

Pojok Olimpiade

Masalah 1. Diberikan

$$S = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} + \dots$$

$$+ \frac{1}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{1993006}}$$

di mana penyebutnya berisi jumlah parsial dari urutan kebalikan (reciprocal) bilangan segitiga. Buktikan bahwa $S > 1001$.

Masalah 2. Temukan sebuah bilangan bulat n , dengan $100 \leq n \leq 1997$, sedemikian sehingga $\frac{2^n + 2}{n}$ juga merupakan bilangan bulat.

Masalah 3. Misalkan ABC adalah sebuah segitiga yang terinskripsi (berada di dalam) sebuah lingkaran dan misalkan

$$l_a = \frac{m_a}{M_a}, \quad l_b = \frac{m_b}{M_b}, \quad l_c = \frac{m_c}{M_c}$$

di mana m_a, m_b, m_c adalah panjang garis bagi sudut (internal terhadap segitiga) dan M_a, M_b, M_c adalah panjang garis bagi sudut yang diperpanjang hingga bertemu dengan lingkaran. Buktikan bahwa

$$\frac{l_a}{\sin^2 A} + \frac{l_b}{\sin^2 B} + \frac{l_c}{\sin^2 C} \geq 3.$$

dan bahwa kesamaan tersebut berlaku jika dan hanya jika (iff) ABC adalah segitiga sama sisi.

Masalah 4. Segitiga $A_1A_2A_3$ memiliki sudut siku-siku di A_3 . Sebuah urutan titik sekarang didefinisikan melalui proses iteratif berikut, di mana n adalah bilangan bulat positif. Dari $A_n (n \geq 3)$, sebuah garis tegak lurus ditarik hingga bertemu $A_{n-2}A_{n-1}$ di A_{n+1} .

(a) Buktikan bahwa jika proses ini dilanjutkan tanpa batas, maka ada satu dan hanya satu titik P yang berada di dalam setiap segitiga $A_{n-2}A_{n-1}A_n, n \geq 3$.

(b) Misalkan A_1 dan A_3 adalah titik tetap. Dengan mempertimbangkan semua kemungkinan lokasi A_2 pada bidang tersebut, tentukan locus (lintasan) dari P .

Masalah 5. Andaikan ada n orang A_1, A_2, \dots, A_n ($n \geq 3$) yang duduk melingkar dan setiap orang A_i memiliki sejumlah a_i objek sedemikian sehingga

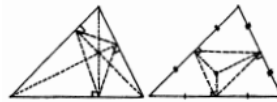
$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = nN$$

di mana N adalah bilangan bulat positif. Agar setiap orang memiliki jumlah objek yang sama, setiap orang A_i harus memberi atau menerima sejumlah objek tertentu kepada atau dari dua tetangganya A_{i-1} dan A_{i+1} , di mana A_{n+1} berarti A_1 dan A_0 berarti A_n . Bagaimana distribusi ini harus dilakukan agar jumlah total objek yang dipindahkan menjadi minimum?

Geometri Yang Tidak Di Ajarkan (3)

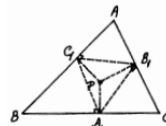
(Vol 3 – No 4)

Sifat umum apa yang dimiliki oleh segitiga ortik (orthic triangle) dan segitiga medial (medial triangle) yang telah kita bahas sebelumnya? Mari kita tinjau kembali kedua segitiga ini (Gambar 1).



Gambar 1

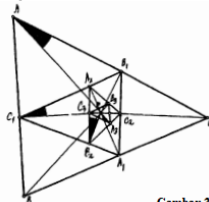
Sebenarnya, keduanya dapat dipandang sebagai dua kasus khusus dari situasi yang lebih umum: Misalkan P adalah titik sembarang di dalam segitiga ABC yang diketahui. Dengan menarik garis tegak lurus dari P ke tiga sisi segitiga tersebut, kaki-kaki dari ketiga garis tegak lurus ini membentuk segitiga lain $A_1B_1C_1$. Segitiga ini disebut sebagai segitiga pedal (pedal triangle) dari segitiga ABC terhadap titik pedal (pedal point) P (Gambar 2).



Gambar 2

Dengan menggunakan ortosenter (orthocenter) dan sirkumsenter (circumcenter) dari segitiga ABC sebagai titik pedal, kita dapat memperoleh segitiga ortik dan segitiga medial sebagai segitiga pedal dari ABC . Sifat menarik apa yang dimiliki oleh segitiga pedal? Neuberg mengajukan dan membuktikan sebuah fenomena periodik dari segitiga pedal:

Dengan menggunakan P sebagai titik pedal dari segitiga $A_1B_1C_1$, kita dapat memperoleh segitiga pedal $A_2B_2C_2$ dari $A_1B_1C_1$. Melanjutkan metode ini dengan tetap menggunakan P sebagai titik pedal, kita dapat memperoleh segitiga pedal lainnya $A_3B_3C_3$, dan seterusnya (Gambar 3).



