KUMPULAN SOAL & SOLUSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA

TAHUN 2002 - 2025

JELAJAH NALAR

TINGKAT : SMA

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan ke hadirat Tuhan Yang Maha Esa atas selesainya penyusunan kumpulan soal dan solusi olimpiade ini.

Sesuai dengan nama kami, **Jelajah Nalar**, buku ini disusun bukan sekadar untuk memberikan jawaban, melainkan sebagai kompas bagi para siswa dalam menjelajahi labirin logika dan kreativitas berpikir. Kami percaya bahwa setiap soal olimpiade adalah sebuah petualangan intelektual yang menantang batas kemampuan.

Semoga kumpulan materi ini dapat menjadi rekan setia dalam perjalanan Anda meraih prestasi dan memperluas cakrawala nalar. Selamat menjelajah!

Bekasi, Februari 2026

Tim Jelajah Nalar

DAFTAR ISI

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT KABUPATEN/KOTA TAHUN 2002

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2003

BIDANG MATEMATIKA

WAKTU : 90 MENIT

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Kabupaten/Kota Tahun 2002

Bagian Pertama

1. Bilangan $\frac{(2^4)^8}{(4^8)^2}$ sama dengan

   A. ¼ B. ½ C. 1 D. 2 E. 8

2. Bando selalu berkata bohong. Suatu hari dia berkata kepada tetangganya, Andi : "Paling tidak salah satu diantara kita tidak pernah berbohong." Dari informasi ini kita merasa pasti bahwa

   A. Andi selalu berbohong
   B. Andi sesekali berbohong
   C. Andi selalu berkata benar
   D. Andi sesekali berkata benar
   E. Andi tidak pernah berkata apa pun

3. Bilangan n terbesar sehingga 8^n membagi 44^{44} adalah

   A. 8 B. 22 C. 29 D. 44 E. 88

4. Pernyataan manakah yang benar ?

   A. Jika $x < 0$ maka $x^2 > x$
   B. Jika $x^2 > 0$ maka $x > 0$
   C. Jika $x^2 > x$ maka $x > 0$
   D. Jika $x^2 > x$ maka $x < 0$
   E. Jika $x < 1$ maka $x^2 < x$

5. Misalkan x^{-n} sama dengan $\left(\frac{1}{x}\right)^n$ untuk setiap bilangan real x. Maka $a^3 - a^{-3}$ sama dengan

   A. $\left(a - \frac{1}{a}\right)\left(a^2 + 1 + \frac{1}{a^2}\right)$
   B. $\left(\frac{1}{a} - a\right)\left(a^2 - 1 + \frac{1}{a^2}\right)$
   C. $\left(a - \frac{1}{a}\right)\left(a^2 - 2 + \frac{1}{a^2}\right)$
   D. $\left(\frac{1}{a} - a\right)\left(\frac{1}{a^2} + 1 + a^2\right)$
   E. bukan diantara A, B, C, dan D

6. Lima ekor kambing memakan rumput seluas 5 kali ukuran lapangan bola dalam 5 hari. Berapa hari yang diperlukan oleh 3 ekor kambing untuk menghabiskan rumput seluas 3 kali lapangan bola?

   A. 2 B. 3 C. 4 D. 5 E. 6

7. Jika untuk setiap x, y bilangan real berlaku $x\$y = xy - x + y$ maka $(x + y)\$(x - y)$ sama dengan ··

   A. $x^2 - y^2 + 2x$
   B. $x^2 - y^2 - 2x$
   C. $x^2 - y^2 + 2y$
   D. $x^2 - y^2 - 2y$
   E. $x^2 - y^2$

8. Berapa banyak pasang bilangan bulat positif (a, b) yang memenuhi $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{6}$?

   A. 1 B. 2 C. 3 D. 4 E. 5

9. Untuk nilai a yang manakah garis lurus $y = 6x$ memotong parabola $y = x^2 + a$ tepat di satu titik?
   A. 7 B. 8 C. 9 D. 10 E. 11

10. Digit 1, 9, 9, 8 dalam 1998 mempunyai jumlah total 1 + 9 + 9 + 8 = 27. Bilangan berikutnya yang mempunyai jumlah digit 27 terjadi di antara tahun
    A. 2500 dan 2700
    B. 2701 dan 2900
    C. 2901 dan 3100
    D. 3101 dan 9900
    E. 9901 dan 9999

Bagian Kedua

11. Pada suatu segitiga ABC, sudut C tiga kali besar sudut A dan sudut B dua kali besar sudut A. Berapakah perbandingan (rasio) antara panjang AB dengan BC ?

12. Bando dan Bandi ingin mengecat pagar, Bando dapat menyelesaikan pengecatan pagar oleh dirinya sendiri dalam waktu 3 jam, sedangkan Bandi dapat menyelesaikannya dalam 4 jam. Pada pukul 12:00 siang mereka mulai mengecat pagar bersama-sama. Akan tetapi pada suatu ketika mereka bertengkar. Mereka bertengkar selama 10 menit dan dalam masa itu tidak satupun yang melakukan pengecatan. Setelah pertengkaran tersebut Bandi pergi dan Bando meyelesaikan pengecatan pagar sendirian. Jika Bando menyelesaikan pengecatan pada pukul 14:25, pada pukul berapakah pertengkaran dimulai ?

13. Berapakah jumlah digit-digit bilangan $2^{2002} \cdot 5^{2003}$?

14. Berapa banyak bilangan positif yang kurang dari 10.000 yang berbentuk $x^8 + y^8$ untuk suatu bilangan bulat $x > 0$ dan $y > 0$?

15. Tentukan bilangan n terkecil sehingga setiap subhimpunan dari $\{1, 2, 3, \cdots, 20\}$ yang beranggotakan n unsur pasti mengandung dua anggota yang selisihnya 8.

16. Garis AB dan CD sejajar dan berjarak 4 satuan. Misalkan AD memotong BC di titik P diantara kedua garis. Jika AB = 4 dan CD = 12, berapa jauh P dari garis CD ?

17. Misalkan a dan b bilangan real yang berbeda sehingga
$$\frac{a}{b} + \frac{a + 10b}{b + 10a} = 2$$
    Tentukan nilai $\frac{a}{b}$.

18. Bilangan bulat positif $p \geq 2$ disebut bilangan prima jika ia hanya mempunyai faktor 1 dan p. Tentukan nilai penjumlahan semua bilangan prima diantara 1 dan 100 yang sekaligus bersifat : satu lebihnya dari suatu bilangan kelipatan 5 dan satu kurangnya dari suatu bilangan kelipatan 6.

19. Misalkan

$$a = \frac{1^2}{1} + \frac{2^2}{3} + \frac{3^2}{5} + \cdots + \frac{1001^2}{2001}$$

dan

$$b = \frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{5} + \frac{3^2}{7} + \cdots + \frac{1001^2}{2003}$$

Tentukan bilangan bulat yang nilainya paling dekat ke a − b.

20. Suatu persegi panjang berukuran 8 kali $2\sqrt{2}$ mempunyai titik pusat yang sama dengan suatu lingkaran berjari-jari 2. Berapakah luas daerah irisan antara persegi panjang dan lingkaran tersebut ?

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT KABUPATEN/KOTA
TAHUN 2002

TIM OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2003

SOLUSI SOAL

BIDANG MATEMATIKA

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Kabupaten/Kota Tahun 2002

BAGIAN PERTAMA

1. (Jawaban : C)

$\therefore \dfrac{\left(2^4\right)^8}{\left(4^8\right)^2} = \dfrac{2^{32}}{4^{16}} = \dfrac{2^{32}}{2^{32}} = 1$

2. (Jawaban : B)

lingkaran dari : paling tidak salah satu di antara kita tidak pernah berbohong adalah :

∴ Kedua-duanya pernah berbohong

3. (Jawaban : C)

$44^{44} = 4^{44} \cdot 11^{44} = 16^{22} \cdot 11^{44} = 8^{22} \cdot 2^{22} \cdot 11^{44} = 8^{22} \cdot (2^3)^7 \cdot 2 \cdot 11^{44} = 8^{29} \cdot 2 \cdot 11^{44}$

Karena 8 tidak membagi $(2 \cdot 11^{44})$, maka :

∴ $n_{maks} = 29$

4. (Jawaban : A)

Dasar teori :

Jika	$x < 0$	maka	$x^2 > x$
Jika	$0 < x < 1$	maka	$x^2 < x$
Jika	$x > 1$	maka	$x^2 > x$

A. Benar

B. Salah. Karena jika $x^2 > 0$ dimungkinkan $x < 0$ atau $x > 0$

C. Salah. Karena $x^2 > x$ maka $x(x-1) > 0$ sehingga $x < 0$ atau $x > 1$

D. Salah. Karena jika $x^2 > x$ dimungkinkan $x < 0$ atau $x > 1$

E. Salah. Karena untuk $x < 0$ maka $x^2 > x$

∴ Pernyataan yang benar adalah : jika $x < 0$ maka $x^2 > x$

5. (Jawaban : A)

$(a^3 - b^3) = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^3 - a^{-3} = a^3 - \left(\frac{1}{a}\right)^3$

$a^3 - a^{-3} = \left(a - \frac{1}{a}\right)\left(a^2 + a \cdot \frac{1}{a} + \left(\frac{1}{a}\right)^2\right)$

$\therefore a^3 - a^{-3} = \left(a - \frac{1}{a}\right)\left(a^2 + 1 + \frac{1}{a^2}\right)$

6. (Jawaban : D)

Kecepatan makan untuk 1 ekor kambing, v_k = 1 lap. bola/ 5 hari / 5 kambing.

V_k = 1/5 lap bola/hari/kambing

Banyaknya rumput yang dimakan, n_r dirumuskan dengan :

$N_r = v_k \cdot n_{hari} \cdot n_{kambing}$

$3 = 1/5 \cdot n_{hari} \cdot 3$

$\therefore n_{hari}$ = 5 hari

7. (Jawaban : D)

(x + y) $ (x − y) = (x + y) (x − y) − (x + y) + (x − y)

∴ (x + y) $ (x − y) = $x^2 - y^2 - 2y$

8. (Jawaban : ?)

Karena b > 0 maka $\frac{1}{a} < \frac{1}{6}$ sehingga a > 6 ········ (1)

Karena maka $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{6}$ maka $\frac{a+b}{ab} = \frac{1}{6}$

$a = \frac{6(b-6)+36}{b-6}$

$a = 6 + \frac{36}{b-6}$ ········ (2)

Karena a > 6 maka (b − 6) > 0 ············ (3)

Karena a bilangan bulat maka (b − 6) adalah faktor dari 36 dan karena (b − 6) > 0 maka nilai (b − 6) yang memenuhi adalah 1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18 atau 36.

Untuk					
	b − 6 = 1	b − 6 = 2	b − 6 = 3	b − 6 = 4	b − 6 = 6
	b = 7	b = 8	b = 9	b = 10	b = 12
	a = 42	a = 24	a = 18	a = 15	a = 12

b − 6 = 9	b − 6 = 12	b − 6 = 18	b − 6 = 36
b = 15	b = 18	b = 24	b = 42
a = 10	a = 9	a = 8	a = 7

Pasangan bilangan bulat (a, b) yang memenuhi adalah :

{ (7,42) ; (8,24) ; (9,18) ; (10,15) ; (12,12) ; (15,10) ; (18,9) ; (24,8) ; (42,7) }

∴ Maka banyaknya pasangan (a, b) yang memenuhi adalah **9.**

9. (Jawaban : C)

Karena 6x = x^2 + a maka x^2 −6x + a = 0

Disk = 6^2 − 4(1)(a) = 36 − 4a

Syarat agar y = 6x memotong parabola y = x^2 + a di satu titik adalah Disk = 0 36 − 4a = 0

∴ a = 9

10. (Jawaban : B)

Misal bilangan selanjutnya adalah ABCD, maka A = 2 karena 1 + 9 + 9 + 9 ≠ 27.

B + C + D = 25

Karena diinginkan B sekecil-kecilnya, maka (C + D) harus sebesar-besarnya dan karena B ≤ 9;
C ≤ 9 dan D ≤ 9 maka $(C + D)_{maks} = 18$ sehingga $B_{min} = 25 - 18 = 7$.
Maka tahun berikutnya yang digitnya berjumlah 27 adalah 2799
∴ Maka tahun berikutnya yang digitnya berjumlah 27 terjadi di antara tahun 2701 dan 2900

BAGIAN KEDUA

11. ∠C = 3∠A dan ∠B = 2∠A
Karena ∠A + ∠B + ∠C = 180° maka ∠A + 2∠A + 3∠A = 180° sehingga ∠A = 30°
∠C = 3∠A = 90°
$$\frac{AB}{\sin\angle C} = \frac{BC}{\sin\angle A}$$
$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{\sin 90^o}{\sin 30^o} = 2$$

12. Misal kecepatan Bando mengecat v_o = 1 pagar / 3 jam = 1/3 pagar/jam
Kecepatan Bandi mengecat v_i = 1 pagar / 4 jam = 1/4 pagar/jam
t_1 adalah lamanya waktu Bando dan Bandi mengecat bersama (dalam jam)
Maka banyaknya pagar yang dicat oleh mereka n_{p1} adalah :
$$n_{p1} = v_o \cdot t_1 + v_1 \cdot t_1$$
$$n_{p1} = \frac{1}{3}t_1 + \frac{1}{4}t_1 = \frac{7}{12}t_1$$
t_2 adalah lamanya waktu Bando mengecat pagar sendirian setelah pertengkaran (dalam jam)
$$n_{p2} = v_o \cdot t_2$$
$$n_{p2} = \frac{1}{3}t_2$$
Karena t_{total} adalah waktu dari 12.00 sampai 14.25 maka $t_{total} = \frac{29}{12}$ jam

Lama pertengkaran 10 menit atau $\frac{1}{6}$ jam

$t_{total} = t_1$ + lama pertengkaran + t_2
$$\frac{29}{12} = t_1 + \frac{1}{6} + t^2$$
$t_1 + t_2 = \frac{9}{4}$. Maka $t_2 = \frac{9}{4} - t_1$
$$n_{p1} + n_{p2} = 1 = \frac{7}{12}t_1 + \frac{1}{3}t_2$$
$$1 = \frac{7}{12}t_1 + \frac{1}{3}\left(\frac{9}{4} - t_1\right)$$
$12 = 7t_1 + 9 - 4t_1$ sehingga $t_1 = 1$ jam

Maka pertengkaran dimulai 1 jam setelah pukul 12.00

$\therefore$ Pertengkaran dimulai pukul 13.00.

13. $N = 2^{2002} \cdot 5^{2003} = 5 \cdot (2 \cdot 5)^{2002} = 5 \cdot 10^{2002}$

$N = 500000\cdots$ (Sebuah bilangan yang terdiri dari 2003 digit dengan digit pertama 5 diikuti digit 0 sebanyak 2002 kali)

$\therefore$ Jumlah digit N = 5 + 0 + 0 + 0 + ⋯ = **5**

14. Misal $P = x^8 + y^8$; maka $P < 10^4$

Karena $x^8 > 0$ dan $y^8 > 0$ maka $x^8 < 10^4$ dan $y^8 < 10^4$

$x^2 < 10$ dan $y^2 < 10$

Maka x = 1; 2; atau 3 dan y = 1; 2; atau 3

Untuk x = 1 dan y = 1 maka $P = 1^8 + 1^8 = 2 < 10000$ (memenuhi)

Untuk x = 1 dan y = 2 atau x = 2 dan y = 1 maka $P = 1^8 + 2^8 = 257 < 10000$ (memenuhi)

Untuk x = 1 dan y = 3 atau x = 3 dan y = 1 maka $P = 1^8 + 3^8 = 6562 < 10000$ (memenuhi)

Untuk x = 2 dan y = 2 maka $P = 2^8 + 2^8 = 512 < 10000$ (memenuhi)

Untuk x = 2 dan y = 3 atau x = 3 dan y = 2 maka $P = 2^8 + 3^8 = 6817 < 10000$ (memenuhi)

Untuk x = 3 dan y = 3 maka $P = 3^8 + 3^8 = 13122 > 10000$ (tidak memenuhi)

Maka nilai P yang memenuhi adalah 2; 257; 6562; 512; 6817

$\therefore$ Banyaknya nilai yang berbentuk $x^8 + y^8$ dengan x, y bilangan bulat adalah **5**

15. Misal a − b = 8. Kemungkinan 2 nilai yang berselisih 8 adalah :

20 − 12	18 − 10	16 − 8	14 − 6	12 − 4	10 − 2
19 − 11	17 − 9	15 − 7	13 − 5	11 − 3	9 − 1

Bilangan 9; 10; 11; 12 berperan 2 baik sebagai a maupun b.

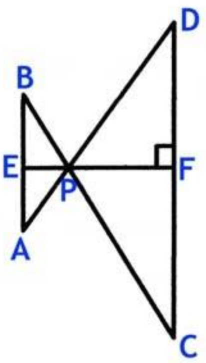
Jika kedelapan bilangan berikut :

a. 9	c. 11	e. 5 atau 13	g. 7 atau 15
b. 10	d. 12	f. 6 atau 14	h. 8 atau 16

tidak termasuk dalam n_{unsur}, maka tidak akan ada 2 unsur dari n_{unsur} yang berselisih 8. Maka untuk n = 20 − 8, masih dimungkinkan tidak ada 2 unsur dari n_{unsur} yang berselisih 8.

$\therefore$ $\mathbf{n_{minimal} = 13}$

16. Dibuat garis EF tegak lurus AB maupun CD serta melalui titik P.



Karena ∠CPD = ∠APB dan AB sejajar dengan CD, maka ΔAPB sebangun dengan ΔCPD.

$\frac{EP}{PF} = \frac{CD}{AB} = \frac{12}{4} = 3$

$PF = \frac{1}{3} \cdot EP$ .... (1)

$EP + PF = 4$

$EP + \frac{1}{3} \cdot EP = 4$

∴ EP = **3** satuan

17. Karena $\frac{a}{b} + \frac{a+10b}{b+10a} = 2$ maka $\frac{a}{b} + \frac{\frac{a}{b}+10}{1+10\frac{a}{b}} = 2$

Misal $\frac{a}{b} = x$, maka $\frac{x+10}{1+10x} = 2 - x$

x + 10 = 2 − 10x^2 + 19x

(5x − 4) (x − 1) = 0

x = 1 atau $x = \frac{4}{5}$

∴ Karena a ≠ b, maka x ≠ 1 maka $\frac{a}{b} = \frac{4}{5}$

18. 1 < p < 100

Dari pernyataan selanjutnya, maka :

p = 1 + 5x dengan x adalah bilangan bulat.

Karena 1 < 1 + 5x < 100 maka 0 < 5x < 99

0 < x < 20 ············· (1)

p = 6y − 1 dengan y adalah bilangan bulat.

Karena 1 < 6y − 1 < 100 maka 2 < 6y < 101

0 < y < 17 ·············· (2)

1 + 5x = 6y − 1

5x = 2(3y − 1) ············ (3)

3y − 1 = 5t   dan   x = 2t dengan t adalah bilangan bulat

$t = \frac{3y-1}{5}$ .... (4)

Karena t adalah bilangan bulat, maka 5 membagi (3y − 1) sehingga (3y − 1) adalah bilangan dengan angka satuan 0 atau 5. Maka y harus suatu bilangan dengan angka satuan 2 atau 7.

Karena 0 < y < 17, maka y = 2 atau 7 atau 12.

Jika y = 2 maka p = 6(2) − 1 = 11 (bilangan pima)

Jika y = 7 maka p = 6(7) − 1 = 41 (bilangan pima)

Jika y = 12 maka p = 6(12) − 1 = 71 (bilangan pima)

∴ Maka jumlah seluruh bilangan prima = 11 + 41 + 71 = **123**

19. $a - b = \frac{1^2}{1} + \left(\frac{2^2}{3} - \frac{1^2}{3}\right) + \left(\frac{3^2}{5} - \frac{2^2}{5}\right) + \left(\frac{4^2}{7} - \frac{3^2}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{1001^2}{2001} - \frac{1000^2}{2001}\right) - \frac{1001^2}{2003}$

Mengingat $(x^2 - y^2) = (x + y)(x - y)$, maka persamaan di atas menjadi :

$a - b = 1 + (1) + (1) + \cdots + (1) = \frac{1001^2}{2003}$

$a - b = 1001 \cdot 1 - \frac{1001^2}{2003}$

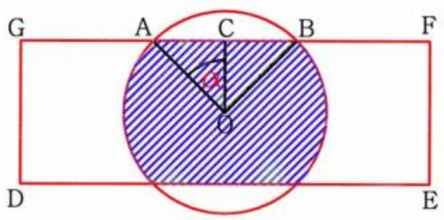
$a - b = \frac{1001 \cdot (2003 - 1001)}{2003}$

$a - b = \frac{1001 \cdot 1002}{2003}$

$a - b \approx \frac{1002}{2}$ dengan mengingat $2003 \approx 2 \cdot 1001$

∴ **a − b ≈ 501**

20.



Dari soal diketahui bahwa DE = 8 dan EF = $2\sqrt{2}$

OA = OB = 2

$OC = \frac{1}{2} \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{2}$

$\cos\alpha = \frac{OC}{OA} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Maka $\alpha = 45^o$

$\angle AOB = 90^o$

Luas juring OAB = $\frac{90^o}{360} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{4} \cdot \pi(2^2) = \pi$

Luas ΔOAB = $\frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin\angle AOB = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin 90^o = 2$

Luas tembereng AB = Luas juring OAB − Luas ΔOAB = π − 2

Luas arsir = Luas lingkaran − 2 · Luas tembereng AB

Luas arsir = $\pi(r)^2 - 2 \cdot (\pi - 2)$

Luas arsir = $4\pi - 2\pi + 4$

$\therefore$ Luas arsir = $\mathbf{2\pi + 4}$

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2002

TINGKAT PROVINSI

BIDANG MATEMATIKA

WAKTU : 90 MENIT

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2002

BAGIAN PERTAMA

1. Misalkan A = $(-1)^{-1}$, B = $(-1)^{1}$ dan C = 1^{-1}. Berapakah A + B + C ?

2. Jika $y = \frac{x-1}{2x+3}$, tuliskan x sebagai fungsi dari y.

3. Misalkan S = $(x - 2)^4 + 8(x - 2)^3 + 24(x - 2)^2 + 32(x - 2) + 16$. Apakah S jika dituliskan dalam sesedikit mungkin suku penjumlahan ?

4. Bilangan real 2,525252$\cdots$ adalah bilangan rasional, sehingga dapat ditulis dalam bentuk $\frac{m}{n}$, dimana m, n bilangan-bilangan bulat, n ≠ 0. Jika dipilih m dan n yang relatif prima, berapakah m + n ?

5. Misalkan M dan m berturut-turut menyatakan bilangan terbesar dan bilangan terkecil di antara semua bilangan 4-angka yang jumlah keempat angkanya adalah 9. Berapakah faktor prima terbesar dari M − m ?

6. Tinjau persamaan yang berbentuk $x^2 + bx + c = 0$. Berapa banyakkah persamaan demikian yang memiliki akar-akar real jika koefisien b dan c hanya boleh dipilih dari himpunan {1,2,3,4,5,6} ?

7. Diketahui tiga bilangan k, m dan n. Pernyataan "Jika k ≥ m, maka k > n" adalah tidak benar. Apakah pernyataan yang benar dalam hal ini ?

8. Sebuah saluran air seharusnya dibuat dengan menggunakan pipa berdiameter 10 cm. Akan tetapi yang tersedia hanyalah pip-pipa kecil yang berdiameter 3 cm. Supaya kapasitas saluran tidak lebih kecil daripada yang diinginkan, berapakah banyaknya pipa 3 cm yang perlu dipakai sebagai pengganti satu pipa 10 cm ?

9. Sebuah segitiga samasisi, sebuah lingkaran dan sebuah persegi memiliki keliling yang sama. Di antara ketiga bangun tersebut, manakah yang memiliki luas terbesar ?

10. Segitiga ABC memiliki panjang sisi AB = 10, BC = 7, dan CA = 12. Jika setiap sisi diperpanjang menjadi tiga kali panjang semula, maka segitiga yang terbentuk memiliki luas berapa kali luas ΔABC ?

11. Sebanyak n orang pengurus sebuah organisasi akan dibagi ke dalam empat komisi mengikuti ketentuan berikut : (i) setiap anggota tergabung ke dalam tepat dua komisi, dan (ii) setiap dua komisi memiliki tepat satu anggota bersama. Berapakah n ?

12. Didefinisikan $a * b = a + b + ab$ untuk semua bilangan real a,b. Jika $S = \{a \text{ bilangan real } a * (-a) > a\}$ tuliskan S sebagai sebuah selang (interval).

13. Garis tengah sebuah setengah lingkaran berimpit dengan alas AB dari ΔABC. Titik sudut C bergerak sedemikian rupa, sehingga titik tengah sisi AC selalu terletak pada setengah lingkaran. Berupa apakah lengkungan tempat kedudukan titik C ?

14. Berapakah bilangan bulat positif terbesar yang membagi semua bilangan $1^5 - 1, 2^5 - 2, \cdots, n^5 - n$?

15. Jika $2002 = a_1 + a_2 \cdot 2! + a_3 \cdot 3! + \cdots + a_n \cdot n!$, dimana a_k adalah bilangan bulat, $0 \le a_k \le k$, $k = 1, 2, \cdots, n$, dan $a_n \neq 0$, tentukan pasangan terurut (n, a_n).

16. Berapakah sisa pembagian $43^{43^{43}}$ oleh 100 ?

17. Empat pasang suami-isteri membeli karcis untuk 8 kursi sebaris pada suatu pertunjukan. Dua orang akan duduk bersebelahan hanya kalau keduanya pasangan suami isteri atau berjenis kelamin sama. Berapa banyakkah cara menempatkan keempat pasang suami-isteri ke 8 kursi tersebut ?

