JELAJAH NALAR

Analisa Isi Kepala Tanpa Suara

Pojok Olimpiade

# Geometri Yang Tidak Di Ajarkan

*(Vol 3 – No 2)*

**Masalah 1.** Buktikan bahwa rata-rata dari bilangan-bilangan $n \sin n^\circ$ ($n$ = 2, 4, 6, ..., 180) adalah cot 1°.

**Masalah 2.** Untuk setiap himpunan bilangan real tak kosong $S$, misalkan $\sigma(S)$ menyatakan jumlah dari elemen-elemen $S$. Diberikan sebuah himpunan $A$ yang terdiri dari $n$ bilangan bulat positif, pertimbangkan kumpulan dari semua jumlah berbeda $\sigma(S)$ di mana $S$ mencakup seluruh subhimpunan tak kosong dari $A$. Buktikan bahwa kumpulan jumlah ini dapat dipartisi menjadi $n$ kelas sedemikian sehingga di setiap kelas, rasio jumlah terbesar terhadap jumlah terkecil tidak melebihi 2.

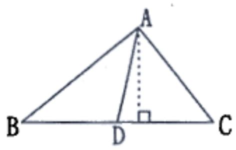
**Masalah 3.** Misalkan $ABC$ adalah sebuah segitiga. Buktikan bahwa terdapat sebuah garis $l$ (pada bidang segitiga $ABC$) sedemikian sehingga irisan antara interior segitiga $ABC$ dan interior hasil refleksinya $A'B'C'$ terhadap $l$ memiliki luas lebih dari 2/3 luas segitiga $ABC$.

**Masalah 4.** Sebuah barisan dengan suku-$n$ $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ yang mana setiap sukunya adalah 0 atau 1 disebut sebagai barisan biner dengan panjang $n$. Misalkan $a_n$ adalah banyaknya barisan biner dengan panjang $n$ yang tidak memuat tiga suku berturut-turut yang bernilai 0, 1, 0 secara berurutan. Misalkan $b_n$ adalah banyaknya barisan biner dengan panjang $n$ yang tidak memuat empat suku berturut-turut yang bernilai 0, 0, 1, 1 atau 1, 1, 0, 0 secara berurutan. Buktikan bahwa $b_{n+1} = 2a_n$ untuk semua bilangan bulat positif $n$.

**Masalah 5.** Segitiga $ABC$ memiliki sifat berikut: terdapat sebuah titik interior $P$ sedemikian sehingga $\angle PAB = 10^\circ$, $\angle PBA = 20^\circ, \angle PCA = 30^\circ$, dan $\angle PAC = 40^\circ$. Buktikan bahwa segitiga $ABC$ adalah sama kaki.

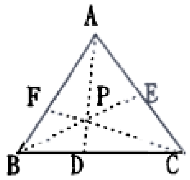
**Masalah 6.** Tentukan (dengan bukti) apakah terdapat sebuah subhimpunan $X$ dari himpunan bilangan bulat dengan sifat berikut: untuk setiap bilangan bulat $n$, terdapat tepat satu solusi $a + 2b = n$ dengan $a, b \in X$.

Mari kita mulai dengan membahas sebuah sifat segitiga yang sederhana namun penting:




Kedua segitiga pada Gambar 1 memiliki sisi bersama $AD$, dan keduanya memiliki tinggi yang sama, oleh karena itu:

$$\frac{\text{Luas } \Delta ABD}{\text{Luas } \Delta ADC} = \frac{BD}{DC}$$




Selanjutnya perhatikan Gambar 2, di mana segmen garis $AD, BE$, dan $CF$ berpotongan di satu titik $P$. Dengan menggunakan sifat segitiga yang memiliki sisi bersama seperti di atas, kita dapat mengetahui bahwa:

$$\frac{\text{Luas } \Delta ABD}{\text{Luas } \Delta ADC} = \frac{BD}{DC} = \frac{\text{Luas } \Delta PBD}{\text{Luas } \Delta PDC}$$

Menggunakan sifat pecahan:

$$\text{Jika} \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{maka} \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$$

Maka diperoleh:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{\text{Luas } \Delta ABP}{\text{Luas } \Delta ACP}$$

Dengan cara yang sama:

$$\frac{CE}{EA} = \frac{\text{Luas } \Delta BCP}{\text{Luas } \Delta BAP}$$

Serta

$$\frac{AF}{FB} = \frac{\text{Luas } \Delta ACP}{\text{Luas } \Delta BCP}$$

Dengan mengalikan ruas yang sama dari ketiga persamaan di atas dan menyederhanakannya, kita dapat meringkasnya menjadi:

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$$

Teorema ini ditemukan oleh orang Italia bernama Giovanni Ceva pada abad ke-17, sehingga generasi berikutnya menyebutnya sebagai "Teorema Ceva". Teorema Ceva dapat dibuktikan dengan berbagai metode, namun metode pembuktian di atas secara cerdik menggunakan teknik pengurangan luas bangun yang tumpang tindih, yang patut dijadikan referensi.

