



### Pojok Olimpiade

**Masalah 1.**  $N$  adalah bilangan bulat empat digit (satuan ribu) yang tidak diakhiri dengan angka nol, dan  $R(N)$  adalah bilangan bulat empat digit yang diperoleh dengan membalik urutan digit-digit dari  $N$ ; sebagai contoh,  $R(3275) = 5723$ . Tentukan semua bilangan bulat  $N$  yang memenuhi  $R(N) = 4N + 3$ .

**Masalah 2.** Untuk bilangan bulat positif  $n$ , barisan  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  didefinisikan oleh:

$$a_1 = 1, a_n = \frac{(n+1)}{(n-1)}(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}), n > 1.$$

Tentukan nilai dari  $a_{1997}$ .

**Masalah 3.** Para Kurcaci di Land-under-the-Mountain baru saja menerapkan sistem mata uang desimal penuh berbasis Pippin, dengan koin emas bernilai 1 Pippin, 10 Pippin, 100 Pippin, dan 1000 Pippin. Ada berapa banyak cara yang mungkin bagi seorang Kurcaci untuk membayar tagihan tepat sebesar 1997 Pippin menggunakan kombinasi koin-koin tersebut?

**Masalah 4.** Misalkan  $ABCD$  adalah sebuah segi empat konveks. Titik-titik tengah dari  $AB, BC, CD$  dan  $DA$  berturut-turut adalah  $P, Q, R$ , dan  $S$ . Jika diketahui segi empat  $PQRS$  memiliki luas 1, buktikan bahwa luas dari segi empat  $ABCD$  adalah 2.

**Masalah 5.** Misalkan  $x, y$ , dan  $z$  adalah bilangan riil positif.

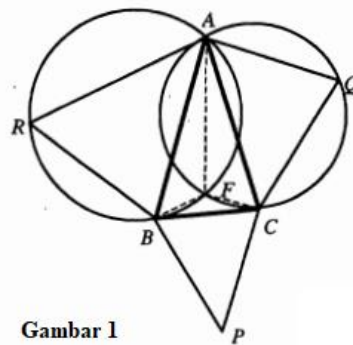
- i) Jika  $x + y + z \geq 3$ , apakah selalu benar bahwa  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leq 3$ ?
- ii) Jika  $x + y + z \leq 3$ , apakah selalu benar bahwa  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 3$ ?

### Geometri Yang Tidak Di Ajarkan (4)

(Vol 4 – No 2)

Dengan membuat segitiga-segitiga lain pada ketiga sisi dari suatu segitiga sembarang, selama memenuhi beberapa kondisi sederhana, kita sering kali bisa mendapatkan hasil-hasil yang sangat indah.

Pada Gambar 1, tiga buah segitiga—yaitu  $ABR, BCP$ , dan  $CAQ$ —dibuat secara sembarang di sisi luar dari ketiga sisi segitiga  $ABC$ . Pada saat yang sama, dibuat pula lingkaran luar dari segitiga  $ABR$  dan segitiga  $CAQ$ . Hubungkan salah satu titik potong kedua lingkaran luar tersebut, yaitu titik  $F$ , ke titik  $A, B$ , dan  $C$ .



Gambar 1

$$\begin{aligned} \angle BFC &= 360^\circ - \angle AFB - \angle AFC \\ &= 360^\circ - (180^\circ - \angle ARB) \\ &\quad - (180^\circ - \angle AQC) \\ &= \angle ARB + \angle AQC. \end{aligned}$$

Jika kondisi

$$\angle BPC + \angle ARB + \angle CQA = 180^\circ$$

terpenuhi, maka  $\angle BPC$  dan  $\angle BFC$  saling berpelurus (suplemen). Oleh karena itu, lingkaran luar dari segitiga  $BPC$  juga akan melalui titik  $F$ . Kondisi ini tidaklah sulit untuk dipenuhi, dan dua situasi berikut ini merupakan kasus khususnya:

- (1) Segitiga  $ABR, CPB$ , dan  $QCA$  sebangun;
- (2)  $A, B$ , dan  $C$  masing-masing merupakan titik-titik pada sisi  $QR, RP$ , dan  $PQ$  dari segitiga  $PQR$ .