18. Ada berapa banyakkah bilangan 4-angka berbentuk $\overline{abcd}$ dengan $a \le b \le c \le d$?

19. Kita gambarkan segibanyak beraturan (reguler) R dengan 2002 titik sudut beserta semua diagonalnya. Berapakah banyaknya segitiga yang terbentuk yang semua titik sudutnya adalah titik sudut R, tetapi tidak ada sisinya yang merupakan sisi R ?

20. Suatu lomba maraton diikuti oleh empat SMU : Merak, Merpati, Pipit dan Walet. Setiap SMU mengirimkan lima pelari. Pelari yang masuk finish ke-1, 2, 3, 4, 5, 6 memperoleh nilai berturutturut 7, 5, 4, 3, 2, 1. Nilai setiap SMU adalah jumlah nilai kelima pelarinya. SMU dengan nilai terbesar adalah juara lomba. Di akhir lomba ternyata SMU Pipit menjadi juara dan tidak ada dua pelari yang masuk finish bersamaan. Ada berapa banyakkah kemungkinan nilai SMU pemenang ?

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2002

TINGKAT PROVINSI

BIDANG MATEMATIKA

Bagian Kedua

WAKTU : 120 MENIT

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2002

BAGIAN KEDUA

1. Lima buah bilangan asli berbeda, k, ℓ, m, n dan p, akan dipilih. Kelima informasi berikut ternyata cukup untuk mengurutkan kelima bilangan tersebut :
   (a) diantara setiap dua bilangan, salah satu bilangan mesti membagi bilangan yang lainnya,
   (b) m adalah bilangan yang terbesar atau yang terkecil,
   (c) p tidak boleh membagi sekaligus m dan k,
   (d) $n \leq \ell - p$, dan
   (e) k membagi n atau p membagi n, tetapi tidak sekaligus kedaunya.

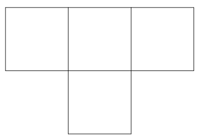
   Tentukan urutan yang mungkin bagi k, ℓ, m, n dan p

2. Tentukan semua bilangan bulat positif p sehingga $\dfrac{3p + 25}{2p - 5}$ juga bulat positif.

3. Diberikan sebuah bilangan 6-angka.
   Buktikan bahwa keenam angka bilangan tersebut dapat disusun ulang sedemikian rupa, sehinggga jumlah tiga angka pertama dan jumlah tiga angka terakhir berselisih tidak lebih dari 9.

4. Diberikan segitiga sama sisi ABC dan sebuah titik P sehingga jarak P ke A dan ke C tidak lebih jauh dari jarak P ke B.
   Buktikan bahwa PB = PA + PC jika dan hanya jika P terletak pada lingkaran luar ΔABC.

5. Bangun datar pada gambar disebut *tetromino-T*. Misalkan setiap petak tetromino menutupi tepat satu petak pada papan catur. Kita ingin menutup papan catur dengan tetromino-tetromino sehingga setiap petak tetromino menutup satu petak catur tanpa tumpang tindih.



   (a) Tunjukkan bahwa kita dapat menutup papan catur biasa, yaitu papan catur dengan 8 X 8 petak, dengan menggunakan 16 tetromino-T tetromino-T.
   (b) Tunjukkan bahwa kita tidak dapat menutup papan ‘catur’ 10 X 10 petak dengan 25 tetromino-T.

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT PROVINSI
TAHUN 2002

SOLUSI SOAL
Bagian Pertama

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2002

BAGIAN PERTAMA

1. A + B +C = $\frac{1}{(-1)^1} + (-1)^1 + \frac{1}{(1)^1} = -1 = -1 + 1$
   $\therefore A + B + C = -1$

2. $y = \frac{x-1}{2x+3}$
   2yx + 3y = x − 1
   x − 2yx = 3y + 1
   x (1 − 2y) = 3y + 1
   $\therefore x = \frac{3y+1}{1-2y}$

3. $(a + b)^4 = a^0b^4 + 4a^1b^3 + 6a^2b^2 + 4a^3b^1 + a^4b^0$
   $S = 2^0 \cdot (x-2)^4 + 4 \cdot 2^1 \cdot (x-2)^3 + 6 \cdot 2^2 \cdot (x-2)^2 + 4 \cdot 2^3 \cdot (x-2)^1 + 2^4 \cdot (x-2)^0$
   Mengingat teori di atas, maka : $S = (2 + (x-2))^4$
   $\therefore$ S = $\mathbf{x^4}$

4. Misal X = 2,525252⋯ maka 100X = 252,525252⋯
   100X − X = 252,525252⋯ − 2,525252⋯
   99X = 250
   $X = \frac{250}{99}$
   Karena 250 dan 99 relatif prima, maka m = 250 dan n = 99
   $\therefore$ m + n = 250 + 99 = **349**

5. Misal bilangan itu adalah : abcd
   Agar abcd sebesar-besarnya maka a harus sebesar-besarnya. Maka a = 9.
   Karena a = 9, agar a + b + c + d = 9, maka b = 0 ; c = 0; d = 0. Maka M = 9000
   Agar abcd sekecil-kecilnya maka a harus sekecil-kecilnya dan karena a ≠ 0, maka a = 1.
   b juga harus sekecil-kecilnya, maka b = 0. c juga harus sekecil-kecilnya, maka c = 0.
   Karena a + b + c + d = 9, maka d = 8. Akibatnya m = 1008

$M - m = 9000 - 1008 = 7992 = 8 \cdot 999 = 8 \cdot 27 \cdot 37$
$M - m = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 37$
∴ Maka faktor prima tebesar dari M − m adalah **37**

6. Agar akar-akar persamaan tersebut real maka Diskriminan = $b^2 - 4 \cdot (1) \cdot c \geq 0$. Maka $4c \leq b^2$
Karena $1 \leq c \leq 6$, maka $4 \leq 4c \leq 24$
Untuk b = 1 maka $4c \leq 1$. Akibatnya tidak ada nilai c yang memenuhi
Untuk b = 2 maka $4c \leq 4$. Akibatnya nilai c yang memenuhi ada satu, yaitu c = 1
Untuk b = 3 maka $4c \leq 9$. Akibatnya nilai c yang memenuhi ada dua, yaitu c = 1 ; 2
Untuk b = 4 maka $4c \leq 16$. Akibatnya nilai c yang memenuhi ada empat, yaitu c = 1 ; 2; 3; 4
Untuk b = 5 maka $4c \leq 25$. Akibatnya nilai c yang memenuhi ada enam, yaitu c = 1 ; 2; 3; 4; 5; 6
Untuk b = 6 maka $4c \leq 36$. Akibatnya nilai c yang memenuhi ada enam, yaitu c = 1 ; 2; 3; 4; 5; 6
∴ Maka banyaknya pasangan yang memenuhi ada : 0 + 1 + 2 + 4 + 6 + 6 = **19**

7. $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p \equiv \sim p \vee q$
$\sim (p \rightarrow q) \equiv \sim (\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$
$p : k \geq m \quad q : k > n$
Karena $q : k > n$, maka ingkaran dari q adalah $\sim q \equiv k \leq n$
∴ Pernyataan yang benar adalah : **k ≥ m dan k ≤ n.** Penulisan lain adalah **m ≤ k ≤ n.**

8. Kapasitas pipa tergantung dari luas penampangnya.

$L_{pakai} \geq L_{seharusnya}$ $n \cdot ¼ \cdot \pi\ (3)^2 \geq ¼ \cdot \pi \cdot (10)^2$

$9n \geq 100 \quad n \geq 11{,}111\cdots$

∴ n_{min} = **12**

9. Misal masing-masing keliling bangun = K
Untuk segitiga jelas 3s = K. Karena s = K/3 maka Luas = ½ s^2 sin 60° = $\frac{1}{36}3K^2$
Untuk lingkaran, $2\pi R = K$. Karena $R = \frac{K}{2\pi}$ maka Luas = $\pi R^2 = \frac{K^2}{4\pi}$
Untuk persegi, 4s = K. Karena $s = \frac{K}{4}$ maka Luas $= s^2 = \frac{K^2}{16}$
Karena $\pi = 3{,}142\cdots < 4$ dan $\sqrt{3} < 2$, maka
$\frac{1}{4\pi} > \frac{1}{16} > \frac{1}{18} = \frac{2}{36} > \frac{\sqrt{3}}{36}$
∴ Karena $\frac{1}{4\pi} > \frac{1}{16} > \frac{\sqrt{3}}{36}$, maka bangun yang memiliki luas terbesar adalah : **lingkaran**

10. Luas segitiga semula = ½ ab sin C
Luas segitiga akhir = ½ (3a)(3b)sin C = 9 · ½ ab sin C
Luas segitiga akhir = 9 · Luas segitiga semula

∴ Perbandingan luas segitiga akhir dengan luas segitiga semula adalah = **9**

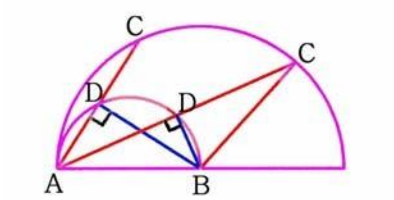
11. (a) setiap anggota tergabung ke dalam tepat dua komisi
(b) setiap dua komisi memiliki tepat satu anggota bersama
Karena ada 4 komisi maka banyaknya pasangan komisi yang bisa dibuat adalah ${}_4C_2 = 6$.
Karena banyaknya pasangan komisi ada 6 maka banyaknya anggota minimal adalah 6 sebab jika kurang dari 6 maka akan ada seorang anggota yang tergabung dalam lebih dari 2 komisi.
Jika terdapat lebih dari 6 anggota maka akan ada seorang anggota yang masuk dalam sebuah komisi tetapi tidak masuk ke dalam tiga komisi lain. Hal ini bertentangan dengan (a) bahwa seorang anggota tergabung ke dalam tepat dua komisi. Akibatnya banyaknya anggota ada 6 orang.
Contoh pembagian keenam anggota ke dalam empat komisi yang memenuhi (a) dan (b) adalah :
Misalkan komisi tersebut adalah A, B, C, D dengan a_i menyatakan anggota ke-i dengan $1 \le i \le 6$.

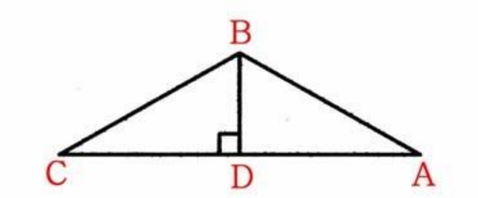
Komisi A	Komisi B	Komisi C	Komisi D
a_1	a_1	a_2	a_3
a_2	a_4	a_4	a_5
a_3	a_5	a_6	a_6

∴ Jadi, banyaknya pengurus agar memenuhi syarat tersebut adalah **6**

12. $a * (-a) = a + (-a) + a \cdot (-a) = -a^2$
$S = \{ a \text{ bilangan real} \mid -a^2 > a \} = \{ a \text{ bilangan real} \mid a(a+1) < 0 \}$
∴ **$S = \{ a \text{ bilangan real} \mid -1 < a < 0 \}$**

13.





AB adalah diameter dan D terletak pada lingkaran. Maka $\angle ADB = 90^o$
Karena AD = CD dan BD ⊥ AC maka ΔABC adalah segitiga sama kaki dengan AB = BC.
Karena BC = AB = diameter lingkaran yang berarti bernilai tetap dan B adalah titik yang tetap maka lengkung yang terjadi adalah berupa setengah lingkaran dengan pusat titik B.
∴ Lengkung yang terjadi adalah berupa **setengah lingkaran**

14. $1^5 - 1 = 0$; $2^5 - 2 = 30$. Untuk $n > 2$ maka $n^5 - n > 30$.
Semua bilangan membagi 0. Karena salah satu bilangan tersebut adalah 30 maka nilai maksimum bilangan yang membagi $1^5 - 1, 2^5 - 2, \cdots , n^5 - n$ adalah 30. Akan dibuktikan bahwa 30 membagi $n^5 - n$ untuk setiap n bilangan asli.
Alternatif 1 :
Misal : $N = n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = (n - 1)n(n + 1)(n^2 + 1)$
Karena $(n - 1)$, n dan $(n + 1)$ adalah tiga bilangan berurutan maka N pasti habis dibagi 3! = 6.
- Untuk n = 5k

Karena n adalah faktor dari N dan n habis dibagi 5 maka N pasti habis dibagi 5

- Untuk $n = 5k + 1$

  $n - 1 = 5k$

  Karena $(n - 1)$ adalah faktor dari N dan $(n - 1)$ habis dibagi 5 maka N pasti habis dibagi 5
- Untuk $n = 5k + 2$

  $n^2 + 1 = (5k + 2)^2 + 1 = 25k^2 + 20k + 5 = 5\,(5k^2 + 4k + 1)$

  Karena $(n^2 + 1)$ adalah faktor dari N dan $(n^2 + 1)$ habis dibagi 5 maka N pasti habis dibagi 5
- Untuk $n = 5k + 3$

  $n^2 + 1 = (5k + 3)^2 + 1 = 25k^2 + 30k + 10 = 5\,(5k^2 + 6k + 2)$

  Karena $(n^2 + 1)$ adalah faktor dari N dan $(n^2 + 1)$ habis dibagi 5 maka N pasti habis dibagi 5
- Untuk $n = 5k + 4$

  $n + 1 = 5k + 5 = 5\,(k + 1)$

  Karena $(n + 1)$ adalah faktor dari N dan $(n + 1)$ habis dibagi 5 maka N pasti habis dibagi 5

Karena untuk $n = 5k$; $n = 5k + 1$; $n = 5k + 2$; $n = 5k + 3$ dan $n = 5k + 4$ semuanya menghasilkan N habis dibagi 5 maka N pasti habis dibagi 5 untuk n bilangan bulat positif.

Karena N habis dibagi 6 dan 5 serta 6 dan 5 relatif prima maka N pasti habis dibagi $6{\cdot}5 = 30$

Alternatif 2 : $n^5 - n = (n - 1)\,n\,(n + 1)\,(n^2 + 1) = (n - 1)\,n\,(n + 1)\,(n^2 - 4 + 5)$

$n^5 - n = (n - 1)\,n\,(n + 1)\,(n^2 - 4) + 5\,(n - 1)\,n\,(n + 1)$

$n^5 - n = (n - 2)\,(n - 1)\,n\,(n + 1)\,(n + 2) + 5\,(n - 1)\,n\,(n + 1)$

Karena $(n - 2)$, $(n - 1)$, n, $(n + 1)$ dan $(n + 2)$ adalah lima bilangan bulat berurutan maka perkalian $(n - 2)\,(n - 1)\,n\,(n + 1)\,(n + 2)$ habis dibagi $5! = 120$ atau juga habis dibagi 30 sebab 30 membagi 120.

Karena $(n - 1)$, n dan $(n + 1)$ adalah 3 bilangan berurutan maka $(n - 1)\,n\,(n + 1)$ pasti habis dibagi $3! = 6$.

Maka $5\,(n - 1)\,n\,(n + 1)$ habis dibagi $5 \cdot 6 = 30$.

$\therefore$ Bilangan nilai maksimum bilangan yang membagi $1^5 - 1, 2^5 - 2, \cdots, n^5 - n$ adalah **30.**

15. Misal $T = a_1 + a_2 \cdot 2! + a_3 \cdot 3! + \cdots + a_n \cdot n!$

Karena $7! = 5040$ dan $6! = 720$ maka $n_{maksimum} = 6$.

Jika $n = 5$ maka $T_{maks} = 1 + 2{\cdot}2! + 3{\cdot}3! + 4{\cdot}4! + 5{\cdot}5! = 1 + 4 + 18 + 96 + 600 = 719 < 2002$

$T = 2002$ hanya jika $n = 6$

Karena untuk $n = 5$ maka$T_{maks} = 719$ maka $2002 - 719 = 1283 \le a_6{\cdot}6! \le 2002$ yang dipenuhi hanya jika $a_6 = 2$

Maka $a_1 + a_2{\cdot}2! + a_3{\cdot}3! + a_4{\cdot}4! + a_5{\cdot}5! = 2002 - 2{\cdot}6! = 562$

Jika $n = 4$ maka $T_{maks} = 1 + 2{\cdot}2! + 3{\cdot}3! + 4{\cdot}4! = 119$

$562 - 119 = 443 \le a_5{\cdot}5! \le 562$ yang dipenuhi hanya jika $a_5 = 4$

Maka $a_1 + a_2{\cdot}2! + a_3{\cdot}3! + a_4{\cdot}4! = 562 - 4{\cdot}5! = 562 - 480 = 82$

Jika $n = 3$ maka $T_{maks} = 1 + 2{\cdot}2! + 3{\cdot}3! = 23$

$82 - 23 = 59 \le a_4{\cdot}4! \le 82$ yang dipenuhi hanya jika $a_4 = 3$

Maka $a_1 + a_2{\cdot}2! + a_3{\cdot}3! = 82 - 3{\cdot}4! = 82 - 72 = 10$

Jika n = 2 maka $T_{maks} = 1 + 2\cdot 2! = 9$

$10 - 9 = 1 \le a_3\cdot 3! \le 10$ yang dipenuhi hanya jika $a_3 = 1$

Maka $a_1 + a_2\cdot 2! = 10 - 1\cdot 3! = 10 - 6 = 4$

Jika n = 1 maka $T_{maks} = 1 = 1$

$4 - 1 = 3 \le a_2\cdot 2! \le 4$ yang dipenuhi hanya jika $a_2 = 2$

Maka $a_1 = 4 - 2\cdot 2! = 4 - 4 = 0$

$\therefore$ Pasangan terurut (n,a_n) adalah **{ (1,0) ; (2,2) ; (3,1) ; (4,3) ; (5,4) ; (6,2) }**

16. Alternatif 1 :

Dua digit terakhir dari 43^1 adalah 43

Dua digit terakhir dari 43^2 adalah 49

Dua digit terakhir dari 43^3 adalah 07

Dua digit terakhir dari 43^4 adalah 01

Dua digit terakhir dari 43^5 adalah 43 ⋯⋯ dst.

Karena 43 = 4·10 + 3 maka 2 digit terakhir dari 43^{43} sama dengan dua digit terakhir dari 43^{43} yaitu 07. Sehingga 43^{43} = ⋯⋯07 = 100t + 7 = 4k + 7 dengan t dan k adalah bilangan bulat.

$43^{43^{43}} = 43^{4k+7} = 43^{4k}\cdot 43^7 = \left(43^4\right)^k\cdot 43^7$

Karena dua digit terakhir dari 43^4 adalah 01 maka dua digit terakhir dari $(43^4)^k$ adalah juga 01. Dua digit terakhir dari 43^7 sama dengan dua digit terakhir dari 43^3 yaitu 07.

Maka dua digit terakhir dari $43^{43^{43}}$ sama dengan dua digit terakhir dari perkalian dua digit terakhir $(43^4)^k$ dengan dua digit terakhir dari 43^7.

Karena 01 x 07 = 07. Maka 2 digit terakhir dari $43^{43^{43}}$ adalah 07.

Alternatif 2 :

Karena $43^{43} = (4\cdot 11 - 1)^{43}$ maka $43^{43} \equiv (-1)^{43} \pmod 4$

$43^{43} \equiv -1 \pmod 4 \equiv 3 \pmod 4$

Berarti $43^{43} = 4k + 3$ dengan k adalah bilangan asli.

$43^{43^{43}} = 43^{4k+3} = (1849)^{2k}\cdot 43^3$

$43^{43^{43}} \equiv (49)^{2k}\cdot 43^{43} \pmod{100}$

$43^{43^{43}} \equiv (2401)^k\cdot 7 \pmod{100}$ sebab $43^{43} \equiv 7 \pmod{100}$

$43^{43^{43}} \equiv 1^k\cdot 7 \pmod{100}$

$43^{43^{43}} \equiv 7 \pmod{100}$

Karena $43^{43^{43}} \equiv 7 \pmod{100}$ berarti $43^{43^{43}} = 100p + 7$ dengan p adalah bilangan asli.

$\therefore$ $43^{43^{43}}$ jika dibagi 100 akan bersisa **7**

17. Misal S = suami dan I = isteri

Kemungkinan susunannya adalah :

a. SIISSIIS atau ISSIISSI

Karena yang berdekatan haruslah pasangan suami isteri maka kasus ini seolah-olah menempatkan 4 pasangan suami isteri dalam 4 tempat. Banyaknya cara = $2 \cdot {}_4P_4 = 48$.

b. SIISSSII atau ISSIIISS

Karena ada 3 pasang kursi yang harus diisi 3 pasang suami isteri maka banyaknya cara menyusun = $2 \cdot {}_4C_3 \cdot 3! = 48$

c. SSIISSII atau IISSIISS

Kasus ini sama dengan (a). Banyaknya cara adalah 48.

d. SIIISSSI atau ISSSIIIS

Karena ada 3 pasang kursi yang harus diisi 3 pasang suami isteri maka banyaknya cara adalah $2 \cdot 4 \cdot 3! = 48$

e. SSIIISSI atau IISSSIIS

Kasus ini sama dengan (c). Banyaknya cara ada 48 cara.

f. SIIIISSS atau ISSSSIII

Ada 2 pasang kursi yang harus diisi oleh 2 pasang suami isteri. Banyaknya cara = ${}_4C_2 \cdot 2!$.

Empat kursi lain terdiri dari 2 kursi diisi oleh 2 perempuan dan 2 kursi lainnya diisi 2 lelaki.

Maka banyaknya cara = $2 \cdot ({}_4C_2 \cdot 2!) \cdot 2! \cdot 2! = 96$

g. SSIIIISS atau IISSSSII

Soal ini mirip dengan bagian (f). Banyaknya cara ada 96.

h. SSSIIIIS atau IIISSSSI

Soal ini juga mirip dengan bagian (f). Banyaknya cara ada 96.

i. SSSSIIII atau IIIISSSS

Pasangan yang di tengah dipilih dari 4 pasangan yang lain.

Maka banyaknya cara = $2 \cdot 4 \cdot 3! \cdot 3! = 288$

Maka banyaknya cara = 48 + 48 + 48 + 48 + 48 + 96 + 96 + 96 + 288 = 816 cara

$\therefore$ Jadi, banyaknya cara menempatkan keempat pasang suami isteri ke-8 kursi adalah **816.**

18. a. Untuk a = 1

- Untuk a = 1 dan b = 1.

  Untuk c = 1 maka nilai d ada 9 kemungkinan. Untuk c = 2 ada 8 kemungkinan. $\cdots$ dst. Maka untuk a = 1 dan b = 1 ada 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45 kemungkinan.

- Untuk a = 1 dan b = 2

  Sama dengan untuk a = 1 dan b = 1 dikurangi dengan untuk c = 1. Maka untuk a = a dan b = 2 ada 45 − 9 = 36 kemungkinan.

- Untuk a = 1 dan b = 3

  Ada 36 − 8 = 28 kemungkinan

  $\vdots$

  dst

Untuk a = 1 ada 45 + 36 + 28 + 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1

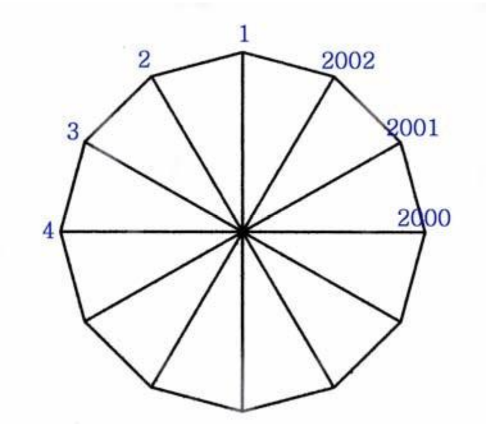
b. Untuk a = 2
Sama dengan untuk a = 1 dikurangi untuk b = 1
Untuk a = 2 ada 36 + 28 + 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1
$\vdots$
dst

Misalkan banyaknya bilangan = N.

N = 1 · 45 + 2 · 36 + 3 · 28 + 4 · 21 + 5 · 15 + 6 · 10 + 7 · 6 + 8 · 3 + 9 · 1 = 495

$\therefore$ Banyaknya bilangan yang memenuhi $a \le b \le c \le d$ adalah **495**

19.



Misal :

A = Banyaknya segitiga seluruhnya yang dapat dibentuk termasuk yang sisinya merupakan sisi R.
B = Banyaknya segitiga yang dapat dibentuk dengan hanya 1 sisinya yang merupakan sisi R.
C = Banyaknya segitiga yang dapat dibentuk dengan 2 sisinya merupakan sisi R.

- Banyaknya segitiga seluruhnya yang dapat dibentuk termasuk yang sisinya merupakan sisi R Segitiga dibentuk dari 3 titik yang tidak segaris, maka banyaknya segitiga yang dapat dibentuk adalah ${}_{2002}C_3 = \dfrac{2002 \cdot 2001 \cdot 2000}{6}$ = 2002 · 667· 1000
- Banyaknya segitiga yang dapat dibentuk dengan hanya 1 sisinya yang merupakan sisi R. Untuk membentuk segitiga ini maka 2 dari 3 titiknya harus berurutan, namun ketiga titiknya tidak berurutan. Misal kedua titik tersebut adalah n dan n+1, maka titik ketiga tidak boleh n − 1 atau n+2. Banyaknya 2 titik yang berurutan ada 2002 kemungkinan, yaitu 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, ⋯, 2001-2002, 2002-1. Misalkan titik yang kita pilih adalah 2-3, maka titik ketiga tidak boleh titik 1 atau 4, maka banyaknya kemungkinan 1 titik ketiga adalah 1998 cara. Banyaknya segitiga yang dapat dibentuk adalah 1998 x 2002
- Banyaknya segitiga yang dapat dibentuk dengan 2 sisinya merupakan sisi R
Untuk membentuk segitiga ini maka ke-3 titiknya harus berurutan. Banyaknya segitiga yang dapat dibentuk adalah 2002, yaitu 1-2-3, 2-3-4, 3-4-5, ⋯, 2001-2002-1, 2002-1-2.

