

Pojok Olimpiade

Masalah 1. Jika α, β , dan γ adalah akar-akar dari $x^3 - x - 1 = 0$, hitunglah nilai dari

$$\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} + \frac{1 + \beta}{1 - \beta} + \frac{1 + \gamma}{1 - \gamma}$$

Masalah 2. Temukan semua solusi real untuk sistem persamaan berikut:

$$\begin{cases} \frac{4x^2}{1 + 4x^2} = y, \\ \frac{4y^2}{1 + 4y^2} = z, \\ \frac{4z^2}{1 + 4z^2} = x. \end{cases}$$

Berikan penjelasan yang tepat untuk jawaban Anda.

Masalah 3. Kita nyatakan suatu permutasi sembarang dari bilangan bulat $1, 2, \dots, n$ sebagai a_1, a_2, \dots, a_n . Misalkan $f(n)$ adalah banyaknya permutasi tersebut sedemikian sehingga

- i) $a_1 = 1$;
- ii) $|a_i - a_{i+1}| \leq 2, i = 1, \dots, n - 1$.

Tentukan apakah $f(1996)$ habis dibagi oleh 3.

Masalah 4. Dalam $\triangle ABC, AB = AC$. Misalkan garis bagi $\angle B$ memotong AC di D dan berlaku $BC = BD + AD$. Tentukan besar $\angle A$.

Masalah 5. Misalkan r_1, r_2, \dots, r_m adalah m bilangan rasional positif yang diberikan sedemikian sehingga

$$\sum_{k=1}^m r_k = 1.$$

Definisikan fungsi f sebagai

$$f(n) = n - \sum_{k=1}^m [r_k n]$$

untuk setiap bilangan bulat positif n . Tentukan nilai minimum dan maksimum dari $f(n)$.

Teorema Kecil Fermat dan Kisah Lainnya

(Vol 2 - No 4)

Pierre de Fermat (1601–1665), seorang anggota dewan di Pengadilan Tinggi provinsi di Toulouse, Prancis selatan, mempraktikkan matematika di waktu luangnya. Ia mendiskusikan temuan-temuannya dengan teman-temannya melalui surat. Ternyata, karya-karyanya secara signifikan memengaruhi perkembangan matematika modern. Selama masa Fermat, "hipotesis Tiongkok" berikut ini sudah ada:

p adalah bilangan prima jika dan hanya jika $2^p \equiv 2 \pmod{p}$.

Salah satu arah dari hipotesis ini tidak benar. Faktanya, $2^{341} - 2$ habis dibagi oleh 341, namun $341 = 11 \times 31$ adalah bilangan komposit (bukan prima). Namun, arah lainnya memang benar. Dari manuskrip dan surat-surat Fermat, kita menyimpulkan bahwa Fermat mengetahui (dan kemungkinan besar dapat membuktikan) fakta-fakta berikut:

- 1) Jika n bukan bilangan prima, maka $2^n - 1$ bukan bilangan prima.
- 2) Jika n adalah bilangan prima, maka $2^n - 2$ adalah kelipatan dari $2n$.
- 3) Jika n adalah bilangan prima, dan p adalah pembagi prima dari $2^n - 1$, maka $p - 1$ adalah kelipatan dari n .

Pernyataan pertama dapat dibuktikan secara langsung dengan memfaktorkan $2^n - 1$. Jika $n = pq$ (dengan $p > 1$ dan $q > 1$), maka $2^n - 1 = 2^{pq} - 1 = (2^p - 1)(2^{p(q-1)} + 2^{p(q-2)} + \dots + 1)$.

Dua pernyataan lainnya merupakan variasi dari pernyataan yang lebih umum, yang ditunjukkan dalam suratnya yang lain:

Diberikan sebarang bilangan prima p , dan sebarang barisan geometri $1, a, a^2, \dots$, bilangan p haruslah membagi suatu bilangan $a^n - 1$, yang mana n membagi $p - 1$; jika kemudian N adalah sebarang kelipatan dari bilangan terkecil n yang memenuhi hal tersebut, maka p juga membagi $a^N - 1$.