Apakah kebalikan (konvers) dari Teorema Ceva juga benar? Yang dimaksud dengan kebalikan adalah menukar sebab dan akibat dari proposisi aslinya. Untuk Teorema Ceva, kebalikannya adalah:

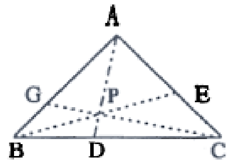
Misalkan pada segitiga $ABC$, terdapat garis-garis Ceva (Cevians) [segmen garis yang menghubungkan titik sudut ke sisi di depannya] $AD, BE$, dan $CF$ yang memenuhi kondisi:

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1 \quad (*)$$

Maka ketiga garis Ceva tersebut berpotongan di satu titik (konkuren).

Ciri khas dari metode pembuktian kebalikan teorema ini adalah kita dapat meminjam teorema aslinya: Walaupun ketiga garis Ceva belum tentu berpotongan di satu titik, dua di antaranya pasti berpotongan di satu titik. Kita dapat mengandaikan bahwa $AD$ dan $BE$ berpotongan di $P$ (Gambar 3). Dengan menarik garis Ceva $CG$ melalui $P$, maka:

$$\frac{AG}{GB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1 \quad (**)$$




Dengan membandingkan $(*)$ dan (), dapat diketahui bahwa:

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AG}{GB}$$

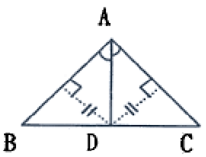
Oleh karena itu, $F$ dan $G$ adalah titik yang sama pada sisi $AB$.

Kebalikan dari Teorema Ceva mungkin tampak asing, namun faktanya ia mencakup tiga sifat penting dari segitiga: tiga garis berat (medians) berpotongan di satu titik, tiga garis tinggi (altitudes) berpotongan di satu titik, dan tiga garis bagi (angle bisectors) berpotongan di satu titik. Ketiga titik tersebut masing-masing bernama titik berat (centroid), titik tinggi (orthocentre), dan titik pusat lingkaran dalam (incentre).

Fakta bahwa tiga garis berat berpotongan di satu titik dapat diturunkan dengan sangat mudah dari kebalikan Teorema Ceva, silakan teman-teman mencobanya. Selain itu, kalian juga dapat menggunakan hubungan luas segitiga yang memiliki sisi bersama untuk mendapatkan sifat terkenal yaitu: "Titik berat membagi garis berat menjadi dua segmen dengan perbandingan panjang 2:1."

Sifat bahwa tiga garis tinggi berpotongan di satu titik dapat diturunkan dengan mudah menggunakan hubungan fungsi trigonometri pada panjang sisi segitiga siku-siku, ini juga silakan teman-teman coba sendiri.

Garis bagi sudut pada segitiga memiliki sebuah sifat yang sederhana namun penting:




Segitiga $ABD$ dan $ACD$ pada Gambar 4 yang memiliki sisi bersama memiliki hubungan antara luas dan panjang sisi sebagai berikut:

$$\frac{BD}{DC}=\frac{\text{Luas } \Delta ABD}{\text{Luas } \Delta ACD}=\frac{AB}{AC},$$

Oleh karena itu,

$$\frac{BD}{DC}=\frac{AB}{AC}.$$

Sifat bahwa tiga garis bagi sudut berpotongan di satu titik (konkuren) dapat diturunkan dengan bantuan persamaan ini.

## Kode Koreksi Kesalahan (Bagian 1)

Misalkan seseorang ingin mengirimkan sebuah pesan, katakanlah "HELLO...", dari satu komputer ke komputer lainnya. Salah satu cara yang memungkinkan adalah dengan menggunakan sebuah tabel untuk menyandikan (encode) pesan tersebut ke dalam digit biner. Kemudian penerima akan dapat memecahkan sandi (decode) pesan tersebut dengan tabel yang serupa. Salah satu tabel tersebut adalah American Standard Code for Information Interchange (ASCII) yang ditunjukkan pada Gambar 1. Huruf H akan disandikan sebagai 1001000, huruf E akan disandikan sebagai 1000101, dan seterusnya (Gambar 2).

