Pojok Olimpiade

Prinsip Sarang Merpati

(Vol 1 - No 1)

Soal 1. Misalkan m dan n adalah bilangan bulat positif. Misalkan $a_1, a_2, \dots, a_m$ adalah elemen-elemen berbeda dari {1, 2, ..., n} sedemikian sehingga jika $a_i + a_j \le n$ untuk suatu i, j dengan $1 \le i \le j \le m$, maka terdapat k dengan $1 \le k \le m$ sehingga $a_i + a_j = a_k$.

Buktikan bahwa:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_m}{m} \ge \frac{n+1}{2}$$

Soal 2. ABC adalah sebuah segitiga sama kaki dengan $AB = AC$. Misalkan:

(i) M adalah titik tengah BC dan O adalah titik pada garis AM sedemikian sehingga OB tegak lurus terhadap AB;

(ii) Q adalah sembarang titik pada segmen BC yang berbeda dari B dan C;

(iii) E terletak pada garis AB dan F terletak pada garis AC sedemikian sehingga E, Q dan F berbeda dan segaris (kolinear).

Buktikan bahwa OQ tegak lurus terhadap EF jika dan hanya jika $QE = QF$.

Apa sebenarnya Prinsip Sarang Merpati (Pigeonhole Principle) itu? Nah, prinsip terkenal ini menyatakan bahwa jika $n + 1$ objek (merpati) diambil dari n kotak (sarang merpati), maka setidaknya dua dari objek tersebut akan berasal dari kotak yang sama. Hal ini cukup jelas sehingga tidak memerlukan banyak penjelasan.

Seorang pemecah masalah yang memanfaatkan prinsip ini dapat menangani masalah kombinatorial tertentu dengan cara yang lebih elegan dan sistematis dibandingkan dengan cara analisis kasus-per-kasus. Untuk menunjukkan bagaimana menerapkan prinsip ini, kami memberikan beberapa contoh di bawah ini.

Contoh 1. Misalkan 51 bilangan dipilih dari {1, 2, 3, ..., 99, 100}. Tunjukkan bahwa ada dua bilangan yang tidak memiliki pembagi prima persekutuan (faktor prima yang sama).

Solusi. Mari kita pertimbangkan 50 pasang bilangan berurutan (1,2), (3,4), ..., (99,100). Karena ada 51 bilangan yang dipilih, Prinsip Sarang Merpati memberi tahu kita bahwa akan ada satu pasangan $(k, k+1)$ di antara bilangan-bilangan yang dipilih tersebut. Sekarang, jika sebuah bilangan prima p membagi $k+1$ dan k, maka p juga akan membagi $(k+1) - k = 1$, yang mana merupakan sebuah kontradiksi. Jadi, k dan $k+1$ tidak memiliki pembagi prima persekutuan.

Contoh 2. Misalkan 51 bilangan dipilih dari {1, 2, 3, ..., 99, 100}. Tunjukkan bahwa terdapat dua bilangan sedemikian sehingga yang satu membagi yang lain (salah satunya adalah faktor dari yang lain).

Solusi. Pertimbangkan 50 bilangan ganjil {1, 3, 5, ..., 99}. Untuk setiap bilangan ganjil tersebut, buatlah sebuah "kotak" yang berisi bilangan itu sendiri dan semua hasil kali bilangan tersebut dengan pangkat dari 2. Jadi, kotak pertama berisi {1, 2, 4, 8, 16, ...}, kotak berikutnya berisi {3, 6, 12, 24, 48, ...} dan seterusnya. Maka di antara 51 bilangan yang dipilih, Prinsip Sarang Merpati memberi tahu kita bahwa ada dua bilangan yang berada di dalam kotak yang sama. Kedua bilangan tersebut pastilah berbentuk $2^m k$ dan $2^n k$ dengan bilangan ganjil k yang sama. Oleh karena itu, salah satu bilangan pasti akan membagi yang lain.

Perhatikan bahwa kedua contoh di atas terlihat serupa, namun kotak-kotak yang dibentuk cukup berbeda. Sampai di sini, pembaca pasti telah mengamati bahwa membentuk "kotak" yang tepat adalah kunci keberhasilan. Seringkali, diperlukan sejumlah pengalaman serta pemikiran yang cerdas untuk menyelesaikan masalah seperti ini.

