Pojok Olimpiade

Penyelesaian dengan Kombinasi Linear

(Vol 2 - No 2)

Masalah 1. Misalkan $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ adalah polynomial dengan koefisien kompleks. Andaikan akar-akar dari $P(x)$ adalah $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ dengan $|\alpha_1| > 1, |\alpha_2| > 1, \ldots, |\alpha_j| > 1$, dan $|\alpha_{j+1}| \leq 1, \ldots, |\alpha_n| \leq 1$. Buktikan:

$$\prod_{i=1}^{j} |\alpha_i| \leq \frac{\sqrt{|a_0|^2 + |a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2}}{|a_n|}$$

Masalah 2. Diberikan sebuah barisan bilangan bulat $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8$. Seseorang mengontruksi barisan kedua $|x_2 - x_1|, |x_3 - x_2|, |x_4 - x_3|, |x_5 - x_4|, |x_6 - x_5|, |x_7 - x_6|, |x_8 - x_7|, |x_1 - x_8|$. Proses semacam ini disebut sebagai operasi tunggal. Tentukan semua barisan bilangan bulat 8-suku yang memiliki sifat berikut: setelah sejumlah operasi tunggal yang berhingga, barisan tersebut menjadi barisan bilangan bulat dengan semua sukunya bernilai sama.

Masalah 3. Andaikan n orang berkumpul dalam sebuah pertemuan, setiap orang di antara mereka mengenal tepat 8 peserta lain dalam pertemuan tersebut. Lebih lanjut, andaikan bahwa setiap pasangan dari dua peserta yang saling mengenal memiliki 4 kenalan yang sama di pertemuan itu, dan setiap pasangan dari dua peserta yang tidak saling mengenal hanya memiliki 2 kenalan yang sama. Berapakah nilai-nilai n yang mungkin?

Masalah 4. Diberikan n (di mana $n \geq 2$) bilangan bulat berbeda $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Buktikan bahwa terdapat sebuah polynomial $f(x)$ berderajat n dan dengan koefisien bulat yang memenuhi kondisi berikut:

i. $f(m_i) = -1$, untuk semua $1 \leq i \leq n$.
ii. $f(x)$ tidak dapat difaktorkan menjadi hasil kali dua polynomial tidak konstan dengan koefisien bulat.

Dalam metmatika, sering kali kita tertarik untuk mencari solusi dari persamaan-persamaan. Perhatikan dua masalah berikut:

Masalah 1. Diberikan bilangan real $m_1, m_2, \ldots, m_n$ (semuanya berbeda) dan $a_1, a_2, \ldots, a_n$, carilah sebuah polynomial $v(x)$ sedemikian sehingga $v(m_1) = a_1, v(m_2) = a_2, \ldots, v(m_2) = a_n$.

Masalah 2. Diberikan bilangan bulat positif $m_1, m_2, \ldots, m_n$ (relative prima pasangan) dan bilangan bulat $a_1, a_2, \ldots, a_n$, carilah sebuah bilangan bulat v sedemikian sehingga $v \equiv a_1$ (mod m_1), $v \equiv a_2$ (mod m_2), …, $v \equiv a_n$ (mod m_n).

Masalah 1 muncul pertama kali dalam aljabar dan analisis (kemudian dalam teknik dan statistik). Ini adalah sebuah masalah interpolasi, di mana kita mencoba mencocokkan nilai a_i pada m_i (yaitu, mencari sebuah polinomial yang grafiknya melewati titik-titik $(m_1, a_1), (m_2, a_2), \ldots, (m_n, a_n)$).
Masalah 2 muncul dalam teori bilangan. Ini adalah masalah kekongruenan, di mana kita mencoba menghitung objek dengan memeriksa sisa pembagiannya (yaitu, mencari sebuah bilangan yang memiliki sisa pembagian yang sama dengan a_i saat dibagi oleh m_i).

Terdapat sebuah teknik yang dapat diterapkan pada kedua masalah tersebut. Idenya adalah dengan menyelesaikan terlebih dahulu kasus-kasus khusus, di mana tepat satu dari a_i bernilai 1 dan semua a_i lainnya bernilai 0. Untuk masalah 1, hal ini dapat diselesaikan dengan mudah dengan mendefinisikan (untuk $i = 1, 2, \ldots, n$) polynomial $P_i(x)$ sebagai $(x - m_1)(x - m_2) \ldots (x - m_n)$ dengan factor $(x - m_i)$ dihilangkan, yaitu:

$$P_i(x) = \prod_{\substack{j=i \\ j \neq i}}^{n} (x - m_j),$$

dan $v_i(x) = P_i(x)/P_i(m_i)$. Maka $v_i(m_i) = 1$ dan $v_i(m_k) = 0$ untuk $k \neq i$ karena $P_i(m_k) = 0$ (untuk $k \neq i$).