Jika segitiga  $ABR, CPB$ , dan  $QCA$  sebangun, maka segitiga yang dibentuk

oleh pusat lingkaran luar mereka, yaitu  $O_3, O_1$ , dan  $O_2$ , juga akan sebangun dengan segitiga-segitiga tersebut (Gambar 2). Alasannya adalah sebagai berikut:

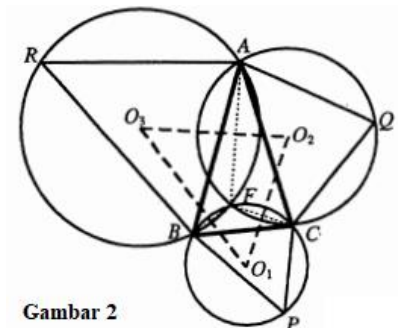
Karena  $O_1O_2$  dan  $O_1O_3$  adalah garis penghubung titik pusat lingkaran, maka mereka masing-masing tegak lurus dengan tali busur persekutuan  $CF$  dan  $BF$ . Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} \angle O_2O_1O_3 &= 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - \angle BFC \\ &= 180^\circ - \angle BFC \\ &= \angle CPB (= \angle ABR = \angle QCA). \end{aligned}$$

Dengan cara yang sama,

$$\begin{aligned} \angle O_1O_3O_2 &= \angle BRA (= \angle CAQ = \angle PBC), \\ \angle O_3O_2O_1 &= \angle AQC (= \angle RAB = \angle BCP), \end{aligned}$$

Terbukti.

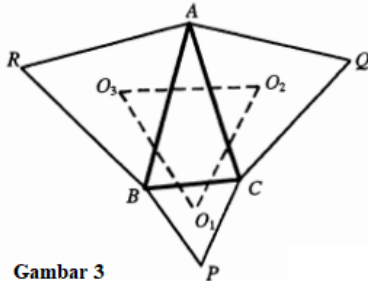


Gambar 2

Napoleon (Napoleon) adalah seorang jenderal besar yang dikenal oleh semua orang, namun tahukah Anda bahwa ia memiliki minat yang mendalam terhadap matematika, khususnya geometri? Jenis segitiga yang ingin saya perkenalkan sekarang konon ditemukan olehnya, sehingga generasi setelahnya menamai segitiga jenis ini sebagai Segitiga Napoleon.

Pada ketiga sisi dari suatu segitiga sembarang  $ABC$ , dibuat tiga buah segitiga sama sisi ke arah luar, masing-masing adalah segitiga  $ABR, BCP$ , dan  $CAQ$  (Gambar 3). Titik-titik pusat dari ketiga segitiga sama sisi ini, yaitu  $O_1, O_2$ ,

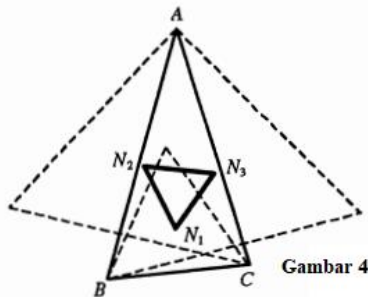
dan  $O_3$ , dapat dihubungkan menjadi sebuah segitiga  $O_1O_2O_3$ , yang disebut



Gambar 3

sebagai Segitiga Napoleon Luar. Dari hasil yang telah disebutkan sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa Segitiga Napoleon Luar juga merupakan sebuah segitiga sama sisi.

Jika kita sedikit mengubah metode pembuatan di atas, dengan membuat ketiga segitiga sama sisi tersebut di sisi dalam dari ketiga sisi segitiga  $ABC$ , kita dapat memperoleh segitiga lain yaitu  $N_1N_2N_3$  seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4, yang disebut sebagai Segitiga Napoleon Dalam.



Gambar 4

Matematikawan Rusia I.M. Yaglom dengan cerdas membuktikan bahwa Segitiga Napoleon Dalam juga merupakan sebuah segitiga sama sisi:

Dengan menerapkan aturan kosinus pada segitiga  $AO_3O_2$  pada Gambar 3, diperoleh:

$$(O_2O_3)^2 = \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - 2 \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c}{\sqrt{3}} \cos(A + 60^\circ),$$

Di sini kita menggunakan fakta-fakta sederhana seperti:

$$AO_2 = \frac{b}{\sqrt{3}}, \quad AO_3 = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

dan

$$\angle O_3AO_2 = A + 60^\circ$$

Silakan teman-teman memverifikasinya sendiri.