Gambar 3

Karena masing-masing memiliki sepasang sudut berhadapan yang merupakan sudut siku-siku, maka segiempat berikut adalah segiempat siklik (segiempat tali busur): $AC_1PB_1, C_1B_2PA_2$, dan $B_2A_3PC_3$. Oleh karena itu, $\angle B_1AP, \angle B_1C_1P (= \angle A_2C_1P), \angle A_2B_2P (= \angle C_3B_2P)$, dan $\angle C_3A_3P$ secara berurutan sama besar berpasangan sebagai sudut keliling pada busur yang sama. Jadi, $\angle B_1AP = \angle C_3A_3P$; dengan cara yang sama, $\angle C_1AP = \angle B_3A_3P$. Kedua hasil ini memberitahu kita bahwa: $\angle BAC = \angle B_3A_3C_3$; analog dengan itu, $\angle ACB = \angle A_3C_3B_3$ dan $\angle ABC = \angle A_3B_3C_3$. Oleh karena itu, segitiga ABC dan $A_3B_3C_3$ adalah

sebangun. Terlihat jelas bahwa segitiga pedal memiliki sifat periodik sebagai berikut:

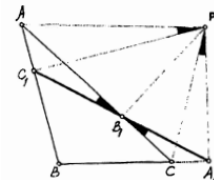
$$\Delta ABC \sim \Delta A_3B_3C_3 \sim \Delta A_6B_6C_6 \sim \dots,$$

$$\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_4B_4C_4 \sim \Delta A_7B_7C_7 \sim \dots$$

$$\text{dan } \Delta A_2B_2C_2 \sim \Delta A_5B_5C_5 \sim \Delta A_8B_8C_8 \sim \dots$$

Jika titik pedal berada di luar segitiga ABC , apakah sifat periodisitas ini masih berlaku? Jawabannya secara umum adalah ya. Anda dapat merujuk pada pembuktian di atas dan melakukan sedikit modifikasi. Apakah ada pengecualian? Jika Anda mahir menggunakan perangkat lunak geometri interaktif seperti Cabri Geometry atau Geometer's Sketchpad, ini akan menjadi aktivitas eksplorasi yang bermakna. Melalui eksplorasi tersebut, Anda akan menemukan bahwa: Jika titik pedal P terletak pada lingkaran luar (circumcircle) dari segitiga ABC , maka segitiga pedal $A_1B_1C_1$ akan berdegenerasi menjadi sebuah garis lurus, dan tidak ada titik pedal lain yang dapat membuat segitiga pedal berdegenerasi menjadi garis lurus. Garis lurus ini disebut sebagai Garis Simson (Simson Line).

Misalkan A_1, B_1, C_1 segaris (Gambar 4), maka $\angle AB_1C_1$ dan $\angle A_1B_1C$ adalah sudut bertolak belakang, sehingga besarnya sama. Diketahui $\angle PA_1C = \angle PB_1C = 90^\circ$ dan $\angle PB_1A = \angle PC_1A = 90^\circ$, sehingga empat titik P, A_1, C, B_1 berada pada satu lingkaran (kolisik), dan P, B_1, C_1, A juga berada pada satu lingkaran. Dari sini dapat disimpulkan bahwa $\angle A_1PC = \angle A_1B_1C = \angle AB_1C_1 = \angle APC_1$. Selain itu, karena $\angle PA_1B = \angle PC_1B = 90^\circ$, maka empat titik P, A_1, B, C_1 juga berada pada satu lingkaran. Oleh karena itu, $\angle A_1PC_1$ dan $\angle C_1BA_1$ saling berpelurus (suplemen). Namun, karena $\angle A_1PC_1 = \angle A_1PC + \angle CPC_1 = \angle APC_1 + \angle CPC_1 = \angle APC$, maka $\angle APC$ dan $\angle ABC (= \angle C_1BA_1)$ juga saling berpelurus. Dengan demikian, empat titik A, B, C, P berada pada satu lingkaran, yang berarti titik P terletak pada lingkaran luar (circumcircle) segitiga ABC .



Gambar 4

Jika penalaran di atas dibalik, ternyata hasilnya juga tetap berlaku. Oleh karena itu, hanya titik-titik pada lingkaran luar yang dapat menyebabkan segitiga pedal berdegenerasi menjadi Garis Simson.

Dapatkah periodisitas segitiga pedal diperluas ke poligon segi- n ? Anda mungkin bisa mencobanya terlebih dahulu dengan segi empat. B. M.