Untuk masalah 2, ini diselesaikan dengan cara yang serupa dengan pertama-tama mendefinisikan (untuk $i = 1, 2, \ldots, n$) bilangan bulat P_i sebagai $m_1 m_2 \ldots m_n$ dengan factor m_i dihilangkan. Perhatikan $P_i, 2P_i, \ldots, m_i P_i$. Setelah pembagian oleh m_i, tidak ada dua di antaranya yang akan memiliki sisa yang sama karena selisih dari dua bilangan tersebut tidak habis dibagi oleh m_i. Jadi salah satu dari ini, katakanlah $c_i P_i$, memiliki sisa 1. Misalkan $v_i = c_i P_i$, maka $v_i \equiv 1$ (mod m_i) dan $v_i \equiv 0$ (mod m_k) untuk $k \neq i$ karena $P_i \equiv 0$ (mod m_k).

Akhirnya, untuk menyelesaikan masalah 1 atau 2 secara umum, kita menggunakan solusi kasus khusus $v_1, v_2, \ldots, v_n$ untuk membentuk $v = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$. Sekarang mudah untuk memeriksa bahwa ekspresi v menyelesaikan masalah 1 dan 2.

Untuk masalah 1,

$$v(x) = a_1 \frac{P_1(x)}{P_1(m_1)} + \cdots + a_n \frac{P_n(x)}{P_n(m_n)}$$

disebut sebagai rumus interpolasi Lagrange. Untuk masalah 2, meskipun nilai c_i mungkin membosankan untuk dicari, kita tahu bahwa sebuah solusi $v = a_1 c_1 P_1 + \cdots + a_n c_n P_n$ ada. Ini adalah pernyataan dari Teorema Sisa Tiongkok (Chinese Remainder Theorem). Perhatikan juga bahwa jika kita menambahkan kelipatan apa pun dari $(x - m_1)(x - m_2) \ldots (x - m_n)$ ke v pada masalah 1, atau kelipatan apa pun dari $m_1 m_2 \ldots m_n$ pada masalah 2, kita akan mendapatkan solusi-solusi lainnya.

Ekspresi dari v, yang melibatkan jumlah dari kelipatan $v_1, v_2, \ldots, v_n$, sangat umum ditemukan dalam masalah-masalah serupa sehingga kini disebut sebagai kombinasi linear dari $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Sebagai catatan tambahan, perhatikan bahwa a_i adalah angka. Namun, v_i adalah polinomial pada masalah 1 dan angka pada masalah 2. Seperti vektor yang dinyatakan dalam koordinat, v_i adalah objek yang dapat mengambil nilai berbeda pada posisi yang berbeda. Jadi, fungsi-fungsi yang berkorespondensi dengan solusi persamaan sering kali dipandang sebagai vektor (dengan koordinat yang tak terhingga banyaknya). Konsep-konsep seperti ini adalah dasar dari Aljabar Linear, yang mempelajari sifat-sifat solusi dari masalah jenis ini secara abstrak.

Contoh 1. Jika $f(x)$ adalah polynomial berderajat paling tinggi n dan $f(k) = (n+1-k)/(k+1)$ untuk $k = 0, 1, \ldots, n$, tentukan $f(n+1)$.

Solusi 1. Menerapkan rumus interpolasi Lagrange, kita definisikan $P_k(x) = x(x-1)\ldots(x-n)$ dengan factor $(x-k)$ dihilangkan. Maka $P_k(n+1) = (n+1)!/(n+1-k)$, $P_k(k) = (-1)^{n-k}k!\,(n-k)!$ dan

$$f(n+1) = (-1)^{n+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\frac{(n+1)!}{(k+1)!\,(n-k)!} = (-1)^n$$

di mana kita menggunakan ekspansi binomial dari $(1-1)^{n+1}$ pada langkah terakhir.