Banyaknya segitiga dimaksud adalah = A − B − C

$= 2002 \cdot 667 \cdot 1000 - 1998 \cdot 2002 - 2002$

$= 2002\ (667 \cdot 1000 - 1999)$

$= 1331332002$

Banyaknya segitiga yang semua titik sudutnya adalah titik sudut R, tetapi tidak ada sisinya yang merupakan sisi R adalah **1.331.332.002**

20. Nilai total = 7 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 22
Nilai maksimum yang dapat diperoleh SMU Pipit adalah 7 + 5 + 4 + 3 + 2 = 21
Misal nilai minimum SMU Pipit adalah x maka nilai sisa adalah $22 - x$.
Nilai minimum yang dapat diperoleh adalah jika nilai sisa yang ada terdistribusi merata kepada ketiga
SMU yang lain. Misal nilai masing-masing ketiga SMU yang lain adalah k, maka :
$x + 3k = 22$ dan $x > k$
$3x > 22 - x$. Maka $x > 22/4$.
Jika x = 6 maka nilai sisa = $22 - 6 = 16$. Ada 2 SMU mendapat nilai 5 dan satu SMU mendapat nilai 6. Hal yang tidak boleh karena berarti tidak ada pemenang.
Jika x = 7 maka nilai sisa = $22 - 7 = 15$. Yang berarti ketiga SMU yang lain masing–masing mendapat nilai 5.
Nilai 5 dapat diperoleh dari 5 ; 3 + 2 dan 4 + 1 yang berarti memenuhi syarat.
Maka nilai maksimum SMU Pipit = 21 sedangkan nilai minimunmnya = 7. Semua nilai dari 7 sampai 21 semua dapat diperoleh dari kombinasi : 7, 5, 4, 3, 2, 1. Nilai dari 7 sampai dengan 21 ada 15.
$\therefore$ Banyaknya kemungkinan nilai SMU pemenang adalah **15**

SELEKSI OLIMPIADE TINGKAT PROVINSI
TAHUN 2002

SOLUSI SOAL
Bagian Kedua

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2002

BAGIAN KEDUA

1.

- Jika m adalah bilangan yang terbesar
  Berdasarkan (c) dan (a), maka p membagi m sedangkan k membagi p sehingga m > p > k
  Berdasarkan (d), $\ell \geq$ n + p, maka ℓ > n dan ℓ > p sehingga m > ℓ > p > k
  Berdasarkan (e) :
  - Jika k membagi n maka n membagi p sehingga p > n > k. Urutan yang mungkin adalah m > ℓ > p > n > k
  - Jika p membagi n maka n membagi k sehingga k > n > p. Karena p > k maka hal ini merupakan sebuah kontradiksi.
- Jika m adalah bilangan terkecil
  Berdasarkan (c) dan (a), maka m membagi p dan p membagi k sehingga k > p > m
  Berdasarkan (e) :
  - Jika k membagi n maka n membagi p sehingga p > n > k. Karena k > p maka hal ini merupakan sebuah kontradiksi.
  - Jika p membagi n maka n membagi k sehingga k > n > p. Akibatnya k > n > p > m.

  Berdasarkan (d) :

  - Karena n = ℓ − p maka ℓ = n + p dan karena p < n maka n < ℓ < 2n. Karena n harus membagi ℓ maka hal tersebut tidak mungkin.
  - Karena n < ℓ − p maka ℓ > p+ n. Sehingga tidak dapat ditentukan yang lebih besar antara ℓ dan k, maka urutan yang mungkin adalah : k > ℓ > n > p > m atau ℓ > k > n > p > m.

$\therefore$ Semua urutan yang mungkin bagi k, ℓ, m, n dan p adalah :

1) m > ℓ > p > n > k atau
2) k > ℓ > n > p > m atau
3) ℓ > k > n > p > m

2. Alternatif 1 :
Misal $m = \frac{3p+25}{2p-5} = \frac{2p-5+p+30}{2p-5} = 1 + \frac{p+30}{2p-5}$ ·········· (1)
Ambil p + 30 = 2p − 5 maka p = 35.

- Untuk p > 35, maka p + 30 < 2p − 5 sehingga $\frac{p+30}{2p-5} < 1$ sehingga tidak mungkin m bilangan bulat.
- Untuk 0 < p < 35
  Semakin besar nilai p, maka perbandingan p + 30 dan 2p − 5 akan semakin kecil sehingga nilai m semakin kecil mendekati satu.

Karena m > 0 maka 2p − 5 > 0. Akibatnya p $\geq$ 3 Bentuk di atas dapat juga diubah menjadi :

2pm − 5m = 3p + 25

p(2m−3) = 5m + 25

$p = \frac{5m+25}{2m-3}$ ………… (2)

dengan 2m − 3 > 0 atau m > 1.

Berdasarkan persamaan (1)

Jika p = 3 maka m = 1 + 33/1 = 34 (bilangan bulat)
Jika p = 4 maka m = 37/3 (bukan bilangan bulat)
Jika p = 5 maka m = 40/5 = 8 (bilangan bulat)
Jika p = 6 maka m = 43/7 (bukan bilangan bulat)
Jika p = 7 maka m = 36/9 (bukan bilangan bulat)
Jika p = 8 maka m = 49/11 (bukan bilangan bulat)
Jika p = 9 maka m = 52/13 = 4 (bilangan bulat)

Karena semakin besar nilai p maka nilai m semakin kecil, maka sesuai persamaan (1) dicoba :

Jika m = 3 maka p = 40/3 (bukan bilangan bulat)
Jika m = 2 maka p = 35 (bilangan bulat)

Alternatif 2 :

Karena $m = \frac{3p+25}{2p-5}$ maka 2mp − 5m = 3p + 25.

4mp − 10m = 6p + 50

(2m − 3)(2p − 5) = 50 + 15

(2m − 3)(2p − 5) = 65

2m − 3 dan 2p − 5 masing-masing adalah faktor dari 65. Faktor dari 65 adalah ±1, ±5, ±13, ±65.

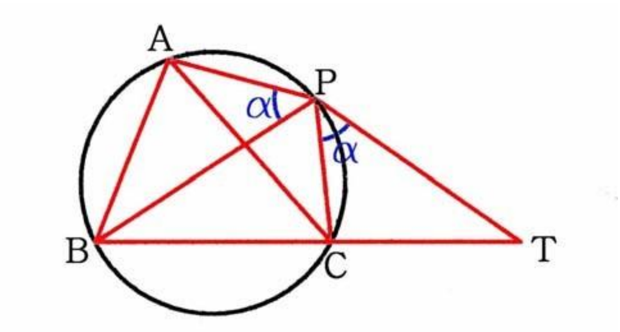
Jika 2p − 5 = −1 dan 2m − 3 = −65 maka p = 2 dan m = −31 (tidak memenuhi p dan m asli)
Jika 2p − 5 = 1 dan 2m − 3 = 65 maka p = 3 dan m = 34 (memenuhi p dan m asli)
Jika 2p − 5 = −5 dan 2m − 3 = −13 maka p = 0 dan m = −5 (tidak memenuhi p dan m asli)
Jika 2p − 5 = 5 dan 2m − 3 = 13 maka p = 5 dan m = 8 (memenuhi p dan m asli)
Jika 2p − 5 = −13 dan 2m − 3 = −5 maka p = −4 dan m = −1 (tidak memenuhi p dan m asli)
Jika 2p − 5 = 13 dan 2m − 3 = 5 maka p = 9 dan m = 4 (memenuhi p dan m asli)
Jika 2p − 5 = −65 dan 2m − 3 = −1 maka p = −30 dan m = 1 (tidak memenuhi p dan m asli)
Jika 2p − 5 = 65 dan 2m − 3 = 1 maka p = 35 dan m = 2 (memenuhi p dan m asli)

∴ Bilangan bulat positif p sehingga $\frac{3p+25}{2p-5}$ juga bulat positif adalah **3 ; 5 ; 9 atau 35**

3. Misal ke-6 angka itu A, B, C, D, E, F dengan A ≥ B ≥ C ≥ D ≥ E ≥ F dengan 0 ≤ A, B, C, D, E, F ≤ 9. Penyusunan bilangan yang benar sehingga didapat selisih tiga bilangan pertama dengan tiga bilangan terakhir seminimal mungkin adalah ACEBDF.
Misal T = A + C + E − B − D − F
T = (A − F) + (C − B) + (E − D)
Jelas bahwa A − F ≤ 9. Tanda kesamaan akan terpenuhi hanya apabila A = 9 dan F = 0.
Karena C ≤ B dan E ≤ D maka C − B ≤ 0 dan E − D ≤ 0. Tanda kesamaan terjadi hanya jika C = B dan E = D.
Maka T = (A − F) + (C − B) + (E − D) ≤ 9 + 0 + 0 = 9

∴ **Terbukti bahwa jumlah tiga angka pertama dan jumlah tiga angka terakhir suatu bilangan enam angka dapat disusun sedemikian rupa sehingga berselisih tidak lebih dari 9**

4. Pembuktian *Teorema Ptolemy*



ABCP adalah segiempat talibusur atau dengan kata lain titik P terletak pada lingkaran luar segitiga ABC dengan titik P terletak pada busur AC. Misal ∠APB = α. Dibuat segitiga PCT dengan CT adalah perpanjangan BC dan ∠CPT = α. Karena ABCP adalah segi empat tali busur maka ∠BAP + ∠BCP = 180° sehingga ∠BAP = ∠PCT. Karena ∠APB = ∠CPT dan ∠BAP = ∠PCT maka ΔBAP sebangun dengan ΔPCT.

Akibatnya $\frac{PA}{PC} = \frac{AB}{CT} = \frac{PB}{PT}$ …….. (1)

$CT = \frac{AB}{PA} \cdot PC$ ……… (2)

Dari persamaan (1) juga didapat : $\frac{PA}{PB} = \frac{PC}{CT}$

Karena ∠APC = ∠BPT = α + ∠BPC dan $\frac{PA}{PB} = \frac{PC}{PT}$ maka ΔAPC sebangun dengan ΔBPT

Akibatnya $\frac{PA}{PB} = \frac{PC}{PT} = \frac{AC}{BT}$ ……. (3)

$BT = \frac{PB}{PA} \cdot AC$ …….. (4)

$BT = BC + CT$

Subtitusikan pers. (2) dan (4)

$\frac{PB}{PA} \cdot AC = BC + \frac{AB}{PA} \cdot PC$

$PB \cdot AC = PA \cdot BC + PC \cdot AB$ (*Teorema Ptolemy*)

Jika ΔABC adalah segitiga sama sisi, maka AC = BC = AB, maka :

PB = PA + PC (Terbukti)

atau

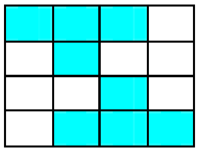
Jika PB = PA + PC dan karena AB = BC = AC, maka

PB · AC = PA · BC + PC · AB

∴ Sesuai dengan *Teorema Ptolemy*, maka ABCP adalah segi empat tali busur atau dengan kata lain **titik P terletak pada lingkaran luar segitiga ABC.**

5.

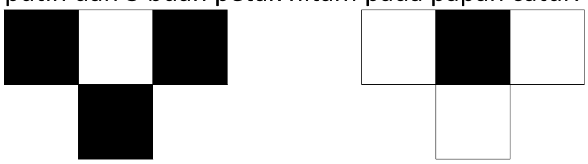
a.



Karena petak 4 x 4 dapat ditutupi oleh 4 buah *Tetromino-T*, maka tentunya **kita dapat menutup petak catur 8 x 8 dengan 16 buah *Tetromino-T*.**

b. Andaikan 25 tetronimo tersebut dapat menutup papan ‘catur’ 10 x 10 petak.

Sebuah *tetromino-T* akan menutupi 1 buah petak hitam dan 3 buah petak putih atau 1 buah petak putih dan 3 buah petak hitam pada papan catur.



Karena 1 dan 3 bilangan ganjil serta banyaknya *Tetromino-T* ada 25 yang juga merupakan bilangan ganjil maka ke-25 *Tetromino-T* tersebut akan menutupi sejumlah ganjil petak hitam dan sejumlah ganjil petak putih pada papan catur. Hal ini kontradiksi dengan kenyataan bahwa pada papan catur 10 x 10 terdapat 50 petak hitam dan 50 petak putih.

Terbukti bahwa kita tidak dapat menutup papan ‘catur’ 10 X 10 petak dengan 25 *tetromino-T*.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2002

TINGKAT NASIONAL

BIDANG MATEMATIKA

WAKTU : 4 JAM

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Nasional Tahun 2002

1. Buktikan bahwa $n^4 - n^2$ habis dibagi oleh 12 untuk sebarang bilangan bulat $n > 1$

2. Lima buah dadu (enam-muka) akan dilempar satu demi satu, lalu hasil kelima angka yang muncul akan dihitung. Manakah yang lebih besar peluang terjadinya hasil kali 180 atau hasil kali 144 ?

3. Tentukan semua solusi dari sistem persamaan
   $x + y + z = 6$
   $x^2 + y^2 + z^2 = 12$
   $x^3 + y^3 + z^3 = 24$

4. Diberikan segitiga ABC dengan AC > BC. Pada lingkaran luar segitiga ABC terletak titik D yang merupakan titik tengah busur AB yang memuat titik C. Misalkan E adalah titik pada AC sehingga DE tegak lurus pada AC. Buktikan bahwa AE = EC + CB

5. Sembilan dari sepuluh bilangan berikut : 4, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 16, 18, 19 akan diisikan ke dalam petakkosong pada tabel 3 x 5 di samping. Sesudah semua petak terisi, jumlah bilangan pada setiap baris akan sama. Demikian pula halnya jumlah bilangan pada setiap kolom akan sama. Tentukan semua pengisian petak yang mungkin.

10		
		9
	3	
11		17
	20	

6. Tentukan semua bilangan prima p yang membuat $4p^2 + 1$ dan $6p^2 + 1$ keduanya bilangan prima.

7. Misalkan ABCD sebuah belah ketupat dengan $\angle A = 60^o$ dan P adalah titik potong kedua diagonal AC dan BD. Misalkan Q, R dan S tiga titik pada (keliling) belah ketupat. Jika PQRS juga membentuk belah ketupat, tunjukkan bahwa tepat satu di antara Q, R, S berimpit dengan titik sudut belah ketupat ABCD.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2002

TINGKAT NASIONAL

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Nasional Tahun 2002

1. Alternatif 1 :

   $n^4 - n^2 = n^2(n^2 - 1) = n^2(n - 1)(n + 1)$

   $(n - 1)$, n dan $(n + 1)$ adalah 3 bilangan bulat berurutan maka $3! = 6$ membagi $(n - 1)n(n + 1)$.

   Maka $3 \mid n^4 - n^2$.

   Jika n genap maka $4 \mid n^2$ sedangkan jika n ganjil maka $4 \mid n^2 - 1$. Maka $4 \mid n^2(n^2 - 1) = n^4 - n^2$ Karena 3 dan 4 relatif prima maka $n^4 - n^2$ habis dibagi $3 \cdot 4 = 12$.

   Alternatif 2 :

   $n^4 - n^2 = n^2(n^2 - 1) = n^2(n - 1)(n + 1) = (n - 1)n(n + 1)(n + 2 - 2)$

   $n^4 - n^2 = (n - 1)n(n + 1)(n + 2) - 2(n - 1)n(n + 1)$

   $n - 1$, n, $n + 1$ dan $n + 2$ adalah 4 bilangan bulat berurutan maka $4! = 24 \mid (n - 1)n(n + 1)(n + 2)$.

   $(n - 1)$, n dan $(n + 1)$ adalah 3 bilangan bulat berurutan maka $3! = 6$ membagi $(n - 1)n(n + 1)$.

   Maka $12 \mid 2(n - 1)n(n + 1)$.

   Maka $12 \mid n^4 - n^2$

   $\therefore$ **Terbukti bahwa $n^4 - n$ habis dibagi 12 untuk sebarang bilangan bulat n > 1.**

2. $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$

   Maka kemungkinan lima mata dadu yang memenuhi perkaliannya = 180 adalah (1, 3, 3, 4, 5), (1, 2, 3, 5, 6), (1, 1, 5, 6, 6), (2, 2, 3, 3, 5) dan permutasinya yang secara berurutan banyaknya kemungkinan tersebut adalah $\frac{5!}{2!}, 5!, \frac{5!}{2!\cdot 2!}, \frac{5!}{2!\cdot 2!}$

   Peluang hasil kali mata dadu sama dengan 180 adalah = $\frac{1}{6^5}\left(\frac{5!}{2!} + 5! + 2 \cdot \frac{5!}{2!\cdot 2!}\right) = \frac{240}{6^5}$

   $144 = 2^4 \cdot 3^2$

   Maka kemungkinan lima mata dadu yang memenuhi perkaliannya = 144 adalah (1, 1, 4, 6, 6), (1, 2, 2, 6, 6), (1, 2, 3, 4, 6), (1, 3, 3, 4, 4), (2, 2, 3, 3, 4), (2, 2, 2, 3, 6) dan permutasinya yang secara berurutan banyaknya kemungkinan tersebut adalah , $\frac{5!}{2!\cdot 2!}, \frac{5!}{2!\cdot 2!}, 5!, \frac{5!}{2!\cdot 2!}, \frac{5!}{2!\cdot 2!}, \frac{5!}{3!}$.

   Peluang hasil kali mata dadu sama dengan 144 adalah = $\frac{1}{6^5}\left(4 \cdot \frac{5!}{2!\cdot 2!} + 5! + \frac{5!}{3!}\right) = \frac{260}{6^5}$

   $\therefore$ **Maka peluang yang lebih besar adalah terjadinya hasil kali 144.**

3. Alternatif 1 :

   $x + y + z = 6$ .... (1)

   $x^2 + y^2 + z^2 = 12$ .... (2)

   $x^3 + y^3 + z^3 = 24$ .... (3)

   $(x + y + z)^2 = 6^2$

   $x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) = 36$

   $xy + xz + yz = 12$ .... (4)

   Alternatif 1.a :

   $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) = 6 \cdot 12 = 72$

$x^3 + y^3 + z^3 + xy^2 + xz^2 + x^2y + x^2z + yz^2 + y^2z = 72$

$xy^2 + xz^2 + x^2y + x^2z + yz^2 + y^2z = 48$ ······································ (5)

$(x + y + z)(xy + xz + yz) = 6 \cdot 12 = 72$

$xy^2 + xz^2 + x^2y + x^2z + yz^2 + y^2z + 3xyz = 72$. Maka $48 + 3xyz = 72$

$xyz = 8$ ······································ (6)

Dari persamaan (1), (4) dan (6) dapat disimpulkan bahwa x, y dan z adalah akar-akar persamaan $t^3 - 6t^2 + 12t - 8 = 0$ sehingga $(t - 2)^3 = 0$

Maka x = y = z = 2

∴ **Semua solusi yang memenuhi sistem persamaan tersebut hanya x = y = z = 2.**

Alternatif 1.b :

Dengan AM-GM

$x^2 + y^2 \geq 2xy$

$x^2 + z^2 \geq 2xz$

$y^2 + z^2 \geq 2yz$

Tanda kesamaan terjadi jika dan hanya jika x = y = z

Maka

$12 = x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz = 12$ ························ (7)

Berdasarkan persamaan (2) dan (4) maka x = y = z

Karena x + y + z = 6 maka x = y = z = 2.

Setelah dicek ternyata x = y = z = 2 memenuhi ketiga persamaan.

∴ **Semua solusi yang memenuhi sistem persamaan tersebut hanya x = y = z = 2.**

Alternatif 2 :

Dari persamaan (1) dan (2) didapat

$\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} = \frac{x+y+z}{3}$ .... (8)

Berdasarkan ketaksamaan QM-AM maka

$\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \geq \frac{x+y+z}{3}$ .... (9)

Tanda kesamaan terjadi jika dan hanya jika x = y = z

Berdasarkan persamaan (8) dan (9) dapat disimpulkan bahwa x = y = z = 2.

Setelah dicek ternyata x = y = z = 2 memenuhi ketiga persamaan.

∴ **Semua solusi yang memenuhi sistem persamaan tersebut hanya x = y = z = 2.**

Alternatif 3 :

$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 12 - 4(x + y + z)$

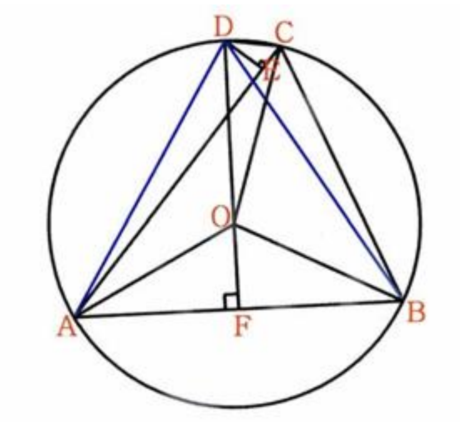
$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = 12 + 12 - 4(6) = 0$

Karena bilangan kuadrat tidak mungkin negatif maka kesamaan terjadi hanya jika x = y = z = 2.

Setelah dicek ternyata x = y = z = 2 memenuhi ketiga persamaan.

∴ **Semua solusi yang memenuhi sistem persamaan tersebut hanya x = y = z = 2.**

4.



Misalkan ∠ACB = γ

Karena ΔABD dan ΔABC memiliki alas yang sama dan titik A, B, C dan D semuanya terletak pada satu lingkaran yang sama maka ∠ADB = ∠ACB = γ.

Titik F adalah pertengahan AB dengan DF tegak lurus AB. Maka AD = BD.

Karena DF tegak lurus AB dan F pertengahan maka ∠ADF = ∠FDB = ½γ.

Karena O pusat lingkaran maka ∠AOB = 2∠ACB = 2γ serta ∠AOB = ∠FOB = γ

AD = BD = $\frac{AB}{2\sin\frac{1}{2}\gamma}$ .... (1)

ABCD adalah segiempat talibusur, maka sesuai teorema *Ptolemy* berlaku :

AC · BD = DC · AB + AD · BC Karena AD = BD maka

DC = $\frac{(AC-BC)}{2\sin\frac{1}{2}\gamma}$ .... (2)

Karena DE tegak lurus AC maka pada ΔADE berlaku $AD^2 = DE^2 + AE^2$ .... (3)

Pada ΔDEC berlaku $DC^2 = DE^2 + EC^2$ .... (4)

Dari persamaan (3) dan (4) didapat :

$AD^2 - DC^2 = AE^2 - EC^2$

Mengingat AE = AC − EC maka :

$AD^2 - DC^2 = AC^2 - 2\ AC \cdot EC$

$\frac{(AB)^2-(AC-BC)^2}{4\sin^2\frac{1}{2}\gamma} AC^{\,2} - 2AC \cdot EC$

Mengingat bahwa $2\sin^2 \frac{1}{2}\gamma = 1 - \cos\gamma$ dan $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\ AC\ BC\cos\gamma$ maka :

$\frac{AC \cdot BC \cdot (2-2\cos\gamma)}{2-2\cos\gamma} = AC^2 - 2AC \cdot EC$

$BC = AC - 2EC$

Karena AC = AE + EC maka AE = EC + CB (terbukti)

∴ **Terbukti bahwa AE = EC + CB.**

5. Karena jumlah pada setiap barisan sama dan jumlah pada setiap kolom sama maka jumlah ke-15 bilangan tersebut akan habis dibagi 3 dan 5 yang berarti jumlah ke-15 bilangan tersebut habis dibagi 15.
Jumlah ke-16 bilangan = 3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+16+17+18+19+20 = 178

Karena 178 ≡ 13 (mod 15) maka bilangan yang harus dibuang adalah 13.

10	A	B
C	D	9
E	3	F
11	G	17
H	20	J

Karena jumlah bilangan = 165 maka jumlah masing-masing baris = 165 : 5 = 33 dan jumlah pada masing-masing kolom = 165 : 3 = 55.
Berdasarkan hal tersebut maka jelas bahwa G = 5.
H + J = 13. Pasangan yang mungkin memenuhi adalah (6, 7) atau (7, 6)
A + B = 23. Pasangan yang mungkin memenuhi adalah (4, 19), (19, 4). Pasangan (7, 16) dan (16, 7) tidak mungkin memenuhi sebab 7 pasti berada pada baris ke-5.
Jika A = 4 dan B = 19 maka A + D + 3 + G + 20 = 55. Akibatnya D = 23 (tidak ada bilangan 23).
Maka nilai yang mungkin memenuhi hanya A = 19 dan B = 4 yang dipenuhi oleh D = 8.
Pada baris ke-2, C + D + 9 = 33. Maka C = 16.
Pada baris ke-3 berlaku E + F = 30. Pasangan (E, F) yang mungkin hanya (12, 18) atau (18, 12).
Jika E = 18 maka 10 + C + E + 11 + H = 55. Akibatnya H = 0 (tidak ada bilangan 0)
Maka kemungkinan nilai E hanya jika E = 12. Maka F = 18 dan H = 6 yang berakibat J = 7 Dengan mengecek kembali semua bilangan tersebut maka semuanya terpenuhi.

∴ **Hanya ada satu kemungkinan pengisian petak yaitu :**

10	19	4
16	8	9
12	3	18
11	5	17
6	20	7

6. Karena p prima maka $4p^2 + 1$ dan $6p^2 + 1$ keduanya bilangan prima > 5.

Alternatif 1 :

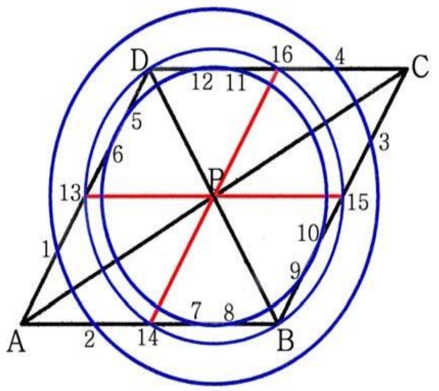
Jika $p^2 \equiv \pm 1 \pmod 5$ maka $4p^2 + 1 \equiv 0 \pmod 5$ yang tidak mungkin merupakan bilangan prima.
Jika $p^2 \equiv \pm 2 \pmod 5$ maka $6p^2 + 1 \equiv 0 \pmod 5$ yang tidak mungkin merupakan bilangan prima.
Sedangkan jika $p^2 \equiv 0 \pmod 5$ maka bilangan prima p yang memenuhi hanya p = 5.
Untuk p = 5 maka $4p^2 + 1 = 101$ dan $6p^2 + 1 = 151$ yang keduanya merupakan bilangan prima.