Dengan menerapkan metode serupa pada segitiga  $AN_3N_2$ , diperoleh:

$$(N_2N_3)^2 = \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - 2 \cdot \frac{b}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c}{\sqrt{3}} \cos(60^\circ - A)$$

Dengan mengurangi kedua persamaan di atas pada sisi yang sama, diperoleh:

$$\begin{aligned} (O_2O_3)^2 - (N_2N_3)^2 &= \frac{2bc}{3} (\cos(60^\circ - A) - \cos(A + 60^\circ)) \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} bc \sin A \\ &= \frac{4}{\sqrt{3}} \times \text{Luas } \triangle ABC \end{aligned}$$

Proses penyederhanaan di bagian ini diabaikan (sengaja dilewati).

Karena  $O_2O_3 = O_3O_1 = O_1O_2$ , oleh karena itu  $N_2N_3 = N_3N_1 = N_1N_2$ . Kecerdikan dari bukti ini terletak pada fakta bahwa ia membawakan kita sebuah hasil lain yang indah dan tak terduga:

Luas Segitiga Napoleon Luar - Luas Segitiga Napoleon Dalam = Luas Segitiga  $ABC$ ,

Teman-teman silakan memverifikasinya sendiri.

Setelah membuat segitiga sama sisi pada sisi luar dari ketiga sisi segitiga sembarang  $ABC$ , ada satu lagi sifat indah yang ditemukan oleh matematikawan abad ke-17, Fermat:

Pada Gambar 5, karena segitiga  $ABR$ ,  $BQP$ , dan  $CAQ$  semuanya adalah segitiga sama sisi, maka jika  $\triangle ARC$  diputar sebesar  $60^\circ$  terhadap titik  $A$ , akan diperoleh  $\triangle ABQ$ . Oleh karena itu,

$$RC = BQ$$

dan

$$\angle RFB = 60^\circ.$$

Dengan cara yang sama,  $PA = CR$ . Jadi,

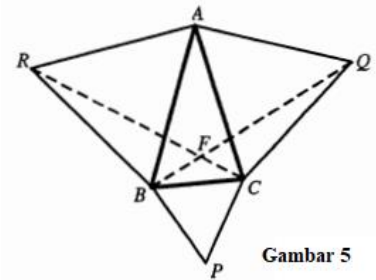
$$AP = BQ = CR.$$

Lebih jauh lagi,

$$\angle RFB = 60^\circ = \angle RAB$$

dan

$$\angle CFQ = 60^\circ = \angle CAQ.$$



Gambar 5

Oleh karena itu,  $ARBF$  dan  $CQAF$  keduanya merupakan segiempat tali busur (segiempat siklik yang titik-titik sudutnya berada pada satu lingkaran). Karena  $\angle BFC = 120^\circ$  dan  $\angle CPB = 60^\circ$ , dapat disimpulkan bahwa  $BPCF$  juga merupakan segiempat tali busur. Ketiga lingkaran ini berpotongan di satu titik  $F$ , yang disebut sebagai Titik Fermat. Karena pada awalnya  $F$  merupakan titik potong antara  $BQ$  dan  $CR$ , dari sudut pandang simetri dapat diketahui bahwa  $F$  juga terletak pada  $AP$ .

### Barisan Invers dan Barisan Komplementer

Perhatikan barisan berikut

$$f(n) = 0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 7, 10, \dots$$

yaitu,  $f(1) = 0, f(2) = 0, f(3) = 0, f(4) = 1,$  dan seterusnya. Kita dapat mengonstruksi barisan lain  $f^*(n)$  berdasarkan definisi

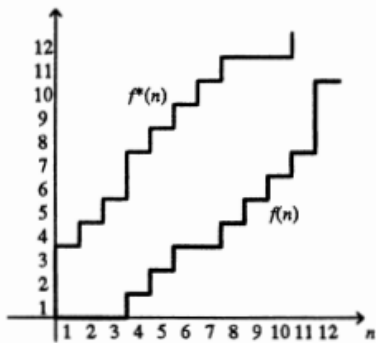
$$f^*(n) = k, \text{ di mana } f(k) < n \leq f(k+1).$$

Untuk contoh kita,

$$f^*(n) = 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 11, 11, \dots$$

Perhatikan bahwa  $f^*(n)$  juga dapat disebut sebagai "fungsi distribusi frekuensi" dari  $f(n)$  karena  $f^*(n)$  merupakan banyaknya suku dalam barisan  $f$  yang bernilai kurang dari  $n$ .

