



### Pojok Olimpiade

**Masalah 1.** Salah satu sisi segitiga sama dengan sepertiga dari jumlah dua sisi lainnya. Buktikan bahwa sudut yang berhadapan dengan sisi pertama tersebut adalah sudut terkecil dari segitiga tersebut.

**Masalah 2.** Anda diberi 25 potong keju dengan berat yang berbeda-beda. Apakah selalu memungkinkan untuk memotong salah satu keju menjadi dua bagian dan memasukkan 26 potongan tersebut ke dalam dua paket sedemikian rupa sehingga:

- (i) setiap paket berisi 13 potongan keju;
- (ii) total berat kedua paket tersebut sama;
- (iii) dua bagian dari keju yang dipotong berada di paket yang berbeda?

**Masalah 3.** Dalam sebuah turnamen catur, masing-masing dari  $2n$  pemain bertanding melawan pemain lainnya tepat satu kali di setiap babak dari dua babak yang ada. Kemenangan bernilai 1 poin dan hasil remis bernilai  $\frac{1}{2}$  poin. Buktikan bahwa jika untuk setiap pemain, total skor di babak pertama berbeda dengan babak kedua setidaknya  $n$  poin, maka perbedaan tersebut tepat  $n$  poin untuk setiap pemain.

**Masalah 4.**  $AC'BA'CB'$  adalah sebuah segi enam konveks sedemikian rupa sehingga  $AB' = AC'$ ,  $BC' = BA'$ , dan  $CA' = CB'$ . Selain itu,  $\angle A + \angle B + \angle C = \angle A' + \angle B' + \angle C'$ . Buktikan bahwa luas segitiga  $ABC$  adalah setengah dari luas segi enam tersebut.

**Masalah 5.** Buktikan bahwa bilangan

- a)  $9^{9^{9^7}}$ ;
- b)  $1997^{17}$

tidak dapat dinyatakan sebagai jumlah dari bilangan pangkat tiga dari beberapa bilangan bulat berurutan.

**Masalah 6.** Misalkan  $P$  adalah sebuah titik di dalam segitiga  $ABC$  dengan  $AB = BC$ ,  $\angle ABC = 80^\circ$ ,  $\angle PAC = 40^\circ$ , dan  $\angle ACP = 30^\circ$ . Tentukan  $\angle BPC$ .

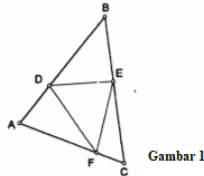
**Masalah 7.** Anda diberikan sebuah timbangan dan masing-masing satu buah dari sepuluh anak timbangan seberat 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, dan 512 gram. Sebuah benda dengan berat  $M$  gram, di mana  $M$  adalah bilangan bulat positif, dapat diseimbangkan dengan berbagai cara berbeda dengan menempatkan berbagai kombinasi anak timbangan yang diberikan pada salah satu cawan timbangan.

- a) Buktikan bahwa tidak ada benda yang dapat diseimbangkan dengan lebih dari 89 cara.
- b) Tentukan sebuah nilai  $M$  sedemikian rupa sehingga benda dengan berat  $M$  gram dapat diseimbangkan dengan tepat 89 cara.

### Geometri Yang Tidak Di Ajarkan (5)

(Vol 4 – No 3)

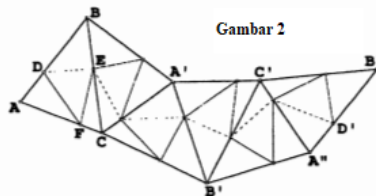
Gambar 1 menunjukkan sebuah segitiga lancip  $ABC$  dan salah satu segitiga inskripsi (dalam)  $DEF$ .



Gambar 1

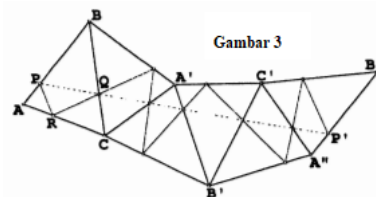
Mari kita pikirkan bersama: Jika kita membuat segitiga inskripsi secara acak pada  $\Delta ABC$ , manakah yang memiliki keliling terpendek? Pertanyaan ini pertama kali diajukan oleh matematikawan Fagnano pada abad ke-18. Menggunakan metode kalkulus (diferensial), melalui perhitungan dan penyederhanaan yang rumit, ia berhasil menemukan segitiga inskripsi dengan keliling terpendek. Oleh karena itu, masalah ini juga dikenal sebagai Masalah Fagnano.