Solusi 2. Polinomial $g(x) = (x+1)f(x) - (n+1-x)$ memiliki derajat paling tinggi $n+1$. Kita diberikan bahwa $g(0) = g(1) = \cdots = g(n) = 0$. Jadi $g(x) = Cx(x-1)\ldots(x-n)$. Untuk mencari C, kita tetapkan $x = -1$ dan memperoleh $g(-1) = -(n+2) = C(-1)^{n+1}(n+1)!$. Oleh karena itu, $C = (-1)^n(n+2)/(n+1)!$ dan $g(n+1) = (n+2)f(n+1) = (-1)^n(n+2)$, yang menyiratkan $f(n+1) = (-1)^n$.

Contoh 2. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan bulat positif n, terdapat n bilangan bulat positif berurutan yang tidak satu pun di antaranya merupakan pangkat bulat dari suatu bilangan prima.

Solusi. Misalkan $p_1, p_2, \ldots, p_{2n}$ menjadi $2n$ bilangan prima yang berbeda dan perhatikan masalah kekongruenan $v \equiv -1 \pmod{p_1p_2}$, $v \equiv -2 \pmod{p_3p_4}$, ..., $v \equiv -n \pmod{p_{2n-1}p_{2n}}$. Karena $p_1p_2, p_3p_4, \ldots, p_{2n-1}p_{2n}$ relatif prima berpasangan, berdasarkan Teorema Sisa Tiongkok, terdapat solusi bilangan bulat positif v. Maka, setiap dari n bilangan berurutan $v+1$, $v+2$, ..., $v+n$ habis dibagi oleh lebih dari satu bilangan prima. Jadi, masing-masing bilangan tersebut bukan merupakan pangkat dari suatu bilangan prima.

Teorema Sisa Tiongkok

Dalam kitab klasik matematika "Sunzi Suanjing" (Kitab Suci Matematika Sunzi) yang ditulis pada masa Dinasti Utara dan Selatan di Tiongkok, terdapat sebuah masalah terkenal sepanjang masa yang disebut "Masalah Benda yang Tidak Diketahui Jumlahnya". Pertanyaannya adalah:

Tanya: Sekarang ada sejumlah benda yang tidak diketahui jumlahnya. Jika dihitung tiga-tiga, tersisa dua; jika dihitung lima-lima, tersisa tiga; jika dihitung tujuh-tujuh, tersisa dua. Berapakah jumlah benda tersebut?

Jawab: Dua puluh tiga.

Masalah ini memiliki daya tarik seperti teka-teki dan telah beredar luas di kalangan rakyat Tiongkok. Dalam sejarah matematika Barat, ini dikenal sebagai "Teorema Sisa Tiongkok". Jika kita menggunakan simbol matematika modern untuk menyatakan "Masalah Sunzi" ini, dari kondisi yang diketahui kita peroleh:

$$N \equiv 2 \pmod 3;$$
$$N \equiv 3 \pmod 5;$$
$$N \equiv 2 \pmod 7.$$

Carilah bilangan bulat positif terkecil N. Ini adalah masalah sistem kekongruenan linear satu variabel. Metode penyelesaiannya disusun menjadi "Lagu Sunzi", sebuah puisi lima suku kata:

Tiga orang berjalan bersama, tujuh puluh itu langka.
Lima pohon bunga mei, dua puluh satu dahan.
Tujuh anak berkumpul, tepat di tengah bulan (lima belas).
Kurangi seratus lima, maka akan segera tahu.

Menggunakan ekspresi matematika modern:

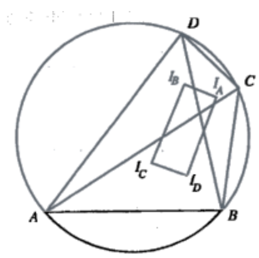
$$N = 70 \times 2 + 21 \times 3 + 15 \times 2 - 105 \times 2 = 23$$

Langkah penyelesaiannya adalah pertama-tama mencari kelipatan persekutuan dari 7 dan 5 yang jika dibagi 3 bersisa 1, angka tersebut adalah 70; oleh karena itu, 70 × 2 jika dibagi 3 bersisa 2. Dengan cara serupa, 21 adalah kelipatan persekutuan 7 dan 3 yang jika dibagi 5 bersisa 1, maka 21 × 3 jika dibagi 5 bersisa 3. Selanjutnya, 15 × 2 habis dibagi 3 dan 5, namun jika dibagi 7 bersisa 2. Jumlah dari ketiga angka ini memenuhi semua kondisi yang diperlukan. Terakhir, kurangi dengan kelipatan persekutuan dari 3, 5, dan 7 (3 × 5 × 7 = 105) agar N menjadi bilangan bulat positif terkecil yang memenuhi semua syarat. Inilah cara mendapatkan jawaban yang dicari.