Dengan notasi matematika modern, kita dapat menulis ulang pernyataan Fermat sebagai berikut yang akan disebut sebagai Teorema Kecil Fermat:

Jika p adalah bilangan prima dan a adalah sebarang bilangan bulat, maka $a^p \equiv a \pmod{p}$. Secara khusus, jika p tidak membagi a , maka $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Sekarang kita melihat bagaimana Fermat menggunakan teorema kecilnya. Ia ditantang untuk menentukan apakah ada bilangan sempurna genap yang terletak di antara 10^{20} dan 10^{22} . (Sebuah bilangan bulat positif n disebut bilangan sempurna jika jumlah dari semua faktor murninya (yaitu, tidak termasuk n) dari n sama dengan n . Sebagai contoh, $6 = 1 + 2 + 3$ dan $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ adalah bilangan sempurna.) Masalah ini dapat direduksi (bagaimana caranya?) menjadi pemeriksaan apakah $2^{37} - 1$ adalah bilangan prima. Misalkan bilangan tersebut bukan prima, dan p adalah pembagi prima ganjil dari bilangan tersebut, maka dari pernyataan ketiga, $p - 1$ adalah kelipatan dari 37, atau $p = 37k + 1$. Perhatikan bahwa p ganjil, sehingga k harus genap, atau p berbentuk $74k' + 1$. Beberapa kandidat pertama adalah 149, 223, ... Kemudian dilakukan pengecekan bahwa $2^{37} - 1 = 137438953471 = 223 \times 616318177$.

Lebih sulit untuk memeriksa apakah faktor kedua adalah bilangan prima, namun Fermat berhasil menunjukkan bahwa $2^{37} - 1$ bukan bilangan prima. Kisah sampingan lainnya berasal dari fakta bahwa jika $2^m + 1$ adalah bilangan prima, maka m harus berbentuk 2^n . Fermat menduga bahwa semua bilangan ini adalah bilangan prima. Sekarang, $2^{2^1} + 1 = 5$, $2^{2^2} + 1 = 17$, $2^{2^3} + 1 = 257$, dan $2^{2^4} + 1 = 65537$ memang merupakan bilangan prima. Namun, $2^{2^5} + 1 = 4.294.967.297$

bukanlah bilangan prima. Faktanya, jika p adalah faktor prima dari $2^{2^n} + 1$, maka 2^{n+1} adalah bilangan bulat positif terkecil m yang memenuhi $2^m \equiv 1 \pmod{p}$, sehingga 2^{n+1} membagi $p - 1$, atau p berbentuk $k2^{n+1} + 1$. Oleh karena itu, untuk mencari faktor prima dari $2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1$, kita harus mempertimbangkan bilangan prima dalam bentuk $64k + 1$. Kandidat yang memungkinkan adalah 193, 257, 449, 577, 641, ... Sayangnya, baik Fermat maupun rekan-rekan sezamannya tidak memiliki cukup kesabaran untuk memeriksa bahwa 641 memang

membagi $2^{32} + 1$. (Bagi pembaca yang akrab dengan hukum timbal balik kuadrat (quadratic reciprocity), seseorang dapat membuktikan bahwa pembagi prima dari $2^{2^n} + 1$ sebenarnya berbentuk $k2^{n+2} + 1$.)

Fermat tidak secara eksplisit memberikan bukti apa pun untuk Teorema Kecil Fermat, dan Euler-lah yang pertama kali membuktikan melalui induksi fakta berikut: jika p adalah bilangan prima, maka $a^p \equiv a \pmod{p}$. Jelas bahwa pernyataan tersebut benar jika $a = 1$.

Sekarang

$$(a+1)^p = a^p + \binom{p}{1}a^{p-1} + \binom{p}{2}a^{p-2} + \dots + 1 = a+1 \pmod{p},$$

dimana $\binom{p}{i} = \frac{p!}{i!(p-i)!} \equiv 0 \pmod{p}$ untuk $1 \leq i \leq p-1$.

