

Pojok Olimpiade

Masalah 1. Misalkan $x_1, x_2, \dots, x_{1997}$ adalah bilangan real yang memenuhi dua kondisi berikut:

- $-\frac{1}{\sqrt{3}} \leq x_i \leq \sqrt{3}$ ($i = 1, 2, \dots, 1997$);
- $x_1 + x_2 + \dots + x_{1997} = -318\sqrt{3}$.

Tentukan nilai maksimum dari

$$x_1^{12} + x_2^{12} + \dots + x_{1997}^{12}.$$

Masalah 2. Misalkan $A_1B_1C_1D_1$ adalah sebuah segi empat konveks sembarang. Misalkan P adalah sebuah titik di dalam segi empat sedemikian sehingga ruas garis dari P ke setiap titik sudut membentuk sudut lancip dengan kedua sisi yang melalui titik sudut tersebut. Secara rekursif, definisikan A_k, B_k, C_k dan D_k sebagai titik-titik yang simetris terhadap P berturut-turut terhadap garis $A_{k-1}B_{k-1}, B_{k-1}C_{k-1}, C_{k-1}D_{k-1}$ dan $D_{k-1}A_{k-1}$ ($k = 2, 3, \dots$).

Perhatikan barisan segi empat

$$A_jB_jC_jD_j \quad (j = 1, 2, \dots).$$

- Tentukan manakah di antara 12 segi empat pertama yang sebangun dengan segi empat ke-1997.
- Jika segi empat ke-1997 adalah segi empat tali busur (cyclic), tentukan manakah di antara 12 segi empat pertama yang merupakan segi empat tali busur.

Masalah 3. Buktikan bahwa terdapat tak berhingga banyaknya bilangan asli n sedemikian sehingga $1, 2, \dots, 3n$ dapat disusun ke dalam sebuah larik (array)

$$\begin{matrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{matrix}$$

yang memenuhi dua kondisi berikut:

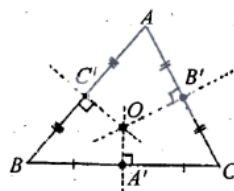
- $a_1 + b_1 + c_1 = a_2 + b_2 + c_2 = \dots = a_n + b_n + c_n$ dan jumlah tersebut merupakan kelipatan 6;
- $a_1 + a_2 + \dots + a_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n$ dan jumlah tersebut merupakan kelipatan 6.

Geometri Yang Tidak Di Ajarkan (2)

(Vol 3 – No 3)

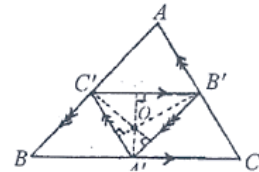
Pada abad ke-18, Swiss melahirkan seorang matematikawan besar bernama Euler. Meskipun ia mengalami kebutaan pada satu matanya saat berusia dua puluh tahunan, ia menghabiskan seluruh hidupnya dengan gigih melakukan penelitian matematika dan menghasilkan karya yang sangat banyak. Begitu banyak teorema, rumus, dan metode dalam matematika yang ditemukan, dibuktikan, atau diciptakan olehnya. Yang akan kita perkenalkan sekarang adalah Garis Euler (Euler Line) — sebuah garis lurus yang menghubungkan beberapa titik penting dalam sebuah segitiga.

Untuk sebarang segitiga ABC , buatlah garis bagi tegak lurus (perpendicular bisectors) dari ketiga sisinya melalui titik tengah (mid-points) A', B' , dan C' . Kita tahu bahwa: ketiga garis bagi tegak lurus ini berpotongan di satu titik yang sama, yaitu titik O pada Gambar 1. Titik O ini adalah titik pusat lingkaran luar (circumcentre) dari segitiga ABC , prinsip yang kami yakini sudah Anda ketahui.



Di sisi lain, segitiga $A'B'C'$ dan ABC tidak hanya sebangun, tetapi sisi-sisi yang bersesuaian juga sejajar. Segitiga $A'B'C'$ yang panjang sisinya setengah dari segitiga semula ini disebut sebagai segitiga titik tengah (medial triangle) dari segitiga ABC . Ketiga garis tingginya (altitudes) tepat berada pada garis OA', OB' , dan OC' ,

sehingga titik O juga berperan sebagai titik tinggi (orthocentre) dari segitiga titik tengah $A'B'C'$ (Gambar 2).