Pojok Soal

Soal 26. Tunjukkan bahwa solusi-solusi dari persamaan $\cos \pi x = \frac{1}{3}$ semuanya adalah bilangan irasional.

Soal 27. Misalkan $ABCD$ adalah segi empat tali busur dan misalkan I_A, I_B, I_C, I_D berturut-turut adalah titik pusat lingkaran dalam (incenter) dari $\Delta BCD, \Delta ACD, \Delta ABD, \Delta ABC$. Tunjukkan bahwa $I_A I_B I_C I_D$ adalah sebuah persegi panjang.



Soal 28. Bilangan-bilangan bulat positif dipisahkan menjadi dua himpunan bagian (subset) yang tidak memiliki elemen persekutuan. Tunjukkan bahwa salah satu dari kedua himpunan bagian tersebut harus memuat tiga suku barisan aritmetika.

Soal 29. Andaikan $P(x)$ adalah polinomial tidak konstan dengan koefisien bulat dan semua koefisiennya lebih besar dari atau sama dengan -1. Jika $P(2) = 0$, tunjukkan bahwa $P(1) \neq 0$.

Soal 30. Untuk bilangan bulat positif $n > 1$, definisikan $f(n)$ sebagai 1 ditambah jumlah dari semua bilangan prima yang membagi n dikalikan dengan eksponennya, contohnya, $f(40) = f(2^3 \times 5^1) = 1 + (2 \times 3 + 5 \times 1) = 12$. Tunjukkan bahwa jika $n > 6$, barisan $n, f(n), f(f(n)), f\left(f(f(n))\right), \ldots$ pada akhirnya akan berulang menjadi 8, 7, 8, 7, 8, 7, ...

Solusi

Soal 21. Tunjukkan bahwa jika sebuah polynomial $P(x)$ memenuhi

$$P(2x^2 - 1) = \frac{P(x)^2}{2}$$

maka polynomial tersebut haruslah konstan.

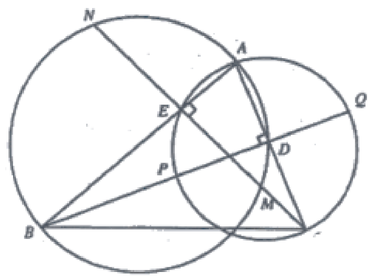
Solusi 1. Bentuk sebuah barisan $u_1 = 1, u_2 = -1$ dan $u_n = \sqrt{\frac{u_{n-1}+1}{2}}$ untuk $n \geq 3$. Kita mendapati $u_n < u_{n+1} < 1$ untuk semua $n \geq 2$ dan $P(u_n) = \frac{P(u_{n+1})^2}{2} - 1$ untuk $n \geq 1$. Perhatikan bahwa $P(u_n) \neq 0$ untuk $n \geq 1$ (jika tidak, $P(u_n) = 0$ akan menyiratkan $P(u_{n-1}), P(u_{n-2}), \ldots, P(u_1)$ adalah rasional, padahal $P(1) = 1 \pm \sqrt{3}$). Dengan menurunkan persamaan fungsional untuk P, kita mendapatkan $4xP'(2x^2 - 1) = P(x)P'(x)$. Karena $P(1) \neq 4$, kita mendapatkan $P'(u_1) = P'(1) = 0$. Ini menyiratkan $0 = P'(u_2) = P'(u_3) = \cdots$ Oleh karena itu, $P'(x)$ adalah polynomial nol dan dengan demikian $P(x)$ adalah konstan.