Gambar 1 menunjukkan grafik dari kedua fungsi  $f(n)$  dan  $f^*(n)$ . Kita mencatat sesuatu yang menarik:  $f^*$  adalah cerminan (bayangan cermin) dari  $f$ . Jika kita menghitung distribusi frekuensi dari  $f^*(n)$ , kita akan mendapatkan  $f(n)$  kembali. Yaitu,  $f^{**}(n) = f(n)$ . Barisan  $f(n)$  dan  $f^*(n)$  disebut sebagai barisan invers.



Gambar 1. Fungsi  $f(n)$  dan  $f^*(n)$

Sekarang kita mengonstruksi dua barisan lainnya

$$F(n) = f(n) + n \text{ dan } G(n) = f^*(n) + n.$$

Untuk contoh kita,

$$F(n) = 1, 2, 3, 5, 7, 9, 10, 12, 14, \dots;$$

$$G(n) = 4, 6, 8, 11, 13, 15, 17, 19, 20, \dots$$

Apakah Anda menyadari sesuatu? Kedua barisan  $F(n)$  dan  $G(n)$  jika digabungkan

akan memuat setiap bilangan asli tepat satu kali. Barisan  $F(n)$  dan  $G(n)$  ini disebut sebagai barisan komplementer (barisan saling melengkapi).

**Teorema (Lambek dan Moser).**  $f(n)$  dan  $f^*(n)$  adalah barisan invers jika dan hanya jika  $F(n) = f(n) + n$  dan  $G(n) = f^*(n) + n$  adalah barisan komplementer (dengan syarat minor bahwa (i)  $f(n)$  dan  $f^*(n)$  adalah barisan bilangan bulat non-negatif yang tidak turun (*non-decreasing*); (ii)  $F(n)$  dan  $G(n)$  adalah barisan bilangan bulat positif yang naik bertingkat/tegas (*strictly increasing*)).

Jika rumus untuk suku ke- $n$  dari suatu barisan diketahui, teorema Lambek dan Moser dapat digunakan untuk mencari rumus umum dari barisan komplementernya. Contoh berikut mengilustrasikan gagasan tersebut.

**Contoh.** Kita dapat memisahkan bilangan asli menjadi dua barisan  $F(n)$  dan  $G(n)$  yang masing-masing memuat bilangan kuadrat sempurna dan bilangan bukan kuadrat sempurna sebagai berikut.

$$F(n) = 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, \dots,$$

$$G(n) = 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, \dots$$

Kita tahu bahwa rumus untuk bilangan kuadrat ke- $n$  adalah  $F(n) = n^2$ . Bisakah kita menemukan rumus untuk bilangan bukan kuadrat ke- $n$  yaitu  $G(n)$ ?

Kita mencatat bahwa  $F(n)$  dan  $G(n)$  saling komplementer, sehingga barisan

$$f(n) = F(n) - n = 0, 2, 6, 12, 20, \dots,$$

$$f^*(n) = G(n) - n = 1, 1, 2, 2, 2, 3, \dots,$$

merupakan barisan invers. Sekarang,

$$f(n) = F(n) - n = n^2 - n.$$

Oleh karena itu,  $f^*(n) = k$  di mana

$$f(k) < n \leq f(k+1),$$

$$k^2 - k < n \leq (k+1)^2 - (k+1) = k^2 + k.$$

Karena  $k$  dan  $n$  keduanya adalah bilangan bulat, maka

$$k^2 - k + \frac{1}{4} < n < k^2 + k + \frac{1}{4},$$

$$\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 < n < \left(k + \frac{1}{2}\right)^2,$$

$$k - \frac{1}{2} < \sqrt{n} < k + \frac{1}{2},$$

$$\sqrt{n} - \frac{1}{2} < k < \sqrt{n} + \frac{1}{2}.$$

Akibatnya,

$$f^*(n) = k = \left\lfloor \sqrt{n} + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

dan

$$G(n) = f^*(n) + n = n + \left\lfloor \sqrt{n} + \frac{1}{2} \right\rfloor.$$

### Pojok Soal

**Soal 66.** (a) Carilah bilangan bulat positif pertama yang nilai kuadratnya diakhiri dengan tiga angka 4.

(b) Carilah semua bilangan bulat positif yang nilai kuadratnya diakhiri dengan tiga angka 4.