Setelah satu abad berlalu, matematikawan lain bernama Schwarz menemukan solusi geometri elementer yang sangat indah: Seperti yang ditunjukkan pada Gambar 2, Schwarz merefleksikan  $\Delta ABC$  secara bergantian terhadap sisi-sisinya seperti cermin, menghasilkan enam segitiga kongruen yang saling terhubung.



Gambar 2

Panjang total dari garis putus-putus  $DE \dots D'$  pada Gambar 2 tepat dua kali lipat dari keliling  $\Delta DEF$ . Jika kita menggeser titik  $D, E, F$  di sepanjang tiga sisi  $\Delta ABC$ , dapatkah kita menemukan segitiga inskripsi lain  $PQR$  sedemikian rupa sehingga garis putus-putus tersebut membentuk satu garis lurus  $PP'$  (Gambar 3)?



Gambar 3

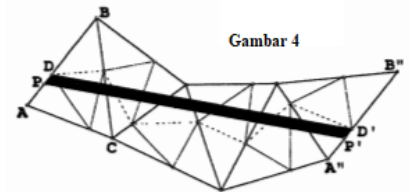
Jika kita menghubungkan titik  $D$  dan  $D'$  dengan sebuah segmen garis, segmen garis ini pasti lebih pendek daripada garis patah  $DE \dots D'$ . Namun, bagaimana kita membandingkan panjang  $PP'$  dan  $DD'$ ? Kuncinya terletak pada alasan mengapa

Schwarz melakukan tepat lima kali refleksi cermin. Jika Anda perhatikan baik-baik sisi  $AB$  dan  $A''B''$  pada Gambar 2, keduanya tidak hanya memiliki panjang yang sama, tetapi juga tampak sejajar satu sama lain. Schwarz dengan cerdas menggunakan konsep rotasi untuk membuktikan bahwa  $AB$  sejajar dengan  $A''B''$ :

$AB$  diputar di sekitar titik  $B$  sebesar  $2\angle B$  menghasilkan  $A'B'$ , lalu diputar di sekitar titik  $A'$  sebesar  $2\angle A$  menghasilkan  $A'B''$ ;  $A'B'$  diputar di sekitar titik  $B'$  sebesar  $-2\angle B$  menghasilkan  $A''B'$ , lalu diputar di sekitar titik  $A''$  sebesar  $-2\angle A$  menghasilkan  $A''B''$ . Oleh karena itu, sudut antara  $AB$  dan  $A''B''$  adalah:

$$2\angle B + 2\angle A - 2\angle B - 2\angle A = 0$$

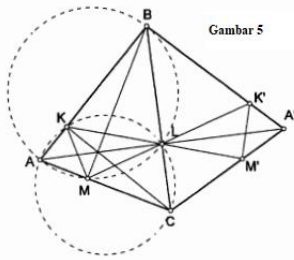
Artinya,  $AB$  sejajar dengan  $A''B''$ . Karena  $AD = A''D'$  dan  $AP = A''P'$ , maka  $PDD'P'$  adalah jajaran genjang (Gambar 4). Dengan kata lain, keliling  $\Delta PQR (= \frac{1}{2}PP')$  adalah yang terpendek di antara semua segitiga inskripsi pada  $\Delta ABC$ .



Gambar 4

Apa karakteristik dari  $\Delta PQR$  ini? Jika Anda melihat kembali Gambar 3, tidak sulit untuk menemukan bahwa  $\Delta PQR$  tampaknya merupakan segitiga ortik (orthic triangle) dari  $\Delta ABC$ . Teman-teman sekalian dapat menggunakan Gambar 5 untuk membuktikan bahwa sudut  $\angle KLM$  pada segitiga ortik tersebut dibagi dua sama besar oleh garis tinggi  $AL$ . Kuncinya terletak pada sifat empat titik siklik (seperlingkaran) dalam gambar tersebut, yang sengaja ditinggalkan untuk dipahami oleh teman-teman sendiri.