Ada juga versi lain dari teorema tersebut, yaitu, jika p adalah bilangan prima dan a relatif prima terhadap p , maka $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Euler juga memberikan bukti pertama dengan mencatat bahwa suku-suku dari deret $1, a, a^2, \dots \pmod{p}$ harus berulang. Jadi untuk suatu $r \geq 0$, dan suatu $s \geq 0$, kita harus memiliki $a^{r+s} \equiv a^r \pmod{p}$, yaitu, $a^s \equiv 1 \pmod{p}$. Misalkan s adalah bilangan bulat positif terkecil sedemikian sehingga $a^s \equiv 1 \pmod{p}$, maka seseorang dapat menyusun $p-1$ kelas kongruensi bukan nol modulo p ke dalam himpunan-himpunan $\{b, ba, \dots, ba^{s-1}\}$, di mana setiap himpunan terdiri dari s elemen dan himpunan-himpunan tersebut saling lepas (disjoint). Dengan demikian, s harus membagi $p-1$. Sebagai contoh, dengan $p=7$ dan $a=2$, diperoleh $s=3$ dan angka 1 sampai 6 dapat dikelompokkan menjadi dua himpunan saling lepas $\{1, 2, 4\}$ dan $\{3, 6, 5\}$. Kita juga mengamati bahwa $p-1=6$ habis dibagi oleh $s=3$. Euler menggeneralisasi argumen ini untuk membuktikan Teorema Euler yang terkenal:

Jika a relatif prima terhadap n , maka $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$,

di mana $\phi(n)$ adalah fungsi totien Euler yang menghitung jumlah bilangan bulat antara 1 dan n yang relatif prima terhadap n . Sebagai contoh, $\phi(12) = 4$ karena hanya 1, 5, 7, 11 (di antara angka 1-12) yang relatif prima terhadap 12.

Bukti formal dari teorema Euler adalah sebagai berikut: Misalkan a adalah bilangan bulat yang relatif prima terhadap n dan misalkan $\{a_1, a_2, \dots, a_{\phi(n)}\}$ adalah himpunan residu tereduksi modulo n (yaitu, sebanyak $\phi(n)$ bilangan bulat positif yang kurang dari n yang relatif prima terhadap n). Maka himpunan $\{aa_1, aa_2, \dots, aa_{\phi(n)}\}$ juga merupakan himpunan residu tereduksi modulo n . Oleh karena itu,

$$a_1 a_2 \dots a_{\phi(n)} \equiv a^{\phi(n)} a_1 a_2 \dots a_{\phi(n)} \pmod{n}$$

atau

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Namun, terdapat argumen pewarnaan lain untuk teorema kecil Fermat. Susunlah p buah kotak dalam sebuah lingkaran dan warnai kotak-kotak tersebut dengan a warna. Terdapat a^p kemungkinan pola pewarnaan. Di antara semua kemungkinan pewarnaan ini, a di antaranya adalah pewarnaan di mana setiap kotak memiliki warna yang sama. Sisanya, sebanyak $a^p - a$ pola pewarnaan, dapat dikelompokkan ke dalam himpunan-himpunan berisi p pola yang merupakan rotasi satu sama lain. Ke- p rotasi dari sebarang pewarnaan ini semuanya berbeda dan dengan demikian ini membagi $a^p - a$. (Di bagian mana kita menggunakan syarat " p adalah bilangan prima"?) Oleh karena itu, pada intinya, teorema kecil Fermat dapat dibuktikan menggunakan prinsip rumah burung merpati (pigeonhole principle).

Berikut adalah beberapa aplikasi dari teorema kecil Fermat dan teorema Euler.

Contoh 1: Jika n adalah bilangan bulat > 1 , maka n tidak membagi $2^n - 1$.

Solusi: Jika n genap, maka pernyataan tersebut tentu benar karena $2^n - 1$ adalah bilangan bulat ganjil. Untuk n ganjil, misalkan p sebagai pembagi prima terkecil dari n . Andaikan n (dan dengan demikian juga p) membagi $2^n - 1$. Berdasarkan teorema kecil Fermat, p membagi $2^{p-1} - 1$ juga. Akibatnya, p membagi $2^d - 1$, di mana d adalah pembagi persekutuan terbesar (FPB) dari $p-1$ dan n . Karena p adalah pembagi prima terkecil dari n , maka $d = 1$ yang membawa pada kontradiksi bahwa p membagi 1.

Contoh 2: Misalkan n adalah bilangan ganjil yang tidak habis dibagi 5, maka n membagi sebuah bilangan berbentuk $99 \dots 9$.

