Pojok Olimpiade

Soal 1. Dalam sebuah segitiga $\Delta ABC, \angle C = 2\angle B$. Titik P berada di bagian dalam ΔABC sedemikian sehingga $AP = AC$ dan $PB = PC$. Tunjukkan bahwa garis AP membagi tiga sama besar sudut $\angle A$ (trisect).

Soal 2. Dalam sebuah turnamen tenis meja yang diikuti oleh 10 kontestan, setiap dua kontestan hanya bertanding satu kali. Kita katakan bahwa terdapat sebuah "segitiga kemenangan" jika situasi berikut terjadi: kontestan ke-i mengalahkan kontestan ke-j, kontestan ke-j mengalahkan kontestan ke-k, dan kontestan ke-k mengalahkan kontestan ke-i. Misalkan W_i dan L_i masing-masing adalah jumlah pertandingan yang dimenangkan dan dikalahkan oleh kontestan ke-i. Andaikan $L_i + W_j \geq 8$ setiap kali kontestan ke-i menang melawan kontestan ke-j. Buktikan bahwa terdapat tepat 40 segitiga kemenangan dalam turnamen ini.

Soal 3. Tentukan semua bilangan bulat non-negatif x, y, dan z yang memenuhi $7^x + 1 = 3^y + 5^z$.

Soal 4. Misalkan $yz + zx + xy = 1$ dan $x, y, z \geq 0$. Buktikan bahwa: $x(1 - y^2)(1 - z^2) + y(1 - z^2)(1 - x^2) + z(1 - x^2)(1 - y^2) \leq 4\sqrt{3}/9$

Soal 5. Diketahui sebuah fungsi $f(n)$ yang terdefinisi pada bilangan asli memenuhi kondisi: $f(n) = n - 12$ jika $n > 2000$, dan $f(n) = f(f(n + 16))$ jika $n \leq 2000$.

a) Tentukan $f(n)$
b) Tentukan semua solusi untuk $f(n) = n$.

Soal 6. Misalkan m dan n adalah bilangan bulat positif di mana m memiliki d digit dalam basis sepuluh dan $d \leq n$. Tentukan jumlah dari semua digit (dalam basis sepuluh) dari hasil kali $(10^n - 1)m$.

Permainan Fraktal untuk Meloloskan Diri

(Vol 1 - No 2)

Pertimbangkan skenario berikut. John, seorang agen rahasia, sedang ditawan di markas teroris. Ia telah menemukan rute pelarian, dan mengetahui bahwa rute tersebut mengikuti persamaan kuadrat $z_{n+1} = z_n^2 + c$ jika peta lantainya dikodekan sebagai bidang-z kompleks (yaitu, setiap titik (x, y) diwakili oleh bilangan kompleks $x + yi$). Namun, John tidak mengetahui nilai dari konstanta kompleks c. John hanya tahu bahwa ia harus mulai dari titik asal dengan $z_0 = 0 + 0i$. Untuk nilai c berapakah John bahkan tidak akan memiliki kesempatan untuk berhasil meloloskan diri?

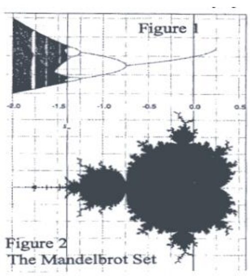
Untuk membantu John menjawab pertanyaan di atas, sewajarnya kita mencoba $c = 0$ terlebih dahulu dan melihat apa yang akan terjadi. Rekursinya menjadi $z_{n+1} = z_n^2$ dan dengan demikian $z_n = 0$ untuk semua n. Artinya, John tidak akan pergi ke mana-mana melainkan tetap berada di titik asal!

Jika kita mencoba nilai-nilai c yang lain, terdapat tiga kemungkinan hasil: (1) barisan z_n **konvergen** ke suatu titik tetap; (2) barisan z_n **berulang** dalam siklus titik yang terbatas dan dengan demikian menjadi barisan periodik; atau (3) barisan z_n **divergen** (menjauh) dari titik asal, yang artinya, John mungkin memiliki kesempatan untuk berhasil meloloskan diri.