Contoh-contoh tambahan di bawah ini akan membantu pemula menjadi lebih terbiasa dengan prinsip yang bermanfaat ini.

Contoh 3. Tunjukkan bahwa di antara sembarang sembilan bilangan riil yang berbeda, terdapat dua bilangan, katakanlah a dan b, sedemikian sehingga:

$$0 < \frac{a-b}{1+ab} < \sqrt{2}-1$$

Solusi. Ekspresi di bagian tengah, $\frac{a-b}{1+ab}$, mengingatkan kita pada rumus untuk $\tan(x-y)$. Oleh karena itu, kita melanjutkan sebagai berikut. Bagilah interval $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ menjadi 8 interval:
$\left(-\frac{\pi}{2},-\frac{3\pi}{8}\right],\left(-\frac{3\pi}{8},-\frac{\pi}{4}\right],\ldots,$
$\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{8}\right],\left(\frac{3\pi}{8},\frac{\pi}{2}\right]$.

Misalkan bilangan-bilangan tersebut adalah $a_1, a_2, \ldots, a_9$ dan misalkan $x_i = \arctan a_i$ untuk $i = 1, 2, \ldots, 9$. Berdasarkan Prinsip Sarang Merpati, dua dari x_i tersebut, katakanlah x_j dan x_k dengan $x_j > x_k$, harus berada dalam salah satu dari 8 sub-interval tersebut. Maka kita memiliki: $0 < x_j - x_k < \pi/8$, sehingga $0 < \tan(x_j - x_k) = \frac{a_j-a_k}{1+a_ja_k} < \tan(\frac{\pi}{8}) = \sqrt{2}-1$.

Contoh 4. Misalkan sebuah segitiga dapat ditempatkan di dalam sebuah persegi dengan luas satu satuan sedemikian rupa sehingga titik pusat persegi tersebut tidak berada di dalam segitiga. Tunjukkan bahwa salah satu sisi segitiga tersebut memiliki panjang kurang dari 1.

Solusi. Melalui titik pusat C dari persegi tersebut, buatlah sebuah garis L_1 yang sejajar dengan sisi segitiga yang paling dekat, dan garis kedua L_2 yang tegak lurus terhadap L_1 di titik C. Garis L_1 dan L_2 membagi persegi menjadi empat segi empat yang kongruen. Karena C tidak di dalam segitiga, segitiga tersebut dapat terletak di maksimal dua segi empat (yang berdekatan). Berdasarkan Prinsip Sarang Merpati, dua dari titik-titik sudut segitiga tersebut harus berada di dalam segi empat yang sama. Karena jarak terjauh antara dua titik dalam segi empat tersebut adalah jarak antara dua titik sudut yang berlawanan, yang nilainya maksimal adalah 1.

Oleh karena itu, sisi segitiga dengan dua titik sudut yang terletak di dalam segi empat yang sama tersebut haruslah memiliki panjang kurang dari 1.

Di bawah ini kami menyediakan beberapa latihan bagi para pembaca yang aktif.

1. Sebelas bilangan dipilih dari {1, 2, 3, …, 99, 100}. Tunjukkan bahwa terdapat dua himpunan bagian (subset) tidak kosong yang saling lepas dari kesebelas bilangan tersebut yang elemen-elemennya memiliki jumlah yang sama.
2. Misalkan sembilan titik dengan koordinat bilangan bulat dalam ruang tiga dimensi dipilih. Tunjukkan bahwa salah satu segmen garis dengan titik-titik ujung yang dipilih dari sembilan titik tersebut harus memuat titik ketiga dengan koordinat bilangan bulat.
3. Tunjukkan bahwa di antara sembarang enam orang, kemungkinan besar ada tiga orang yang saling mengenal satu sama lain, atau ada tiga orang di mana tidak ada satu pasangan pun yang saling mengenal satu sama lain.
4. Tunjukkan bahwa dalam setiap bilangan yang terdiri dari 16 digit, selalu terdapat rangkaian dari satu atau lebih digit berurutan sedemikian sehingga hasil kali dari digit-digit tersebut adalah sebuah bilangan kuadrat sempurna. [Petunjuk: Eksponen dari faktorisasi prima sebuah bilangan kuadrat sempurna adalah bilangan genap.]