Stewart pada tahun 1940 membuktikan bahwa: Poligon pedal ke- n dari sebuah segi- n sebangun dengan segi- n aslinya.

Dengan bantuan Geometer's Sketchpad, ditemukan beberapa sifat menarik dan membuktikannya. Anda mungkin ingin mencoba mengeksplorasi atau bahkan memperluasnya lebih jauh. Sifat-sifat tersebut meliputi:

- Untuk poligon segi- n cekung (konkaf) dan poligon segi- n yang berpotongan sendiri (self-intersecting), apakah poligon pedal ke- n tetap sebangun dengan poligon segi- n aslinya?
- Jika titik pedal berada di luar poligon segi- n , apakah sifat serupa tetap ada? Kondisi apa yang dapat menyebabkan poligon pedal segi- n tidak terbentuk (tidak eksis)?
- Berapakah rasio luas antara poligon pedal segi- n ke- n dengan poligon segi- n yang asli?
- Jika kaki tegak lurus (titik proyeksi) diganti dengan sudut x° , apakah sifat-sifat serupa tersebut tetap berlaku?
- Di manakah letak titik pedal yang dapat menghasilkan luas segitiga pedal ketiga (atau segitiga kaki tegak lurus ketiga) yang maksimum?

Solusi

Soal 51. Apakah ada bilangan bulat positif n sedemikian sehingga $\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}$ merupakan bilangan rasional?

Solusi: Andaikan ada bilangan bulat positif n sedemikian sehingga

$$\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1} = r$$

adalah bilangan rasional. Dengan mengkuadratkan dan menyederhanakan, kita mendapatkan

$$\sqrt{n^2-1} = \frac{r^2-2n}{2}$$

juga merupakan bilangan rasional. Namun, untuk $n > 1$, jika $\sqrt{n^2-1} = a/b$ untuk suatu bilangan bulat positif a, b yang tidak memiliki faktor persekutuan lebih besar dari 1, maka $a^2 = b^2(n^2-1)$, yang menyiratkan bahwa b juga membagi a . Jadi b haruslah 1. Sekarang, untuk $n > 1$,

$$n^2 > n^2 - 1 = a^2 > (n-1)^2$$

adalah hal yang mustahil. Jadi $n = 1$, tetapi kemudian

$$\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1} = \sqrt{2}$$

adalah bilangan irasional. Oleh karena itu, tidak ada n yang memenuhi.

Soal 52. Misalkan a, b, c adalah bilangan riil berbeda sedemikian sehingga $a^3 = 3(b^2 + c^2) - 25$, $b^3 = 3(c^2 + a^2) - 25$, $c^3 = 3(a^2 + b^2) - 25$. Tentukan nilai dari abc .

Solusi: Misalkan a, b, c adalah akar-akar dari

$$x^3 - px^2 + qx - r = 0$$

Maka $p = a + b + c$, $q = ab + bc + ca$ dan $r = abc$. Karena $a^2 + b^2 + c^2 = p^2 - 2q$, maka:

$a^3 = 3(b^2 + c^2) - 25 = 3(p^2 - 2q - a^2) - 25$
Ini setara dengan $a^3 + 3a^2 + (25 + 6q - 3p^2) = 0$. Maka a adalah akar dari $x^3 + 3x^2 + (25 + 6q - 3p^2) = 0$. Demikian pula, b dan c adalah akar-akar dari persamaan ini. Membandingkan koefisien-koefisien dari kedua persamaan tersebut, kita mendapatkan $p = -3$, $q = 0$ dan $abc = r = -(25 + 6q - 3p^2) = 2$.

Soal 53. Untuk $\triangle ABC$, definisikan A' pada BC sedemikian sehingga $AB + BA' = AC + CA'$, dan dengan cara yang sama definisikan B' pada CA serta C' pada AB . Tunjukkan bahwa AA', BB', CC' berpotongan di satu titik (konkuren). (Titik perpotongan ini disebut sebagai titik Nagel dari $\triangle ABC$.)

Solusi: Misalkan $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ dan $s = (AB + BC + CA)/2$ (setengah keliling). Karena $AB + BA' = s = AC + CA'$, kita mendapatkan $BA' = s - c$ dan $CA' = s - b$. Dengan cara yang sama, $CB' = s - a$, $AB' = s - c$, $AC' = s - b$, dan $BC' = s - a$. Maka $(CA'/BA')(AB'/CB')(BC'/AC') = 1$. Oleh karena itu, berdasarkan kebalikan dari teorema Ceva, garis AA', BB', CC' adalah konkuren.

Soal 54. Misalkan R adalah himpunan bilangan riil. Tentukan semua fungsi $f: R \rightarrow R$ sedemikian sehingga

$$f(f(x+y)) = f(x+y) + f(x)f(y) - xy$$

untuk semua $x, y \in R$.