Euler menemukan bahwa dalam segitiga apa pun, titik pusat lingkaran luar (O), titik berat (G), dan titik tinggi (H) terletak pada satu garis lurus (segaris). Pembuktiannya adalah sebagai berikut (Gambar 3):

Karena garis tinggi AH dari segitiga ABC dan garis bagi tegak lurus OA' dari sisi BC adalah sejajar, maka:

$$\angle HAG = \angle OA'G$$

Selain itu, karena AH dan $A'O$ masing-masing adalah garis-garis yang bersesuaian dari segitiga sebangun ABC dan $A'B'C'$, maka:

$$AH : A'O = BC : B'C' = 2 : 1$$

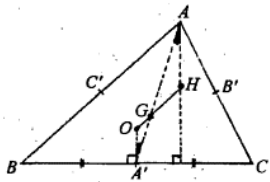
Secara kebetulan, titik berat G juga membagi garis berat AA' menjadi:

$$AG : A'G = 2 : 1$$

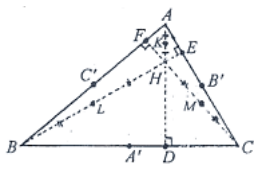
Oleh karena itu, segitiga HAG dan $OA'G$ sebangun. Dari sini dapat disimpulkan bahwa:

$$\angle HGA = \angle OGA'$$

Sehingga O, G , dan H membentuk satu garis lurus, yang disebut sebagai Garis Euler, dengan perbandingan $OG : GH = 1 : 2$.



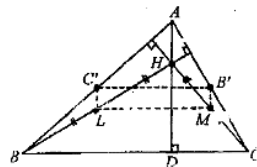
Titik tengah dari garis Euler OH sama sekali tidak biasa; titik tersebut adalah pusat dari Lingkaran Sembilan Titik (Nine-point circle) yang terkenal. Apa yang disebut sebagai Lingkaran Sembilan Titik adalah lingkaran yang melalui titik-titik tengah dari ketiga sisi segitiga ABC yaitu A', B', C' ; kaki-kaki dari ketiga garis tinggi yaitu D, E, F ; serta titik-titik tengah antara ketiga titik sudut dan titik tinggi (orthocentre) yaitu K, L, M (Gambar 4).



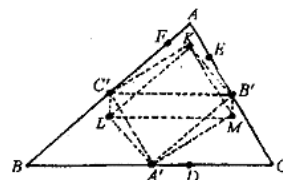
Bukti lengkap mengenai mengapa kesembilan titik ini terletak pada satu lingkaran yang sama pertama kali diberikan oleh matematikawan Poncelet pada tahun 1821. Ia membagi keenam titik A', B', C', K, L, M ke dalam kombinasi empat titik yang saling tumpang tindih, kemudian membuktikan bahwa setiap kombinasi empat titik tersebut berada pada satu lingkaran (concylic). Selanjutnya, dengan memanfaatkan tumpang tindih dari ketiga kombinasi ini, ia membuktikan bahwa ketiga lingkaran tersebut pada hakikatnya adalah lingkaran yang sama, dan akhirnya membuktikan bahwa D, E, F juga terletak pada lingkaran tersebut. Mari kita lihat metode pembuktiannya:

Pertama-tama, perhatikan empat titik B', C', L, M (Gambar 5).

Dalam segitiga $ABH, C'L$ dan L masing-masing adalah titik tengah dari sisi AB dan HB , sehingga $C'L$ sejajar dengan AH . Dengan prinsip yang sama, dalam segitiga $ACH, B'M$ sejajar dengan AH . Oleh karena itu, $C'L$ sejajar dengan $B'M$. Selanjutnya, perhatikan segitiga ABC dan HBC . Dengan menggunakan teorema titik tengah yang sama, dapat diketahui bahwa $B'C'$ sejajar dengan ML dan CB . Karena AD tegak lurus dengan BC , maka $B'C'LM$ adalah sebuah persegi panjang. Titik-titik sudut dari sebuah persegi panjang tentu saja terletak pada satu lingkaran yang sama (concylic).