Permainan "Life" (Kehidupan)

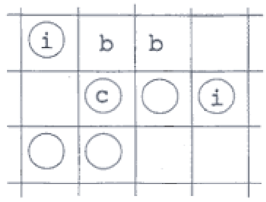
Permainan "Life" (Kehidupan) pertama kali diperkenalkan oleh John Conway, seorang matematikawan dan penggemar permainan yang saat itu bekerja di Universitas Princeton. Permainan ini dimainkan di atas papan catur tak terbatas, di mana setiap sel memiliki delapan sel tetangga. Pada awalnya, sebuah susunan batu ditempatkan di atas papan (sel-sel yang hidup) sebagai generasi pertama. Setiap generasi baru ditentukan oleh dua aturan umum yang sederhana:

Aturan Kematian (The Death Rule): Perhatikan sebuah sel yang hidup (yang ditempati oleh sebuah batu). Jika ia memiliki 0 atau 1 tetangga yang hidup (di antara delapan sel tetangganya), maka ia mati karena isolasi. Jika ia memiliki 4 atau lebih tetangga yang hidup, maka ia mati karena kepadatan yang berlebih. Jika ia memiliki 2 atau 3 tetangga yang hidup, maka ia bertahan hidup ke generasi berikutnya.

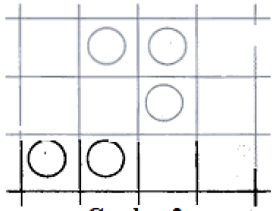
Aturan Kelahiran (The Birth Rule): Perhatikan sebuah sel mati (kosong). Jika ia memiliki tepat 3 tetangga yang hidup, maka ia menjadi sel hidup (dengan sebuah batu ditempatkan di atasnya) pada generasi berikutnya.

Berikut adalah sebuah contoh. Keenam lingkaran pada Gambar 1 menunjukkan sel-sel yang hidup pada generasi pertama. Sel-sel yang ditandai dengan huruf i dan c akan mati masing-masing karena isolasi (isolation) dan kepadatan yang berlebih (overcrowding) masing-masing (Aturan Kematian). Sel-sel kosong yang ditandai dengan huruf b akan menjadi sel hidup pada generasi berikutnya (Aturan Kelahiran). Generasi kedua ditunjukkan pada Gambar 2.

Apa yang akan terjadi pada generasi ketiga, keempat, dan generasi ke-n? Apakah ada generasi awal yang akan tumbuh (berkembang) secara tak terbatas?



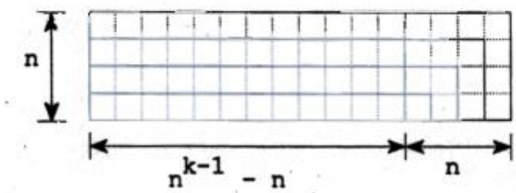
Gambar 1



Gambar 2

Pembuktian Tanpa Kata-Kata

Pangkat ke-k dari Bilangan Asli n sebagai Jumlah dari n Bilangan Ganjil Berurutan (k = 2, 3, ...)



$$n^k = (n^{k-1} - n + 1) + (n^{k-1} - n + 3) + \cdots + (n^{k-1} - n + 2n - 1)$$

Pojok Soal

Soal 1. Jumlah dari dua bilangan bulat positif adalah 2310. Tunjukkan bahwa hasil kali kedua bilangan tersebut tidak habis dibagi oleh 2310.

Soal 2. Diberikan N objek dan $B(\geq 2)$ kotak, tentukan sebuah ketidaksamaan yang melibatkan N dan B sedemikian sehingga jika ketidaksamaan tersebut terpenuhi, maka setidaknya ada dua kotak yang memiliki jumlah objek yang sama.

Soal 3. Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan bulat positif n, terdapat polinomial $P(x)$ berderajat n dan $Q(x)$ berderajat $n-1$ sedemikian sehingga: $\left(P(x)\right)^2 - 1 = (x^2-1)\left(Q(x)\right)^2$.

Soal 4. Jika diagonal-diagonal dari sebuah segi empat di bidang datar saling tegak lurus, tunjukkan bahwa titik-titik tengah dari sisi-sisinya dan titik kaki garis tegak lurus yang ditarik dari titik tengah ke sisi di hadapannya terletak pada satu lingkaran.