Solusi: Jika n ganjil dan tidak habis dibagi 5, maka n relatif prima terhadap 10. Berdasarkan Teorema Euler, $10^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$, yaitu, n membagi $10^{\phi(n)} - 1$, yang merupakan bilangan berbentuk $99 \dots 9$.

Contoh 3: Misalkan p sebagai bilangan prima ganjil. Maka untuk sebarang himpunan berisi $2p-1$ bilangan bulat, terdapat sebuah himpunan berisi p bilangan bulat yang jumlahnya habis dibagi oleh p .

Sketsa Solusi: Terdapat $n = \binom{2p-1}{p}$ himpunan berbeda yang masing-masing berisi p elemen. Nyatakan jumlah-jumlahnya sebagai s_1, s_2, \dots, s_n . Andaikan tidak ada satu pun yang habis dibagi oleh p . Maka, berdasarkan teorema kecil Fermat, $\sum_{i=1}^n s_i^{p-1} \equiv \sum_{i=1}^n 1 \equiv n \pmod{p}$, yang mana tidak nol modulo p . Di sisi lain, seseorang dapat menggunakan ekspansi multinomial untuk menunjukkan bahwa $\sum_{i=1}^n s_i^{p-1}$ sebenarnya habis dibagi oleh p , dan dengan demikian mengarah pada kontradiksi.

Sangat menarik untuk mengamati bahwa kita menggunakan pendekatan teori bilangan untuk menyelesaikan masalah kombinatorial, sementara kita menggunakan argumen pencacahan (counting argument) untuk membuktikan Teorema Kecil Fermat.

Kami telah menyebutkan bahwa kebalikan dari Teorema Kecil Fermat tidaklah benar. Artinya, terdapat bilangan komposit n sedemikian sehingga n membagi $a^{n-1} - 1$. Sebagai contoh, seperti yang dinyatakan di awal artikel ini, bilangan komposit 341 membagi $2^{340} - 1$. Bilangan komposit n (yang harus ganjil) yang membagi $2^{n-1} - 1$ disebut sebagai pseudoprimes (dalam basis 2). Seseorang dapat menunjukkan bahwa terdapat tak terhingga banyaknya bilangan pseudoprime tersebut. Faktanya, jika n adalah sebuah pseudoprime, maka $m = 2^n - 1$ akan menjadi komposit (karena n adalah komposit). Selain itu, $m-1 = 2^n - 2 = nk$ dan dengan demikian $2^{m-1} - 1 = 2^{nk} - 1$ habis dibagi oleh $2^n - 1 = m$. Artinya, m adalah bilangan pseudoprime lainnya (dalam basis 2).

Kita tentu saja boleh mencoba basis yang lain. Untuk contoh kita sebelumnya, kita menemukan bahwa 341 bukan lagi merupakan pseudoprime (dalam basis 3),

yaitu, 341 tidak membagi $3^{340} - 1$. Nah, kita kemudian mungkin bertanya: apakah mungkin untuk menemukan bilangan komposit n sedemikian sehingga untuk setiap a yang relatif prima terhadap n , berlaku $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$? Bilangan seperti itu disebut bilangan Carmichael. Yang mengejutkan, tidak hanya bilangan tersebut ada (dengan 561 sebagai yang terkecil), tetapi ada tak terhingga banyaknya bilangan Carmichael, yang mana fakta ini sebenarnya baru saja dibuktikan belum lama ini!

Pojok Soal

Soal 36. Misalkan a, b , dan c adalah bilangan positif sedemikian sehingga $a^2 + b^2 - ab = c^2$. Buktikan bahwa $(a - c)(b - c) \leq 0$.

Soal 37. Dua lingkaran yang tidak berpotongan λ_1 dan λ_2 masing-masing memiliki pusat O_1 dan O_2 . A_1 dan A_2 berturut-turut adalah titik pada λ_1 dan λ_2 , sedemikian sehingga A_1A_2 adalah garis singgung persekutuan luar kedua lingkaran tersebut. Ruas garis O_1O_2 memotong λ_1 dan λ_2 berturut-turut di B_1 dan B_2 . Garis A_1B_1 dan A_2B_2 berpotongan di C , dan garis yang melalui C tegak lurus terhadap B_1B_2 memotong A_1A_2 di D . Buktikan bahwa D adalah titik tengah A_1A_2 .