Mengulangi argumentasi yang sama pada $A'C'KM$ dan $A'B'KL$, dapat disimpulkan bahwa keduanya juga merupakan persegi panjang, sehingga masing-masing titik sudutnya juga terletak pada satu lingkaran. Namun, ketiga persegi panjang ini memiliki diagonal-diagonal yang saling berpasangan satu sama lain, yang mana diagonal tersebut merupakan diameter dari lingkaran luar (circumcircle) (Gambar 6).

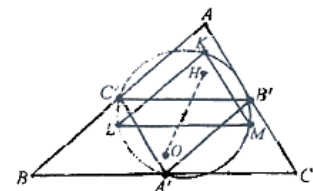


Lingkaran yang berbeda tidak mungkin memiliki diameter yang sama, oleh karena itu keenam titik A', B', C', K, L, M terletak pada satu lingkaran yang sama (concylic). Di sisi lain, $\angle A'DK$ adalah sudut siku-siku (Gambar 4), sedangkan $A'K$ adalah diameter dari lingkaran enam

titik yang disebutkan sebelumnya, sehingga D juga terletak pada lingkaran enam titik ini. Dengan logika yang sama, E dan F juga berada pada lingkaran tersebut, sehingga kesembilan titik tersebut terbukti berada pada satu lingkaran yang sama (concylic).

Apa hubungan antara Lingkaran Sembilan Titik dan Garis Euler?

Ada baiknya kita membandingkan dengan saksama dua buah segitiga yang semua titik sudutnya berada pada lingkaran sembilan titik, yaitu segitiga $A'B'C'$ dan KLM (Gambar 7). Karena $KA', LB',$ dan MC' adalah diameter dari lingkaran sembilan titik, maka segitiga KLM yang diputar sejauh 180° terhadap pusat lingkaran sembilan titik akan menghasilkan segitiga $A'B'C'$. Kedua ujung dari garis Euler OH pada segitiga ABC kebetulan tepat merupakan titik tinggi (orthocentre) dari segitiga $A'B'C'$ dan KLM (bisa merujuk pada Gambar 2 dan Gambar 4). Oleh karena itu, keduanya merupakan titik-titik yang bersesuaian dari segitiga kongruen $A'B'C'$ dan KLM , dan titik tengah dari kedua titik tersebut adalah pusat dari lingkaran sembilan titik.



Garis Euler benar-benar tidak sederhana; ia adalah satu garis yang menembus empat titik pusat. Tidaklah berlebihan untuk menyebutnya sebagai "tulang punggung" dari sebuah segitiga.

Pojok Olimpiade

(Lanjutan Hal 1)

Masalah 4. Misalkan segi empat $ABCD$ berada di dalam sebuah lingkaran (segi empat tali busur). Misalkan garis AB dan DC berpotongan di P , dan garis AD dan BC berpotongan di Q . Dari Q , konstruksikan dua garis singgung QE dan QF ke lingkaran tersebut, di mana E dan F adalah titik singgungnya. Buktikan bahwa ketiga titik P, E, F adalah segaris (collinear).

Masalah 5. Misalkan $A = \{1, 2, 3, \dots, 17\}$. Untuk sebuah pemetaan $f: A \rightarrow A$, notasikan

$$f^{(1)}(x) = f(x),$$

$$f^{(k+1)}(x) = f(f^{(k)}(x)) \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

Perhatikan pemetaan satu-satu (one-to-one) f dari A ke A yang memenuhi kondisi: terdapat bilangan asli M sedemikian sehingga

- 1) untuk $m < M, 1 \leq i \leq 16$,
 $f^{(m)}(i+1) - f^{(m)}(i) \not\equiv \pm 1 \pmod{17}$,
 $f^{(m)}(1) - f^{(m)}(17) \not\equiv \pm 1 \pmod{17}$;
- 2) untuk $1 \leq i \leq 16$,
 $f^{(m)}(1) - f^{(m)}(17) \equiv 1 \text{ atau } -1 \pmod{17}$,
 $f^{(m)}(1) - f^{(m)}(17) \equiv 1 \text{ atau } -1 \pmod{17}$.