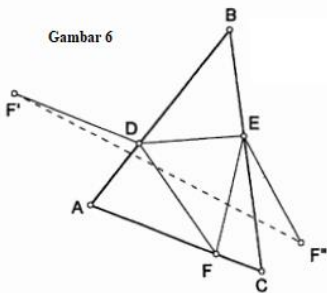
Karena  $\Delta A'BC$  adalah bayangan refleksi dari  $\Delta ABC$  dengan  $BC$  sebagai cermin, maka garis tinggi  $AL$  dan  $A'L$  membentuk satu garis lurus, dan  $AL$  juga membagi dua sudut  $\angle K'LM$ . Dari sini dapat disimpulkan bahwa  $KL$  dan  $LM$  juga membentuk satu garis lurus. Dengan analogi yang sama, jika refleksi cermin dilakukan secara terus-menerus seperti pada Gambar 2, maka  $\Delta KLM$  adalah segitiga inskripsi dengan keliling terpendek yang kita cari.



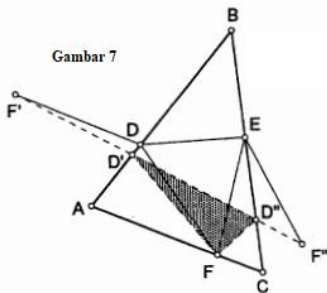
Gambar 5

Meskipun bukti Schwarz sangat cerdas, pertunjukan terbaik baru saja dimulai. Pada tahun 1900, Fejér, seorang matematikawan Hongaria yang saat itu masih belajar di Berlin, menemukan bukti yang jauh lebih ringkas daripada bukti Schwarz:

Gunakan sisi  $BA$  dan  $BC$  dari  $\triangle ABC$  sebagai cermin untuk menemukan bayangan dari titik  $F$ , yaitu  $F'$  dan  $F''$  (Gambar 6). Dari sifat refleksi cermin, kita tahu bahwa  $FD = F'D$  dan  $FE = F''E$ . Oleh karena itu, total panjang garis patah  $F'DEF''$  sama dengan keliling segitiga inskripsi  $\triangle DEF$ . Jelas sekali, selama titik  $F$  tidak berubah, tidak peduli bagaimana dua titik lainnya ( $D$  dan  $E$ ) bergerak di sepanjang  $AB$  dan  $BC$ , keliling segitiga inskripsi yang dihasilkan pasti lebih besar dari panjang garis lurus  $F'F''$ . Misalkan  $F'F''$  memotong  $AB$  dan  $BC$  masing-masing di titik  $D'$  dan  $D''$  (Gambar 7), maka keliling  $\triangle FD'D''$  adalah yang terpendek di antara semua segitiga inskripsi yang salah satu titik sudutnya berada di  $F$ .

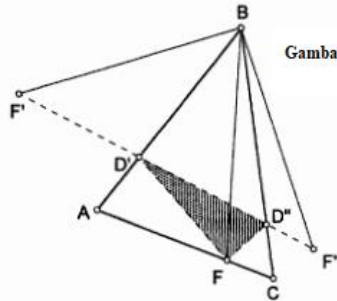


Gambar 6



Gambar 7

Selanjutnya, kita ubah posisi  $F$  untuk mencari segitiga  $\triangle FD'D''$  dengan keliling terpendek di antara semuanya.



Gambar 8

Menggunakan sifat simetri refleksi cermin pada Gambar 8, kita tahu bahwa:  $BF' = BF = BF''$ ,  $\angle F'BD' = \angle FBD'$  dan  $\angle FBD'' = \angle F''BD''$ . Oleh karena itu:

$$F'F'' = 2BF \sin B.$$

Di sini, hanya panjang  $BF$  yang dapat diubah. Nilai minimum dari panjang  $BF$  tercapai ketika  $BF$  merupakan garis tinggi dari  $\triangle ABC$ , yaitu ketika  $F$  adalah titik kaki tegak lurus. Dengan cara yang sama, dua titik sudut lainnya ( $D$  dan  $E$ ) juga harus merupakan titik kaki tegak lurus agar  $\triangle DEF$  menjadi segitiga inskripsi dengan keliling terpendek.