Alternatif 2 :

Angka satuan bilangan kuadrat adalah 0, 1, 4, 5, 6, 9.
Jika angka satuan p^2 adalah 0 maka angka satuan p juga 0 yang membuat tidak mungkin p prima. Jika angka satuan p^2 adalah 5 maka angka satuan p juga 5. Bilangan prima p yang memenuhi hanya jika p = 5 maka $4p^2 + 1 = 101$ dan $6p^2 + 1 = 151$ yang keduanya merupakan bilangan prima.

Jika angka satuan p^2 adalah 1 atau 6 maka angka satuan $4p^2 + 1$ adalah 5 yang membuat tidak mungkin $4p^2 + 1$ bilangan prima.
Jika angka satuan p^2 adalah 4 atau 9 maka angka satuan $6p^2 + 1$ adalah 5 yang membuat tidak mungkin $5p^2 + 1$ bilangan prima.
$\therefore$ **Maka nilai p prima yang memenuhi $4p^2 + 1$ dan $6p^2 + 1$ hanya p = 5.**

7. ABCD adalah belah ketupat sehingga AB = BC = CD = DA.
Tidak mungkin Q, R dan S ketiga berimpit dengan titik sudut belah ketupat ABCD sebab akan menyebabkan terdapat tiga titik P dan dua di antara Q, R dan S akan sejajar.
Misalkan terdapat dua titik, misalkan Q dan R, yang berhimpit dengan titik sudut ABCD. Salah satu PQ atau PR adalah merupakan sisi belah ketupat PQRS. Tanpa mengurangi keumuman misalkan PQ adalah sisi belah ketupat PQRS. Maka PQ akan sejajar dengan salah satu diagonal ABCD. Karena R berhimpit dengan titik sudut belah ketupat ABCD maka tidak mungkin ada ruas garis sejajar PQ dengan salah ujungnya merupakan titik sudut ABCD.



Misalkan titik Q terletak pada sisi belah ketupat ABCD sehingga PQ tidak sejajar dengan salah satu sisi ABCD serta PQ merupakan salah satu sisi belah ketupat PQRS. Misalkan juga titik R adalah titik sehingga PR juga merupakan sisi belah ketupat PQRS. Tidak mungkin PR sejajar sisisisi ABCD sebab akan membuat panjang PR = ½AB ≠ PQ. Maka titik S tidak akan mungkin terletak pada sisi yang sama dengan Q dan R sebab akan menyebabkan QS atau QR sejajar sisi ABCD, padahal PQ maupun PR tidak sejajar sisi ABCD.

Misalkan terdapat dua titik di antara Q, R atau S yang terletak pada sisi yang sama. Misalkan titiki tersebut adalah QR. Tidak mungkin QR diagonal sebab akan menyebbakan titik S terletak di luar ABCD. Akibatnya PS harus sejajar QR maka titik S adalah pertengahan dari sisi AB. BC, CD atau DA. Panjang PS = ½AB. Dengan pusat P dan jari-jari PS dibuat lingkaran yang memotong belah ketupat ABCD di pertengahan sisi AB, BC, CD, DA, B atau D Akibatnya titik Q atau R haruslah terletak pada pertengahan sisi ABCD. Maka titik keempat haruslah terletak pada A, B, C atau D.

Jika tidak terdapat dua titik yang terletak pada sisi yang sama. Maka akan terdapat dua titik yang terletak pada sisi yang sejajar. Tanpa mengurangi keumuman misalakn sisi yang sejajar tersebut adalah AD dan BC.

Jika titik Q terletak pada bagian A-13. Misalkan juga titik Q adalah titik 1. Dari titik Q dibuat garis lurus melalui P dan memotong sisi BC di titik K. Karena ΔAPD kongruen dengan ΔBPC (ketiga sudutnya sama dan AD = BC), maka PQ = PK. Dengan P sebagai pusat dan jari-jari PQ dibuat sebuah lingkaran yang akan memotong sisi BC di titik K. Maka agar terbentuk belah ketupat PQRS, haruslah titik K merupakan salah satu titik sudut belah ketupat PQRS. Padahal Q, P dan K berada pada satu garuis lurus. Maka tidak mungkin dapat dibentuk belah ketupat PQRS dengan salah satu titik terletak pada sisi A-13.

Jika titik Q terletak pada bagian 13-D. Tanpa mengurangi keumuman misalkan titik Q adalah titik 5. Dengan pusat P dan jari-jari PQ dapat dibuat sebuah lingkaran yang memotong belah ketupat ABCD di titik 6 sampai 12. Dengan cara yang sama dengan sebelumnya maka 5-P-9, 6-P10, 7-P-11, 8-P-12 masing-masing merupakan garis lurus. Karena Q adalah titik 5 maka satu titik yang terletak pada sisi BC adalah titik 10, misalkan titik ini adalah R. Dari titik Q dibuat garis sejajar PR yang hanya akan memotong sisi BC sehingga pada sisi BC akan terdapat dua titik di antara Q, R dan S dan sesuai penjelasan sebelumnya hal tersebut tidak akan terpenuhi.

Maka dapat disimpulkan bahwa PQRS akan berbentuk belah ketupat hanya jika dua titik di antara Q, R atau S merupakan pertengahan sisi AB, BC, CD atau DA dan satu di anatar berhimpit dengan titik A, B, C atau D.

∴ **Terbukti bahwa jika PQRS membentuk belah ketupat maka tepat satu di antara Q, R atau S berhimpit dengan titik sudut belah ketupat ABCD.**

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2003

TINGKAT KABUPATEN/KOTA

BIDANG MATEMATIKA

WAKTU : 90 MENIT

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Kabupaten/Kota Tahun 2003

Bagian Pertama

1. Ada berapa banyak diantara bilangan-bilangan 20000002, 20011002, 20022002, 20033002 yang habis dibagi 9 ?

   A. 0 B. 1 C. 2 D. 3 E. 4

2. Ada berapa banyak bilangan 4-angka (digit) yang semua angkanya genap dan bukan merupakan kelipatan 2003 ?

   A. 499 C. 624 E. Tidak satupun diantaranya
   B. 500 D. 625

3. Hari ini usiaku 1/3 kali usia ayahku. Lima tahun yang lalu, usiaku 1/4 kali usia ayahku pada waktu itu. Berapakah usiaku sekarang ?

   A. 12 B. 15 C. 17 D. 20 E. 21

4. Sebuah kelas terdiri dari 40 siswa. Diantaranya, 20 siswa menyukai pelajaran Matematika, 15 orang menyukai pelajaran Biologi, 15 orang menyukai pelajaran Bahasa Inggris dan lima orang menyukai ketiganya. Banyaknya siswa yang menyukai sedikitnya satu dari ketiga pelajaran tersebut adalah ?

   A. 10 C. 20 E. Tidak satupun diantaranya
   B. 15 D. 25

5. Masing-masing dari kelima pernyataan berikut benar atau salah.
   a) pernyataan (c) dan (d) keduanya benar
   b) pernyataan (d) dan (e) tidak keduanya salah
   c) pernyataan (a) benar
   d) pernyataan (c) salah
   e) pernyataan (a) dan (c) keduanya salah.

   Berapa banyak diantara kelima pernyataan di atas yang benar ?

   A. 0 B. 1 C. 2 D. 3 E. 4

6. Misalkan x dan y adalah bilangan taknol yang memenuhi

$$xy = \frac{x}{y} = x - y$$

   Berapakah nilai x + y ?

   A. $-\frac{3}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. 0 D. $\frac{1}{2}$ E. $\frac{3}{2}$

7. Di dalam suatu lingkaran L_1 berjari-jari 1 dan berpusat di titik asal dilukis suatu lingkaran L_2 yang bersinggungan dengan lingkaran L_1 , dan dengan sumbu-x dan sumbu-y positif. Jari-jari lingkaran L_2 adalah ?

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\sqrt{2}-1$ D. $\frac{1}{2}$ E. $2-\sqrt{2}$

8. Misalkan $3^a = 4$, $4^b = 5$, $5^c = 6$, $6^d = 7$, $7^e = 8$, dan $8^f = 9$. Berapakah hasil kali abcdef ?
   A. 1 B. 2 C. $\sqrt{6}$ D. 3 E. $\frac{10}{3}$

9. Misalkan N adalah bilangan bulat terkecil yang bersifat : bersisa 2 jika dibagi 5, bersisa 3 jika dibagi oleh 7, dan bersisa 4 jika dibagi 9. Berapakah hasil penjumlahan digit-digit dari N ?·
   A. 4 B. 8 C. 13 D. 22 E. 40

10. Suatu garis melalui titik (m, −9) dan (7, m) dengan kemiringan m. Berapakah nilai m ?
    A. 1 B. 2 C. 3 D. 4 E. 5

Bagian Kedua

11. Misalkan f suatu fungsi yang memenuhi
$$f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}f(-x)=2x$$
untuk setiap bilangan real $x \neq 0$. Berapakah nilai f(2) ?

12. Jika a dan b bilangan bulat sedemikian sehingga $a^2 - b^2 = 2003$, maka berapakah nilai $a^2 + b^2$? (Diketahui bahwa 2003 merupakan bilangan prima)

13. Dari sepuluh orang siswa akan dibentuk 5 kelompok, masing-masing beranggota dua orang. Berapa banyaknya cara membentuk kelima kelompok ini ?

14. Misalkan bahwa
$$f(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + c$$
dan bahwa f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = f(5). Berapakah nilai a ?

15. Berapakah hasil perkalian
$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2003^2}\right)$$

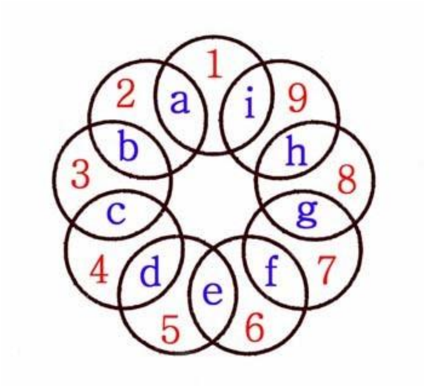
16. Iwan selalu berbohong pada hari Senin, Selasa, Rabu dan berkata jujur pada hari-hari lainnya. Di lain pihak Budi selalu berbohong pada hari Kamis, Jumat, Sabtu dan berkata jujur pada hari-hari lainnya. Pada suatu hari terjadi percakapan berikut :
    Iwan : Kemarin saya berbohong
    Budi : Saya juga
    Pada hari apa percakapan tersebut terjadi ?

17. Segitiga ABC adalah segitiga samasisi dengan panjang sisi 1 satuan. Melalui B dibuat garis yang tegak lurus BC. Garis tersebut berpotongan dengan perpanjangan garis AC di titik D. Berapakah panjang BD ?

18. Untuk setiap bilangan real α, kita definisikan $\lfloor \alpha \rfloor$ sebagai bilangan bulat yang kurang dari atau sama dengan α. Sebagai contoh $\lfloor 4{,}9 \rfloor$ = 4 dan $\lfloor 7 \rfloor$ = 7. Jika x dan y bilangan real sehingga $\lfloor \sqrt{x} \rfloor = 9$ dan $\lfloor \sqrt{y} \rfloor = 12$, maka nilai terkecil yang mungkin dicapai oleh $\lfloor y - x \rfloor$ adalah ?

19. Untuk menentukan wakilnya dalam cabang lari 110 m gawang putera, sebuah SMU mengadakan seleksi yang diikuti 5 orang siswa. Dalam seleksi tersebut diadakan tiga kali lomba yang pada setiap lomba, pelari tercepat diberi nilai 5, sedangkan peringkat di bawahnya berturut-turut mendapat nilai 3, 2, 1, 1. Tidak ada dua pelari yang menempati peringkat yang sama. Jika pemenang seleksi diberikan kepada yang nilai totalnya paling tinggi pada ketiga lomba, berapakah nilai terendah yang mungkin dicapai oleh pemenang seleksi ?

20. Misalkan a, b, c, d, e, f, g, h, i menyatakan bilangan-bilangan bulat positif berbeda yang kurang dari atau sama dengan sembilan. Jika jumlah setiap tiga bilangan dalam setiap lingkaran bernilai sama, berapakah nilai a + d + g ?



SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2003

TINGKAT KABUPATEN/KOTA

SOLUSI SOAL

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Kabupaten/Kota Tahun 2003

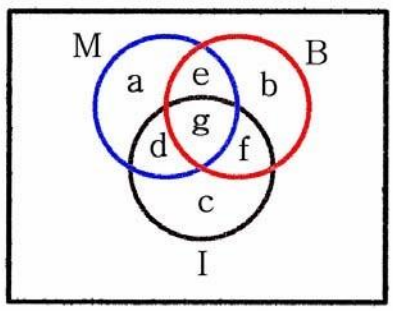
BAGIAN PERTAMA

1. (Jawaban : A)
   Teori : Sebuah bilangan bulat habis dibagi 9 jika jumlah digit bilangan tersebut habis dibagi 9.
   Jumlah digit 20000002 = 2 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 2 = 4 (Tidak habis dibagi 9)
   Jumlah digit 20011002 = 2 + 0 + 0 + 1 + 1 + 0 + 0 + 2 = 6 (Tidak habis dibagi 9)
   Jumlah digit 20022002 = 2 + 0 + 0 + 2 + 2 + 0 + 0 + 2 = 8 (Tidak habis dibagi 9)
   Jumlah digit 20033002 = 2 + 0 + 0 + 3 + 3 + 0 + 0 + 2 = 10 (Tidak habis dibagi 9)
   ∴ Banyaknya bilangan yang habis dibagi 3 adalah **0**

2. (Jawaban : A)
   Angka pertama ada 4 kemungkinan : 2, 4, 6, 8. Angka ke-2, ke-3 dan ke-4 masing-masing ada 5 kemungkinan. Banyaknya bilangan empat angka yang semua digitnya genap ada : 4 x 5 x 5 x 5 = 500 bilangan.
   Bilangan kelipatan 2003 yang terdiri dari 4 angka adalah : 2003, 4006, 6009, 8012. Yang semua digitnya bilangan genap hanya 4006.
   ∴ Banyaknya bilangan 4 angka yang semua digitnya genap dan bukan merupakan kelipatan 2003 ada : 500 − 1 = **499** bilangan

3. (Jawaban : B)
   Misal usiaku saat ini = X dan usia ayahku saat ini = Y, maka : $X = \frac{1}{3}Y$ dan
   $(X-5) = \frac{1}{4}(Y-5)$
   $X - 5 = \frac{1}{4}(3X-5)$
   4X − 20 = 3X − 5
   X = 15
   ∴ Usiaku saat ini **15** tahun

4. (Jawaban : ?)



Misalkan M adalah himpunan siswa yang menyukai Matematika ; B adalah himpunan siswa yang menyukai Biologi dan I adalah himpunan siswa yang menyukai Bahasa Inggris.

Misalkan n(M∪B∪I) = T. Maka banyaknya siswa yang menyukai paling sedikit 1 mata pelajaran adalah T.

Misalkan banyaknya siswa yang tidak menyukai satupun dari ketiga pelajaran tersebut adalah k

$n(M \cup B \cup I) = n(M) + n(B) + n(I) - n(M \cap B) - n(M \cap I) - n(B \cap I) + n(M \cap B \cap I)$

$T = 40 - k = 20 + 15 + 15 - (e + g) - (d + g) - (f + g) + g$

$T = 40 - k = 40 - d - e - f$. Maka $k = d + e + f$

Tampak ada yang kurang pada soal. Kemungkinan maksud soal :

a. k = 0, banyaknya siswa yang menyukai hanya 1 pelajaran ?

$n(M \cup B \cup I) = n(M) + n(B) + n(I) - n(M \cap B) - n(M \cap I) - n(B \cap I) + n(M \cap B \cap I)$

$40 = 20 + 15 + 15 - (e + g) - (d + g) - (f + g) + g$

$d + e + g = 0$

Karena $d \ge 0$; $e \ge 0$ dan $f \ge 0$ maka d = 0 ; e = 0 dan f = 0

$a + d + e + g = 20$ sehingga $a = 20 - 5 - 0 - 0 = 15$

$c + d + f + g = 15$ sehingga $c = 15 - 5 - 0 - 0 = 10$

$b + e + f + g = 15$ sehingga $b = 15 - 5 - 0 - 0 = 10$

Banyaknya siswa yang menyukai hanya 1 pelajaran adalah = a + b + c = **35**

b. n(M∪B∪I) = 40 dan pertanyaan sesuai dengan soal

Maka jelas a + b + c + d + e + f + g = **40**

(*Catatan* : Jawaban asli soal ini adalah **25**, tapi bagaimana mendapatkannya ?)

5. (Jawaban : D)

Misalkan (a) benar maka (c) dan (d) benar

Berdasarkan (d) hal ini merupakan kontradiksi. Maka (a) salah.

Karena (a) salah maka (c) juga salah sehingga (d) dan (e) benar. Akibatnya (b) juga benar. Pernyataan yang benar adalah (b) ; (d) dan (e).

∴ Banyaknya pernyataan yang benar ada : **3**

6. (Jawaban : A)

$xy = \frac{x}{y}$; $y \ne 0$

$xy^2 = x$ ⋯⋯⋯⋯ (1)

a. Untuk x = 0

$\frac{x}{y} = x - y$. Maka 0 = 0 − y sehingga y = 0 (Tidak memenuhi syarat awal bahwa y ≠ 0)

b. Untuk x ≠ 0

Berdasarkan pers (1) maka $y^2 = 1$ sehingga y = 1 atau y = −1

- Untuk y = 1

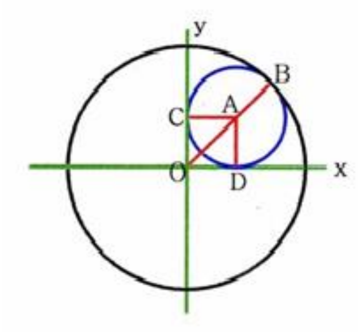
  $\frac{x}{y} = x - y$. Maka x = x − 1. Karena 0 = − 1 maka tidak ada nilai x yang memenuhi

- Untuk y = −1

$\frac{x}{y} = x - y$. Maka $-x = x + 1$ sehingga $x = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ x + y = $-\frac{1}{2} + (-1) = -\frac{3}{2}$

7. (Jawaban : C)



OB adalah jari-jari lingkaran besar dengan pusat O.
Misal jari-jari lingkaran dalam = r, maka AB = r
Karena OD = OC = r maka OA = $r\sqrt{2}$
OB = OA + AB
1 = $r\sqrt{2} + r$
$\therefore r = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} - 1$

8. (Jawaban : B)
Karena $3^a = 4$ maka $a = {}^3\log 4$ Karena $4^b = 5$ maka $b = {}^4\log 5$
Karena $5^c = 6$ maka $c = {}^5\log 6$ Karena $6^d = 7$ maka $d = {}^6\log 7$
Karena $7^e = 8$ maka $e = {}^7\log 8$ Karena $8^f = 9$ maka $f = {}^8\log 9$
abcdef = ${}^3\log 4 \cdot {}^4\log 5 \cdot {}^5\log 6 \cdot {}^6\log 7 \cdot {}^7\log 8 \cdot {}^8\log 9 = {}^3\log 9 = 2$
$\therefore$ abcdef = **2**

9. (Jawaban : C)
Alternatif 1 :
Karena N bersisa 2 jika dibagi 5 maka N = 5m + 2. Bilangan-bilangan N adalah 2, 7, 12, 17, 22, $\cdots$
Karena N bersisa 3 jika dibagi 7 maka N = 7n + 3. Bilangan-bilangan N adalah 3, 10, 17, 24, 31, $\cdots$
Karena persekutuan terkecilnya 17 maka bilangan yang bersisa 2 jika dibagi 5 dan bersisa 3 jika dibagi 7 akan berbentuk N = $(5 \cdot 7)$ p + 17 = 35p + 17 dengan p adalah bilangan bulat. Bilanganbilangan N adalah 17, 52, 87, 122, 157, 192, $\cdots\cdots$
N bersisa 4 jika dibagi 9. Maka N = 9t + 4. Bilangan-bilangan N adalah 4, 13, 22, 31, 40, 49, 58, 67, 76, 85, 94, 103, 112, 121, 130, 139, 148, 157, 166, $\cdots\cdots$
Karena persekutuan terkecilnya adalah 157, maka bilangan yang bersisa 2 jika dibagi 5, bersisa 3 jika dibagi 7 dan bersisa 4 jika dibagi 9 akan berbentuk N = $(35 \cdot 9)$k + 157

N = 315k + 157

N_{min} = 157 jika k = 0

∴ Jumlah digit dari N_{min} adalah = 1 + 5 + 7 = **13**

Alternatif 2 :

Karena N bersisa 2 jika dibagi 5 maka N = 5m + 2 untuk suatu bilangan bulat tak negatif m.

N ≡ 3 (mod 7)

5m + 2 ≡ 3 (mod 7)

5m ≡ 1 (mod 7)

Nilai m yang memenuhi haruslah berbentuk m = 7k + 3 untuk suatu bilangan bulat tak negatif k. N = 5m + 2 = 5(7k + 3) + 2 = 35k + 17

N ≡ 4 (mod 9)

35k + 17 ≡ 4 (mod 9) ≡ 22 (mod 9)

35k ≡ 5 (mod 9)

Nilai k yang memenuhi haruslah berbentuk k = 9p + 4 untuk suatu bilangan bulat tak negatif p. N = 35k + 17 = 35(9p + 4) + 17 = 315p + 157.

N_{min} = 157 jika p = 0

∴ Jumlah digit dari N_{min} adalah = 1 + 5 + 7 = **13**

10. (Jawaban : C)

Gradien $= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$m = \frac{m-(-9)}{7-m}$

$m + 9 = 7m - m^2$

$(m-3)^2 = 0$

∴ m = **3**

BAGIAN KEDUA

11. $f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}f(-x) = 2x$

Untuk x = $\frac{1}{2}$ maka $f(2) + 2f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$ .... (1)

Untuk x = −2 maka $f\left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}f(2) = -4$

$2f\left(-\frac{1}{2}\right) - f(2) = -8$ .... (2)

Kurangkan persamaan (1) dengan persamaan (2)

$2f(2) = 9$

∴ **f(2) =** $\frac{9}{2}$

12. $a^2 - b^2$ = 2003. Maka (a + b) (a − b) = 2003 · 1

- Untuk a + b = 2003 dan (a − b) = 1
  didapat 2a = 2004. Maka a = 1002 dan b = 1001
  $a^2 + b^2 = (1002)^2 + (1001)^2 = 2006005$
- Untuk (a + b) = 1 dan (a − b) = 2003
  didapat 2a = 2004. Maka a = 1002 dan b = − 1001
  $a^2 + b^2 = (1002)^2 + (-1001)^2 = 2006005$

$\therefore$ $a^2 + b^2 =$ **2006005**

13. Alternatif 1:
    - Jika 2 orang siswa akan dibentuk 1 kelompok
      Banyaknya cara ada 1
    - Jika 4 orang siswa (misal A, B, C dan D) akan dibentuk menjadi 2 kelompok yang masing-masing beranggota 2 orang
      Pasangkan A dengan salah satu anggota lainnya. Maka sisanya adalah membentuk 1 kelompok yang masing-masing beranggota 2 orang. Banyaknya cara ada 1.
      Karena kemungkinan pasangan A ada 3, maka banyaknya cara dari 4 orang siswa akan dibentuk 2 kelompok yang masing-masing beranggota dua orang adalah 3 x 1 = 3 cara.
    - Jika 6 orang siswa (misal A, B, C, D, E dan F) akan dibentuk menjadi 3 kelompok yang masing-masing beranggota 2 orang
      Pasangkan A dengan salah satu anggota lainnya. Maka sisanya adalah membentuk 2 kelompok yang masing-masing beranggota 2 orang. Banyaknya cara ada 3 x 1.
      Karena kemungkinan pasangan A ada 5, maka banyaknya cara dari 6 orang siswa akan dibentuk 3 kelompok yang masing-masing beranggota dua orang adalah 5 x 3 x 1 = 15 cara.
    - Jika 8 orang siswa (misal A, B, C, D, E, F, G dan H) akan dibentuk menjadi 4 kelompok yang masing-masing beranggota 2 orang
      Pasangkan A dengan salah satu anggota lainnya. Maka sisanya adalah membentuk 3 kelompok yang masing-masing beranggota 2 orang. Banyaknya cara ada 5 x 3 x 1.
      Karena kemungkinan pasangan A ada 7, maka banyaknya cara dari 8 orang siswa akan dibentuk 4 kelompok yang masing-masing beranggota dua orang adalah 7 x 5 x 3 x 1 = 105 cara.
    - Jika 10 orang siswa (misal A, B, C, D, E, F, G, H, I dan J) akan dibentuk menjadi 5 kelompok yang masing-masing beranggota 2 orang
      Pasangkan A dengan salah satu anggota lainnya. Maka sisanya adalah membentuk 4 kelompok yang masing-masing beranggota 2 orang. Banyaknya cara ada 7 x 5 x 3 x 1.
      Karena kemungkinan pasangan A ada 9, maka banyaknya cara dari 10 orang siswa akan dibentuk 5 kelompok yang masing-masing beranggota dua orang adalah 9 x 7 x 5 x 3 x 1 = 945 cara.