Untuk semua pemetaan f yang memenuhi kondisi di atas, tentukan nilai terbesar yang mungkin dari M yang bersesuaian.

Masalah 6. Perhatikan sebuah barisan bilangan real non-negatif a_1, a_2, \dots yang memenuhi kondisi

$$a_{n+m} \leq a_n + a_m, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Buktikan bahwa untuk setiap $n \geq m$,

$$a_n \leq ma_1 + \left(\frac{n}{m} - 1\right)a_m.$$

Enam Pembuktian Bahwa $\sqrt{2}$ Adalah Bilangan Irasional

"Bagaimana cara membuktikan bahwa $\sqrt{2}$ adalah bilangan irasional?"

"Itu sangat mudah! Misalkan $\sqrt{2} = m/n$, di mana m dan n tidak keduanya genap. Karena $m^2 = 2n^2$, maka m haruslah bilangan genap, tuliskan sebagai $2k$. Maka $4k^2 = 2n^2$, yang berarti $2k^2 = n^2$. Oleh karena itu, n juga harus bilangan genap. Kontradiksi!"

Pembuktian di atas hanya menggunakan sifat ganjil-genap, dan asal-usulnya sudah tidak dapat dilacak lagi. Aristoteles menuliskannya (dalam bentuk geometris) sekitar tahun 330 SM sebagai contoh dari metode pembuktian kontradiksi (reductio ad absurdum). Hal ini menunjukkan bahwa pada masa itu, pembuktian ini sudah dikenal luas oleh masyarakat. Namun, karena pembuktian ini sangat ringkas dan elegan, banyak sejarawan matematika meyakini bahwa ini bukanlah proses penemuan awalnya, melainkan sebuah penjelasan "setelah kejadian" (post-hoc explanation).

Dalam pembuktian ini, angka 2 tidak memiliki keistimewaan khusus. Jika diganti dengan bilangan prima lainnya, alur berpikir yang sama tetap bisa digunakan. Hanya saja, mengandalkan sifat ganjil-genap saja tidak cukup; diperlukan penggunaan sifat Faktorisasi Prima Tunggal (Fundamental Theorem of Arithmetic). Lebih jauh lagi, kita dapat membuktikan bahwa jika P_1, \dots, P_s adalah s buah bilangan prima yang berbeda, maka $\sqrt{P_1 \cdots P_s}$ adalah bilangan irasional. Oleh karena itu, jika H bukan merupakan bilangan kuadrat sempurna, maka \sqrt{H} adalah

bilangan irasional. Sebenarnya, jika kita bersedia menggunakan sifat faktorisasi prima tunggal, ada metode pembuktian lain, yaitu dengan menghitung jumlah kemunculan faktor prima tertentu pada kedua sisi persamaan $m^2 = Hn^2$. Jika yang satu berjumlah ganjil dan yang lainnya genap, maka terjadi kontradiksi!

Mari kita lihat pembuktian ketiga. Misalkan $\sqrt{H} = m/n$, di mana m dan n tidak memiliki faktor persekutuan. Karena $m^2 = Hn^2 = n(Hn)$, maka n haruslah 1 atau -1 . Ini berarti H adalah bilangan kuadrat sempurna, sebuah kontradiksi! Pembuktian ini sedikit berbeda dari dua pembuktian sebelumnya karena dapat diperluas ke situasi yang lebih umum, yaitu membuktikan bahwa jika sebuah bilangan rasional adalah bilangan bulat aljabar, maka ia pastilah bilangan bulat biasa. (Bilangan bulat aljabar adalah akar dari persamaan polinomial dengan koefisien bilangan bulat dan koefisien utama 1: $x^N + c_{N-1}x^{N-1} + \dots + c_1x + c_0 = 0$. Contohnya, \sqrt{H} adalah akar dari $x^2 - H = 0$. Silakan pembaca mencoba membuktikan hal ini sendiri.)