### Sebuah Bukti untuk Teorema Lambek dan Moser

Dua barisan  $f(n)$  dan  $f^*(n)$  disebut barisan invers jika:

$$f^*(n) = k, \text{ di mana } f(k) < n \leq f(k+1)$$

Dua barisan  $F(n)$  dan  $G(n)$  disebut barisan komplementer jika  $F(n)$  dan  $G(n)$  bersama-masing memuat setiap bilangan asli tepat satu kali.

**Teorema:**  $f(n)$  dan  $f^*(n)$  adalah barisan invers jika dan hanya jika  $F(n) = f(n) + n$  dan  $G(n) = f^*(n) + n$  adalah barisan komplementer (dengan kondisi minor bahwa (i)  $f(n)$  dan  $f^*(n)$  adalah barisan tidak-turun dari bilangan bulat non-negatif; (ii)  $F(n)$  dan  $G(n)$  adalah barisan naik tegas dari bilangan bulat positif).

**Bukti:** Kita akan membuktikan pernyataan sebaliknya terlebih dahulu. Misalkan  $F(n)$  dan  $G(n)$  adalah barisan naik tegas dari bilangan bulat positif sedemikian rupa sehingga  $F$  dan  $G$  saling komplementer. Sebagai contoh,

$$F(n) = \overbrace{1, 2, 3, \dots, 6, 8, 10, 11, \dots}^r$$

$$G(n) = \overbrace{4, 5, 7, 9, \dots, 12, \dots}^r$$

Misalkan  $N$  adalah sebuah bilangan asli. Misalkan  $r$  dan  $s$  masing-masing adalah banyaknya suku dalam  $F(n)$  dan  $G(n)$  yang nilainya  $\leq N$ . Berdasarkan ilustrasi di atas, jika  $N = 9$ , maka  $r = 5$  dan  $s = 4$ . Perhatikan bahwa  $r + s = N$ .

Sekarang tinjau  $f(n) = F(n) - n$  dan  $f^*(n) = G(n) - n$ .

$$f(n) = \overbrace{0, 0, 0, \dots, 2, 3, 4, 4, \dots}^r$$

$$f^*(n) = \overbrace{3, 3, 4, 5, \dots, 7, \dots}^r$$

Kita mengamati bahwa

$$f^*(s) = G(s) - s = N - s = r$$

Artinya,  $f^*(s)$  = jumlah suku dalam  $f$  yang muncul di sebelah kiri (secara posisi) dari suku  $f^*(s)$ . Demikian pula,  $f(r)$  = jumlah suku dalam  $f$  yang muncul di sebelah kiri dari suku  $f(r)$ .

Karena suku  $f(r)$  muncul di sebelah kiri dari  $f^*(s)$ , maka  $f(r) < s$ . Kita dapat menunjukkan dengan cara serupa bahwa  $f(r+1) \geq s$  sehingga

$$f(r) < s \leq f(r+1)$$

Artinya,  $f^*(n)$  adalah fungsi distribusi frekuensi dari  $f(n)$ , sehingga  $f(n)$  dan  $f^*(n)$  adalah barisan invers. Fakta bahwa  $f(r) < s \leq f(r+1)$  juga dapat dibuktikan secara formal sebagai berikut.

$$f(r) = F(r) - r < N - r = s;$$

$$f(r+1) = F(r+1) - (r+1) > N - (r+1) = s - 1,$$

$$f(r+1) \geq s.$$

Sekarang kita akan menunjukkan bahwa jika  $f(n)$  adalah barisan tidak-turun dari bilangan bulat non-negatif dan  $f^*(n)$  adalah fungsi distribusi frekuensinya, maka  $F(n) = f(n) + n$  dan  $G(n) = f^*(n) + n$  saling komplementer. Diberikan barisan  $f(n)$ , kita pertama-tama dapat mengonstruksi barisan  $F(n) = f(n) + n$ . Misalkan  $H(n)$  adalah barisan komplementer dari  $F(n)$  dan misalkan  $h(n) = H(n) - n$ . Dari bukti sebaliknya,  $h(n)$  haruslah distribusi frekuensi dari  $f(n)$ . Karena distribusi frekuensi dari suatu fungsi yang diberikan adalah unik, maka  $h(n) = f^*(n)$ , sehingga  $G(n) = f^*(n) + n = h(n) + n = H(n)$  adalah barisan komplementer dari  $F(n)$ .