Cerita di atas adalah sebuah dramatisasi untuk definisi dari sebuah **fraktal** yang disebut **himpunan Mandelbrot**. (Kata "fraktal" diciptakan oleh Benoit Mandelbrot untuk mendeskripsikan himpunan-himpunan dengan keserupaan diri atau *self-similarity*, yaitu, mereka terlihat sama jika Anda memperbesar bagian dari himpunan tersebut.) Himpunan Mandelbrot dapat didefinisikan sebagai himpunan bilangan kompleks c sedemikian sehingga barisan $z_{n+1} = z_n^2 + c$ adalah **terbatas** (yaitu, tidak divergen) ketika titik awalnya z_0 adalah titik asal (0,0). Gambar 1 menunjukkan perilaku asimtotik dari z_n untuk nilai-nilai c riil yang menghasilkan barisan terbatas (yaitu, hasil 1 dan 2). Jumlah titik pada garis vertikal menunjukkan periode dari barisan asimtotik tersebut. Gambar 2 menunjukkan nilai-nilai untuk c (area berwarna hitam) yang akan menjaga z_n tetap terbatas, yaitu, himpunan Mandelbrot.

Sekarang jika kita sedikit memodifikasi cerita kita—asumsikan bahwa John mengetahui konstanta c tetapi tidak mengetahui titik awal z_0, hal ini akan membawa kita pada definisi **himpunan Julia**—diambil dari nama matematikawan Gaston Julia (1893-1978). Untuk setiap bilangan kompleks c yang diberikan, beberapa titik awal z_0 menghasilkan barisan $z_{n+1} = z_n^2 + c$ yang divergen, sementara yang lainnya menghasilkan barisan yang tidak divergen. **Himpunan Julia adalah batas yang memisahkan kumpulan titik awal yang "divergen" dari kumpulan titik awal yang "tidak divergen".**

Berikut adalah sebuah contoh sederhana. Untuk $c = 0$, persamaannya adalah $z_{n+1} = z_n^2$. Jika titik awal terletak dalam jarak kurang dari 1 dari titik asal, titik-titik selanjutnya akan menjadi semakin dekat ke titik asal. Jika titik awal berada lebih dari jarak 1 dari titik asal, titik-titik selanjutnya akan menjadi semakin jauh dari titik asal. **Lingkaran satuan** memisahkan kedua kumpulan titik awal ini. Batas inilah yang menjadi **himpunan Julia** yang sesuai untuk $c = 0$.



Permainan Fraktal untuk Meloloskan Diri

(Lanjutan hal 1)

Dengan memvariasikan nilai c, kita akan memperoleh gambaran himpunan Julia yang berbeda dalam jumlah yang tak terbatas. Beberapa contoh ditunjukkan pada gambar-gambar di halaman ini. Namun, tidak peduli apa pun nilai c-nya, kita mengamati bahwa pada dasarnya ada dua jenis utama himpunan Julia. Antara seluruh titik z_0 **terhubung** dalam satu kesatuan, atau titik-titik tersebut **terpecah** menjadi sejumlah kepingan (bahkan, jumlah kepingan yang tak terbatas hingga membentuk sesuatu yang disebut **himpunan Cantor**).

Kita mungkin mengajukan sebuah pertanyaan menarik kepada diri kita sendiri. Untuk nilai c berapakah himpunan Julia yang bersesuaian akan terhubung (*connected*)? Ini tampaknya merupakan masalah yang sangat sulit. Tampaknya kita perlu melihat semua himpunan Julia untuk mengetahui mana yang terhubung, dan akan memakan waktu selamanya untuk menyusun data yang sangat besar ini. Namun, matematikawan John Hubbard dan Adrien Douady menemukan cara cepat untuk melakukan tugas ini. Mereka membuktikan bahwa suatu himpunan Julia **terhubung** jika barisan $z_{n+1} = z_n^2 + c$ adalah terbatas ketika titik awalnya z_0 adalah titik asal (0,0). Artinya, jika c termasuk dalam **himpunan Mandelbrot**, maka himpunan Julia yang bersesuaian akan terhubung! Oleh karena itu, himpunan Mandelbrot dikenal sebagai "daftar isi" untuk semua himpunan Julia.

Selain hubungan yang menarik ini dan gambar-gambar yang memukau, himpunan Julia dan banyak fraktal lainnya memberikan kita wawasan tentang banyak fenomena fisik. Sebagai contoh, Himpunan Julia berkaitan langsung dengan garis medan ekuipotensial dari sebuah batang logam melingkar elektrostatik.