Soal 5. Misalkan $a_1, a_2, \dots, a_n$ adalah n bilangan bulat ganjil positif yang berbeda. Andaikan semua selisih $|a_i - a_j|$ berbeda, untuk $1 \leq i < j \leq n$. Buktikan bahwa $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq n(n^2+2)/3$.

Jawaban Latihan dalam "Prinsip Sarang Merpati"

1. Himpunan dari sebelas bilangan memiliki $2^{11} - 2 = 2046$ himpunan bagian tidak kosong dengan elemen kurang dari sebelas, dan jumlah maksimal elemen dalam salah satu dari himpunan bagian ini adalah 91 + 92 + ... + 99 + 100 = 955. Jadi, berdasarkan prinsip rumah merpati, terdapat dua himpunan bagian tidak kosong dengan jumlah yang sama. Jika keduanya memiliki elemen yang sama (beririsan), maka hapus elemen tersebut dari kedua himpunan bagian, dan kita akan mendapatkan dua himpunan bagian tidak kosong yang saling lepas (disjoint) dengan jumlah yang sama.

2. Untuk sembilan titik tersebut, masing-masing dari ketiga koordinatnya bernilai genap atau ganjil. Jadi, terdapat 2^3 = 8 pola paritas untuk koordinat-koordinat tersebut. Berdasarkan prinsip rumah merpati, dua dari sembilan titik tersebut harus memiliki pola paritas koordinat yang sama. Dengan demikian, titik tengah mereka pasti memiliki koordinat bilangan bulat.

3. Misalkan enam orang tersebut berkorespondensi dengan enam titik sudut dari sebuah segi enam beraturan. Jika dua orang saling mengenal, warnai segmen garis yang menghubungkan titik-titik sudut terkait dengan warna merah, jika tidak, warnai dengan warna biru. Menyelesaikan masalah ini setara dengan menunjukkan bahwa terdapat sebuah segitiga merah atau segitiga biru.

Ambil sembarang titik sudut. Berdasarkan prinsip rumah merpati, dari lima segmen garis yang keluar dari titik sudut ini, tiga di antaranya memiliki warna yang sama (c). Perhatikan tiga titik sudut di ujung lain dari segmen-segmen garis ini dan segitiga T yang dibentuk oleh titik-titik tersebut. Jika T memiliki satu sisi berwarna c, maka terdapat segitiga dengan warna c. Jika tidak, maka semua sisi dari T diwarnai dengan warna yang berlawanan dengan c. Dalam kedua kasus tersebut, terdapat sebuah segitiga yang semua sisinya memiliki warna yang sama.

4. Misalkan $d_1, d_2, \dots, d_{16}$ adalah digit-digit dari sebuah bilangan 16-angka. Jika salah satu dari keenam belas digit tersebut adalah 0, 1, 4, atau 9, maka masalah tersebut terpecahkan (karena angka-angka tersebut adalah bilangan kuadrat sempurna). Jadi, kita dapat berasumsi bahwa setiap digitnya adalah 2, 3, 5, 6 = 2 × 3, 7, atau 8 = 2^3. Misalkan x_0 = 1 dan x_i adalah hasil kali dari $d_1, d_2 \dots, d_i$ untuk i = 1, 2, ..., 16. Sekarang, setiap $x_i = 2^{p_i} \times 3^{q_i} \times 5^{r_i} \times 7^{s_i}$ untuk i = 0, 1, 2, ..., 16. Masing-masing dari p_i, q_i, r_i, s_i bernilai genap atau ganjil. Jadi, terdapat 2^4 = 16 kemungkinan pola paritas. Berdasarkan prinsip rumah merpati, nilai p_i, q_i, r_i, s_i untuk dua dari tujuh belas x_i yang ada, sebut saja x_j dan x_k dengan $j < k$, harus memiliki pola paritas yang sama. Maka $d_{j+1} \times \dots \times d_k = x_k / x_j$ adalah sebuah bilangan kuadrat sempurna.

Penerapan Matematika: Desain Pola

Matematika sejauh ini adalah alat paling kuat yang pernah diciptakan oleh umat manusia. Kami mengundang artikel-artikel yang dapat berbagi dengan kami berbagai bidang penerapan matematika. Kami berharap kolom ini akan menginspirasi para siswa untuk mempelajari matematika.

Dalam edisi pertama ini, saya ingin memperkenalkan sebuah aplikasi menarik yang memberikan contoh kekuatan matematika untuk mendefinisikan sebuah karya seni secara formal.