Sekarang mari kita lihat satu lagi pembuktian yang sangat ringkas: Jika $\sqrt{2}$ adalah bilangan rasional, ambil bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga $k\sqrt{2}$ adalah bilangan bulat. Maka $m = k\sqrt{2} - k = k(\sqrt{2} - 1)$ adalah bilangan bulat positif yang lebih kecil dari k . Namun, $m\sqrt{2} = 2k - k\sqrt{2}$ tetap merupakan bilangan bulat, yang mana ini kontradiksi dengan pemilihan k sebagai yang terkecil! (Jika angka 2 diganti dengan H yang bukan kuadrat

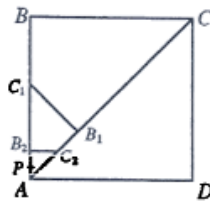
sempurna, pembuktian serupa tetap berlaku.)

Pembuktian di atas merupakan isi dari sebuah artikel singkat oleh pakar teori bilangan Theodor Estermann pada tahun 1975; cerdas sekaligus ringkas. Seseorang kemudian memujinya dengan mengatakan: "Seperti semua ide yang brilian, begitu ditunjukkan maka akan terasa sangat jelas, namun ide brilian ini harus menunggu lebih dari dua ribu tahun setelah Pythagoras untuk akhirnya dikemukakan!" Jika kita mencoba menelusuri bagaimana pemilihan m mengenai petunjuk tersebut, secara alami kita akan bertanya tentang interpretasi geometrisnya. Interpretasi geometris ini mungkin saja merupakan proses bagaimana matematikawan Yunani lebih dari dua ribu tahun yang lalu menemukan bahwa diagonal dan sisi sebuah persegi adalah tidak terukur (incommensurable)! Tidak terukur berarti tidak ada satu satuan ukuran umum yang dapat membuat diagonal dan sisi tersebut masing-masing menjadi kelipatan bilangan bulat dari satuan ukuran tersebut; dengan kata lain, $\sqrt{2}$ bukanlah bilangan rasional. Pada gambar di bawah, misalkan AP adalah ukuran umum dari diagonal AC dan sisi AB sebuah persegi, yang berarti $AC = jAP$ dan $AB = kAP$. Konstruksikan B_1C_1 sedemikian sehingga B_1C_1 tegak lurus terhadap AC , dan juga membuat $CB = CB_1$. Tidak sulit untuk mengetahui bahwa $BC_1 = B_1C_1 = AB_1$, oleh karena itu:

$$\begin{aligned} AC_1 &= AB - AB_1 = AB - (AC - AB) \\ &= 2AB - AC = (2k - j)AP, \\ AB_1 &= AC - AB = (j - k)AP. \end{aligned}$$

Perhatikan: AC_1 dan AB_1 adalah diagonal dan sisi dari sebuah persegi yang lebih kecil. Sisi dari persegi yang lebih kecil tersebut, AB_1 , besarnya

kurang dari setengah sisi persegi awal AB . Jika langkah ini diulangi terus-menerus, pastilah akan diperoleh sebuah persegi yang cukup kecil sehingga sisinya AB_r lebih kecil daripada AP , namun AB_r tersebut tetap merupakan kelipatan bilangan bulat dari AP . Bukankah ini sebuah kontradiksi!



Perhatikan bahwa: $AC_1/AB_1 = (2k - j)/(j - k)$, dan $m = j - k$ tepat merupakan nilai m dalam pembuktian Estermann yang ringkas dan cerdas. Karena $AC_1/AB_1 = \sqrt{2}$, maka didapat $(2k - j)/m = \sqrt{2}$, yang berarti $m\sqrt{2} = 2k - j$ adalah sebuah bilangan bulat. Setelah kita memahami interpretasi geometris di balik pembuktian Estermann, kita dapat menuliskannya kembali sebagai pembuktian keenam: Jika $\sqrt{2} = j/k$ adalah bentuk pecahan paling sederhana, maka berlaku $\sqrt{2} = (2k - j)/(j - k)$ (ini karena $j\sqrt{2} - k\sqrt{2} = 2k - j$). Namun, karena $k < j < 2k$ (berdasarkan $1 < \sqrt{2} < 2$), maka $2k - j < j$ dan $j - k < k$. Hal ini kontradiksi dengan pemilihan j dan k (sebagai pembilang dan penyebut terkecil)!

Silakan merenungkan: apakah keenam pembuktian yang dibahas di atas benar-benar enam pembuktian yang berbeda? Ataukah sebenarnya keenamnya adalah pembuktian yang sama?