Solusi 2. Misalkan $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ adalah polynomial dengan derajat $n \geq 1$. Maka

$$a_0(2x^2-1)^n + a_1(2x^2-1)^{n-1} + \cdots + a_n = \frac{(a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n)^2}{2} - 1.$$

Membandingkan koefisien x^{2n}, kita temukan $a_0 2^n = a_0^2/2$, sehingga $a_0 = 2^{n+1}$. Misalkan $a_0, a_1, \ldots, a_k$ diketahui sebagai bilangan rasional. Membandingkan koefisien x^{2n-k-1}, sisi kiri menghasilkan angka rasional yang melibatkan $a_0, \ldots, a_k$, tetapi sisi kanan menghasilkan angka dalam bentuk $a_0 a_{k+1}$ ditambah angka rasional yang melibatkan $a_0, \ldots, a_k$. Jadi a_{k+1} juga rasional. Oleh karena itu, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ semuanya rasional. Maka $P(1) = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$ adalah rasional. Namun, $P(1) = (P(1)^2/2) - 1$ memaksa $P(1) = 1 \pm \sqrt{3}$, sebuah kontradiksi. Oleh karena itu, $P(x)$ harus merupakan konstanta.

Soal 22. Sebuah segitiga lancip ABC diberikan pada sebuah bidang. Lingkaran dengan diameter AB memotong garis tinggi CE dan perpanjangannya pada titik M dan N, dan lingkaran dengan diameter AC memotong garis tinggi BD dan perpanjangannya pada P dan Q. Buktikan bahwa titik-titik M, N, P, Q terletak pada satu lingkaran yang sama.



Solusi: Jika M, N, P, Q terletak pada satu lingkaran (konsiklik), maka A harus menjadi pusatnya karena A adalah titik potong dari garis bagi tegak lurus (perpendicular bisectors) dari PQ dan MN. Jadi, cukup untuk menunjukkan bahwa $AP = AM$.

Dengan memperhatikan segitiga serupa ADP dan APC, kita mendapatkan $AD/AP = AP/AC$, yaitu, $AP^2 = AD \times AC$. Demikian pula, $AM^2 = AE \times AB$. Karena $\angle BEC = \angle BDC$, maka titik-titik B, C, D, E adalah konsiklik. Oleh karena itu, $AD \times AC = AE \times AB$ dan dengan demikian $AP = AM$.

Soal 23. Tentukan semua barisan $\{a_1, a_2, \ldots\}$ sedemikian hingga $a_1 = 1$ dan $|a_n - a_m| \leq 2mn/(m^2 + n^2)$ untuk semua bilangan bulat positif m dan n.

Solusi: Untuk m yang tetap,

$$\lim_{n\to\infty} |a_n - a_m| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{2mn}{m^2 + n^2} = 0$$

Jadi untuk semua m,

$$a_m = \lim_{n\to\infty} a_n,$$

Ini berarti bahwa semua suku adalah sama (yaitu $a_1 = 1$.)

Soal 24. Dalam sebuah pesta, n laki-laki dan n perempuan dipasangkan. Teramati bahwa pada setiap pasangan, perbedaan tingginya kurang dari 10 cm. Tunjukkan bahwa perbedaan tinggi antara laki-laki tertinggi ke-k dan perempuan tertinggi ke-k juga kurang dari 10 cm untuk k = 1, 2, …, n.

Solusi: Misalkan $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$ adalah tinggi badan para laki-laki dan $g_1 \geq g_2 \geq \cdots \geq g_n$ adalah tinggi badan para perempuan. Andaikan untuk suatu k, $|b_k - g_k| \geq 10$. Dalam kasus $b_k - g_k \geq 10$, kita mendapatkan $b_i - g_j \geq 10$ untuk $1 \leq i \leq k$ dan $k \leq j \leq n$. Perhatikan laki-laki dengan tinggi b_i $(1 \leq i \leq k)$ dan perempuan dengan tinggi g_j $(k \leq j \leq n)$. Berdasarkan prinsip sarang merpati (pigeonhole principle), dua dari $n+1$ orang ini pasti telah dipasangkan pada awalnya. Namun, $b_i - g_j \geq 10$ bertentangan dengan hipotesis (bahwa semua pasangan awal memiliki selisih tinggi < 10 cm). (Kasus $g_k - b_k \geq 10$ ditangani dengan cara yang serupa). Jadi, $|b_k - g_k| < 10$ untuk semua k.

Soal 25. Apakah ada bilangan bulat positif n sedemikian hingga empat digit pertama dari sisi kiri $n!$ (dalam representasi basis 10) adalah 1995?