Coba perhatikan seragam sekolahmu. Seragam tersebut terbuat dari potongan-potongan kain. Sebelum kain dipotong, bentuk keseluruhan dan ukuran dari setiap potongan harus digambar terlebih dahulu. Setiap potongan tersebut dikenal sebagai pola pakaian (pattern piece).

Ketika sebuah pola digambar, ia harus sesuai dengan permukaan tubuh manusia. Oleh karena itu, proses desain pola sebenarnya merupakan sebuah masalah pembukaan lipatan permukaan (surface unfolding problem).

Apa yang membuat proses desain pola menjadi sebuah aktivitas artistik (seni) adalah penggambaran garis lengkung pada pola tersebut. Setiap orang memiliki pilihannya masing-masing. Itulah sebabnya mengapa beberapa produsen merek tertentu dapat menghasilkan pakaian yang terlihat lebih bagus.

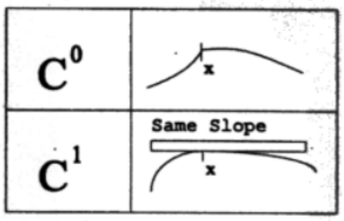
Untuk melihat bagaimana matematika dapat diterapkan, mari kita perhatikan sebuah masalah spesifik dalam menggambar garis lengkung. Coba lihat celana atau rokmu. Apakah kamu melihat adanya tumpang tindih yang mulus (smooth overlapping) pada bagian tengah depan tempat kamu mengancingkan pakaian tersebut?

Jika polanya tidak Tentu, ini adalah terjemahan untuk bagian teks dari gambar ketiga:digambar dengan benar, kamu akan melihat persilangan seperti gunting pada bagian pembukaan di sepanjang pinggang.

Kamu dapat membayangkan bahwa mengancingkan celanamu setara dengan membiarkan dua kurva bertemu di titik x yang sama. Dalam matematika, kita mendefinisikan dua jenis kondisi kontinuitas, yaitu C^0 dan C^1 (Gambar 1). C^0 berarti kedua kurva tersebut bertemu di titik x, yaitu $f(x^-) = f(x^+)$. C^1 berarti kedua kurva tersebut memiliki kemiringan (slope) yang sama di titik x, yaitu $f'(x^-) = f'(x^+)$.

Akan tercipta tumpang tindih yang mulus (smooth overlapping) saat sebuah celana dikancingkan jika kedua kondisi kontinuitas C^0 dan C^1 terpenuhi. Oleh karena itu, perancang busana yang cerdas menggunakan penggaris untuk memantau kemiringan $f'(x)$ (Gambar 1). Teknik ini secara dramatis meningkatkan kualitas sebuah pakaian.

Dalam contoh di atas, kita melihat bagaimana konsep kontinuitas dalam matematika dapat membantu seorang perancang busana untuk meningkatkan kehalusan (smoothness) sebuah pola dan dengan demikian dapat merancang pakaian yang tampak bagus. Faktanya, ada banyak bidang lain di mana matematika dapat bermanfaat.



Pojok Olimpiade

(Lanjutan dari halaman 1)

Soal 3. Untuk setiap bilangan bulat positif k, misalkan $f(k)$ adalah jumlah elemen dalam himpunan $\{k+1, k+2, \dots, 2k\}$ yang representasi basis 2-nya (biner) memiliki tepat tiga angka 1.

(a) Buktikan bahwa untuk setiap bilangan bulat positif m, terdapat setidaknya satu bilangan bulat positif k sedemikian sehingga $f(k) = m$.

(b) Tentukan semua bilangan bulat positif m sedemikian sehingga hanya terdapat tepat satu nilai k yang memenuhi $f(k) = m$.

Soal 4. Tentukan semua pasangan terurut (m, n) dari bilangan bulat positif sedemikian sehingga $\frac{n^3+1}{mn-1}$ adalah sebuah bilangan bulat.

Soal 5. Misalkan S adalah himpunan bilangan real yang secara ketat lebih besar dari -1. Tentukan semua fungsi $f: S \to S$ yang memenuhi dua syarat berikut:

(i) $f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x)$ untuk semua x dan y di dalam S;

(ii) $f(x)/x$ naik secara murni (strictly increasing) pada masing-masing interval $-1 < x < 0$ dan $0 < x$.