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 1000001 | S | 1010011 | a | 1100001 | s | 1110011 |
| B | 1000010 | T | 1010100 | b | 1100010 | t | 1110100 |
| C | 1000011 | U | 1010101 | c | 1100011 | u | 1110101 |
| D | 1000100 | V | 1010110 | d | 1100100 | v | 1110110 |
| E | 1000101 | W | 1010111 | e | 1100101 | w | 1110111 |
| F | 1000110 | X | 1011000 | f | 1100110 | x | 1111000 |
| G | 1000111 | Y | 1011001 | g | 1100111 | y | 1111001 |
| H | 1001000 | Z | 1011010 | h | 1101000 | z | 1111010 |
| I | 1001001 | 0 | 0110000 | i | 1101001 | . | 0101110 |
| J | 1001010 | 1 | 0110001 | j | 1101010 | , | 0101100 |
| K | 1001011 | 2 | 0110010 | k | 1101011 | ? | 0111111 |
| L | 1001100 | 3 | 0110011 | l | 1101100 | ) | 0101001 |
| M | 1001101 | 4 | 0110100 | m | 1101101 | ( | 1111011 |
| N | 1001110 | 5 | 0110101 | n | 1101110 | / | 0101111 |
| O | 1001111 | 6 | 0110110 | o | 1101111 | & | 0100110 |
| P | 1010000 | 7 | 0110111 | p | 1110000 | + | 0101011 |
| Q | 1010001 | 8 | 0111000 | q | 1110001 | - | 0101101 |
| R | 1010010 | 9 | 0111001 | r | 1110010 | = | 0111101 |

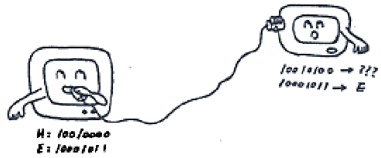
*Gambar 1. Kode ASCII*


Gambar 2. Dua komputer yang berkomunikasi

Penerima akan dapat memecahkan sandi (decode) pesan dengan benar jika tidak ada kesalahan selama transmisi. Namun, jika terjadi kesalahan transmisi, penerima mungkin akan memecahkan sandi pesan secara tidak tepat. Sebagai contoh, huruf H (1001000) akan diterima sebagai J (1001010) jika terjadi kesalahan pada posisi ke-6.

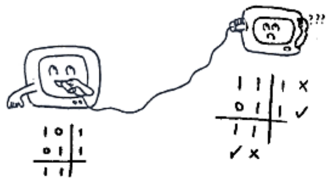

*Gambar 3. Kesalahan pada posisi ke-6*

Salah satu cara yang memungkinkan untuk mendeteksi kesalahan transmisi adalah dengan menambahkan bit redundan (tambahan), yaitu dengan menambahkan bit ekstra ke dalam pesan asli. Dalam sebuah kode paritas genap (even parity code), angka 0 atau 1 ditambahkan sehingga jumlah total angka 1 menjadi bilangan genap. Huruf H dan E masing-masing akan direpresentasikan sebagai 10010000 dan 10001011. Dengan kode paritas genap, penerima dapat mendeteksi satu kesalahan transmisi, tetapi tidak mampu memperbaikinya. Sebagai contoh, jika 10010000 (untuk huruf H) diterima sebagai 10010100, penerima tahu bahwa telah terjadi setidaknya satu kesalahan selama transmisi karena urutan bit yang diterima memiliki paritas ganjil, yaitu jumlah total angka 1-nya adalah bilangan ganjil.



*Gambar 4. Kode paritas genap*

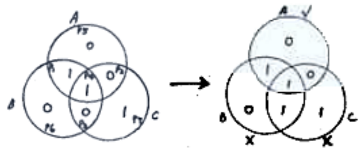
Apakah ada metode pengkodean agar penerima dapat memperbaiki kesalahan transmisi? Gambar 5 menunjukkan salah satu metode tersebut dengan menyusun urutan bit (misalnya, 1001) ke dalam sebuah blok persegi panjang dan menambahkan bit paritas pada baris maupun kolomnya. Untuk contoh yang ditunjukkan, 1001 akan disandikan menjadi 10011111 (dengan terlebih dahulu menambahkan paritas baris, kemudian paritas kolom). Jika terjadi kesalahan selama transmisi, misalnya pada posisi 2, penerima dapat menyusun kembali urutan yang diterima, yaitu 11011111, ke dalam blok persegi panjang dan mendeteksi bahwa terdapat kesalahan pada baris 1 dan kolom 2.