Solusi: Misalkan $[x]$ adalah bilangan bulat terbesar yang tidak melebihi x (fungsi tangga) dan $\{x\} = x - [x]$ (bagian pecahan). Juga, misalkan $a_j = 1 + j \times 10^{-8}, b_0 = \log 10^8\,!$ dan $b_j = \log 10^8! + (\log a_1 + \cdots + \log a_j)$ untuk $j > 0$. (Untuk solusi ini, log berarti $\log_{10}$.). Perhatikan bahwa:

i. $0 < \log a_k \leq \log a_{30000} < \log \frac{1996}{1995}$ untuk $k = 1, 2, \ldots, 30000$;
ii. $\sum_{j=1}^{30000} \log a_j > 15000(\log a_1 + \log a_{30000}) > 1$.

Perhatikan bahwa jarak antara $\{\log 1995\}$ dan $\{\log 1996\}$ adalah $\log(1996/1995)$. Sekarang, $b_0, b_1, \ldots, b_{30000}$ bersifat naik dan

$$b_{30000} - b_0 > 1 \text{ (berdasarkan (ii))},$$

tetapi

$$0 < b_{j+1} - b_j < \log \frac{1996}{1995} \text{ (berdasarkan (i))}.$$

Maka, terdapat suatu $k \leq 30000$ sedemikian hingga:

$$\{\log 1995\} < \{b_k\} < \{\log 1996\}$$

Sekarang

$$\log 10^8! + \sum_{j=1}^{k} \log a_j = \log(10^8 + k)! - 8k$$

menyiratkan

$$\{\log 1995\} < \{\log(10^8 + k)!\} < \{\log 1996\}$$

Dengan menambahkan [log1995] = [log1996] = 3, kita mendapatkan

$$\log 1995 < \log(10^8 + k)! - m < \log 1996$$

untuk $m = [\log(10^8 + k)!] - 3$. Oleh karena itu,

$$1995 \times 10^m < (10^8 + k)! < 1996 \times 10^m$$

Akibatnya, bilangan $(10^8 + k)!$ dimulai dengan angka 1995.

Solusi 2: Misalkan $m = 1000100000$. Jika $k < 99999$ dan $(m+k)! = abcd\ldots$ (dalam representasi basis 10), maka $(m+k+1)! = abcd \ldots \times 10001 \ldots = efgh\ldots$, di mana $efgh$ sama dengan $abcd$ atau merupakan empat digit pertama dari $abcd + 1$. Jadi, empat digit pertama dari masing-masing $(m+1)!, (m+2)!, \ldots, (m+99999)!$ haruslah tetap sama atau bertambah 1 dibandingkan dengan faktorial sebelumnya. Selain itu, karena digit kelima dari $m + k$ (k < 99999) adalah 1, digit kelima dari $(m+k)!$ akan ditambahkan ke digit pertama dari $(m+k)!$ dalam menghitung $(m+k+1)!$. Oleh karena itu, dalam setiap sepuluh faktorial berturut-turut di antara $(m+1)!, (m+2)!, \ldots, (m+99999)!$, pasti terjadi peningkatan sebesar 1 pada empat digit pertamanya. Dengan demikian, empat digit pertama dari $(m+1)!, (m+2)!, \ldots, (m+99999)!$ pasti mencakup seluruh 9000 kemungkinan pilihan yang ada. Secara khusus, salah satu di antaranya adalah 1995.

Pojok Olimpiade

(Lanjutan Hal 1)

Masalah 5. Misalkan P adalah sebuah titik pada lingkaran luar segitiga $\Delta A_1A_2A_3$. Misalkan H adalah ortosenter (titik potong garis tinggi) dari $\Delta A_1A_2A_3$. Misalkan B_1 (B_2, B_3 berturut-turut) adalah titik perpotongan garis tegak lurus dari P ke A_2A_3 (A_3A_1, A_1A_2 berturut-turut). Diketahui bahwa ketiga titik B_1, B_2, B_3 adalah segaris (kolinear). Buktikan bahwa garis $B_1B_2B_3$ melewati titik tengah dari ruas garis PH.

Masalah 6. Misalkan a, b, c, d adalah bilangan bulat sedemikian hingga $ad - bc = k > 0, (a, b) = 1$, dan $(c, d) = 1$. Buktikan bahwa terdapat tepat k pasangan terurut bilangan riil (x_1, x_2) yang memenuhi $0 \leq x_1, x_2 < 1$ dan kedua nilai $ax_1 + bx_2$ serta $cx_1 + dx_2$ adalah bilangan bulat.