Solusi: Dengan memasukkan $y = 0$, kita mendapatkan

$$f(f(x)) = [1 + f(0)]f(x).$$

Dengan mengganti x dengan $x + y$, kita mendapatkan

$$[1 + f(0)]f(x+y) = f(f(x+y)) = f(x+y) + f(x)f(y) - xy$$

yang jika disederhanakan menjadi

$$f(0)f(x+y) = f(x)f(y) - xy.$$

Dengan memasukkan $y = 1$, kita mendapatkan

$$f(0)f(x+1) = f(x)f(1) - x$$

Dengan memasukkan $y = -1$ dan mengganti x menjadi $x + 1$, kita mendapatkan

$$f(0)f(x) = f(x+1)f(-1) + x + 1$$

Dengan mengeliminasi $f(x+1)$ dari kedua persamaan terakhir, kita mendapatkan

$$[f^2(0) - f(1)f(-1)]f(x) = [f(0) - f(-1)]x + f(0)$$

Jika $f^2(0) - f(1)f(-1) \neq 0$, maka $f(x)$ adalah fungsi linear. Jika $f^2(0) - f(1)f(-1) = 0$, maka dengan memasukkan $x = 0$ ke dalam persamaan terakhir, kita mendapatkan $f(0) = 0$. Dalam kasus ini, persamaan yang ditampilkan sebelumnya menyiratkan bahwa $f(x)f(y) = xy$. Maka $f(x)f(1) = x$ untuk semua $x \in R$. Jadi $f(1) \neq 0$ dan $f(x)$ adalah linear.

Terakhir, dengan mensubstitusikan $f(x) = ax + b$ ke dalam persamaan asli, karena $f(x)$ tidak mungkin berupa fungsi konstan, kita menemukan bahwa $a = 1$ dan $b = 0$, yaitu: $f(x) = x$ untuk semua $x \in R$.

Soal 55. Pada awalnya, 65 ekor kumbang ditempatkan pada kotak-kotak yang berbeda di papan catur berukuran 9×9 . Dalam setiap langkah, setiap kumbang merayap ke kotak tetangga secara horizontal atau vertikal. Jika tidak ada kumbang yang melakukan dua langkah horizontal berturut-turut atau dua langkah vertikal berturut-turut, tunjukkan bahwa setelah beberapa langkah, akan ada setidaknya dua kumbang di kotak yang sama.

Solusi: Berikan pasangan terurut (a, b) untuk setiap kotak dengan $a, b = 1, 2, \dots, 9$. Bagi 81 kotak tersebut menjadi 3 tipe: Tipe A terdiri dari kotak-kotak di mana a dan b keduanya ganjil, tipe B terdiri dari kotak-kotak di mana a dan b keduanya genap dan tipe C terdiri dari kotak-kotak sisanya. Jumlah kotak untuk tipe A, B, dan C masing-masing adalah 25, 16, dan 40.

Andaikan tidak ada tabrakan yang terjadi. Setelah dua langkah berturut-turut, kumbang-kumbang yang berada di kotak tipe A akan berada di kotak tipe B. Jadi, jumlah kumbang di kotak tipe A paling banyak adalah 16 pada waktu kapan pun. Maka, terdapat paling banyak 32 kumbang di kotak tipe A atau tipe B pada waktu kapan pun. Selain itu, setelah satu langkah, kumbang-kumbang di kotak tipe C akan berpindah ke kotak tipe A atau tipe B. Jadi, terdapat paling banyak 32 kumbang di kotak tipe C pada waktu kapan pun. Oleh karena itu, terdapat paling banyak 64 kumbang di atas papan, sebuah kontradiksi.

Pojok Soal

Soal 56. Tentukan semua bilangan prima p sedemikian sehingga $2^p + p^2$ juga merupakan bilangan prima.

Soal 57. Buktikan bahwa untuk bilangan riil $x, y, z > 0$:

$$\frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x} \geq \frac{x+y+z}{2}.$$

Soal 58. Misalkan ABC adalah segitiga lancip dengan $BC > CA$. Misalkan O adalah titik pusat lingkaran luar (circumcenter), H adalah titik tinggi (orthocenter), dan F adalah titik kaki garis tinggi CH . Misalkan garis yang tegak lurus dengan OF di titik F memotong sisi CA di titik P . Buktikan bahwa $\angle FHP = \angle BAC$.

Soal 59. Misalkan n adalah bilangan bulat positif yang lebih besar dari 2. Tentukan semua solusi bilangan riil (x_1, x_2, \dots, x_n) untuk persamaan $(1-x_1)^2 + (x_1-x_2)^2 + \dots$

$$+ (x_{n-1}-x_n)^2 + x_n^2 = \frac{1}{n+1}.$$