*Gambar 5. Kode yang dapat memperbaiki 1 kesalahan.*

Metode di atas dapat digunakan untuk memperbaiki satu kesalahan, namun biayanya cukup besar. Untuk setiap empat bit, seseorang perlu mengirimkan tambahan empat bit redundan (bit tambahan). Apakah ada cara pengodean yang lebih baik?Pada tahun 1950, Hamming menemukan metode yang sangat cerdas untuk menambahkan redundansi tersebut. Untuk mengodekan urutan empat bit $P_1, P_2, P_3, P_4$ (misalnya 1001), langkah pertama adalah menggambar tiga lingkaran yang saling berpotongan (A, B, dan C) dan menempatkan bit informasi

$P_1, P_2, P_3, P_4$ ke dalam empat wilayah yang saling tumpang tindih: $A \cap B, A \cap C, B \cap C$, dan $A \cap B \cap C$ (Gambar 6). Kemudian, tiga bit paritas $P_5, P_6, P_7$ dibuat sedemikian rupa sehingga jumlah angka 1 di setiap lingkaran adalah bilangan genap. Untuk contoh yang ditunjukkan, 1001 akan dikodekan menjadi 1001001.



*Gambar 6. Kode hamming*

Jika terjadi satu kesalahan selama transmisi, misalnya 1001001 diterima sebagai 1011001, penerima dapat memeriksa paritas dari ketiga lingkaran tersebut dan menemukan bahwa kesalahan terletak di lingkaran B dan C, tetapi tidak di lingkaran A. Kode Hamming (7,4) ini (notasi (7,4) berarti bahwa setiap 4 bit informasi dikodekan menjadi urutan 7 bit) dapat digeneralisasi. Sebagai contoh, seseorang dapat menggambar 4 bola yang saling berpotongan dalam ruang tiga dimensi untuk mendapatkan kode Hamming (15,11). Hamming juga telah membuktikan bahwa metode pengodeannya adalah yang paling optimal untuk koreksi kesalahan tunggal (single error correction).

## Pojok Soal

**Soal 46.** Untuk bilangan bulat $a$ berapakah $x^2 - x + a$ membagi habis $x^{13} + x + 90$?

**Soal 47.** Jika $x, y, z$ adalah bilangan riil sedemikian sehingga $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, maka tunjukkan bahwa $x + y + z \leq xyz + 2$.

**Soal 48.** Persegi $ABDE$ dan $BCFG$ digambar di luar segitiga $ABC$. Buktikan bahwa segitiga $ABC$ adalah sama kaki jika $DG$ sejajar dengan $AC$.

**Soal 49.** Misalkan $u_1, u_2, u_3, \ldots$ adalah sebuah barisan bilangan bulat sedemikian sehingga $u_1 = 29, u_2 = 45$ dan $u_{n+2} = u_{n+1}^2 - u_n$ untuk $n = 1$, 2, 3,... Tunjukkan bahwa 1996 membagi habis tak terhingga banyaknya suku dalam barisan ini.

**Soal 50.** Empat bilangan bulat ditandai pada sebuah lingkaran. Pada setiap langkah, kita secara bersamaan mengganti setiap bilangan dengan selisih antara bilangan tersebut dan bilangan berikutnya pada lingkaran dalam arah tertentu (artinya, bilangan $a, b, c, d$ diganti dengan $a - b, b - c, c - d, d - a$). Mungkinkah setelah 1996 langkah tersebut, kita mendapatkan bilangan $a, b, c, d$ sedemikian sehingga bilangan-bilangan $|bc - ad|, |ac - bd|, |ab - cd|$ adalah bilangan prima?