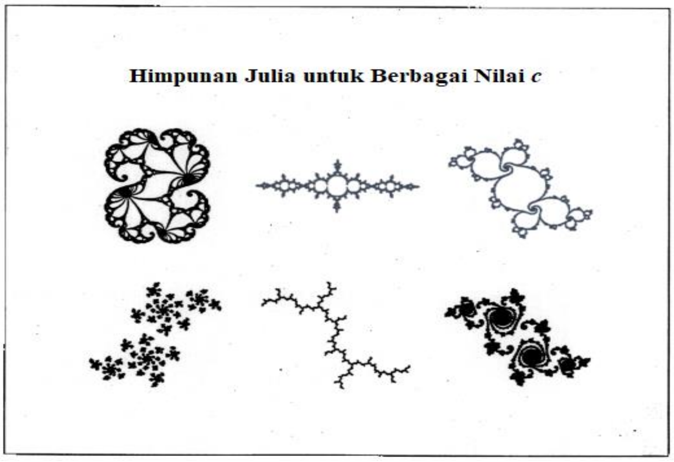
Tripel Pythagoras

Dalam geometri, kita sering menjumpai segitiga yang sisi-sisinya merupakan bilangan bulat. Pernahkah Anda terpikir bagaimana cara menghasilkan banyak segitiga yang tidak serupa (*nonsimilar*) jenis ini tanpa menebak-nebak? Untuk itu, pertama-tama kita definisikan **Tripel Pythagoras** sebagai tripel (a, b, c) dari bilangan bulat positif yang memenuhi $a^2 + b^2 = c^2$. Sebagai contoh, (3, 4, 5) dan (5, 12, 13) adalah Tripel Pythagoras. Jelas bahwa jika $a^2 + b^2 = c^2$, maka $(ad)^2 + (bd)^2 = (cd)^2$ untuk setiap bilangan bulat positif d. Jadi, solusi dari $a^2 + b^2 = c^2$ dengan a, b, c yang relatif prima (yaitu, tidak memiliki pembagi prima persekutuan) adalah hal yang penting. Ini disebut sebagai **solusi primitif**. Di bawah ini kita akan menetapkan sebuah teorema terkenal yang memberikan semua solusi primitif tersebut.

Teorema. Jika u, v adalah bilangan bulat positif yang relatif prima, $u > v$ dan salah satunya ganjil sedangkan yang lainnya genap, maka $a = u^2 - v^2$, $b = 2uv$, $c = u^2 + v^2$ memberikan solusi primitif dari $a^2 + b^2 = c^2$. Sebaliknya, setiap solusi primitif memiliki bentuk seperti ini, dengan kemungkinan permutasi (pertukaran posisi) pada a dan b.

Sebagai contoh, $u = 2, v = 1$ berkorespondensi dengan $a = 3, b = 4, c = 5$. Sekarang mari kita coba lihat mengapa teorema ini benar. Untuk pernyataan pertama, aljabar sederhana menunjukkan $a^2 + b^2 = u^4 + 2u^2v^2 + v^4 = c^2$. Jika dua dari a, b, c memiliki pembagi prima persekutuan p, maka persamaan tersebut akan menyiratkan bahwa ketiganya memiliki p sebagai pembagi persekutuan dan $p \neq 2$. Juga akan mengikuti bahwa $(c - a)/2 = u^2$ dan $(c + a)/2 = v^2$ adalah bilangan bulat dengan p sebagai pembagi persekutuan. Hal ini akan membedakan dengan fakta bahwa u, v adalah **relatif prima**. Jadi a, b, c haruslah relatif prima.

Untuk pernyataan kedua, kita memperkenalkan **aritmetika modulo**. Jika r, s adalah bilangan bulat yang memiliki sisa pembagian yang sama setelah dibagi oleh bilangan bulat positif m, maka kita katakan r **kongruen** terhadap s modulo m dan mari kita nyatakan ini dengan $r \equiv s \pmod{m}$. Sebagai contoh, $r \equiv 0$ atau 1 (mod 2) bergantung pada apakah r genap atau ganjil. Dari definisi tersebut, kita melihat bahwa kongruensi adalah sebuah relasi ekuivalensi antara r dan s. Selain itu, jika $r \equiv s \pmod{m}$ dan $r' \equiv s' \pmod{m}$, maka $r + r' \equiv s + s' \pmod{m}$, $r - r' \equiv s - s' \pmod{m}$, $rr' \equiv ss' \pmod{m}$ dan $r^k \equiv s^k \pmod{m}$ untuk setiap bilangan bulat positif k. Dalam bekerja dengan bilangan kuadrat, modulo 4 sering kali dipertimbangkan. Hal ini berasal dari pengamatan bahwa $r^2 \equiv 0$ atau 1 (mod 4), tergantung pada apakah r bilangan genap atau ganjil. Sekarang, jika $a^2 + b^2 = c^2$, maka $a^2 + b^2 \equiv 0$ atau 1 (mod4).