    Alternatif 2 :
    Pilih salah satu siswa. Banyaknya cara memasangkan siswa tersebut dengan siswa lain adalah ${}_9C_1$. Pilih salah satu siswa dari 8 siswa yang sisa. Banyaknya cara memasangkan siswa tersebut dengan siswa yang lain adalah ${}_7C_1$. Pilih salah satu siswa dari 6 siswa yang sisa. Banyaknya cara memasangkan siswa tersebut dengan siswa yang lain adalah ${}_5C_1$. Pilih salah satu siswa dari 4 siswa yang sisa. Banyaknya cara memasangkan siswa tersebut dengan siswa yang lain adalah ${}_3C_1$. Sisanya adalah 2 orang siswa yang tidak dapat dipilih lagi.

Banyaknya cara membentuk kelima kelompok adalah ${}_9C_1 \cdot {}_7C_1 \cdot {}_5C_1 \cdot {}_3C_1 \cdot 1 = 945$.

∴ Banyaknya cara membentuk kelima kelompok tersebut adalah **945**

14. Misal f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = f(5) = k
    Dibentuk persamaan polinomial :
    $g(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + c - k$
    $g(x) = f(x) - k$
    Jelas bahwa g(1) = g(2) = g(3) = g(4) = g(5) = 0
    Berarti bahwa 1; 2; 3; 4 dan 5 adalah akar-akar persamaan polinomial g(x) = 0.
    $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + c - k = 0$
    $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = -\frac{B}{A} = -\frac{a}{1} = -a$
    Karena akar-akarnya adalah 1; 2; 3; 4 dan 5 maka :
    1 + 2 + 3 + 4 + 5 = − a
    ∴ a = − **15**

15.

$$S = \left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2002^2}\right)\left(1-\frac{1}{2003^2}\right)$$

$$S = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2002}\right)\left(1+\frac{1}{2002}\right)\left(1-\frac{1}{2003}\right)\left(1+\frac{1}{2003}\right)$$

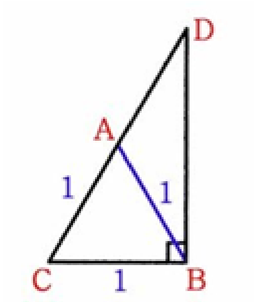
$$S = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{5}\right)\cdots\left(\frac{2002}{2001}\cdot\frac{2001}{2002}\right)\cdot\left(\frac{2003}{2002}\cdot\frac{2002}{2003}\right)\cdot\frac{2004}{2003}$$

$$S = \frac{1}{2}\cdot\frac{2004}{2003}$$

$$\therefore\ S = \frac{1002}{2003}$$

16. Misalkan pada hari tersebut Iwan berbohong dan dengan berdasarkan perkataannya, pada hari sebelumnya Iwan harus berkata jujur. Akibatnya hari tersebut adalah Senin karena pada hari Minggu Iwan berkata jujur. Pada hari Senin Budi berkata jujur. Maka berdasarkan perkataannya berarti pada hari Minggu Budi berbohong. Hal tersebut kontradiksi karena pada hari Minggu Budi berkata jujur.
    Misalkan pada hari tersebut Iwan berkata jujur dan dengan berdasarkan perkataannya, pada hari sebelumnya Iwan harus berkata bohong. Akibatnya hari tersebut adalah Kamis karena Rabu Iwan berbohong. Pada hari Kamis Budi berkata bohong. Maka berdasarkan perkataannya berarti pada hari Rabu Budi berkata jujur. Hal tersebut sesuai karena pada hari Rabu Budi berkata jujur.
    ∴ Percakapan tersebut terjadi pada hari **Kamis**

17. $\angle CBA = 60^\circ$ maka $\angle ABD = 30^\circ$
    Jelas $\angle ACB = 60^\circ$, maka $\angle ADB = 90^\circ - \angle ACB = 30^\circ$



$\frac{BD}{\sin\angle BAD} = \frac{AB}{\sin\angle ADB}$, maka $\frac{BD}{\sin 120^o} = \frac{1}{\sin 30^o}$

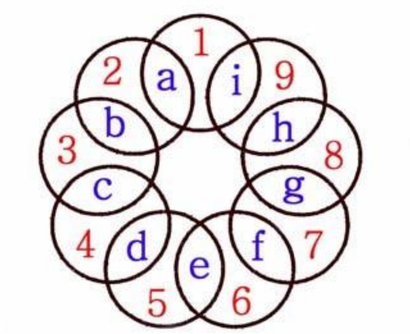
$BD = \frac{\sin 120^o}{\sin 30^o}$

$\therefore$ BD = $\sqrt{3}$

18. Karena $\sqrt{81} = 9$ dan $\sqrt{100} = 10$ maka $\lfloor\sqrt{x}\rfloor = 9$ dipenuhi oleh 81 $\leq x < 100$
    Karena $\sqrt{144} = 12$ dan $\sqrt{169} = 13$ maka $\lfloor\sqrt{y}\rfloor = 12$ dipenuhi oleh 144 $\leq y$ < 169
    $\lfloor y - x\rfloor_{\min} = \lfloor y_{\min} - x_{\text{maks}}\rfloor = \lfloor 144 - 99{,}99\ldots\rfloor = \lfloor 44{,}00\ldots 1\rfloor$
    $\therefore$ $\lfloor y - x\rfloor_{\min}$ = 44

19. Nilai total = 3 · (5 + 3 + 2 + 1 + 1) = 36
    Misal nilai pemenang = x. Maka nilai sisa = 36 − x
    Agar x minimum maka nilai sisa harus terdistribusi merata kepada 4 pelari lain. Misal nilai masing-masing pelari lain = y
    x + 4y = 36 dengan x > y. Maka 4x > 4y
    4x > 36 − x.
    5x > 36
    Jika x = 8 maka 4y = 28 sehingga y = 7.
    Kombinasi nilai 7 adalah (5,1,1) ; (1,5,1) ; (3,1,3) ; (2,3,2). Karena masing-masing nilai 2, 3 dan 5 tidak lebih dari tiga kali dan nilai 1 tidak lebih dari 6 kali, maka kombinasi di atas memenuhi.
    $\therefore$ Nilai minimum pemenang adalah **8**

20.



1 ≤ a, b, c, d, e, f, g, h, i ≤ 9

Karena a, b, c, d, e, f, g, h, i adalah bilangan bulat berbeda maka :
$a + b + c + d + e + f + g + h + i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$
Misal masing-masing lingkaran berjumlah k dan karena ada 9 lingkaran, maka :
$(a+1+i)+(b+2+a)+(c+3+b)+(d+4+c)+(e+5+d)+(f+6+e)+(g+7+f)+(h+8+g)+(i+9+h) = 9k$
$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) + 2\,(a + b + c + d + e + f + g + h + i) = 9k$
$45 + 2 \cdot 45 = 9k$
$k = 15$
Karena $a + 1 + i = 15$ maka $a + i = 14$
Kemungkinan nilai a dan i adalah : $a = 5$ dan $i = 9$ atau $a = 9$ dan $i = 5$ atau $a = 6$ dan $i = 8$ atau $a = 8$ dan $i = 6$.
Karena $i + 9 + h = 15$ maka $i + h = 6$
Kemungkinan nilai h dan i adalah : $h = 1$ dan $i = 5$ atau $h = 5$ dan $i = 1$ atau $h = 2$ dan $i = 4$ atau $h = 4$ dan $i = 2$.
Irisan dari kedua persamaan di atas didapat $i = 5$. Maka $h = 1$ dan $a = 9$

Karena $b + 2 + a = 15$ maka $b = 15 - 2 - 9 = 4$
Karena $c + 3 + b = 15$ maka $c = 15 - 3 - 4 = 8$
Karena $d + 4 + c = 15$ maka $d = 15 - 4 - 8 = 3$
Karena $e + 5 + d = 15$ maka $e = 15 - 5 - 3 = 7$
Karena $f + 6 + e = 15$ maka $f = 15 - 6 - 7 = 2$
Karena $g + 7 + f = 15$ maka $g = 15 - 7 - 2 = 6$

$\therefore\ a + d + g = 9 + 3 + 6 =$ **18**

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2003

TINGKAT PROVINSI

BIDANG MATEMATIKA

Bagian Pertama

WAKTU : 90 MENIT

WWW.JELAJAHNALAR.COM

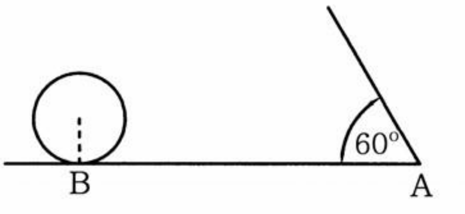
Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2003

BAGIAN PERTAMA

1. Jika a dan b bilangan bulat ganjil dengan a > b, berapa banyakkah bilangan bulat genap di antara a dan b ?
2. Agung mendapatkan bahwa nilai rata-rata dari tiga ulangan matematika yang diikutinya adalah 81. Nilai ulangan pertama adalah 85. Nilai ulangan ketiga lebih rendah 4 dari nilai ulangan kedua. Berapakah nilai ulangan kedua Agung ?
3. Apakah himpunan jawab dari persamaan $|x + 2| + |3x| = 14$?
4. $$\square - \frac{\square}{\square} \cdot \square$$
   Keempat bilangan 3, 5, 7 dan 8 akan diisikan ke dalam kotak-kotak di samping. Berapakah hasil terbesar yang dapat diperoleh ?
5. Misalkan x, y, z tiga bilangan asli berbeda. Faktor persekutuan terbesar ketiganya adalah 12, sedangkan kelipatannya persekutuan terkecil ketiganya adalah 840. Berapakah nilai terbesar bagi x + y + z ?
6. Berapakah bilangan bulat positif k terkecil sehingga $\underbrace{20032003\ldots2003}_{k}$ habis dibagi 9 ?
7. Persamaan kuadrat $2x^2 - 2(2a + 1)x + a(a - 1) = 0$ mempunyai dua akar real x_1 dan x_2. Berapakah nilai a yang memenuhi persamaan kuadrat tersebut sehingga $x_1 < a < x_2$?
8. Dalam sebuah segitiga ABC siku-siku sama kaki, dibuat persegi PQRS sebagai berikut : Titik P pada sisi AB, titik Q pada sisi AC, sedangkan titik-titik R dan S pada sisi miring BC. Jika luas segitiga ABC adalah x, berapakah luas persegi PQRS ?
9. Upik melemparkan n dadu. Ia menghitung peluang terjadinya jumlah mata dadu sama dengan 6. Untuk n berapakah peluang tersebut paling besar ?
10. Suatu garis vertikal membagi segitiga dengan titik sudut (0,0), (1,1) dan (9,1) menjadi dua daerah dengan luas yang sama. Apakah persamaan garis tersebut ?
11. Misalkan m dan n dua bilangan asli yang memenuhi $m^2 - 2003 = n^2$. Berapakah mn ?
12. Berapakah nilai x yang memenuhi ${}^4\log({}^2\log x) + {}^2\log({}^4\log x) = 2$?

13. Titik P terletak di dalam persegi ABCD demikian rupa, sehingga AP : BP : CP = 1 : 2 : 3. Berapakah besar sudut APB ?
14. Dengan mengkombinasikan ketiga warna dasar merah, kuning, dan biru dapat dibentuk warnawarna yang lain. Misalkan terdapat 5 kaleng cat warna merah, 5 kaleng warna kuning, dan 5 kaleng warna biru. Budi boleh memilih kaleng manapun untuk mencampurkan warna, dan semua cat dalam sebuah kaleng harus dipakai semua. Ada berapa pilihan warna yang dihasilkan ?
15. Pak Oto membeli dua mobil untuk dijual kembali. Ia memperoleh keuntungan 30% dari mobil pertama, tetapi menderita kerugian 20% pada mobil kedua. Harga jual kedua mobil sama. Berapa persenkah keuntungan (atau kerugian) pak Oto secara keseluruhan ?

    [Catatan : Semua persentase terhadap harga pembelian. Untuk jawaban, gunakan tanda '−' untuk menyatakan kerugian dan tanda '+' untuk menyatakan keuntungan.]
16. Empat pasang suami isteri menonton pagelaran orkestra. Tempat duduk mereka harus dipisah antara kelompok suami dan kelompok isteri. Untuk masing-masing kelompok disediakan 4 buah tempat duduk bersebelahan dalam satu barisan. Ada berapa banyak cara memberikan tempat duduk kepada mereka ?
17. Sebuah bola dengan jari-jari r ditendang dari B ke A. Bola tersebut menggelinding sebanyak tepat 10 putaran sebelum membentur bidang miring dan berhenti. Berapakah jarak dari B ke A ?



18. Berapakah sisa pembagian $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + 99 \cdot 99! + 100 \cdot 100!$ oleh 101 ?
19. Suatu lingkaran mempunyai diameter AB yang panjangnya merupakan bilangan bulat 2-angka. Tali busur CD tegak lurus pada AB dan memotong AB di titik H. Panjang CD sama dengan bilangan yang diperoleh dengan menukar letak kedua angka dari panjang AB. Jika jarak dari H ke pusat lingkaran merupakan bilangan rasional, berapakah panjang AB ?
20. Berapakah banyaknya cara memilih tiga bilangan berbeda sehingga tidak ada dua bilangan yang berurutan, jika bilangan-bilangan tersebut dipilih dari himpunan $\{1, 2, 3, \cdots, 9, 10\}$?

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2003

TINGKAT PROVINSI

BIDANG MATEMATIKA

Bagian Kedua

WAKTU : 120 MENIT

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2003

Bagian Kedua

1. Andi, Beni, Coki, Doni dan Edo bermain kancil-serigala. Setiap anak menjadi kancil atau serigala, tetapi tidak kedua-duanya. Kancil selalu jujur, sementara serigala selalu berdusta. Andi berkata bahwa Beni adalah kancil. Coki berkata bahwa Doni adalah serigala. Edo berkata Andi bukan serigala. Beni berkata Coki bukan kancil. Doni berkata bahwa Edo dan Andi adalah binatang yang berbeda.
   Tentukan banyaknya serigala dalam permainan ini.
2. Tentukan semua bilangan bulat a dan b sehingga bilangan
   $$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{a}}{\sqrt{3}+\sqrt{b}}$$
   merupakan bilangan rasional
3. Titik-titik P dan Q berturut-turut adalah titik tengah rusuk AE dan CG pada kubus ABCD.EFGH. Jika panjang rusuk kubus adalah 1 satuan, tentukan luas segi-empat DPFQ.
4. Buktikan bahwa $999! < 500^{999}$.
   [Catatan : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$.]
5. Tiga buah titik terletak pada daerah yang dibatasi oleh sumbu y dan grafik persamaan $7x - 3y^2 + 21 = 0$. Buktikan bahwa sedikitnya dua di antara ketiga titik tersebut mempunyai jarak tidak lebih dari 4 satuan.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2003

TINGKAT PROVINSI

SOLUSI SOAL

Bagian Pertama

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2003

BAGIAN PERTAMA

1. Banyaknya bilangan bulat antara a dan b adalah a − b − 1. Karena a dan b ganjil, maka banyaknya bilangan genap di antara a dan b lebih satu dari banyaknya bilangan ganjil di antara a dan b.
   Maka banyaknya bilangan bulat genap dirumuskan dengan $\frac{(a-b-1)+1}{2}$
   ∴ Banyaknya bilangan genap di antara a dan b adalah $\frac{a-b}{2}$
2. Misal nilai ulangan ke-2 Agung = x, maka $= \frac{(85)+(x)+(x-4)}{3} = 81$
   81   2x = 81 · 3. Maka x = 81
   ∴ Nilai ulangan Agung ke-2 = **81**
3. Maka,
   - Untuk x ≤ −2, maka |x + 2| = −x − 2 dan |3x| = −3x
     |x + 2| + |3x| = 14. Maka −x − 2 − 3x = 14 sehingga x = −4 (memenuhi bahwa x ≤ −2)
   - Untuk −2 ≤ x ≤ 0 maka |x + 2| = x + 2 dan |3x| = −3x
     |x + 2| + |3x| = 14. Maka x + 2 − 3x = 14 sehingga x = −6 (tidak memenuhi bahwa −2 ≤ x ≤ 0)
   - Untuk x ≥ 0 maka |x + 2| = x + 2 dan |3x| = 3x
     |x + 2| + |3x| = 14. Maka x + 2 + 3x = 14 sehingga x = 3 (memenuhi bahwa x ≥ 0)

   ∴ Himpunan jawab dari persamaan |x + 2| + |3x| = 14 adalah = **{ −4, 3}**
4.
   $$\boxed{N} = \boxed{A} - \frac{\boxed{B}}{\boxed{D}} \cdot \boxed{C}$$
   Teori : Agar T − M maksimal, maka T harus sebesar-besarnya dan M harus sekecil-kecilnya.
   Jika diinginkan N sebesar-besarnya, maka A dan D harus maksimal dengan A > D sedangkan B dan C harus minimum dan karena B · C = C · B, maka tidak ada pengaruh posisi B dan C.
   Berarti A = 8, B = 3, C = 5, D = 7 atau A = 8, B = 5, C = 3, D = 7
   ∴ $N = 8 - \frac{3}{7} \cdot 5 = \frac{41}{7}$
5. Karena faktor persekutuan terbesar dari x, y, z adalah 12, maka x, y, z akan berbentuk x = 12a, y = 12b dan z = 12c dengan a, b dan c adalah bilangan bulat FPB(a, b, c) = 1
   Dan karena 840 : 12 = 70, maka a, b dan c masing-masing harus faktor dari 70. Nilai a, b dan c harus diambil dari faktor-faktor 70 yaitu : 1, 2, 5, 7, 10, 14, 35 dan 70.
   Karena diinginkan nilai x + y + z yang terbesar maka nilai a + b + c juga harus yang terbesar. Karena FPB (14, 35, 70), FPB (10, 35, 70), FPB (7, 35, 70), FPB (5, 35, 70) semuanya lebih dari 1 maka a, b dan c

diambil dari 2, 35 dan 70 atau 10, 14, 35 dan karena 2 + 35 + 70 > 10 + 14 + 35, maka a, b dan c diambil dari 2, 35 dan 70.

∴ $(x + y + z)_{\text{terbesar}} = 12 \cdot 2 + 12 \cdot 35 + 12 \cdot 70 =$ **1284**

6. Misal N = $\underbrace{20032003 \ldots 2003}_{k}$.

   Agar N habis dibagi 9 maka jumlah digit N harus habis dibagi 9.

   Karena 2 + 0 + 0 + 3 = 5 maka jumlah digit N = 5k.

   ∴ Bilangan bulat positif k terkecil yang memenuhi adalah **k = 9**

7. $x_{1,2} = \frac{4a+2\pm\sqrt{(4a+2)^2-4(2)(a^2-a)}}{2\cdot 2} = a + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 6a + 1}$

   - Akar-akarnya real berarti Disk ≥ 0. Maka Disk = $(4a + 2)^2 - 4(2)(a^2 - a) \geq 0$

     $8a^2 + 24a + 4 \geq 0$

     $2a^2 + 6a + 1 \geq 0$

     $$a_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4(2)(1)}}{2 \cdot 2} = -\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{7}$$

     Nilai a yang memenuhi adalah $a \leq -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{7}$ atau $a \geq -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{7}$ ………….. (1)

   - a < x_2 . Maka $a < a + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 6a + 1}$ sehingga $\sqrt{2a^2 + 6a + 1} > -1$

     Akar dari suatu bilangan bernilai positif sehingga semua nilai a memenuhi. ……………… (2)

   - a > x_1 . Maka $a > a + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 6a + 1}$ sehingga $\sqrt{2a^2 + 6a + 1} > 1$

     $2a^2 + 6a + 1 > 1$

     2a (a + 3) > 0

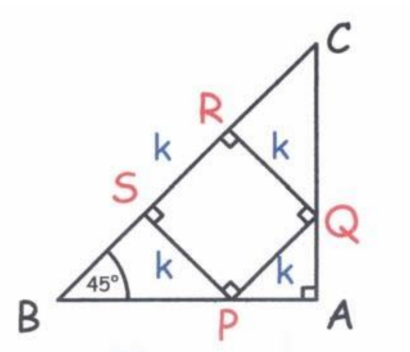
     Nilai a yang memenuhi adalah a < −3 atau a > 0 …………………… (3)

   Karena $\sqrt{7} < 3$ maka $-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{7} > -3$ dan $-\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{7} < 0.$

   Irisan dari ketiga penyelesaian untuk a adalah a < −3 atau a > 0

   ∴ Maka nilai a yang memenuhi adalah **a < −3 atau a > 0**

8.



Misal PQ = QR = RS = PS = k

∠ACB = ∠ABC = ∠APQ = ∠AQP = ∠BPS = ∠CQR = 45°

Maka BS = CR = k

BP = CQ = $k\sqrt{2}$

Luas ΔABC = $\frac{1}{2}(AB)(AC) = \frac{1}{2}\left(k\sqrt{2} + \frac{1}{2}k\sqrt{2}\right)\left(k\sqrt{2} + \frac{1}{2}k\sqrt{2}\right) = x$

$k^2 = \frac{4x}{9}$

∴ Luas persegi PQRS = $\frac{4x}{9}$

9. Karena nilai terkecil dadu = 1, maka n ≤ 6.
   - Untuk n = 1

     Peluang terjadinya jumlah mata dadu sama dengan 6 adalah $\frac{1}{6}$
   - Untuk n = 2

     Kejadian jumlah mata dadu sama dengan 6 adalah (1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1) = 5

     Peluang terjadinya jumlah mata dadu sama dengan 6 adalah $= \frac{5}{6^2} = \frac{5}{36} < \frac{1}{6}$
   - Untuk n = 3

     Kejadian jumlah mata dadu sama dengan 6 adalah (1,1,4), (1,2,3), (1,3,2), (1,4,1), (2,1,3), (2,2,2), (2,3,1), (3,1,2), (3,2,1), (4,1,1) = 10

     Peluang terjadinya jumlah mata dadu sama dengan 6 adalah $= \frac{10}{6^3} = \frac{10}{216} < \frac{5}{36} < \frac{1}{6}$
   - Untuk n = 4

     Kejadian jumlah mata dadu sama dengan 6 adalah (1,1,1,3), (1,1,2,2), (1,1,3,1), (1,2,1,2), (1,2,2,1), (1,3,1,1), (2,1,1,2), (2,1,2,1), (2,2,1,1), (3,1,1,1) = 10

     Peluang terjadinya jumlah mata dadu sama dengan 6 adalah $\frac{10}{6^4} = \frac{10}{1296} < \frac{10}{216} < \frac{5}{36} < \frac{1}{6}$
   - Untuk n = 5

     Kejadian jumlah mata dadu sama dengan 6 adalah (1,1,1,1,2), (1,1,1,2,1), (1,1,2,1,1), (1,2,1,1,1), (2,1,1,1,1) = 5

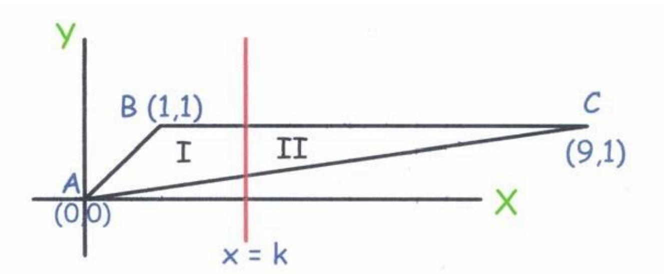
     Peluang terjadinya jumlah mata dadu sama dengan 6 adalah $\frac{5}{6^5} < \frac{10}{1296} < \frac{10}{216} < \frac{5}{36} < \frac{1}{6}$
   - Untuk n = 6

     Kejadian jumlah mata dadu sama dengan 6 adalah (1,1,1,1,1,1) = 1

     Peluang jumlah mata dadu sama dengan 6 adalah $\frac{1}{6^6} < \frac{5}{6^5} < \frac{10}{1296} < \frac{10}{216} < \frac{5}{36} < \frac{1}{6}$

   ∴ Peluang terbesar adalah jika n = **1**

10.



Misal persamaan garis vertikal tersebut adalah x = k

Luas ΔABC = ½ (9 − 1)(1 − 0) = 4

Persamaan garis melalui (0,0) dan (9,1) adalah $y = \frac{1}{9}x$

Untuk x = k maka $y = \frac{1}{9}k$

Luas Δ II = ½ Luas ΔABC

$\frac{1}{2}(9 - k)(1 - \frac{1}{9}k) = \frac{1}{2} \cdot 4$

$9 - k = \pm 6$

k = 3 (memenuhi) atau k = 15 (tidak memenuhi bahwa $0 \le k \le 9$)

∴ Persamaan garis vertikal tersebut adalah **x = 3**

11. $m^2 - 2003 = n^2$

$m^2 - n^2 = 2003$

$(m + n)(m - n) = 2003$

2003 adalah bilangan prima sehingga persamaan dipenuhi hanya jika m + n = 2003 dan m − n = 1

Sehingga m = 1002 dan n = 1001

∴ mn = 1002 · 1001 = **1003002**

12. $^4\log\left({}^2\log x\right) + {}^2\log\left({}^4\log x\right) = 2$

$^2\log\left({}^2\log x\right)^{1/2} + {}^2\log\left({}^2\log\sqrt{x}\right) = 2$

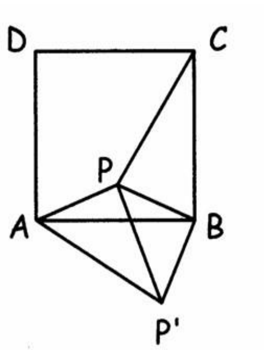
$\sqrt{{}^2\log x} \cdot \frac{1}{2} \cdot {}^2\log x = 2^2 = 4$

$\left({}^2\log x\right)^{3/2} = 8$

$x = 2^4$

∴ **x = 16**

13.



Misalkan AP = a maka BP = 2a dan CP = 3a

Dengan berpusat di B, titik P diputar sejauh 90° menjadi titik P'. maka ΔPBP' adalah segitiga siku-siku sama kaki.