## Solusi

**Soal 41.** Tentukan semua bilangan bulat non-negatif $x, y$ yang memenuhi persamaan $(xy - 7)^2 = x^2 + y^2$.

**Solusi:** Misalkan $x, y$ adalah bilangan bulat non-negatif sedemikian sehingga $(xy - 7)^2 = x^2 + y^2$. Maka secara aljabar $(xy - 6)^2 + 13 = (x + y)^2$. Sehingga

$$13 = [(x + y) + (xy - 6)][(x + y) - (xy - 6)].$$

Karena 13 adalah bilangan prima, faktor-faktor di ruas kanan hanya bisa berupa $\pm 1$ atau $\pm 13$. Terdapat empat kemungkinan yang menghasilkan $(x, y) =$ (0,7), (7,0), (3,4), (4,3).

**Soal 42.** Apa saja nilai yang mungkin dari $\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$ jika $x$ mencakup seluruh bilangan riil?

**Solusi:** Misalkan $A = (x, 0), B = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), C = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Ekspresi $\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x + 1}$ tidak lain adalah $AB - AC$. Seiring dengan $x$ mencakup seluruh bilangan riil, titik $A$ bergerak di sepanjang sumbu riil (sumbu-$x$) dan ketaksamaan segitiga menghasilkan

$$-1 = -BC < AB - AC < BC = 1.$$

Semua angka pada interval $(-1, 1)$ adalah mungkin.

**Soal 43.** Berapa banyak himpunan bagian yang terdiri dari 3 elemen dari himpunan $X$ = {1, 2, 3, ..., 20} sedemikian sehingga hasil kali dari ke-3 bilangan dalam himpunan bagian tersebut habis dibagi 4?

**Solusi:** Terdapat $C_3^{20} = 1140$ himpunan bagian dengan 3 elemen dari $X$. Untuk himpunan bagian dengan 3 elemen yang hasil kali ketiga bilangannya tidak habis dibagi 4, bilangan-bilangan tersebut bisa berupa semuanya ganjil (terdapat $C_3^{10}$ = 120 himpunan bagian seperti itu) atau dua ganjil dan satu genap, tetapi bilangan genapnya tidak habis dibagi 4 (terdapat $C_2^{10} \times 5$ = 225 himpunan bagian seperti itu). Jadi, jawaban untuk masalah ini adalah 1140 – 120 – 225 = 795.

**Soal 44.** Pada sebuah segitiga lancip $ABC$, misalkan $H$ adalah titik kaki garis tegak lurus dari $A$ ke $BC$. Misalkan $M, N$ berturut-turut adalah titik-titik kaki garis tegak lurus dari $H$ ke $AB$ dan $AC$. Definisikan $L_A$ sebagai garis yang melalui $A$ dan tegak lurus terhadap $MN$, dan dengan cara yang sama definisikan $L_B$ serta $L_C$. Tunjukkan bahwa $L_A$, $L_B$, dan $L_C$ melalui satu titik persekutuan $O$.

**Solusi:** Misalkan $L_A$ memotong lingkaran luar $\Delta ABC$ di $A$ dan $E$. Karena $\angle AMH = 90^\circ = \angle ANH$, maka $A, M, H, N$ adalah titik-titik yang siklik (terletak pada satu lingkaran). Dengan demikian, $\angle MAH = \angle MNH = 90^\circ - \angle ANM = \angle NAE = \angle CBE$. Sekarang, $\angle ABE = \angle CBE + \angle ABC = \angle MAH + \angle ABC = 90^\circ$. Jadi, $AE$ adalah diameter dari lingkaran luar tersebut dan $L_A$ melalui titik pusat lingkaran luar $O$. Dengan cara yang sama, $L_B$ dan $L_C$ juga akan melalui $O$.

**Soal 45.** Misalkan $a, b, c > 0$ dan $abc = 1$. Buktikan bahwa

$$\frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} + \frac{bc}{b^5 + c^5 + bc} + \frac{ca}{c^5 + a^5 + ca} \leq 1$$

**Solusi:** Dengan menjabarkan $(a^3 - b^3)(a^2 - b^2) \geq 0$, kita mendapatkan $a^5 + b^5 \geq a^2b^2(a + b)$. Jadi dengan menggunakan ini dan $abc = 1$, kita mendapatkan

$$\frac{ab}{a^5 + b^5 + ab} \leq \frac{ab}{a^2b^2(a + b) + ab} \times \frac{c^2}{c^2}$$
$$= \frac{c}{a + b + c}$$

Dengan menjumlahkan 3 ketaksamaan serupa, kita mendapatkan ketaksamaan yang diinginkan. Faktanya, kesamaan (tanda sama dengan) dapat terjadi jika dan hanya jika $a = b = c = 1$.