Soal 38. Buktikan bahwa dari barisan 1996 bilangan riil apa pun, seseorang dapat memilih satu blok suku-suku berurutan yang jumlahnya berbeda dari suatu bilangan bulat paling banyak sebesar 0,001.

Soal 39. Delapan siswa mengikuti sebuah kompetisi dengan delapan soal.

- Setiap soal diselesaikan oleh 5 siswa. Buktikan bahwa terdapat dua siswa yang di antara mereka (jika digabungkan) dapat menyelesaikan seluruh delapan soal tersebut.
- Buktikan bahwa hal ini belum tentu benar jika angka 5 diganti dengan 4. (Sebuah contoh penyangkal sudah cukup.)

Soal 40. ABC adalah segitiga sama sisi. Untuk bilangan bulat positif $n \geq 2$, D adalah titik pada AB sedemikian sehingga $AD = \frac{1}{n}AB$. P_1, P_2, \dots, P_{n-1} adalah titik-titik pada BC yang membaginya menjadi n ruas garis yang sama panjang. Buktikan bahwa $\angle AP_1D + \angle AP_2D + \dots + \angle AP_{n-1}D = 30^\circ$.

[Petunjuk: Pertimbangkan Q_i sedemikian sehingga ADP_iQ_i adalah jajaran genjang.]

Solusi

Soal 31. Tunjukkan bahwa untuk setiap tiga bilangan bulat ganjil yang diberikan, terdapat sebuah bilangan bulat ganjil sedemikian sehingga jumlah kuadrat dari keempat bilangan bulat tersebut juga merupakan sebuah bilangan kuadrat.

Solusi: Misalkan $x = 2a + 1, y = 2b + 1, z = 2c + 1$ adalah tiga bilangan bulat ganjil yang diberikan, maka $x^2 + y^2 + z^2 = 2w + 1$, di mana $w = 2(a^2 + a + b^2 + b + c^2 + c) + 1$ adalah ganjil. Dengan demikian, $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = (w + 1)^2$.

Soal 32. Misalkan $a_0 = 1996$ dan $a_{n+1} = a_n^2 / (a_n + 1)$ untuk $n = 0, 1, 2, \dots$. Buktikan bahwa $[a_n] = 1996 - n$ untuk $n = 0, 1, 2, \dots, 999$, di mana $[x]$ adalah bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x .

Solusi: Perhatikan bahwa $a_n > 0$ berimplikasi pada $a_{n+1} > 0$ dan

$$a_n - a_{n+1} = 1 - \frac{1}{a_n + 1} > 0.$$

Oleh karena itu $a_0 > a_1 > a_2 > \dots$ Sekarang

$$\begin{aligned} a_n &= a_0 + (a_1 - a_0) + \dots + (a_n - a_{n-1}) \\ &= 1996 - n + \frac{1}{a_0 + 1} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + 1} \\ &> 1996 - n. \end{aligned}$$

Untuk $1 \leq n \leq 999$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_0 + 1} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + 1} &< \frac{n}{a_{n-1} + 1} \\ &< \frac{999}{a_{998} + 1} < \frac{999}{1996 - 998 + 1} = 1. \end{aligned}$$

Maka $[a_n] = 1996 - n$.

Soal 33. Misalkan A, B, C adalah titik-titik yang tidak segaris (non-kolinear). Buktikan bahwa terdapat titik unik X pada bidang ABC sedemikian sehingga $XA^2 + XB^2 + AB^2 = XB^2 + XC^2 + BC^2 = XC^2 + XA^2 + CA^2$.

Solusi: Tanpa mengurangi keumuman, kita dapat berasumsi bahwa A, B, C masing-masing memiliki koordinat $(a, 0), (b, 0), (0, c)$, (di mana $a \neq b$ dan $c \neq 0$). Misalkan X adalah sebuah titik pada bidang ABC dengan koordinat (x, y) . Agar X memenuhi kondisi yang diberikan, persamaan untuk x dan y adalah $ax - cy = a^2 - c^2 - ab, bx - cy = b^2 - c^2 - ab$ dan $x = a + b$ (setelah

penyederhanaan), yang memiliki solusi unik $(x, y) = (a + b, c + 2ab/c)$.

