC > CA$. Misalkan O adalah titik pusat lingkaran luar (circumcenter), H adalah titik tinggi (orthocenter), dan F adalah titik kaki dari garis tinggi CH. Misalkan garis yang tegak lurus dengan OF di titik F memotong sisi CA di titik P. Buktikan bahwa $\angle FHP = \angle BAC$.

Solusi: Misalkan Y adalah titik tengah dari AC. Karena $\angle OFP = \angle OYP = 90°$, titik-titik F, P, Y, O terletak pada satu lingkaran Γ_1 dengan pusat di titik tengah Q dari OP. Sekarang, lingkaran sembilan titik Γ_2 dari ΔABC juga melewati F dan Y serta memiliki pusat di titik tengah N dari OH. Jadi FY tegak lurus terhadap NQ. Karena NQ sejajar dengan HP berdasarkan teorema titik tengah, FY tegak lurus terhadap HP. Maka $\angle FHP = 90° - \angle YFH = 90° - \angle YCH = \angle BAC$.

Soal 59. Misalkan n adalah bilangan bulat positif yang lebih besar dari 2. Tentukan semua solusi bilangan riil $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ untuk persamaan

$$(1-x_1)^2 + (x_1-x_2)^2 + \cdots$$
$$+(x_{n-1}-x_n)^2 + x_n^2 = \frac{1}{n+1}$$

Solusi 1: Misalkan

$$1 - x_1 = \frac{1}{n+1} + z_1,$$

$$x_1 - x_2 = \frac{1}{n+1} + z_2,$$

$$x_{n-1} - x_n = \frac{1}{n+1} + z_n,$$

$$x_n = \frac{1}{n+1} + z_{n+1}.$$

Dengan menjumlahkan $n + 1$ persamaan di atas, kita mendapatkan

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_{n+1} = 0.$$

Dalam bentuk z_i, persamaan yang diberikan kemudian dapat disederhanakan menjadi

$$z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_{n+1}^2 = 0.$$

Jadi semua $z_i = 0$, yang menyiratkan

$$x_i = \frac{n+1-i}{n+1} \text{ untuk } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Solusi 2: Kita menggunakan pertidaksamaan Cauchy-Schwarz sebagaimana dinyatakan dalam Solusi 2 Soal 57. Dengan mengambil $k = n + 1$,

$$a_1 = 1 - x_1, a_2 = x_1 - x_2, \ldots,$$
$$a_n = x_{n-1} - x_n, a_{n+1} = x_n,$$

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_{n+1} = 1,$$

kita melihat bahwa kita mendapatkan kesamaan (equality). Jadi $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n+1}$ menghasilkan solusi unik

$$x_i = \frac{n+1-i}{n+1} \text{ untuk } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Soal 60. Tentukan (tanpa kalkulus) sebuah polinomial derajat lima $p(x)$ sedemikian sehingga $p(x) + 1$ habis dibagi oleh $(x-1)^3$ dan $p(x) - 1$ habis dibagi oleh $(x+1)^3$.

Solusi: Perhatikan bahwa $(x-1)^3$ membagi $p(x) + 1$ dan $p(-x) - 1$; sehingga $(x-1)^3$ membagi jumlah keduanya yaitu $p(x) + p(-x)$. Juga $(x+1)^3$ membagi $p(x) - 1$ dan $p(-x) + 1$; sehingga $(x+1)^3$ membagi $p(x) + p(-x)$. Maka $(x-1)^3(x+1)^3$ membagi $p(x) + p(-x)$, yang mana memiliki derajat paling tinggi 5. Jadi $p(x) + p(-x) = 0$ untuk semua x. Maka koefisien suku derajat genap dari $p(x)$ adalah nol. Sekarang

$$p(x) + 1 = (x-1)^3(Ax^2 + Bx - 1).$$

Dengan membandingkan koefisien derajat 2 dan 4, kita mendapatkan $3 + 3B - A = 0$ dan $B - 3A = 0$, yang menyiratkan $A = -3/8$ dan $B = -9/8$. Ini menghasilkan

$$p(x) = -\frac{3}{8}x^5 + \frac{5}{4}x^3 - \frac{15}{8}x.$$

Pojok Masalah

(Lanjutan Hal 1)

Masalah 4. Sebuah matriks $n \times n$ (susunan persegi) yang elemen-elemennya berasal dari himpunan $S = \{1, 2, \ldots, 2n-1\}$ disebut sebagai matriks perak (silver matrix) jika, untuk setiap i = 1, …, n, baris ke-i dan kolom ke-i secara bersama-sama memuat semua elemen dari S. Tunjukkan bahwa

(a) tidak ada matriks perak untuk n = 1997;
(b) matriks perak ada untuk nilai n yang tak terhingga banyaknya.

Masalah 5. Tentukan semua pasangan (a, b) bilangan bulat $a \geq 1, b \geq 1$ yang memenuhi persamaan

$$a^{b^2} = b^a$$

Masalah 6. Untuk setiap bilangan bulat positif n, misalkan $f(n)$ menyatakan banyaknya cara merepresentasikan n sebagai jumlah dari perpangkatan 2 dengan eksponen bilangan bulat tak negatif. Representasi yang hanya berbeda pada urutan penjumlahannya dianggap sama. Sebagai contoh, $f(4)$ = 4 karena bilangan 4 dapat direpresentasikan dalam empat cara berikut

$$4;\ 2+2;\ 2+1+1;\ 1+1+1+1.$$

Buktikan bahwa, untuk setiap bilangan bulat $n \geq 3$,

$$2^{n^2/4} < f(2^n) < 2^{n^2/2}.$$