Pojok Soal

Soal 6. Untuk polynomial kuadrat $P(x) = ax^2 + bx + c$ dengan koefisien riil yang memenuhi $|P(x)| \leq 1$ untuk $-1 \leq x \leq 1$, tentukan nilai maksimum yang mungkin dari b dan berikan satu polynomial yang mencapai koefisien b maksimal tersebut.

Soal 7. Jika bilangan bulat positif a, b, c memenuhi $a^2 + b^2 = c^2$, tunjukkan bahwa terdapat setidaknya tiga segitiga siku-siku yang tidak kongruen dengan sisi-sisi bilangan bulat yang semuanya memiliki hipotenusa (sisi miring) sama dengan c^3.

Soal 8. Misalkan $a_1 = a_2 = 1$ dan $a_n = (a_{n-1}^2 + 2)/a_{n-2}$ untuk $n = 3, 4, \ldots$ Tunjukkan bahwa a_n adalah bilangan bulat untuk $n = 3, 4, \ldots$

Soal 9. Pada sisi AD dan BC dari sebuah segi empat cembung $ABCD$ dengan $AB < CD$, tentukan titik F dan E sedemikian sehingga $AF/FD = BE/EC = AB/CD$. Andaikan EF ketika diperpanjang melewati F memotong garis BA di P dan memotong garis CD di Q. Tunjukkan bahwa $\angle BPE = \angle CQE$.

Soal 10. Tunjukkan bahwa setiap bilangan bulat $k > 1$ memiliki kelipatan yang kurang dari k^4 dan dapat ditulis dalam basis 10 dengan paling banyak empat digit berbeda. [*Petunjuk: Pertama-tama pertimbangkan angka-angka yang hanya terdiri dari digit 0 dan 1 saja.*]

Solusi Soal

Soal 1. Jumlah dari dua bilangan bulat positif adalah 2310. Tunjukkan bahwa hasil kali keduanya tidak habis dibagi oleh 2310.

Solusi: Misalkan x, y adalah dua bilangan bulat positif sedemikian sehingga $x + y = 2310$. Andaikan xy habis dibagi oleh 2310, maka $xy = 2310n$ untuk suatu bilangan bulat positif n. Kita dapatkan $x + (2310n/x) = 2310$. Maka $x^2 - 2310x + 2310n = 0$. Oleh karena itu, diskriminan $\Delta = 2310^2 - 4(2310n) = 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times (1155 - 2n)$ haruslah berupa bilangan kuadrat sempurna. Maka untuk suatu bilangan bulat positif k, $1155 - 2n = 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times k^2 = 1155k^2 \geq 1155$, yang merupakan sebuah **kontradiksi**. Jadi, xy tidak habis dibagi oleh 2310.

Soal 2. Diberikan N objek dan $B(\geq 2)$ kotak, tentukan sebuah ketidaksamaan yang melibatkan N dan B sedemikian sehingga jika ketidaksamaan tersebut terpenuhi, maka setidaknya dua kotak memiliki jumlah objek yang sama.

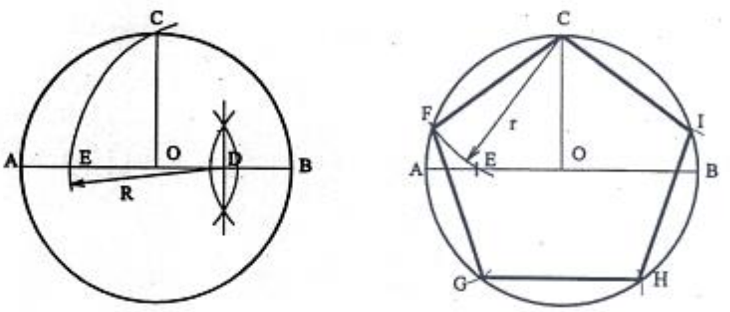
Solusi: Nyatakan jumlah objek dalam kotak ke-k sebagai N_k. Andaikan tidak ada dua kotak yang memiliki jumlah objek yang sama. Maka $N = N_1 + N_2 + \cdots + N_B \geq 0 + 1 + 2 + \cdots + (B-1) = B(B-1)/2$. Jadi, jika $N < B(B-1)/2$, maka setidaknya dua kotak memiliki jumlah objek yang sama.