Pojok Soal

Soal 51. Apakah ada bilangan bulat positif n sedemikian sehingga $\sqrt{n-1} + \sqrt{n+1}$ merupakan bilangan rasional?

Soal 52. Misalkan a, b, c adalah bilangan-bilangan real berbeda sedemikian sehingga $a^3 = 3(b^2 + c^2) - 25$, $b^3 = 3(c^2 + a^2) - 25$, $c^3 = 3(a^2 + b^2) - 25$. Tentukan nilai dari abc .

Soal 53. Untuk $\triangle ABC$, definisikan A' pada BC sedemikian sehingga $AB + BA' = AC + CA'$ dan dengan cara yang sama definisikan B' pada CA serta C' pada AB . Tunjukkan bahwa AA', BB', CC' adalah konkuren (berpotongan di satu titik). (Titik potong tersebut disebut sebagai titik Nagel dari $\triangle ABC$.)

Soal 54. Misalkan \mathbb{R} adalah himpunan bilangan real. Tentukan semua fungsi $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sedemikian sehingga

$$f(f(x+y)) = f(x+y) + f(x)f(y) - xy$$

untuk semua $x, y \in \mathbb{R}$.

Soal 55. Pada awalnya, 65 ekor kumbang ditempatkan pada kotak-kotak yang berbeda di atas papan catur berukuran 9×9 . Dalam setiap langkah, setiap kumbang merayap ke kotak yang berdekatan secara horizontal maupun vertikal. Jika tidak ada kumbang yang melakukan dua langkah horizontal berturut-turut atau dua langkah vertikal berturut-turut, tunjukkan bahwa setelah beberapa langkah, akan terdapat setidaknya dua ekor kumbang di kotak yang sama.

Solusi

Soal 46. Untuk nilai bulat a berapakah $x^2 - x + a$ membagi habis $x^{13} + x + 90$?

Solusi: Misalkan

$$x^{13} + x + 90 = (x^2 - x + a)q(x),$$

di mana $q(x)$ adalah polinomial dengan koefisien bilangan bulat. Dengan mengambil $x = -1, 0, 1$, kita mendapatkan

$$\begin{aligned} 88 &= (2 + a)q(-1), \\ 90 &= aq(0) \text{ dan} \\ 92 &= aq(1). \end{aligned}$$

Karena a membagi 90, 92 dan $a + 2$ membagi 88, maka a hanya mungkin bernilai 2 atau -1 . Sekarang, $x^2 - x - 1$ memiliki akar positif, tetapi $x^{13} + x + 90$ tidak mungkin memiliki akar positif. Jadi, a hanya bisa bernilai 2. Kita dapat memeriksa melalui pembagian bersusun bahwa $x^2 - x + 2$ membagi $x^{13} + x + 90$ atau mengamati bahwa jika w adalah salah satu dari dua akar $x^2 - x + 2$, maka $w^2 = w - 2, w^4 = -3w + 2, w^8 = -3w - 14, w^{12} = 45w - 46$ dan $w^{13} + w + 90 = 0$.

Soal 47. Jika x, y, z adalah bilangan real sedemikian sehingga $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, maka tunjukkan bahwa $x + y + z \leq xyz + 2$.

Solusi: Jika salah satu dari x, y, z bernilai tidak positif, misalkan z , maka $2 + xyz - x - y - z = (2 - x - y) - z(1 - xy) \geq 0$ karena

$$x + y \leq \sqrt{2(x^2 + y^2)} \leq 2$$

dan

$$xy \leq (x^2 + y^2)/2 \leq 1$$

Oleh karena itu, kita dapat mengasumsikan x, y, z bernilai positif, misalkan $0 < x \leq y \leq z$. Jika $z \leq 1$, maka

$$\begin{aligned} 2 + xyz - x - y - z \\ = (1 - x)(1 - y) + (1 - z)(1 - xy) \geq 0. \end{aligned}$$

Jika $z > 1$, maka

$$\begin{aligned} (x + y) + z &\leq \sqrt{2((x + y)^2 + z^2)} \\ &= \sqrt{xy + 1} \leq xy + 2 \leq xyz + 2. \end{aligned}$$

Soal 48. Persegi $ABDE$ dan $BCFG$ digambar di luar segitiga ABC . Buktikan bahwa segitiga ABC adalah sama kaki jika DG sejajar dengan AC .