∠BPP' = 45° dan PP' = $2a\sqrt{2}$

ΔBPC ≅ ΔAP'B sehingga AP' = 3a

$(AP')^2 = (AP)^2 + (PP')^2 - 2(AP)(PP')\cos\angle APP'$

$(3a)^2 = (a)^2 + (2a\sqrt{2})^2 - 2(a)(2a\sqrt{2})\cos\angle APP'$

$\cos\angle APP' = 0$

$\angle APP' = 90^o$

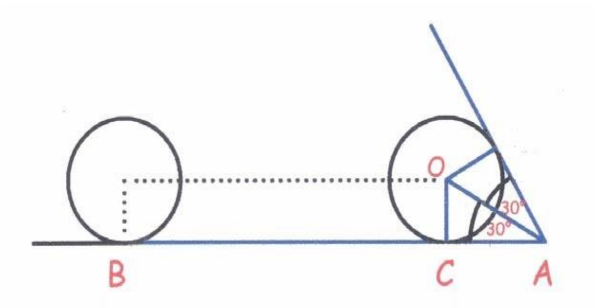
$\therefore$ $\angle APB = \angle APP' + \angle BPP' = 90^o + 45^o =$ **135^o**

14.
- Jika terdapat sedikitnya satu warna yang tidak ikut dicampur
Salah satu perbandingan yang menghasilkan warna adalah 0:0:1. Karena ada 3 warna, maka akan ada 3 warna yang dihasilkan dari perbandingan ini. Perbandingan 0:0:2, 0:0:3, 0:0:4, 0:0:5 akan menghasilkan warna yang sama dengan perbandingan 0:0:1. Perbandingan lainnya yang memenuhi adalah 0:1:1, 0:1:2, 0:1:3, 0:1:4, 0:1:5, 0:2:3, 0:2:5, 0:3:4, 0:3:5, 0:4:5. Banyaknya warna yang dihasilkan adalah 3 x 11 = 33.
- Jika terdapat sedikitnya satu warna dengan tepat 1 kaleng warna tersebut yang dicampur
Kemungkinan perbandingannya adalah 1:1:1, 1:1:2, 1:1:3, 1:1:4, 1:1:5, 1:2:2, 1:2:3, 1:2:4, 1:2:5, 1:3:3, 1:3:4, 1:3:5, 1:4:4, 1:4:5, 1:5:5. Perbandingan 1:1:1 hanya ada 1 kemungkinan. Banyaknya warna yang dihasilkan adalah 1 + 3 x 14 = 43.
- Jika terdapat sedikitnya satu warna dengan tepat 2 kaleng warna tersebut yang dicampur
Kemungkinan perbandingannya adalah 2:2:3, 2:2:5, 2:3:3, 2:3:4, 2:3:5, 2:4:5, 2:5:5. Perbandingan 2:2:2 akan menghasilkan warna yang sama dengan perbandingan 1:1:1. Hal yang hampir sama berhubungan dengan perbandingan 2:2:4 dan 2:4:4.
Banyaknya warna yang dihasilkan adalah 3 x 7 = 21.
- Jika terdapat sedikitnya satu warna dengan tepat 3 kaleng warna tersebut yang dicampur
Kemungkinan perbandingannya adalah 3:3:4, 3:3:5, 3:4:4, 3:4:5, 3:5:5.
Banyaknya warna yang dihasilkan adalah 3 x 5 = 15.
- Jika terdapat sedikitnya satu warna dengan tepat 4 kaleng warna tersebut yang dicampur
Kemungkinan perbandingannya adalah 4:4:5, 4:5:5.
Banyaknya warna yang dihasilkan adalah 3 x 2 = 6.

$\therefore$ Banyaknya warna keseluruhan yang dihasilkan adalah 33 + 43 + 21 + 15 + 6 = **118.**

15. Misal harga jual masing-masing mobil = p
Misal harga pembelian mobil pertama = y_1
$y_1 + 0{,}3y_1 = p$, maka $y_1 = \frac{10}{13}p$
Misal harga pembelian mobil kedua = y_2
$y_2 - 0{,}2y_2 = p$, maka $y_2 = \frac{5}{4}p$
Harga pembelian total = $y_1 + y_2 = \frac{10}{13}p + \frac{5}{4}p = \frac{105}{52}p$
Selisih = $2p - \frac{10}{13}p - \frac{5}{4}p = -\frac{1}{52}p$
Kerugian Pak Oto = $\frac{-\frac{1}{52}p}{\frac{105}{52}p} \times 100\ \% = -\frac{100}{105}\ \%$
$\therefore$ Kerugian Pak Oto = **$-\frac{20}{21}$ %**

16. Banyaknya cara duduk masing-masing kelompok adalah sama dengan permutasi 4 obyek pada 4 tempat $= {}_4P_4 = 24$.
    Posisi duduk kelompok isteri dapat di sebelah kanan maupun di sebelah kiri kelompok suami.
    $\therefore$ Banyaknya cara memberikan tempat duduk kepada mereka adalah $= 2 \cdot 24 \cdot 24 =$ **1152 cara**.
17.



$BC = 10 \cdot 2\pi r = 20\pi r$

$CA = OC \cdot \text{cotg } 30^o = r\sqrt{3}$

$AB = BC + CA = 20\pi r + r\sqrt{3}$

$\therefore$ Jarak dari B ke A = $\mathbf{(20\pi + \sqrt{3})r}$

18. Misal $P = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + 99 \cdot 99! + 100 \cdot 100!$

    $T = 2 \cdot 1! + 3 \cdot 2! + 4 \cdot 3! + \cdots + 100 \cdot 99! + 101 \cdot 100! = 2! + 3! + 4! + \cdots + 100! + 101!$

    $T - P = (2 - 1)\ 1! + (3 - 2)\ 2! + (4 - 3)\ 3! + \cdots + (100 - 99)\ 99! + (101 - 100)\ 100!$

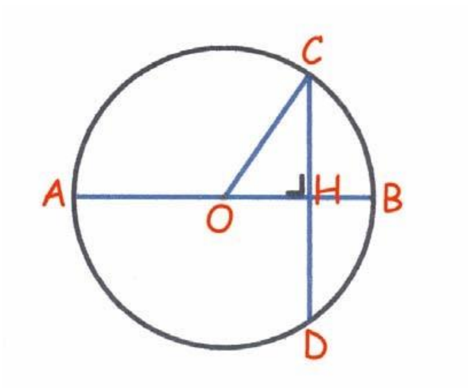
    $T - P = 1! + 2! + 3! + \cdots + 99! + 100!$

    $2! + 3! + 4! + \cdots + 100! + 101! - P = 1! + 2! + 3! + \cdots + 99! + 100!$

    $P = 101! - 1! = 101! - 1$

    $101!$ adalah bilangan yang habis dibagi 101, maka $P = 101! - 1 = 101k + 101 - 1 = 101k + 100$

    $\therefore$ $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + 99 \cdot 99! + 100 \cdot 100!$ dibagi 101 akan bersisa **100**
19.



Misal panjang AB = 10a + b

OC = ½ AB = ½ (10a + b)

Panjang CD = 10b + a

CH = ½ (10b + a)

Dengan a dan b adalah bilangan bulat positif dan $0 < a \leq 9$, $0 < b \leq 9$

$$OH = \sqrt{(OC)^2 - (CH)^2}$$
$$OH = \frac{1}{2}\sqrt{(10a+b)^2 - (10b+a)^2}$$
$$OH = \frac{3}{2}\sqrt{11(a+b)(a-b)}$$

Karena OH adalah bilangan rasional dan $a + b > a - b$ maka :

$a + b = 11k$ dan $a - b = km^2$ dengan k dan m adalah bilangan asli sebab a dan b asli.

Karena $a + b \leq 18$ maka $11k \leq 18$ sehingga nilai k yang memenuhi hanya jika k = 1.

Maka $a - b = m^2$. Karena $a - b < 9$ maka nilai m^2 yang mungkin hanya 1 atau 4.

Jika $a + b = 11$ dan $a - b = 4$ maka tidak mungkin didapat a dan b asli.

Jika $a + b = 11$ dan $a - b = 1$ maka nilai a dan b yang memenuhi hanya jika a = 6 dan b = 5.

∴ Panjang AB = **65**

20. Misal H = {1, 2, 3, ⋯, 9, 10}

Alternatif 1 :

- Banyaknya 2 bilangan berurutan dari himpunan H ada 9 yaitu : (1,2), (2,3), (3,4), ⋯, (9,10)
- Menentukan 3 bilangan dari H yang 2 berurutan namun ketiganya tidak berurutan :
  Untuk (1,2) hanya ada satu bilangan ketiga yang akan membuat ketiga bilangan tersebut berurutan, yaitu 3. Maka banyaknya cara 3 bilangan diambil dari himpunan H yang 2 bilangannya adalah (1,2) namun bilangan ketiga bukan 3 ada 7, yaitu : (1,2,4), (1,2,5), ⋯, (1,2,10). Banyaknya cara ini juga sama dengan 2 bilangan di antaranya adalah (9,10) Untuk (2,3) ada dua bilangan ketiga yang akan membuat ketiga bilangan tersebut berurutan, yaitu 1 dan 4. Maka banyaknya cara 3 bilangan diambil dari himpunan H yang 2 bilangannya adalah (2,3) namun bilangan ketiga bukan 1 atau 4 ada 6, yaitu : (2,3,5), (2,3,6), ⋯, (2,3,10). Banyaknya cara ini juga sama dengan 2 bilangan di antaranya adalah (3,4), (4,5), ⋯, (8,9).
  Banyaknya cara 3 bilangan diambil dari himpunan H yang 2 di antaranya berurutan namun ketiga bilangan tersebut tidak berurutan adalah = $2 \cdot 7 + 7 \cdot 6 = 56$.
- Banyaknya cara 3 bilangan diambil dari himpunan H yang ketiganya berurutan = 8, yaitu : (1,2,3), (2,3,4), (3,4,5), ⋯, (7,8,9), (8,9,10).
- Banyaknya cara 3 bilangan diambil dari himpunan H = ${}_{10}C_3 = 120$.

∴ Banyaknya cara memilih 3 bilangan berbeda dari himpunan H sehingga tidak ada 2 bilangan berurutan = 120 − 56 − 8 = **56**.

Alternatif 2 :

Jika (a, b, c) adalah 3 bilangan dari H yang memenuhi bahwa tidak ada 2 bilangan di antaranya yang berurutan maka (a, b − 1, c − 2) haruslah merupakan 3 bilangan yang berbeda dan merupakan elemen dari himpunan {1, 2, 3, ⋯, 7, 8}.

Banyaknya cara memilih 3 bilangan dari himpunan {1, 2, 3, ⋯, 7, 8} adalah ${}_8C_3 = 56$

∴ Banyaknya cara memilih 3 bilangan berbeda dari himpunan H sehingga tidak ada 2 bilangan berurutan = **56**.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2003

TINGKAT PROVINSI

SOLUSI SOAL

Bagian Kedua

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2003

BAGIAN KEDUA

1. Pernyataan-pernyataan :
   a) Andi berkata bahwa Beni adalah kancil
   b) Coki berkata bahwa Doni adalah serigala
   c) Edo berkata Andi bukan serigala
   d) Beni berkata Coki bukan kancil
   e) Doni berkata bahwa Edo dan Andi adalah binatang berbeda

   - Misalkan Andi adalah kancil.
     Berdasarkan (a) maka Beni adalah kancil.
     Berdasarkan (d) maka Coki adalah serigala.
     Berdasarkan (b) maka Doni adalah kancil.
     Berdasarkan (e) karena Andi kancil maka Edo adalah serigala.
     Berdasarkan (c) maka Andi adalah serigala. Pernyataan ini kontradiksi dengan permisalan bahwa Andi adalah kancil.
   - Misalkan Andi adalah serigala.
     Berdasarkan (a) maka Beni adalah serigala.
     Berdasarkan (d) maka Coki adalah kancil.
     Berdasarkan (b) maka Doni adalah serigala.
     Berdasarkan (e) maka Edo dan Andi sejenis. Karena Andi serigala maka Edo juga serigala.
     Berdasarkan (c) maka Andi adalah serigala yang berarti sesuai dengan permisalan bahwa Andi adalah kancil.

   Yang termasuk kancil adalah Coki dan yang termasuk serigala adalah Andi, Beni, Doni dan Edo.

   $\therefore$ **Banyaknya serigala ada** 4

2. Karena $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{a}}{\sqrt{3}+\sqrt{b}}$ adalah bilangan rasional maka $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{a}}{\sqrt{3}+\sqrt{b}} = \frac{p}{q}$ dengan a, b, p dan q adalah bilangan asli dan q ≠ 0 serta p dan q relatif prima.

   $q\sqrt{2} + q\sqrt{a} = p\sqrt{3} + p\sqrt{b}$, maka $\left(q\sqrt{2} - p\sqrt{3}\right)^2 = \left(p\sqrt{b} - q\sqrt{a}\right)^2$

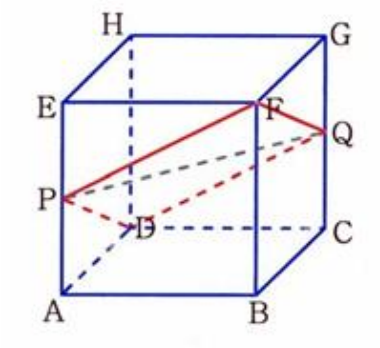
   $2q^2 + 3p^2 - 2pq\sqrt{6} = p^2b + q^2a - 2pq\sqrt{ab}$

   Karena a, b, p dan q adalah bilangan asli maka 6 = ab. Pasangan (a, b) yang memenuhi adalah (1,6) ; (2,3) ; (3,2) ; (6,1). Subtitusikan keempat pasangan ini ke persamaan semula untuk dicek apakah memenuhi bilangan rasional atau tidak. Setelah dicek maka pasangan (a,b) yang akan membuat persamaan semula merupakan bilangan rasional adalah (3,2).

$$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{a}}{\sqrt{3}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = 1$$

$\therefore$ **a = 3   dan   b = 2**

3.



Karena bidang ADHE sejajar dengan BCGF dan bidang ABFE sejajar dengan bidang DCGH maka DP sejajar FQ dan FP sejajar DQ.

$$PF = DP = DQ = FQ = \sqrt{(1)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\right)^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$

$$PQ \text{ sejajar } AC \text{ maka } PQ = AC = \sqrt{2}$$

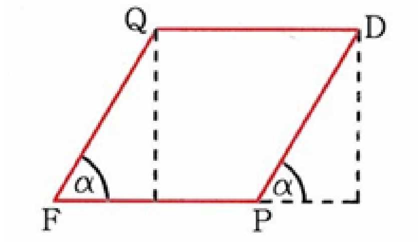
Alternatif 1 :

Mencari sudut PFQ. Misal $\angle PFQ = \alpha$

$$(PQ)^2 = (PF)^2 + (FQ)^2 - 2(PF)(FQ)\cos\alpha$$

$$2 = \frac{5}{4} + \frac{5}{4} - 2\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{5} \quad \text{sehingga} \quad \sin\alpha = \frac{2}{5}\sqrt{6}$$



Luas segi empat DPFQ = (FP)(PD)sin α

Luas segi empat DPFQ = $\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{5}\right)\left(\frac{2}{5}\sqrt{6}\right)$

$\therefore$ Luas segi empat DPFQ = 6

Alternatif 2 :

Karena PF = DP = DQ = FQ maka segiempat DPFQ adalah belah ketupat. Diagonal PQ = $\sqrt{2}$ sedangkan diagonal DF adalah diagonal ruang maka FD = $\sqrt{3}$.

Luas segiempat DPFQ = ½ · PQ · FD = ½ · $\sqrt{2}$ · $\sqrt{3}$

∴ Luas segi empat DPFQ = $\frac{1}{2}\sqrt{6}$

4. Rataan Geometri ≤ Rataan Aritmatika

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ldots a_{n-1} \cdot a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n}{n}$$

Tanda kesamaan berlaku jika $a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = a_{n-1} = a_n$. Maka :

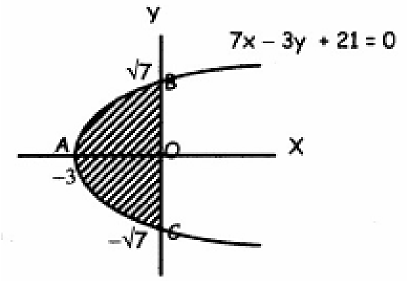
$$\sqrt[999]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 998 \cdot 999} < \frac{1 + 2 + 3 + \cdots 998 + 999}{999}$$

$$\sqrt[999]{999!} < \frac{1}{999} \cdot \frac{999}{2}(1 + 999)$$

$$\sqrt[999]{999!} < 500$$

∴ **Terbukti bahwa 999! < 500^{999}**

5. $7x - 3y^2 + 21 = 0$. Maka $x = \frac{3}{7}(y + \sqrt{7})(y - \sqrt{7})$ yang merupakan suatu persamaan parabola dengan puncak di (−3,0) dan titik potong dengan sumbu Y di (0, $\sqrt{7}$) dan (0, $-\sqrt{7}$). Tampak bahwa ada 2 daerah. Satu daerah di atas sumbu X dan satu daerah lagi di bawah sumbu X.



Jarak AB = $\sqrt{(-3-0)^2 + \left(0 - \sqrt{7}\right)^2} = 4$

Jarak AC = $\sqrt{(-3-0)^2 + \left(0 - \left(-\sqrt{7}\right)\right)^2} = 4$

Untuk $0 \le y \le \sqrt{7}$, tampak bahwa jarak terjauh 2 titik terjadi jika kedua titik tersebut di A dan B dengan jarak AB = 4.

Untuk $-\sqrt{7} \le y \le 0$, tampak bahwa jarak terjauh 2 titik terjadi jika kedua titik tersebut di A dan C dengan jarak AC = 4.

Karena ada 3 buah titik dan ada 2 daerah maka sesuai *Pigeon Hole Principle* (PHP) maka sedikitnya ada 2 titik dalam satu daerah yaitu memiliki ordinat $0 \le y \le \sqrt{7}$ atau $-\sqrt{7} \le y \le 0$. ∴ **Dari penjelasan di atas dapat disimpulkan bahwa jika 3 titik terletak pada daerah yang dibatasi oleh sumbu Y dan grafik persamaan $7x - 3y^2 + 21 = 0$, maka sedikitnya 2 titik di antara ketiga titik tersebut mempunyai jarak tidak lebih dari 4 satuan.**

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2003

TINGKAT NASIONAL

BIDANG MATEMATIKA

Hari Pertama

WAKTU : 180 MENIT

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Nasional Tahun 2003

1. Buktikan bahwa $a^9 - a$ habis dibagi 6, untuk setiap bilangan bulat a.
2. Diberikan sebuah segiempat ABCD sebarang. Misalkan P, Q, R, S berturut-turut adalah titik-titik tengah AB, BC, CD, DA. Misalkan pula PR dan QS berpotongan di O. Buktikan bahwa PO = OR dan QO = OS.
3. Tentukan semua solusi bilangan real persamaan $\lfloor x^2 \rfloor + \lceil x^2 \rceil = 2003$.

   [**Catatan** : Untuk sebarang bilangan real α, notasi $\lfloor \alpha \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan α, sedangkan $\lceil \alpha \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan α.]
4. Diberikan sebuah matriks berukuran 19 x 19, yang setiap komponennya bernilai +1 atau -1. Misalkan pula b_i adalah hasil kali semua komponen matriks di baris ke-i, dan k_j adalah hasil kali semua komponen matriks di kolom ke-j.

   Buktikan bahwa $b_1 + k_1 + b_2 + k_2 + \cdots + b_{19} + k_{19} \neq 0$.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2003

TINGKAT NASIONAL

BIDANG MATEMATIKA

Hari Kedua

WAKTU : 180 MENIT

WWW.JELAJAHNALAR.COM

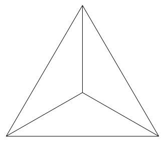
Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Nasional Tahun 2003

5. Untuk sebarang bilangan real a, b, c buktikan ketaksamaan

$$5a^2 + 5b^2 + 5c^2 \geq 4ab + 4ac + 4bc$$

dan tentukan kapan kesamaan berlaku.

6. Balairung sebuah istana berbentuk segi-6 beraturan dengan panjang sisi 6 meter. Lantai balairung tersebut ditutupi dengan ubin-ubin keramik berbentuk segitiga samasisi dengan panjang sisi 50 cm. Setiap ubin keramik dibagi ke dalam 3 daerah segitiga yang kongruen, lihat gambar. Setiap daerah segitiga diberi satu warna tertentu sehingga setiap ubin memiliki tiga warna berbeda. Raja menginginkan agar tidak ada dua ubin yang memiliki pola warna sama. Paling sedikit berapa warna yang diperlukan ?



7. Misalkan k, m, n adalah bilangan-bilangan asli demikian, sehingga $k > n > 1$ dan faktor persekutuan terbesar k dan n sama dengan 1. Buktikan bahwa jika $k - n$ membagi $k^m - n^{m-1}$, maka $k \leq 2n - 1$.

8. Diketahui segitiga ABC siku-siku di C dengan panjang sisi-sisinya merupakan bilangan bulat. Tentukan panjang sisi-sisi segitiga tersebut jika hasil kali dari dua sisi yang bukan sisi miring sama dengan tiga kali keliling segitiga.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2003

TINGKAT NASIONAL

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Nasional Tahun 2003

1. Alternatif 1 :

$a^9 - a = a\ (a^8 - 1)$

$a^9 - a = a\ (a^4 - 1)\ (a^4 + 1)$

$a^9 - a = a\ (a^2 - 1)\ (a^2 + 1)\ (a^4 + 1)$

$a^9 - a = (a - 1)\ a\ (a + 1)\ (a^2 + 1)\ (a^4 + 1)$

Karena $(a - 1)\ a\ (a + 1)$ adalah perkalian tiga bilangan bulat berurutan maka $a^9 - a$ habis dibagi $3! = 6$.

Alternatif 2 :

Sebuah bilangan bulat pasti akan memenuhi bahwa ia ganjil atau genap.

- Jika a genap maka a^9 adalah genap

  Maka $a^9 - a$ adalah selisih antara dua bilangan genap sehingga $a^9 - a$ genap
- Jika a ganjil maka a^9 adalah ganjil

  Maka $a^9 - a$ adalah selisih antara dua bilangan ganjil sehingga $a^9 - a$ genap

Karena $a^9 - a$ genap maka berarti $a^9 - a$ habis dibagi 2.

Akan dibuktikan bahwa $a^9 - a$ juga habis dibagi 3.

Alternatif 2. a :

Sebuah bilangan bulat akan memenuhi salah satu bentuk dari 3k, 3k + 1 atau 3k + 2

- Jika $a = 3k \equiv 0 \pmod 3$

  $a^9 - a = 3^9k^9 - 3k = 3\ (3^8k^9 - k)$ yang berarti $a^9 - a$ habis dibagi 3

  Penulisan lain. $a^9 - a \equiv 0^9 - 0 \pmod 3 \equiv 0 \pmod 3$ yang berarti $a^9 - a$ habis dibagi 3.

- Jika $a = 3k + 1 \equiv 1 \pmod 3$

  $a^9 - a = (3k + 1)^9 - (3k + 1) = 3^9k^9 + {}_9C_1\ 3^8k^8 + {}_9C_2\ 3^7k^7 + \cdots + {}_9C_7\ 3^2k^2 + {}_9C_8\ 3k + 1 - (3k + 1)$

  $a^9 - a = 3^9k^9 + {}_9C_1\ 3^8k^8 + {}_9C_2\ 3^7k^7 + \cdots + {}_9C_7\ 3^2k^2 + 24k = 3p$

  Penulisan lain. $a^9 - a \equiv 1^9 - 1 \pmod 3 \equiv 0 \pmod 3$ yang berarti $a^9 - a$ habis dibagi 3.

  $a^9 - a$ habis dibagi 3
- Jika $a = 3k + 2 \equiv -1 \pmod 3$

  $a^9 - a = (3k + 2)^9 - (3k + 2)$

  $a^9 - a = 3^9\ k^9 + {}_9C_1\ 3^8\ 2^1\ k^8 + {}_9C_2\ 3^7\ 2^2\ k^7 + \cdots + {}_9C_7\ 3^2\ 2^7\ k^2 + {}_9C_8\ 3k\ 2^8 + 1 - (3k + 2)$

  $a^9 - a = 3^9\ k^9 + {}_9C_1\ 3^8\ 2^1\ k^8 + {}_9C_2\ 3^7\ 2^2\ k^7 + \cdots + {}_9C_7\ 3^2\ 2^7\ k^2 + {}_9C_8\ 3k\ 2^8 + 2^9 - (3k + 2)$

  ${}_9C_8\ 3k\ 2^8 - 3k = 3k\ ({}_9C_8 \cdot 2^8 - 1)$ yang berati habis dibagi 3

  $2^9 - 2 = 512 - 2 = 510$ habis dibagi 3.

  Penulisan lain. $a^9 - a \equiv (-1)^9 - (-1) \pmod 3 \equiv 0 \pmod 3$ yang berarti $a^9 - a$ habis dibagi 3.

  $a^9 - a$ habis dibagi 3

Dapat disimpulkan bahwa $a^9 - a$ habis dibagi 3.

Alternatif 2. b :

Teorema Fermat : Untuk a bilangan bulat dan p prima maka $a^p - a$ habis dibagi p. Penulisan dalam bentuk lain adalah $a^p - a \equiv 0 \pmod p$ atau bisa juga $a^p \equiv a \pmod p$

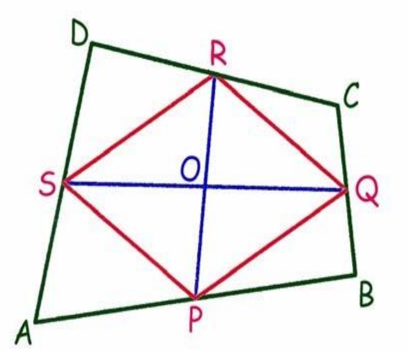
Berdasarkan teorema Fermat maka $a^3 - a$ habis dibagi 3 dan $(a^3)^3 - a^3$ juga habis dibagi 3. Maka $(a^3)^3 - a^3 + a^3 - a$ harus habis dibagi 3.