Soal 3. Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan bulat positif n, terdapat polinomial $P(x)$ berderajat n dan $Q(x)$ berderajat $n-1$ sedemikian sehingga $\left(P(x)\right)^2 - 1 = (x^2-1)\left(Q(x)\right)^2$.

Solusi: Untuk $k = 1, 2, \ldots$, definisikan $P_k(x), Q_k(x)$ melalui $P_1(x) = x, Q_1(x) = 1, P_{k+1}(x) = xP_k(x) + (x^2-1)Q_k(x)$ dan $Q_{k+1}(x) = P_k(x) + xQ_k(x)$. Kita dapat memeriksa bahwa derajat dari P_n adalah n dan derajat dari Q_n adalah $n-1$ dengan menunjukkan secara induktif bahwa $P_n(x) = 2^{n-1}x^n + \cdots$ dan $Q_n(x) = 2^{n-1}x^{n-1} + \cdots$. Untuk masalah ini, ketika $n = 1$, $P_1(x)^2 - 1 = x^2 - 1 = (x^2-1)Q_1(x)^2$. Andaikan kasus $n = k$ benar. Maka

$$
\begin{aligned}
P_{k+1}(x)^2 - 1 &= [xP_k(x) + (x^2-1)Q_k(x)]^2 - 1 \\
&= (x^2-1)[P_k(x)^2 + 2xP_k(x)Q_k(x) \\
&\quad + (x^2-1)Q_k(x)^2] + P_k(x)^2 - 1 \\
&= (x^2-1)[P_k(x)^2 + 2xP_k(x)Q_k(x) \\
&\quad + (x^2-1)Q_k(x)^2] + (x^2-1)Q_k(x)^2 \\
&= (x^2-1)Q_{k+1}(x)^2.
\end{aligned}
$$

Konstruksi Tanpa Kata: Menggambar Segilima Beraturan di dalam Lingkaran Satuan



Panjang Sisi $= 2\sin 36° = \dfrac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{2} = \sqrt{1 + \left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2}$.

Bagaimana cara Anda mengonstruksi (melukis) segi-17 beraturan di dalam sebuah lingkaran yang diberikan?

Soal 4. Jika diagonal-diagonal dari sebuah segi empat pada sebuah bidang datar saling tegak lurus, tunjukkan bahwa titik-titik tengah dari sisi-sisinya dan titik-titik kaki garis tegak lurus yang ditarik dari titik-titik tengah tersebut ke sisi-sisi di hadapannya terletak pada satu lingkaran.

Solusi: Misalkan $ABCD$ adalah sebuah segi empat sedemikian sehingga AC tegak lurus dengan BD. Misalkan E, F, G, H masing-masing adalah titik-titik tengah dari AB, BC, CD, DA. Berdasarkan teorema titik tengah, EH, BD, FG saling sejajar satu sama lain, begitu pula dengan EF, AC, HG. Karena AC dan BD saling tegak lurus, maka $EFGH$ adalah sebuah persegi panjang. Oleh karena itu, E, F, G, H adalah titik-titik yang konsiklik (terletak pada satu lingkaran).

Misalkan M adalah titik kaki garis tegak lurus dari E ke CD, maka $\angle EMG = \angle EFG = 90°$. Jadi E, F, M, G, H terletak pada satu lingkaran. Demikian pula, titik-titik kaki garis tegak lurus lainnya berada pada lingkaran yang sama.

Soal 5. Misalkan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ adalah n bilangan bulat ganjil positif yang berbeda. Andaikan semua selisih $|a_i - a_j|$ adalah berbeda, untuk $1 \le i < j \le n$. Buktikan bahwa:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \ge \frac{n(n^2+2)}{3}$$

Solusi: Tanpa mengurangi keumuman (*without loss of generality*), andaikan $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Untuk $k = 2,3,\backslash dots, n$, karena selisihnya berbeda, maka $a_k = a_1 + (a_2 - a_1) + \cdots + (a_k - a_{k-1}) \ge 1 + (2 + 4 + \cdots + 2(k-1)) = 1 + k^2 - k$. Dengan menjumlahkan dari $k = 1$ sampai n, kita dapatkan $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \ge n(n^2+2)/3$.