Solusi: Dari B , tariklah sebuah garis tegak lurus terhadap AC (dan karenanya juga tegak lurus terhadap DG). Misalkan garis tersebut memotong AC di X dan DG di Y . Karena $\angle ABX = 90^\circ - \angle DBY = \angle BDY$ dan $AB = BD$, maka segitiga siku-siku ABX dan BDY adalah kongruen sehingga $AX = BY$. Dengan cara yang sama, segitiga siku-siku CBX dan BGY adalah kongruen sehingga $BY = CX$. Jadi $AX = CX$, yang berarti $AB = BC$.

Soal 49. Misalkan u_1, u_2, u_3, \dots adalah barisan bilangan bulat sedemikian sehingga $u_1 = 29, u_2 = 45$ dan $u_{n+2} = u_{n+1}^2 - u_n$ untuk $n = 1, 2, 3, \dots$ Tunjukkan bahwa 1996 membagi habis tak hingga banyaknya suku dalam barisan ini.

Solusi: Misalkan U_n adalah sisa pembagian u_n oleh 1996, yaitu,

$$U_n \equiv u_n \pmod{1996}.$$

Perhatikan barisan pasangan (U_n, U_{n+1}) . Paling banyak terdapat 1996^2 pasangan yang berbeda. Misalkan $(U_p, U_{p+1}) = (U_q, U_{q+1})$ adalah pengulangan pertama dengan $p < q$. Jika $p > 1$, maka relasi rekurensi tersebut menyiratkan $(U_{p-1}, U_p) = (U_{q-1}, U_q)$ yang menghasilkan pengulangan yang lebih awal. Jadi $p = 1$ dan barisan pasangan (U_n, U_{n+1}) bersifat periodik dengan periode $q - 1$. Karena $u_3 = 1996$, kita mendapatkan $0 = U_3 = U_{3+k(q-1)}$

sehingga 1996 membagi habis $U_{3+k(q-1)}$ untuk setiap bilangan bulat positif k .

Soal 50. Empat bilangan bulat ditandai pada sebuah lingkaran. Pada setiap langkah, kita secara serentak mengganti setiap bilangan dengan selisih antara bilangan tersebut dan bilangan berikutnya pada lingkaran dalam arah tertentu (yaitu, bilangan a, b, c, d diganti menjadi $a - b, b - c, c - d, d - a$). Mungkinkah setelah 1996 langkah tersebut, kita mendapatkan bilangan a, b, c, d sedemikian sehingga bilangan-bilangan $|bc - ad|, |ac - bd|, |ab - cd|$ merupakan bilangan prima?

Solusi 1: Jika bilangan-bilangan awalnya adalah $a = w, b = x, c = y, d = z$, maka setelah 4 langkah, bilangan-bilangan tersebut akan menjadi

$$\begin{aligned} a &= 2(w - 2x + 3y - 2z), \\ b &= 2(x - 2y + 3z - 2w), \\ c &= 2(y - 2z + 3w - 2x), \\ d &= 2(z - 2w + 3y - 2z). \end{aligned}$$

Sejak titik itu dan seterusnya, a, b, c, d akan selalu bernilai genap, sehingga $|bc - ad|, |ac - bd|, |ab - cd|$ akan selalu habis dibagi oleh 4.

Solusi 2: Setelah $n \geq 1$ langkah, jumlah dari bilangan-bilangan bulat tersebut akan menjadi 0. Jadi $d = -a - b - c$. Maka

$$\begin{aligned} bc - ad &= bc + a(a + b + c) \\ &= (a + b)(a + c). \end{aligned}$$

Serupa dengan itu,

$$ac - bd = (a + b)(b + c)$$

dan

$$ab - cd = (a + c)(b + c).$$

Akhirnya, $|bc - ad|, |ac - bd|, |ab - cd|$ tidak mungkin semuanya bernilai prima karena hasil kali ketiganya adalah kuadrat dari $(a + b)(a + c)(b + c)$.