### Pojok Soal

**Soal 71.** Tentukan semua solusi real dari sistem persamaan berikut

$$\begin{aligned}x + \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) &= y, \\y + \log(y + \sqrt{y^2 + 1}) &= z, \\z + \log(z + \sqrt{z^2 + 1}) &= x.\end{aligned}$$

**Soal 72.** Apakah mungkin menuliskan bilangan 1, 2, ..., 121 ke dalam tabel berukuran  $11 \times 11$  sedemikian rupa sehingga setiap dua bilangan berurutan ditulis dalam sel yang memiliki sisi bersama (bertetangga) dan semua bilangan kuadrat sempurna terletak pada satu kolom yang sama?

**Soal 73.** Buktikan bahwa jika  $a$  dan  $b$  adalah bilangan rasional yang memenuhi persamaan  $a^5 + b^5 = 2a^2b^2$ , maka  $1 - ab$  adalah kuadrat dari suatu bilangan rasional.

**Soal 74.** Titik  $A_2, B_2, C_2$  berturut-turut adalah titik tengah dari garis tinggi  $AA_1, BB_1, CC_1$  pada segitiga lancip  $ABC$ . Tentukan jumlah dari  $\angle B_2A_1C_2 + \angle C_2B_1A_2 + \angle A_2C_1B_2$ .

**Soal 75.** Misalkan  $P(x)$  adalah polinomial dengan koefisien bilangan bulat sedemikian rupa sehingga  $P(21) = 17, P(32) = -247, P(37) = 33$ . Buktikan bahwa jika  $P(N) = N + 51$  untuk suatu bilangan bulat  $N$ , maka  $N = 26$ .

\*\*\*\*\*

### Solusi

**Soal 66.** (a) Temukan bilangan bulat positif pertama yang angka kuadratnya diakhiri dengan tiga angka 4. (b) Temukan semua bilangan bulat positif yang angka kuadratnya diakhiri dengan tiga angka 4. (c) Tunjukkan bahwa tidak ada kuadrat sempurna yang diakhiri dengan empat angka 4.

**Solusi:** (a) Karena  $21^2 < 444 < 22^2$  dan  $1444 = 38^2$ , maka bilangan bulat positif pertama yang memenuhi adalah 38.

(b) Misalkan  $n$  adalah bilangan bulat tersebut, maka  $n^2 - 1444 = (n - 38)(n + 38)$  harus habis dibagi  $1000 = 2^3 \cdot 5^3$ . Ini menyiratkan salah satu dari  $n - 38$  atau  $n + 38$  habis dibagi 4. Karena selisih keduanya adalah 76 (habis dibagi 4), keduanya harus habis dibagi 4. Karena 76 tidak habis dibagi 5, salah satu dari  $n - 38$  atau  $n + 38$  harus habis dibagi  $4 \cdot 5^3 = 500$ . Maka  $n = 500k \pm 38$  untuk suatu

bilangan bulat non-negatif  $k$ . Sebaliknya, untuk nilai  $n$  tersebut,  $n^2 = 1000(250k^2 \pm 38k) + 1444$  akan selalu diakhiri dengan tiga angka 4.

(c) Karena  $250k^2 \pm 38k$  selalu genap, tidak ada kuadrat sempurna yang dapat diakhiri dengan empat angka 4.

**Soal 67.** Misalkan  $\mathbb{Z}$  dan  $\mathbb{R}$  masing-masing menyatakan bilangan bulat dan bilangan real. Tentukan semua fungsi  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$  sedemikian rupa sehingga

$$f\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

untuk semua bilangan bulat  $x, y$  sedemikian rupa sehingga  $x + y$  habis dibagi 3.

**Solusi:** Untuk semua bilangan bulat  $n$ ,

$$f(0) + f(3n) = 2f(n) = f(n) + f(2n)$$

Hal ini menyiratkan

$$f(n) = f(2n) = \frac{f(3n) + f(3n)}{2} = f(3n)$$

Jadi  $f(n) = f(0)$  untuk semua bilangan bulat  $n$ . Jelas juga bahwa semua fungsi konstan merupakan solusi.

**Soal 68.** Jika persamaan

$$ax^2 + (c - b)x + (e - d) = 0$$

memiliki akar-akar real yang lebih besar dari 1, tunjukkan bahwa persamaan

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

memiliki setidaknya satu akar real.