Karena $(a^3)^3 - a^3 + a^3 - a = a^9 - a$ maka $a^9 - a$ habis dibagi 3.

Karena 2 dan 3 relatif prima maka $a^9 - a$ habis dibagi $2 \cdot 3 = 6$

$\therefore$ **Terbukti bahwa $a^9 - a$ habis dibagi 6 untuk setiap bilangan bulat a**

2.



Alternatif 1 :

Dengan cara vektor :

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = 0$

$\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DR} = 0{,}5(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) = -0{,}5(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD}) = 0{,}5(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = 0{,}5(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})$

Karena $\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{PQ}$ maka ruas garis SR dan PQ sejajar dan sama panjang.

$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{CR} = 0{,}5(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})$

$\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AS} = 0{,}5(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = -0{,}5(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA}) = 0{,}5(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD})$

Karena $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PS}$ maka ruas garis QR dan PS sejajar dan sama panjang.

Akibatnya segiempat PQRS adalah jajaran genjang.

Karena $\angle SOP = \angle QOR$ dan PS sejajar serta sama panjang dengan QR maka ΔSOP kongruen dengan ΔQOR yang berakibat QO = OS dan PO = OR

Alternatif 2 :

Pada ΔABC dan ΔPBQ berlaku $\angle ABC = \angle PBQ$ serta $\frac{AB}{PA} = 2$ dan $\frac{CB}{QB} = 2$ yang berarti ΔABC dan ΔPBQ sebangun. Maka AC sejajar PQ dan $\frac{AC}{PQ} = 2$.

Pada ΔADC dan ΔSDR berlaku $\angle ADC = \angle SDR$ serta $\frac{AD}{SD} = 2$ dan $\frac{CD}{RD} = 2$ yang berarti ΔADC dan ΔSDR sebangun. Maka AC sejajar SR dan $\frac{AC}{SR} = 2$ sehingga SR sejajar PQ dan SR = PQ.

Karena $SR \parallel PQ$ maka $\angle SRP = \angle QPR$ dan $\angle RSQ = \angle PQS$ dan karena SR = PQ maka ΔSOP kongruen dengan ΔQOR yang berakibat QO = OS dan PO = OR

Alternatif 3 :

PQRS adalah sebuah jajaran genjang (Varignon Parallelogram)

Menurut sifat jajaran genjang, diagonalnya saling membagi dua sama panjang.

$\therefore$ **Terbukti bahwa PO = OR dan QO = OS**

3.

- Untuk $x^2 \le 1001$ maka $\lfloor x^2 \rfloor \le 1001$ dan $\lceil x^2 \rceil \le 1001$ sehingga $\lfloor x^2 \rfloor + \lceil x^2 \rceil \le 2002$
- Untuk $x^2 \ge 1002$ maka $\lfloor x^2 \rfloor \ge 1002$ dan $\lceil x^2 \rceil \ge 1002$ sehingga $\lfloor x^2 \rfloor + \lceil x^2 \rceil \ge 2004$
- Untuk $1001 < x^2 < 1002$ maka $\lfloor x^2 \rfloor = 1001$ dan $\lceil x^2 \rceil = 1002$ sehingga $\lfloor x^2 \rfloor + \lceil x^2 \rceil = 2003$

Maka persamaan $\lfloor x^2 \rfloor + \lceil x^2 \rceil = 2003$ hanya dipenuhi oleh $1001 < x^2 < 1002$

$\therefore$ $\lfloor x^2 \rfloor + \lceil x^2 \rceil = 2003$ hanya dipenuhi oleh $\sqrt{1001} < x < \sqrt{1002}$ atau $-\sqrt{1002} < x < -\sqrt{1001}$

4. Karena komponen-komponen matriks bernilai +1 atau −1 maka b_i dan k_i masing-masing juga akan bernilai +1 atau −1.

Alternatif 1 :

Andaikan bahwa $b_1 + k_1 + b_2 + k_2 + \cdots + b_{19} + k_{19} = 0$

Maka harus ada 19 di antara $b_1, k_1, b_2, k_2, \cdots, b_{19}, k_{19}$ yang bernilai −1. Kemungkinannya adalah :

- Ada p genap di antara $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_{19}$ yang bernilai −1 dan ada (19 − p) ganjil di antara $k_1, k_2, k_3, \cdots, k_{19}$ yang bernilai −1.

  Berdasarkan fakta bahwa ada p genap di antara $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_{19}$ yang bernilai −1 maka di antara 19 x 19 komponen harus ada komponen bertanda −1 sebanyak (ganjil · p + genap · ganjil) = genap

  Berdasarkan fakta bahwa ada (19 − p) ganjil di antara $k_1, k_2, k_3, \cdots, k_{19}$ yang bernilai −1 maka di antara 19 x 19 komponen harus ada sebanyak (ganjil · (19 − p) + genap · genap) = ganjil komponen bertanda −1. Hal ini bertentangan dengan kenyataan sebelumnya bahwa komponen bertanda −1 harus ada sebanyak genap.

  Maka tidak mungkin bahwa ada p genap di antara $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_{19}$ yang bernilai −1 dan ada (19 − p) ganjil di antara $k_1, k_2, k_3, \cdots, k_{19}$ yang bernilai −1.

- Ada q ganjil di antara $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_{19}$ yang bernilai −1 dan ada (19 − q) genap di antara $k_1, k_2, k_3, \cdots, k_{19}$ yang bernilai −1.

  Berdasarkan fakta bahwa ada q ganjil di antara $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_{19}$ yang bernilai −1 maka di antara 19 x 19 komponen harus ada komponen bertanda −1 sebanyak (ganjil · q + genap · genap) = ganjil

Berdasarkan fakta bahwa ada (19 − q) genap di antara $k_1, k_2, k_3, \cdots, k_{19}$ yang bernilai −1 maka di antara 19 x 19 komponen harus ada sebanyak (ganjil · (19 − q) + genap · ganjil) = genap komponen bertanda −1. Hal ini bertentangan dengan kenyataan sebelumnya bahwa komponen bertanda −1 harus ada sebanyak ganjil.

Maka tidak mungkin bahwa ada q ganjil di antara $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_{19}$ yang bernilai −1 dan ada (19 − q) genap di antara $k_1, k_2, k_3, \cdots, k_{19}$ yang bernilai −1.

Alternatif 2 :

Pada matriks berlaku $b_1b_2b_3\cdots b_{19} = k_1k_2k_3\cdots k_{19}$ ······················ (1)

Andaikan bahwa $b_1 + k_1 + b_2 + k_2 + \cdots + b_{19} + k_{19} = 0$ ······························ (2)

Karena b_i dan k_j bernilai +1 atau −1 Maka harus ada 19 di antara $b_1, k_1, b_2, k_2, \cdots, b_{19}, k_{19}$ yang bernilai −1.

Jika di antara b_i ada terdapat sebanyak n buah yang bertanda −1 maka harus ada sebanyak (19−n) di antara k_i yang bertanda −1. Tetapi n dan (19−n) berbeda paritasnya (salah satunya ganjil dan satunya lagi genap), sehingga persamaan (1) tidak mungkin dapat dipenuhi. Akibatnya tidak mungkin $b_1 + k_1 + b_2 + k_2 + \cdots + b_{19} + k_{19} = 0$

∴ Terbukti $b_1 + k_1 + b_2 + k_2 + \cdots + b_{19} + k_{19} \neq 0$

5. Alternatif 1 :

$(a - b)^2 \geq 0$. Maka $a^2 + b^2 \geq 2ab$

Pertidaksamaan di atas dapat diperoleh pula dari pertidaksamaan AM-GM

$\frac{a^2+b^2}{2} \geq \sqrt{a^2b^2}$ sehingga $a^2 + b^2 \geq 2ab$ ··· (1)

Kesamaan terjadi bila a = b

Berdasarkan persamaan (1) didapat :

$a^2 + c^2 \geq 2ac$ ··· (2)

$b^2 + c^2 \geq 2bc$ ··· (3)

Jumlahkan persamaan (1), (2) dan (3)

$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$ sehingga $4a^2 + 4b^2 + 4c^2 \geq 4ab + 4ac + 4bc$ ················ (4)

Bilangan kuadrat bernilai ≥ 0 maka :

$a^2 + b^2 + c^2 \geq 0$ ··· (5)

Kesamaan terjadi hanya jika a = 0, b = 0 dan c = 0

Jumlahkan persamaan (4) + (5) sehingga $5a^2 + 5b^2 + 5c^2 \geq 4ab + 4ac + 4bc$

Kesamaan terjadi hanya jika a = b = c = 0

∴ Terbukti bahwa $5a^2 + 5b^2 + 5c^2 \geq 4ab + 4ac + 4bc$

Alternatif 2 :

$(2a - b)^2 \geq 0$

Tanda kesamaan terjadi jika 2a = b.

$4a^2 + b^2 \geq 4ab$ ····················· (6)

Dengan cara yang sama didapat

$4b^2 + c^2 \geq 4bc$ ····················· (7)

$4c^2 + a^2 \geq 4ac$ ····················· (8)

Tambahkan persamaan (6), (7) dan (8) didapat

$5a^2 + 5b^2 + 5c^2 \geq 4ab + 4ac + 4bc$

Tanda kesamaan terjadi jika 2a = b, 2b = c dan 2c = a yang terpenuhi hanya jika a = b = c = 0

∴ **Terbukti bahwa $5a^2 + 5b^2 + 5c^2 \geq 4ab + 4ac + 4bc$**

6. Segienam beraturan dibuat dari 6 buah segitiga sama sisi yang kongruen.

Luas lantai balairung = 6 · ½ · 6 · 6 · sin 60° = 108 sin 60°

Luas 1 buah ubin = ½ · 0,5 · 0,5 · sin 60°

Luas lantai balairung : Luas 1 buah ubin = 8 · 108 = 864

Maka untuk menutupi lantai balairung dibutuhkan 864 buah ubin

Jika ada n buah warna maka banyaknya pola yang dapat dibuat = $({}_nC_3) \cdot (3 - 1)! = \frac{n(n-1)(n-2)}{3}$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3} \geq 864$$

$n(n - 1)(n - 2) \geq 2592$

Untuk n = 14 maka $n(n - 1)(n - 2) = 2184 < 2592$

Untuk n = 15 maka $n(n - 1)(n - 2) = 2730 > 2592$

∴ **Banyaknya warna minimum yang diperlukan adalah 15 buah**

7. $k - n \mid k^m - n^{m-1}$

$k - n \mid k^m - n^m + n^m - n^{m-1}$

$k - n \mid k^m - n^m + n^{m-1}(n - 1)$

Untuk m ∈ bilangan asli maka k − n membagi $k^m - n^m$.

Karena FPB (k,n) = 1 maka FPB$(k - n, n^{m-1}) = 1$. Akibatnya k − n harus membagi n − 1.

Karena k − n membagi n − 1 maka $k - n \leq n - 1$

$k \leq 2n - 1$

∴ **Terbukti bahwa $k \leq 2n - 1$**

8. Misalkan sisi-sisi segitiga tersebut adalah a, b dan c dengan c adalah sisi miring, maka :

$b = \sqrt{c^2 - a^2}$ ································ (1)

$ab = 3(a + b + c)$ ···························· (2)

Karena a, b dan c adalah bilangan bulat maka sekurang-kurangnya salah satu di antara a atau b adalah kelipatan 3.

Tanpa mengurangi keumuman misalkan a = 3k dengan k ∈ bilangan asli (sama saja jika dimisalkan b = 3k) maka :

$$3k\sqrt{c^2 - 9k^2} = 3(3k + \sqrt{c^2 - 9k^2} + c)$$
$$k\sqrt{c^2 - 9k^2} = (3k + \sqrt{c^2 - 9k^2} + c)$$
$$(k-1)\sqrt{c^2 - 9k^2} = c + 3k$$
$$(k-1)^2(c+3k)(c-3k) = (c+3k)^2$$
$$(k-1)^2(c-3k) = (c+3k)$$
$$(k-1)^2(c-3k) = c - 3k + 6k$$
$$(c-3k)(k^2 - 2k) = 6k$$

Karena k ≠ 0 maka = 6 .... (3)

Karena c, k ∈ bilangan asli maka (k − 2) pasti membagi 6 dan karena c > 3k maka (k − 2) > 0

Nilai k yang memenuhi adalah 3; 4; 5; 8

$c = 3k + \frac{6}{k-2}$ .... (4)

Untuk k = 3 maka a = 9 sehingga c = 15 dan b = 12 .... (5)

Untuk k = 4 maka a = 12 sehingga c = 15 dan b = 9 .... (6)

Untuk k = 5 maka a = 15 sehingga c = 17 dan b = 8 .... (7)

Untuk k = 8 maka a = 24 sehingga c = 25 dan b = 7 .... (8)

Subtitusikan persamaan (5), (6), (7), (8) ke persamaan (2) yang ternyata semuanya memenuhi.

∴ **Panjang sisi-sisi segitiga yang memenuhi adalah :**

- **a = 9 b = 12 c = 15**
- **a = 12 b = 9 c = 15**
- **a = 8 b = 15 c = 17**
- **a = 15 b = 8 c = 17**
- **a = 7 b = 24 c = 25**
- **a = 24 b = 7 c = 25**

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2004

TINGKAT KABUPATEN/KOTA

BIDANG MATEMATIKA

WAKTU : 90 MENIT

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Kabupaten/Kota Tahun 2004

Bagian Pertama

Pilih satu jawaban yang benar. Dalam hal terdapat lebih dari satu jawaban yang benar, pilih jawaban yang paling baik.

1. Jika a dan b adalah bilangan real yang memenuhi $a + b = 3$ dan $a^2 + ab = 7$, maka a adalah
   A. 3/7 B. 5/7 C. 3/4 D. 7/5 E. 7/3
2. Bilangan 2004 memiliki faktor selain 1 dan 2004 sendiri sebanyak
   A. 3 B. 4 C. 6 D. 10 E. 12
3. Misalkan k bilangan bulat. Nilai $4^{k+1} \times 5^{k-1}$ sama dengan
   A. $\frac{4}{5} \times 20^k$ B. $\frac{4}{5} \times 20^{2k}$ C. $16 \times 20^{k-1}$ D. 20^{2k} E. 20^{k^2-1}
4. Untuk a dan b bilangan bulat dengan $a \neq 0$, notasi $a|b$ menyatakan "a membagi b".
   Pernyataan berikut yang *salah* adalah
   A. Jika $a|b$ dan $a|c$, maka maka $a|(bc)$
   B. Jika $a|c$ dan $b|c$, maka $(ab)\ |c$
   C. Jika $a|b$ dan $a|c$, maka $a|(b + c)$
   D. Untuk setiap bilangan bulat $a \neq 0$ berlaku $a|0$
   E. Jika $a|b$, maka $a|(bc)$, untuk setiap bilangan bulat c.
5. Di suatu hotel, rata-rata 96% kamar terpakai sepanjang sebulan liburan kenaikan kelas dan rata-rata 72% kamar terpakai sepanjang sebelas bulan lainnya. Maka rata-rata pemakaian kamar sepanjang tahun di hotel tersebut adalah
   A. 70% B. 74% C. 75% D. 80% E. 84%
6. Dalam ketidaksamaan berikut, besar sudut dinyatakan dalam radian. Ketidaksamaan yang benar adalah
   A. sin 1 < sin 2 < sin 3 C. sin 1 < sin 3 < sin 2 E. sin 3 < sin 1 < sin 2
   B. sin 3 < sin 2 < sin 1 D. sin 2 < sin 1 < sin 3
7. Sebuah kotak berisi 6 bola merah dan 6 bola putih. Secara acak diambil dua bola sekaligus. Peluang untuk mendapatkan dua bola berwarna sama adalah
   A. $\frac{5}{12}$ B. $\frac{5}{11}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{5}{9}$ E. $\frac{5}{7}$
8. Segitiga dengan panjang sisi 6 dan 8 memiliki luas terbesar jika sisi ketiganya memiliki panjang
   A. 6 B. 8 C. 10 D. 12 E. 15
9. Pada sebuah segi6 beraturan, rasio panjang antara diagonal terpendek terhadap diagonal terpanjang adalah
   A. 1 : 3 B. 1 : 2 C. 1 : 3 D. 2 : 3 E. 3 : 2
10. Nomor polisi mobil-mobil di suatu negara selalu terdiri dari 4 angka. Jika jumlah keempat angka pada setiap nomor juga harus genap, mobil yang bisa terdaftar di negara itu paling banyak ada
    A. 600 B. 1800 C. 2000 D. 4500 E. 5000

Bagian Kedua

Isikan hanya jawaban saja pada tempat yang disediakan

11. Jika $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$ dan $= \frac{z}{y} = \frac{4}{5}$ maka $\frac{x}{z} = \cdots$
12. Jika 2004 dibagi ke dalam tiga bagian dengan perbandingan 2 : 3 : 5, maka bagian terkecil adalah ·····
13. Untuk dua bilangan bulat a dan b, penulisan a * b menyatakan sisa tak negatif ab jika dibagi 5. Nilai (−3) * 4 = ····
14. Jika luas segitiga ABC sama dengan kelilingnya, maka jari-jari lingkaran dalam segitiga ABC adalah ····
15. Agar bilangan $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n$ sedekat mungkin kepada 2004, haruslah n = ····
16. Jika log p + log q = log (p + q), maka p dinyatakan dalam q adalah p = ····
17. Luas sebuah segitiga siku-siku adalah 5. Panjang sisi miring segitiga ini adalah 5. Maka keliling segitiga tersebut adalah ····
18. Jika x dan y dua bilangan asli dan x + y + xy = 34, maka nilai x + y = ·····
19. Sepuluh tim mengikuti turnamen sepakbola. Setiap tim bertemu satu kali dengan setiap tim lainnya. Pemenang setiap pertandingan memperoleh nilai 3, sedangkan yang kalah memperoleh nilai 0. Untuk pertandingan yang berakhir seri, kedua tim memperoleh nilai masing-masing 1. Di akhir turnamen, jumlah nilai seluruh tim adalah 124. Banyaknya pertandingan yang berakhir seri adalah ·····
20. Delegasi Indonesia ke suatu pertemuan pemuda internasional terdiri dari 5 orang. Ada 7 orang pria dan 5 orang wanita yang mencalonkan diri untuk menjadi anggota delegasi. Jika dipersyaratkan bahwa paling sedikit seorang anggota itu harus wanita, banyaknya cara memilih anggota delegasi adalah ····

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2004

TINGKAT KABUPATEN/KOTA

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Kabupaten/Kota Tahun 2004

BAGIAN PERTAMA

1. (Jawaban : E)
   $a + b = 3$ dan $a^2 + ab = 7$, maka $a(a + b) = 7$ sehingga $a(3) = 7$
   $\therefore$ **$a = \frac{7}{3}$**
2. (Jawaban : D)
   $2004 = 2^2 \cdot 501 = 2^2 \cdot 3 \cdot 167$ dan 167 adalah bilangan prima.
   Maka banyaknya faktor positif dari 2004 termasuk 1 dan 2004 = $(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 12$
   Banyaknya faktor 2004 selain 1 dan 2004 adalah = $12 - 2 = 10$
   Faktor dari 2004 selain 1 dan 2004 adalah : 2, 3, 4, 6, 12, 167, 334, 501, 668, 1002. Banyaknya faktor ada 10
   $\therefore$ Banyaknya faktor ada **10**
3. (Jawaban : A atau C)
   $4^{k+1} \times 5^{k-1} = 4 \times 4^k \times \frac{5^k}{5} = \frac{4}{5} \times 20^k$ atau
   $4^{k-1} \times 5^{k-1} = 16 \times 4^{k-1} \times 5^{k-1} = 16 \times 20^{k-1}$
   $\therefore 4^{k+1} \times 5^{k-1}$ sama dengan $\frac{4}{5} \times 20^k$ atau $16 \times 20^{k-1}$
   Catatan : Jawaban yang dikirimkan dari panitia pusat menyatakan hanya A saja yang benar. Namun dalam hitungan ternyata C juga bernilai sama.
4. (Jawaban : B)
   A benar karena jika $a|b$ maka $a|(bc)$
   B salah karena yang benar adalah jika $a|c$ dan $b|c$, maka $(ab)\ |c^2$
   C benar - D benar
   E benar sesuai dengan A
   $\therefore$ Pernyataan yang salah adalah **B**
5. (Jawaban : B)
   Rata-rata % pemakaian kamar setahun = $\frac{1 \cdot 96\% + 11 \cdot 72\%}{1 + 11} = 74\%$
   $\therefore$ Rata-rata pemakaian kamar sepanjang tahun di hotel tersebut adalah **74 %**
6. (Jawaban : E)
   $1 \text{ rad} \approx 57{,}3^\circ$ sehingga $2 \text{ rad} \approx 114{,}6^\circ$ dan $3 \text{ rad} \approx 171{,}9^\circ$
   $\sin 114{,}6^\circ = \sin (180 - 114{,}6)^\circ = \sin 65{,}4^\circ$
   $\sin 171{,}9^\circ = \sin (180 - 171{,}9)^\circ = \sin 8{,}1^\circ$
   Untuk $0 \le x \le 90^\circ$ berlaku bahwa $\sin x_1 < \sin x_2$ jika $x_1 < x_2$

∴ Ketidaksamaan yang benar adalah **sin 3 < sin 1 < sin 2**

Catatan : Jawaban yang dikirimkan dari panitia pusat menyatakan bahwa jawaban yang benar adalah B, namun bisa dibuktikan bahwa seharusnya jawaban yang benar adalah E. Jawaban soal ini juga bisa dibuktikan dengan hitungan dengan alat hitung berupa kalkulator atau komputer.

7. (Jawaban : B)

2 bola berwarna sama bisa didapat dari keduanya berwarna merah atau keduanya berwarna putih.

$$P(A) = \frac{{}_6C_2 \cdot {}_6C_0}{{}_{12}C_2} + \frac{{}_6C_0 \cdot {}_6C_2}{{}_{12}C_2} = \frac{30}{66} = \frac{5}{11}$$

∴ Peluang untuk mendapatkan dua bola berwarna sama adalah $\frac{5}{11}$

8. (Jawaban : C)

Misal segitiga tersebut adalah segitiga ABC.

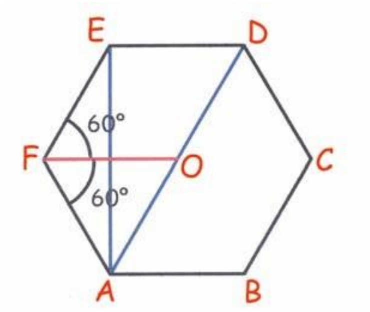
Luas segitiga = ½ ab sin C

Karena a dan b bernilai konstan, maka luas segitiga akan maksimum jika sin C bernilai maksimum. Maksimum sin C = 1 untuk C = 90° yang berarti segitiga ABC siku-siku di C.

$c = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$

∴ Panjang sisi ketiga agar segitiga tersebut memiliki luas terbesar adalah **10**.

9. (Jawaban : E)



Misal sisi segi-6 beraturan tersebut adalah a dan O adalah pusat segi-6 beraturan.

Karena bangun adalah segi-6 beraturan maka berlaku :

OA = OB = OC = OD = OE = OF = AB = BC = CD = DE = EF = AF = a

∠AFO = ∠OFE = 60°

$(AE)^2 = (AF)^2 + (FE)^2 - 2(AF)(FE)\cos 120°$

$(AE)^2 = a^2 + a^2 - 2 \cdot a \cdot a \cdot (-½)$

$(AE) = a\sqrt{3}$

(AD) = (AO) + (OD) = a + a = 2a

(AE) : (AD) = $\sqrt{3}$: 2

∴ Rasio panjang diagonal terpendek terhadap diagonal terpanjang adalah **$\sqrt{3}$: 2**

10. (Jawaban : D)

Untuk plat angka pertama tidak boleh 0. Agar jumlah keempat angka tersebut genap, maka keempat angka tersebut harus genap atau keempatnya harus ganjil atau 2 genap dan 2 ganjil.

- Jika keempat angka tersebut genap maka banyaknya plat = 4 x 5 x 5 x 5 = 500

- Jika keempat angka tersebut ganjil maka banyaknya plat = 5 x 5 x 5 x 5 = 625
- Jika keempat angak tersebut terdiri dari 2 genap dan 2 ganjil
  Misal angka genap = p dan angka ganjil = j
  Banyaknya susunan angka genap dan ganjil ada $\frac{4!}{2!\cdot 2!}$ = 6, yaitu : ppjj, pjpj, pjjp, jjpp, jpjp, jppj.
  Untuk susunan ppjj, pjpj, pjjp, banyaknya plat untuk masing-masing susunan = 4x5x5x5 = 500. Untuk susunan jjpp, jpjp, jppj, banyaknya plat untuk masing-masing susunan = 5x5x5x5 = 625.