(c) Tunjukkan bahwa tidak ada bilangan kuadrat sempurna yang diakhiri dengan empat angka 4.

**Soal 67.** Misalkan  $Z$  dan  $R$  berturut-turut menyatakan himpunan bilangan bulat dan bilangan riil. Carilah semua fungsi  $f: Z \rightarrow R$  sedemikian rupa sehingga

$$f\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

untuk semua bilangan bulat  $x, y$  sedemikian rupa sehingga  $x + y$  habis dibagi oleh 3.

**Soal 68.** Jika persamaan

$$ax^2 + (c - b)x + (e - d) = 0$$

memiliki akar-akar riil yang lebih besar dari 1, tunjukkan bahwa persamaan

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

memiliki setidaknya satu akar riil.

**Soal 69.**  $ABCD$  adalah sebuah segi empat sedemikian rupa sehingga  $AB = AD$  dan  $\angle B = \angle D = 90^\circ$ . Titik  $F$  dan  $E$  berturut-turut dipilih pada sisi  $BC$  dan  $CD$ , sedemikian rupa sehingga  $DF \perp AE$ . Buktikan bahwa  $AF \perp BE$ .

**Soal 70.** Garis-garis  $l_1, l_2, \dots, l_k$  berada pada sebuah bidang sedemikian rupa sehingga tidak ada dua garis yang sejajar dan tidak ada tiga garis yang berpotongan di satu titik (konkuren). Tunjukkan bahwa kita dapat melabeli  $C_2^k$  titik potong dari garis-garis ini dengan bilangan  $1, 2, \dots, k-1$  sedemikian rupa sehingga pada setiap garis  $l_1, l_2, \dots, l_k$ , bilangan  $1, 2, \dots, k-1$  muncul tepat satu kali jika dan hanya jika  $k$  bernilai genap.

\*\*\*\*\*

### Solusi

**Soal 61.** Carilah bilangan bulat positif terkecil yang dapat dituliskan sebagai jumlah dari sembilan, jumlah dari sepuluh, dan jumlah dari sebelas bilangan bulat positif berurutan.

**Solusi:** Misalkan  $n$  adalah bilangan bulat positif terkecil yang memenuhi syarat tersebut. Maka

$$\begin{aligned} n &= a + (a + 1) + \dots + (a + 8) = 9a + 36, \\ n &= b + (b + 1) + \dots + (b + 9) = 10b + 45 \\ n &= c + (c + 1) + \dots + (c + 10) = 11c + 55. \end{aligned}$$

Hal ini menunjukkan bahwa  $n$  habis dibagi oleh

$$9 \times 5 \times 11 = 495.$$

Jadi  $n \geq 495$ . Dengan memilih  $a = 51, b = 45, c = 40$ , kita dapat melihat bahwa nilai 495 memenuhi syarat. Jadi  $n = 495$ .

**Soal 62.** Misalkan  $ABCD$  adalah sebuah segi empat tali busur (siklik) dan misalkan  $P$  dan  $Q$  berturut-turut adalah titik-titik pada sisi  $AB$  dan  $AD$  sedemikian rupa sehingga  $AP = CD$  dan  $AQ = BC$ . Misalkan  $M$  adalah titik potong antara  $AC$  dan  $PQ$ . Tunjukkan bahwa  $M$  adalah titik tengah dari  $PQ$ .