**Solusi:** Andaikan

$$p(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$$

tidak memiliki akar real. Misalkan  $y > 1$  adalah akar dari  $ay^2 + (c - b)y + (e - d) = 0$  dan  $z = \sqrt{y}$ . Karena

$$p(x) = ax^4 + (c - b)x^2 + (e - d) + (x - 1)(bx^2 + d)$$

kita mendapatkan

$$p(z) = (z - 1)(bz^2 + d)$$

dan

$$p(-z) = (-z - 1)(bz^2 + d)$$

Sekarang,  $z > 1$  menyiratkan salah satu dari  $p(z), p(-z)$  bernilai positif, sedangkan yang lainnya bernilai negatif. Oleh karena itu,  $p(x)$  memiliki akar di antara  $z$  dan  $-z$ , sebuah kontradiksi.

**Soal 69.**  $ABCD$  adalah sebuah segi empat sedemikian rupa sehingga  $AB = AD$  dan  $\angle B = \angle D = 90^\circ$ . Titik  $F$  dan  $E$  berturut-turut dipilih pada  $BC$  dan  $CD$ , sedemikian rupa sehingga  $DF \perp AE$ . Buktikan bahwa  $AF \perp BE$ .

**Solusi 1:** Misalkan  $E'$  adalah bayangan cermin dari  $E$  terhadap garis  $AC$ . Misalkan  $X$  adalah titik potong dari  $DF$  dan  $AE$ . Misalkan  $Y$  adalah titik potong dari  $AF$  dan  $BE$ . Karena  $\angle ADE = 90^\circ = \angle AXD$ , kita mendapatkan  $\angle ADF = \angle DEA = \angle BE'A = 180^\circ - \angle AE'F$ . Jadi  $A, D, F, E'$  berada pada satu lingkaran yang sama (concylic). Maka  $\angle AFD = \angle AE'D = \angle AEB$ . Jadi  $X, E, F, Y$  berada pada satu lingkaran yang sama (concylic). Oleh karena itu,  $\angle EYF = \angle EXF = 90^\circ$ .

**Solusi 2:** Karena  $DF \perp AE$  dan  $DA \perp DE$ , maka

$$\begin{aligned}0 &= \overrightarrow{DF} \cdot \overrightarrow{AE} \\ &= (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF}) \cdot \overrightarrow{AE} \\ &= \overrightarrow{DA} \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}) + \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AE}\end{aligned}$$

yang dapat disederhanakan menjadi

$$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AD}^2.$$

Karena  $BF \perp BA$ , maka

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BE} &= \overrightarrow{AF} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE}) \\ &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}) \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AE} \\ &= -|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AD}|^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

yang menyiratkan bahwa  $AF \perp BE$ .

**Soal 70.** Garis-garis  $l_1, l_2, \dots, l_k$  berada pada suatu bidang sedemikian rupa sehingga tidak ada dua garis yang sejajar dan tidak ada tiga garis yang berpotongan di satu titik (concurrent). Tunjukkan bahwa kita dapat melabeli  $C_2^k$  titik potong dari garis-garis ini dengan angka 1, 2, ...,  $k - 1$  sedemikian rupa sehingga pada setiap garis  $l_1, l_2, \dots, l_k$ , angka 1, 2, ...,  $k - 1$  muncul tepat satu kali jika dan hanya jika  $k$  genap.

**Solusi:** Jika pelabelan seperti itu ada untuk suatu bilangan bulat  $k$ , maka label 1 harus muncul sekali pada setiap garis dan setiap titik yang diberi label 1 terletak tepat pada 2 garis. Oleh karena itu, terdapat  $k/2$  banyaknya angka 1, yang berarti  $k$  adalah genap.

Sebaliknya, jika  $k$  genap, maka pelabelan berikut dapat digunakan: untuk  $1 \leq i < j \leq k - 1$ , berikan titik potong dari garis  $l_i$  dan  $l_j$  label  $i + j - 1$  ketika  $i + j \leq k$ , dan label  $i + j - k$  ketika  $i + j > k$ . Untuk titik potong dari garis  $l_k$  dan  $l_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k - 1$ ), berikan label  $2i - 1$  ketika  $2i \leq k$ , dan label  $2i - k$  ketika  $2i > k$ .