Triple Pythagoras

(Lanjutan hal 2)

Jadi, jika a, b, c juga relatif prima, maka salah satu dari a atau b adalah ganjil dan yang lainnya genap. Katakanlah a ganjil dan b genap. Maka c adalah ganjil dan berarti $m = (c-a)/2$ serta $n = (c+a)/2$ adalah bilangan bulat positif. Perhatikan bahwa $(= m - n)$ dan c $(= m + n)$ yang relatif prima menunjukkan bahwa m, n tidak mungkin memiliki pembagi prima persekutuan. Sekarang dengan mempertimbangkan faktorisasi prima dari $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, yang nilainya sama dengan mn, maka dapat disimpulkan bahwa baik m maupun n adalah bilangan kuadrat sempurna tanpa pembagi prima persekutuan. Katakanlah $m = v^2$ dan $n = u^2$. Maka $a = u^2 - v^2$, $b = 2uv$ dan $c = u^2 + v^2$.

Contoh 1. Tunjukkan bahwa tepat ada tiga segitiga siku-siku yang sisi-sisinya adalah bilangan bulat, sementara luasnya bernilai dua kali lipat dari kelilingnya secara numerik.

Solusi: Untuk segitiga tersebut, sisi-sisinya berbentuk $a = (u^2 - v^2)d, b = 2uvd$ dan $c = (u^2 + v^2)d$, di mana u, v relatif prima, $u > v$, salah satunya ganjil, yang lainnya genap, dan d adalah pembagi persekutuan terbesar dari ketiga sisi tersebut. Kondisi $ab/2 = 2(a + b + c)$ yang dinyatakan dalam variabel u, v, d dapat disederhanakan menjadi $(u - v)vd = 4$. Oleh karena itu, $u - v$ yang merupakan bilangan ganjil haruslah bernilai 1. Maka $v = 1, 2$, atau 4; $u = 2$, 3, atau 5; $d = 4$, 2, atau 1 yang bersesuaian dengan segitiga-segitiga 12-16-20, 10-24-26, dan 9-40-41.

Contoh 2. Tunjukkan bahwa terdapat tak terhingga banyaknya titik pada lingkaran satuan sedemikian sehingga jarak antara dua titik mana pun di antaranya adalah bilangan rasional.

Solusi: Misalkan $A = (-1,0), B = (1,0)$ dan O adalah titik asal. Pertimbangkan semua titik P sedemikian sehingga $AP = 2(u^2 - v^2)/(u^2 + v^2)$ dan $BP = 4uv/(u^2 + v^2)$, di mana u, v adalah seperti yang ada dalam teorema. Karena $AP^2 + BP^2 = AB^2$, maka semua titik P tersebut berada pada lingkaran satuan. Menggunakan kesebangunan segitiga, kita temukan koordinat dari P adalah (x, y), di mana $x = (AP^2/2) - 1$ dan $y = \pm AP \cdot BP/2$ keduanya adalah bilangan rasional. Misalkan $\theta = \angle BOP = 2\angle BAP$. Maka cos $(\theta/2) = (1 + x)/AP$ dan sin $(\theta/2) = |y|/AP$ adalah rasional. Akhirnya, untuk dua titik P dan P' semacam itu, jarak $PP' = 2|\sin(\theta - \theta')/2| = 2|\sin(\theta/2)\cos(\theta'/2)\cos(\theta/2)\sin(\theta'/2)|$ adalah bilangan rasional.

Contoh 3. Temukan semua solusi bilangan bulat positif dari $3^x + 4^y = 5^z$.

Kita akan menunjukkan bahwa hanya ada satu himpunan solusi, yaitu $x = y = z = 2$. Untuk menyederhanakan persamaan, kita tinjau dalam modulo 3. Kita dapatkan $1 \equiv 0 + 1^y \equiv 3^x + 4^y = 5^z \equiv (-1)^z \bmod 3$. Dari sini disimpulkan bahwa z harus genap, misalkan $z = 2w$. Maka $3^x = 5^z - 4^y = (5^w + 2^y)(5^w - 2^y)$. Sekarang $5^w + 2^y$ dan $5^w - 2^y$ tidak keduanya habis dibagi 3, karena jumlah mereka tidak habis dibagi 3. Jadi, $5^w + 2^y = 3^x$ dan $5^w - 2^y = 1$. Maka, $(-1)^w + (-1)^y \equiv 0 \bmod 3$ dan $(-1)^w - (-1)^y \equiv 1 \bmod 3$. Akibatnya, w ganjil dan y genap. Jika $y > 2$, maka $5 \equiv 5^w + 2^y = 3^x \equiv 1$ atau 3 mod 8, sebuah kontradiksi. Jadi $y = 2$. Kemudian $5^w - 2^2 = 1$ menyiratkan $w = 1$ dan $z = 2$. Akhirnya, kita dapatkan $x = 2$.