**Solusi:** Misalkan  $[XYZ]$  menyatakan luas dari  $\Delta XYZ$ . Maka

$$\begin{aligned} \frac{MP}{MQ} &= \frac{[PAC]}{[QAC]} = \frac{\frac{AP}{AB} [ABC]}{\frac{AQ}{AD} [ADC]} \\ &= \frac{CD \cdot AD \cdot [ABC]}{AB \cdot BC \cdot [ADC]} \\ &= \frac{[ADC] \cdot [ABC]}{[ABC] \cdot [ADC]} = 1. \end{aligned}$$

**Soal 63.** Tunjukkan bahwa untuk  $n \geq 2$ , terdapat permutasi  $a_1, a_2, \dots, a_n$  dari  $1, 2, \dots, n$  sedemikian rupa sehingga  $|a_k - k| = |a_1 - 1| \neq 0$  untuk  $k = 2, 3, \dots, n$  jika dan hanya jika  $n$  bernilai genap.

**Solusi:** Andaikan untuk suatu  $n$ , kondisi tersebut dapat dipenuhi. Misalkan  $d = |a_1 - 1|$ ,  $p$  menyatakan banyaknya kejadian di mana  $a_k > k$ , dan  $q$  menyatakan banyaknya kejadian di mana  $a_k < k$ . Maka  $p + q = n$  dan

$$\begin{aligned} 0 &= (a_1 - 1) + (a_2 - 2) + \dots + (a_n - n) \\ &= pd - qd. \end{aligned}$$

Oleh karena itu  $p = q$  dan  $n$  bernilai genap. Jika  $n$  genap, maka bentuk permutasi  $2, 1, 4, 3, \dots, n, n-1$  akan memenuhi kondisi tersebut dengan nilai  $|a_1 - 1| = 1$ .

**Soal 64.** Tunjukkan bahwa tidak mungkin untuk menempatkan 1995 bilangan bulat positif yang berbeda di sepanjang sebuah lingkaran sedemikian rupa sehingga untuk setiap dua bilangan yang bersebelahan, rasio (perbandingan) antara bilangan yang lebih besar terhadap bilangan yang lebih kecil merupakan bilangan prima.

**Solusi:** Andaikan hal tersebut dapat dilakukan. Misalkan  $a_1, a_2, \dots, a_{1995}$  adalah bilangan-bilangan tersebut dalam arah jarum jam. Maka  $a_{k-1}/a_k$  merupakan bilangan prima atau kebalikan (resiprokal) dari bilangan prima untuk  $k = 1, 2, \dots, 1995$  dengan  $a_0 = a_{1995}$ . Misalkan  $m$  dari rasio-rasio tersebut merupakan bilangan prima dan  $1995 - m$  sisanya merupakan kebalikan dari bilangan prima. Karena

$$\left(\frac{a_0}{a_1}\right) \left(\frac{a_1}{a_2}\right) \dots \left(\frac{a_{1994}}{a_{1995}}\right) = 1,$$

hal ini berarti hasil kali dari  $m$  bilangan prima akan sama dengan hasil kali dari  $1995 - m$  bilangan prima. Berdasarkan faktorisasi prima yang unik (Teorema Dasar Aritmetika), hal ini mengimplikasikan bahwa  $m = 1995 - m$ , di mana kondisi tersebut tidak mungkin terjadi karena 1995 adalah bilangan ganjil.

**Problem 65.** Semua sisi dan diagonal dari sebuah 12-gon beraturan (segi-12 beraturan) diwarnai dengan 12 warna (setiap ruas garis diwarnai dengan satu warna). Mungkinkah untuk setiap tiga warna apa pun, terdapat tiga titik sudut yang saling dihubungkan satu sama lain oleh ruas-ruas garis dari warna-warna tersebut?

**Solusi:** Ada 12 sisi dan 54 diagonal. Dengan 12 warna, terdapat suatu warna, katakanlah  $X$ , yang digunakan untuk mewarnai paling banyak 5 dari ruas-ruas garis tersebut. Untuk setiap ruas garis yang berwarna  $X$ , terdapat 10 segitiga yang dapat dibentuk dengan ruas garis ini sebagai salah satu sisinya (menggunakan 10 titik sudut yang tersisa). Jadi, terdapat paling banyak 50 segitiga yang memiliki setidaknya satu sisi berwarna  $X$ . Namun, jika setiap tiga warna apa pun merupakan warna dari sisi-sisi suatu segitiga, maka harus ada  $C_2^{11} = 55$  segitiga yang memiliki setidaknya satu sisi berwarna  $X$ , sebuah kontradiksi.