Soal 6. Tunjukkan bahwa terdapat sebuah himpunan A yang terdiri dari bilangan bulat positif dengan sifat sebagai berikut: Untuk setiap himpunan tak terhingga S yang berisi bilangan prima, terdapat dua bilangan bulat positif $m \in A$ dan $n \notin A$ yang mana masing-masing merupakan hasil kali dari k elemen berbeda di S untuk suatu nilai $k \geq 2$.

Dari Bilangan Prima Fermat ke Konstruksi Poligon Beraturan

Pierre de Fermat (1601-1665), seorang matematikawan amatir, pernah menduga bahwa semua bilangan dalam bentuk $2^{2^n}+1$ adalah bilangan prima. Jika kita mencoba lima nilai n pertama (n = 0, 1, 2, 3, 4), semuanya memang benar merupakan bilangan prima:

n	$2^{2^n}+1$
0	3
1	5
2	17
3	257
4	65537

Kemudian ditemukan oleh Leonhard Euler (1707-1783) pada tahun 1732 bahwa bilangan Fermat berikutnya (n = 5) dapat difaktorkan sebagai:

$$2^{2^5}+1=641\times 6700417$$

dan dengan demikian bukan merupakan bilangan prima. Kisah ini mungkin akan berakhir di sini jika bukan karena penemuan brilian oleh Carl Friedrich Gauss (1777-1855).

Pada tahun 1794, di usia tujuh belas tahun, Gauss menemukan bahwa sebuah "p-gon" beraturan (poligon dengan p sisi), di mana p adalah bilangan prima, dapat dikonstruksi (artinya, hanya menggunakan penggaris dan jangka) jika dan hanya jika p adalah sebuah "bilangan prima Fermat" (bilangan prima dalam bentuk $2^{2^n}+1$). Ia membuktikan hal ini dengan mempertimbangkan solusi-solusi dari persamaan aljabar tertentu. (Pembaca yang tertarik dapat merujuk pada buku "What Is Mathematics?" yang ditulis oleh Courant dan Robbins, Oxford University Press.) Gauss muda begitu terpukau oleh penemuannya sehingga ia kemudian memutuskan untuk mendedikasikan hidupnya pada matematika. Setelah kematiannya, sebuah patung perunggu untuk mengenangnya yang berdiri di atas alas berbentuk segi-17 beraturan didirikan di Braunschweig—kota kelahiran Gauss.

Poligon beraturan manakah yang dapat dikonstruksi? Dari hasil temuan Gauss, kita tahu bahwa segitiga, pentagon (segi-5), segi-17, segi-257, dan segi-65537 beraturan dapat dikonstruksi. (Bagaimana caranya?) Kita juga tahu bahwa poligon beraturan dengan jumlah sisi 7, 11, 13, 19, ... tidak dapat dikonstruksi karena angka-angka tersebut adalah bilangan prima tetapi bukan bilangan prima Fermat. Selain itu, kita tahu cara membagi dua sebuah sudut, sehingga poligon beraturan dengan jumlah sisi 4, 8, 16, 32, ... atau 6, 12, 24, 48, ... juga dapat dikonstruksi.Bagaimana dengan yang lainnya? Apakah segi-15 beraturan dapat dikonstruksi? Jawabannya ternyata adalah ya, karena 1/15 = 2/5 - 1/3 dan dengan demikian kita dapat membagi sebuah lingkaran menjadi 15 bagian yang sama besar. Bagaimana dengan segi-9 beraturan? Dapat dibuktikan bahwa segi-9 beraturan tidak dapat dikonstruksi. Bisakah Anda menemukan teorema umum mengenai poligon beraturan mana saja yang dapat dikonstruksi?

Apakah ada p-gon beraturan lainnya yang dapat dikonstruksi (di mana p adalah bilangan prima) selain kelima poligon yang telah disebutkan? Pertanyaan ini setara dengan menanyakan apakah ada bilangan prima Fermat lainnya. Sampai saat ini, belum ada bilangan Fermat lainnya yang terbukti prima, dan masih belum diketahui apakah terdapat lebih dari lima bilangan prima Fermat. Mungkin Anda dapat menemukan bilangan prima Fermat yang baru dan mencatatkan nama Anda dalam sejarah matematika.