Soal 34. Misalkan $n > 2$ adalah sebuah bilangan bulat, c adalah sebuah bilangan riil tak nol dan z adalah akar tidak riil (non-riil) dari $X^n + cX + 1$. Tunjukkan bahwa

$$|z| \geq \frac{1}{\sqrt[n]{n-1}}$$

Solusi 1: Tuliskan $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ dengan $\sin \theta \neq 0$. Mengambil bagian riil dan imajiner dari $z^n + cz + 1 = 0$ menggunakan teorema De Moivre, kita mendapatkan:

$$r^n \cos n\theta + cr \cos \theta + 1 = 0$$

dan

$$r^n \sin n\theta + cr \sin \theta = 0.$$

Kemudian

$$\begin{aligned} r^n \sin(n-1)\theta &= r^n \sin n\theta \cos \theta - r^n \cos n\theta \sin \theta \\ &= -cr \sin \theta \cos \theta + (cr \cos \theta + 1) \sin \theta \\ &= \sin \theta. \end{aligned}$$

Karena

$$\begin{aligned} |\sin(k+1)\theta| &= |\sin k\theta \cos \theta + \cos k\theta \sin \theta| \\ &\leq |\sin k\theta| + |\sin \theta|, \end{aligned}$$

induksi memberikan $|\sin k\theta| \leq k |\sin \theta|$ untuk setiap bilangan bulat positif k . Jadi

$$|z|^n = r^n = \left| \frac{\sin \theta}{\sin(n-1)\theta} \right| \geq \frac{1}{n-1}.$$

Solusi 2: Misalkan $r = |z|$ dan $w = z/r$. Maka $|w| = 1$ dan $w^n = 1$. Karena $(rw)^n + crw + 1 = 0$, dengan mengalikan dengan \bar{w} , lalu melakukan konjugasi, kita mendapatkan

$$r^n w^{n-1} + cr + \bar{w} = 0$$

dan

$$r^n \bar{w}^{n-1} + cr + w = 0$$

Dengan mengurangkan persamaan-persamaan ini dan mencari nilai r^n , kita mendapatkan

$$r^n = \frac{w - \bar{w}}{w^{n-1} - \bar{w}^{n-1}} = \frac{1}{\sum_{i=0}^{n-2} w^{n-2-i} \bar{w}^i}.$$

Karena r adalah bilangan riil dan $|w| = 1$, berdasarkan ketaksamaan segitiga (triangle inequality),

$$r^n \geq \frac{1}{\sum_{i=0}^{n-2} |w^{n-2-i} \bar{w}^i|} = \frac{1}{n-1}.$$

Soal 35. Pada sebuah papan tulis, tertulis sembilan angka 0 dan satu angka 1. Jika dua angka apa pun di papan tulis tersebut dapat diganti dengan rata-rata keduanya dalam satu kali operasi, berapakah bilangan positif terkecil yang dapat muncul di papan tulis setelah sejumlah operasi berhingga dilakukan?

Solusi: Misalkan m adalah bilangan positif terkecil di papan tulis dan n adalah jumlah angka nol di papan tersebut setelah suatu operasi dilakukan. Perhatikan nilai $c = m/2^n$. Jika dua bilangan positif digantikan oleh rata-ratanya, maka n tidak berubah, namun m (dan juga c) dapat meningkat. Jika angka 0 dirata-ratakan dengan sebuah bilangan positif r , maka n berkurang satu dan m tetap tidak berubah atau menjadi $r/2$ ($\geq m/2$). Nilai c yang baru akan lebih besar dari atau sama dengan $(m/2)/2^{n-1} = m/2^n$, yang merupakan nilai c yang lama. Pada awal mulanya, $c = 1/512$. Setelah sejumlah operasi berhingga dilakukan, $c \geq 1/512$ dan $m \geq 2^n/512 \geq 1/512$. Untuk mendapatkan nilai tepat $1/512$, mulailah dengan angka 1 dan rata-ratakan dengan masing-masing dari sembilan angka 0 yang ada.