∴ Mobil yang bisa terdaftar di negara itu paling banyak = 500 + 625 + 3(500) + 3(625) = **4500.**

BAGIAN KEDUA

11. $\frac{x}{z} = \frac{x}{y} : \frac{z}{y} = \frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{5}{6}$
    ∴ $= \frac{x}{z} = \frac{5}{6}$
12. Bagian yang terkecil = $\frac{2}{2+3+5} \cdot 2004 = \frac{4008}{10}$
    ∴ Bagian yang terkecil adalah **400,8**
13. (−3) · 4 = −12 = (−3) · 5 + 3
    Maka : −12 dibagi 5 akan bersisa 3
    ∴ (−3) * 4 = **3**
14. Misal jari-jari lingkaran dalam sama dengan r dan ketiga sisinya adalah a, b dan c, maka :
    Luas segitiga = ½ r (a + b + c)
    Luas segitiga = ½ r · Keliling segitiga
    Karena Luas segitiga sama dengan Keliling segitiga maka r = 2
    ∴ Jari-jari lingkaran dalam segitiga ABC adalah **2**
15. $2^o + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = \frac{2^o(2^{n+1}-1)}{2-1} = 2^{n+1} - 1$
    Diinginkan $2^{n+1} - 1$ sedekat mungkin ke 2004 sedangkan 2^{10} = 1024 dan 2^{11} = 2048, maka n = 10
    ∴ n = **10**
16. log p + log q = log (p + q)
    log (pq) = log (p + q)
    pq = p + q
    p(q − 1) = q
    ∴ p = $\frac{q}{q-1}$
17. Misal sisi siku-siku segitiga tersebut adalah a dan b.
    Luas segitiga = ½ ab = 5
    ab = 10 ············· (1) dan $a^2 + b^2 = 5^2 = 25$ ············· (2)
    $(a + b)^2 - 2ab = 25$
    $(a + b)^2 - 2 \cdot 10 = 25$ sehingga $a + b = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

Keliling segitiga = 5 + a + b

$\therefore$ Keliling setiga tersebut = **5 + 3**

18. x + y + xy = 34

 (x + 1) (y + 1) = 34 + 1 = 35 = 5 · 7

 Karena x dan y bilangan asli maka persamaan hanya dipenuhi jika x + 1 = 5 dan y + 1 = 7 atau x + 1 = 7 dan y + 1 = 5. Akibatnya x = 4 dan y = 6 atau x = 6 dan y = 4

 x + y = 4 + 6 = 6 + 4 = 10

 $\therefore$ **x + y =** 10

19. Jika dalam pertandingan ada salah satu yang menang maka nilai total kedua tim = 3.

 Jika dalam pertandingan berakhir seri maka nilai total kedua tim = 1 + 1 = 2 atau ada 1 nilai yang hilang per pertandingan yang berakhir seri.

 Banyaknya pertandingan keseluruhan = ${}_{10}C_2$ = 45 pertandingan.

 Jumlah nilai untuk seluruh tim maksimum terjadi jika tidak ada pertandingan yang berakhir seri, yaitu 3 x 45 = 135.

 Karena di akhir turnamen, jumlah nilai seluruh tim adalah 124, maka banyaknya pertandingan yang berakhir seri = 135 − 124 = 11

 $\therefore$ Banyaknya pertandingan yang berakhir seri = **11**

20. Susunan delegasi yang mungkin adalah 4 pria dan 1 wanita atau 3 pria dan 2 wanita atau 2 pria dan 3 wanita atau 1 pria dan 4 wanita atau 5 wanita.

 Banyaknya cara memilih anggota delegasi = ${}_7C_4 \cdot {}_5C_1 + {}_7C_3 \cdot {}_5C_2 + {}_7C_2 \cdot {}_5C_3 + {}_7C_1 \cdot {}_5C_4 + {}_7C_0 \cdot {}_5C_5$ = 35 · 5 + 35 · 10 + 21 · 10 + 7 · 5 + 1 · 1 = 175 + 350 + 210 + 35 + 1 = 771 cara.

 $\therefore$ Banyaknya cara memilih anggota delegasi ada **771.**

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2004

TINGKAT PROVINSI

BIDANG MATEMATIKA

Bagian Pertama

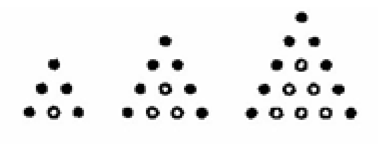
WAKTU : 90 MENIT

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2004

BAGIAN PERTAMA

1. Misalkan x dan y adalah bilangan real tak nol. Jika $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 10$ dan x + y = 40, berapakah xy ?
2. Sebotol sirup bisa digunakan untuk membuat 60 gelas minuman jika dilarutkan dalam air dengan perbandingan 1 bagian sirup untuk 4 bagian air. Berapa gelas minuman yang diperoleh dari sebotol sirup jika perbandingan larutan adalah 1 bagian sirup untuk 5 bagian air ?
3. Penduduk Jawa Tengah adalah 25 % dari penduduk pulau Jawa dan 15 % dari penduduk Indonesia. Berapa persen penduduk Indonesia yang tinggal di luar pulau Jawa ?
4. Ketika menghitung volume sebuah tabung, Dina melakukan kesalahan. Ia memasukkan diameter alas ke dalam rumus volume tabung, padahal seharusnya jari-jari alas yang dimasukkan. Berapakah rasio hasil perhitungan Dinas terhadap hasil yang seharusnya ?
5. Tiga lingkaran melalui titik pusat koordinat (0, 0). Pusat lingkaran pertama terletak di kuadran I, pusat lingkaran kedua berada di kuadran II dan pusat lingkaran ketiga berada pada kuadran III. Jika P adalah sebuah titik yang berada di dalam ketiga lingkaran tersebut, di kuadran manakah titik ini berada ?
6. Diberikan berturut-turut (dari kiri ke kanan) gambar-gambar pertama, kedua dan ketiga dari suatu barisan gambar. Berapakah banyaknya bulatan hitam pada gambar ke-n ?



7. Diberikan segitiga ABC dengan perbandingan panjang sisi AC : CB = 3 : 4. Garis bagi sudut luar C memotong perpanjangan BA di P (titik A terletak di antara titik-titik P dan B). Tentukan perbandingan panjang PA : AB.
8. Berapakah banyaknya barisan bilangan bulat tak negatif (x, y, z) yang memenuhi persamaan x + y + z = 99 ?
9. Tentukan himpunan semua bilangan asli n sehingga $n(n - 1)(2n - 1)$ habis dibagi 6.
10. Tentukan semua bilangan real x yang memenuhi $x^2 < |2x - 8|$.
11. Dari antara 6 buah kartu bernomor 1 sampai 6 diambil dua kartu secara acak. Berapakah peluang terambilnya dua kartu yang jumlah nomornya adalah 6 ?
12. Pada sebuah trapesium dengan tinggi 4, kedua diagonalnya saling tegak lurus. Jika salah satu dari diagonal tersebut panjangnya 5, berapakah luas trapesium tersebut ?
13. Tentukan nilai dari $\left(1 - \frac{2}{3}\right)\left(1 - \frac{2}{5}\right)\left(1 - \frac{2}{7}\right) \cdots \left(1 - \frac{2}{2005}\right)$.
14. Santi dan Tini berlari sepanjang sebuah lintasan yang berbentuk lingkaran. Keduanya mulai berlari pada saat yang sama dari titik P, tetapi mengambil arah berlawanan. Santi berlari 1½ kali lebih cepat daripada

Tini. Jika PQ adalah garis tengah lingkaran lintasan dan keduanya berpapasan untuk pertama kalinya di titik R, berapa derajatkah besar ∠RPQ ?

15. Pada sisi-sisi SU, TS dan UT dari $\triangle$STU dipilih titik-titik P, Q dan R berturut-turut sehingga SP = $\frac{1}{4}$ SU, TQ = $\frac{1}{2}$ TS dan UR = $\frac{1}{3}$ UT. Jika luas segitiga STU adalah 1, berapakah luas $\triangle$PQR ?
16. Dua bilangan real x, y memenuhi $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$. Berapakah nilai x + y ?
17. Berapakah banyak minimal titik yang harus diambil dari sebuah persegi dengan panjang sisi 2, agar dapat dijamin senantiasa terambil dua titik yang jarak antara keduanya tidak lebih dari $\frac{1}{2}\sqrt{2}$?
18. Misalkan f sebuah fungsi yang memenuhi f(x) f(y) − f(xy) = x + y, untuk setiap bilangan bulat x dan y. Berapakah nilai f(2004) ?
19. Notasi fpb(a, b) menyatakan *faktor persekutuan terbesar* dari bilangan bulat a dan b. Tiga bilangan asli $a_1 < a_2 < a_3$ memenuhi fpb(a_1, a_2, a_3) = 1, tetapi fpb(a_i, a_j) > 1 jika i ≠ j, i, j = 1, 2, 3. Tentukan (a_1, a_2, a_3) agar $a_1 + a_2 + a_3$ minimal.
20. Didefinisikan a o b = a + b + ab, untuk semua bilangan bulat a, b. Kita katakan bahwa bilangan bulat a adalah *faktor* dari bilangan bulat c bilamana terdapat bilangan bulat b yang memenuhi a o b = c. Tentukan semua faktor positif dari 67.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2004

TINGKAT PROVINSI

BIDANG MATEMATIKA

Bagian Kedua

WAKTU : 120 MENIT

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2004

BAGIAN KEDUA

1. Tentukan semua (x,y,z), dengan x, y, z bilangan-bilangan real, yang memenuhi sekaligus ketiga persamaan berikut :

$$x^2 + 4 = y^3 + 4x - z^3$$
$$y^2 + 4 = z^3 + 4y - x^3$$
$$z^2 + 4 = x^3 + 4z - y^3$$

2. Pada segitiga ABC diberikan titik-titik D, E, dan F yang terletak berturut-turut pada sisi BC, CA dan AB sehingga garis-garis AD, BE dan CF berpotongan di titik O. Buktikan bahwa

$$\frac{AO}{AD} + \frac{BO}{BE} + \frac{CO}{CF} = 2$$

3. Beni, Coki dan Doni tingggal serumah dan belajar di sekolah yang sama. Setiap pagi ketiganya berangkat pada saat yang sama. Untuk sampai ke sekolah Beni memerlukan waktu 2 menit, Coki memerlukan waktu 4 menit, sedangkan Doni memerlukan waktu 8 menit. Selain itu tersedia sebuah sepeda yang hanya dapat dinaiki satu orang. Dengan sepeda, setiap orang memerlukan waktu hanya 1 menit.
   Tunjukkan bahwa adalah mungkin bagi ketiganya untuk sampai ke sekolah dalam waktu tidak lebih dari $2\frac{3}{4}$ menit.
4. Buktikan bahwa tidak ada bilangan asli m sehingga terdapat bilangan-bilangan bulat k, e, dengan e ≥ 2, yang memenuhi $m(m^2 + 1) = k^e$.
5. *Titik letis* pada bidang adalah titik yang mempunyai koordinat berupa pasangan bilangan bulat. Misalkan P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 adalah lima titik letis berbeda pada bidang.
   Buktikan bahwa terdapat sepasang titik (P_i, P_j), i ≠ j, demikian, sehingga ruas garis P_iP_j memuat sebuah titik letis selain P_i dan P_j.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2004

TINGKAT PROVINSI

SOLUSI SOAL

Bagian Pertama

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika Tingkat Provinsi Tahun 2004

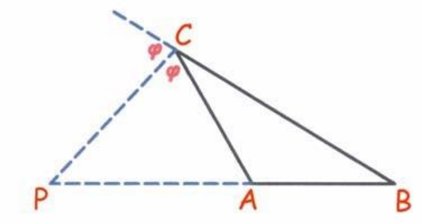
BAGIAN PERTAMA

1. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=10$. Maka $\frac{x+y}{xy}=10$. Karena x + y = 40 maka $\frac{40}{xy}=10$
   ∴ xy = **4**
2. Keadaan I :
   Misalkan dalam 1 gelas terdapat a bagian sirup maka banyaknya bagian air adalah 4a bagian. Karena dalam satu gelas terdapat a bagian sirup maka dalam satu botol sirup terdapat 60a bagian sirup. Sedangkan dalam 1 gelas terdapat 5a bagian.
   Keadaan II :
   Jika dalam gelas terdapat b bagian sirup, maka banyaknya bagian air adalah 5b bagian. Karena dalam satu gelas terdapat b bagian sirup maka dalam x gelas terdapat bx bagian sirup.
   Sedangkan dalam 1 gelas terdapat 6b bagian.
   Dari keadaan I dan keadaan II didapat 5a = 6b.
   Misalkan dari campuran tersebut dapat dibuat x gelas, maka :
   bx = 60a = 12 · (6b) sehingga x = 72
   ∴ Banyaknya gelas yang diperoleh adalah **72** gelas
3. Misalkan penduduk Jawa tengah = JT
   Penduduk Jawa = J
   Penduduk Indonesia = I
   JT = 25% J
   JT = 15% I
   25% J = 15% I
   J = 60% I
   Karena penduduk Jawa = 60% penduduk Indonesia maka
   ∴ Penduduk Indonesia yang tinggal di luar pulau Jawa = **40%**
4. Volume seharusnya = $\pi r^2 t$
   Volume perhitungan Dina = $\pi D^2 t = 4\pi r^2 t$
   Rasio perhitungan Dinas terhadap hasil seharusnya = $\frac{4\pi r^2 t}{\pi r^2 t}=4$
   ∴ Rasio perhitungan Dina terhadap hasil seharusnya = **4**
5.
   - Karena lingkaran pertama berpusat di kuadran I dan melalui titik (0,0) maka semua titik yang terletak di dalam lingkaran pertama tidak akan mungkin terletak di kuadran III.
   - Karena lingkaran pertama berpusat di kuadran II dan melalui titik (0,0) maka semua titik yang terletak di dalam lingkaran pertama tidak akan mungkin terletak di kuadran IV.

- Karena lingkaran pertama berpusat di kuadran III dan melalui titik (0,0) maka semua titik yang terletak di dalam lingkaran pertama tidak akan mungkin terletak di kuadran I.

∴ Titik P hanya mungkin terletak di **kuadran II.**

6. Jika panjang sisi segitiga adalah k titik maka banyaknya bulatan hitam = 2k − 1.
   Pada gambar ke-n panjang sisi segitiga = n + 2 titik.
   Banyaknya bulatan hitam = 2(n + 2) − 1 = 2n + 3
   ∴ Banyaknya bulatan hitam pada gambar ke-n adalah **2n + 3**
7. Karena CP adalah garis bagi maka berlaku AC : CB = PA : PB. Maka $PA = \frac{3}{4}PB$



PB = PA + AB
$\frac{4}{3}$ PA = PA + PB.
PA = 3 AB
∴ PA : AB = **3 : 1**

8. Alternatif 1 :
   - Untuk x = 0, maka y + z = 99.
     Banyaknya pasangan (y,z) yang memenuhi ada 100 yaitu (0,99), (1,98), (2,97), ⋯, (99,0)
   - Untuk x = 1, maka y + z = 98.
     Banyaknya pasangan (y,z) yang memenuhi ada 99 yaitu (0,98), (1,97), (2,96), ⋯, (98,0)
   - Untuk x = 2, maka y + z = 97.
     Banyaknya pasangan (y,z) yang memenuhi ada 98 yaitu (0,97), (1,96), (2,95), ⋯, (97,0)
   - Untuk x = 3, maka y + z = 96.
     Banyaknya pasangan (y,z) yang memenuhi ada 97 yaitu (0,96), (1,95), (2,94), ⋯, (96,0)

     ⋮
   - Untuk x = 99, maka y + z = 0
     Banyaknya pasangan (y,z) yang memenuhi ada 1 yaitu (0,0)

   Banyaknya barisan bilangan bulat (x, y, z) yang memenuhi = 100 + 99 + 98+ ⋯ + 1 = $\frac{100}{2}(100 + 1)$
   ∴ Banyaknya barisan bilangan bulat (x,y,z) yang memenuhi persamaan x + y + z = 99 ada **5050.**

   Alternatif 2 :
   Misalkan $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = r$ dengan x_i bulat ≥ 0 untuk i = 1, 2, ⋯, n. Maka banyaknya pasangan (x_1, x_2, ⋯, x_n) yang memenuhi adalah $\frac{(r+(n-1))!}{r!(n-1)!} = {}_{r+n-1}C_{n-1}$

Diketahui x + y + z = 99 dengan x, y, z ≥ 0 dan x, y, z bulat.

Banyaknya tripel bilangan bulat tak negatif (x, y, z) yang memenuhi = $\frac{101!}{99!\cdot 2!}$ = 5050.

∴ Banyaknya barisan bilangan bulat (x,y,z) yang memenuhi persamaan x + y + z = 99 ada **5050.**

9. $n(n-1)(2n-1) = n(n-1)(2n+2-3)$
$= 2n(n-1)(n+1) - 3n(n-1)$

(n − 1), n, (n + 1) adalah 3 bilangan bulat berurutan, maka (n − 1)n(n + 1) habis dibagi 3! = 6.

n(n − 1) juga habis dibagi 2! = 2.

Maka 3n(n − 1) pasti habis dibagi 6.

Akibatnya berapa pun nilai n bilangan asli akan memenuhi n(n − 1)(2n − 1) habis dibagi 6.

∴ Himpunan semua n asli sehingga n(n − 1)(2n − 1) habis dibagi 6 adalah **{n|n ∈ bilangan asli}**

10.
- Jika x ≤ 4 maka |2x − 8| = 8 − 2x
  Pertidaksamaan menjadi $x^2 < 8 - 2x$
  $(x + 4)(x - 2) < 0$
  $-4 < x < 2$
  Ketaksamaan di atas memenuhi syarat awal x ≤ 4.
- Jika x ≥ 4 maka |2x − 8| = 2x − 8
  Pertidaksamaan menjadi $x^2 < 2x - 8$
  $x^2 - 2x + 8 < 0$
  $(x - 1)^2 + 7 < 0$
  Ruas kiri adalah definit positif sehingga tidak ada penyelesaian x yang memenuhi.

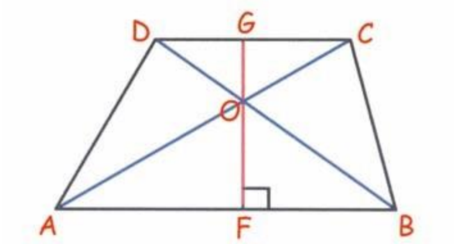
∴ Penyelesaian x yang memenuhi pertidaksamaan $x^2 < |2x - 8|$ adalah **−4 < x < 2**

11. Banyaknya pasangan kartu yang jumlahnya 6 ada 2 yaitu (1,5) dan (2,4)

Peluang terambilnya 2 kartu yang jumlahnya nomornya 6 adalah $\frac{2}{{}_6C_2}$

∴ Peluang terambilnya 2 kartu yang jumlah nomornya 6 adalah $\frac{2}{15}$

12. Alternatif 1 :



Misal ∠ACD = α maka ∠GOD = ∠CAB = ∠BOF = α

sin α = $\frac{CE}{CA} = \frac{FG}{CA} = \frac{4}{5}$ ······· (1) sehingga cos α = $\frac{3}{5}$ ······· (2) dan tan α = $\frac{4}{3}$ ······· (3)

Misal CO = a dan GO = b maka OA = 5 − a dan OF = 4 − b sebab FG adalah tinggi trapesium.

GC = CO cos α = $\frac{3}{5}$ a

DG = GO tan α = $\frac{4}{3}$ b

DC = DG + GC = $\frac{3}{5}a + \frac{4}{3}b$ ………………… (4)

AF = OA cos α = (5 – a) $\frac{3}{5} = 3 - \frac{3}{5}$ a

FB = OF tan α = (4 – b) $\frac{4}{3} = \frac{16}{3} = \frac{4}{3}$ b

AB = AF + FB = 3 $-\frac{3}{5}a + \frac{16}{3} - \frac{4}{3}b = \frac{25}{3} - \frac{3}{5}a - \frac{4}{3}b$

Luas trapesium = $= \frac{1}{2}(DC + AB)FG$

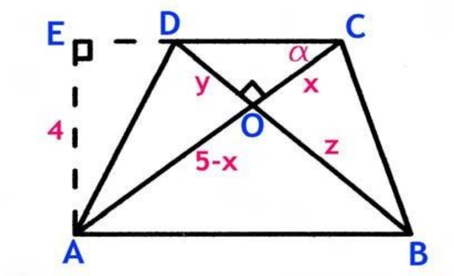
Dari persamaan (4) dan (5) didapat luas trapesium $= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{25}{3}\right) \cdot 4 = \frac{50}{3}$

∴ Luas trapesium = $\frac{50}{3}$

Alternatif 2 :

Misalkan OC = x maka OA = 5 − x

Misalkan juga OD = y dan OB = z.



Jelas bahwa △OAB sebangun dengan △OCD sehingga

$\frac{5-x}{x} = \frac{z}{y}$ maka $\frac{y}{x} = \frac{y+z}{5}$ ………………… (5)

Misalkan juga ∠ACD = α maka tg α = 4/3

Karena AC tegak lurus BD maka tg α = y/x = 4/3 ……………………… (6)

Subtitusikan persamaan (6) ke persamaan (5)

Maka $y + z = \frac{20}{3}$

Karena AC tegak lurus BD maka luas trapesium = ½ · AC · BD

Luas trapesium = ½ · 5 · (y + z)

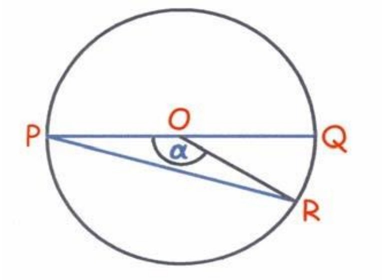
Luas trapesium = $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{20}{3}$

∴ Luas trapesium = $\frac{50}{3}$

13. $\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{2}{5}\right)\left(1-\frac{2}{7}\right)\ldots\left(1-\frac{2}{2005}\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{7}\cdots\frac{2003}{2005}$

∴ $\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{2}{5}\right)\left(1-\frac{2}{7}\right)\cdots\left(1-\frac{2}{2005}\right) = \frac{1}{2005}$

14. Karena Tini lebih lambat dari Santi maka panjang busur yang ditempuhnya akan lebih pendek dari yang ditempuh Santi.



Misal panjang busur yang ditempuh Tini = a maka panjang busur yang ditempuh Santi = $\frac{3}{2}$ a.

a + $\frac{3}{2}$ a = K dengan K adalah keliling lingkaran.

a = $\frac{2}{5}$ K

$\frac{\alpha}{360^o} = \frac{\alpha}{K} = \frac{2}{5}$

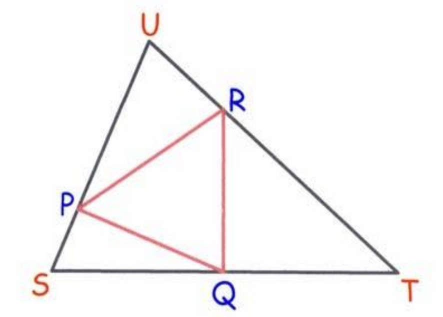
α = 144°

Karena O adalah pusat lingkaran maka ΔOPR adalah segitiga sama kaki.

∠RPO = ∠RPQ = $\frac{1}{2}$ (180° − 144°)

∴ ∠RPQ = **18°**

15.



Misal panjang sisi TU = a, SU = b dan ST = c serta ∠UST = α, ∠STU = β dan ∠TUS = γ, maka :

Luas ΔSTU = $\frac{1}{2}$ ab sin γ = $\frac{1}{2}$ ac sin β = $\frac{1}{2}$ bc sin α = 1

Luas ΔSPQ = $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}b\right)\left(\frac{1}{2}c\right)$ sin α = $\frac{1}{8}$ Luas ΔSTU = $\frac{1}{8}$

Luas ΔTQR = $\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}a\right)\left(\frac{1}{2}c\right)$ sin β = $\frac{1}{3}$ Luas ΔSTU = $\frac{1}{3}$

Luas ΔUPR = $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}a\right)\left(\frac{3}{4}b\right)$ sin γ = $\frac{1}{4}$ Luas ΔSTU = $\frac{1}{4}$

Luas ΔPQR = Luas ΔSTU − Luas ΔSPQ − Luas ΔTQR − Luas ΔUPR = 1 $-\frac{1}{8}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

∴ Luas ΔPQR = $\frac{7}{24}$

16. $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=1$

$x+\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{y+\sqrt{y^2+1}}$ ………… (1)

$\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)\left(y-\sqrt{y^2+1}\right)=\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\left(y-\sqrt{y^2+1}\right)$

$(-1)(-1)=\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\left(y-\sqrt{y^2+1}\right)$

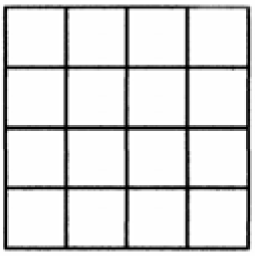
$x-\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{y-\sqrt{y^2+1}}$ ………….. (2)

Jumlahkan persamaan (1) dan (2) sehingga $2x=\frac{1}{y+\sqrt{y^2+1}}+\frac{1}{y-\sqrt{y^2+1}}=\frac{2y}{(-1)}$

$-x=y$

$\therefore x+y=0$

17. Pada sebuah persegi dengan panjang sisi = a, jarak terjauh dua titik yang terletak pada persegi adalah a$\sqrt{2}$ jika kedua titik merupakan ujung-ujung diagonal bidang persegi tersebut.



Bagi persegi dengan panjang sisi 2 tersebut menjadi 16 persegi dengan panjang sisi masingmasing = $\frac{1}{2}$ sehingga jarak terjauh 2 titik yang terletak pada masing-masing persegi adalah $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Jika terdapat 16 titik, maka titik-titik tersebut masih dapat didistribusikan masing-masing 1 titik yang terletak di dalam persegi kecil sehingga masih belum dapat dijamin senantiasa terambil dua titik yang jarak antara keduanya $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. Jika terdapat 17 titik maka sesuai *Pigeon Hole Principle* maka sekurang-kurangnya ada satu persegi kecil berisi sekurang-kurangnya 2 titik sehingga dapat dijamin senantiasa terambil dua titik yang jarak antara keduanya $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.

$\therefore$ Jumlah minimal titik yang harus diambil dari dalam sebuah persegi dengan panjang sisi 2 agar dapat dijamin senantiasa terambil 2 titik yang jarak antara keduanya $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ adalah **17**.

18. f(x)f(y) − f(xy) = x + y
   - Jika x = 0 dan y = 0, maka f(0)f(0) − f(0) = 0
     f(0) (f(0) − 1) = 0. Maka f(0) = 0 atau f(0) = 1
   - Jika x = 1 dan y = 0, maka f(1)f(0) − f(0) = 1
     Jika f(0) = 0, maka 0 = 1 yang berarti tidak mungkin f(0) = 0 maka f(0) = 1
     Untuk f(0) = 1 maka f(1) − 1 = 1 sehingga f(1) = 2
   - Jika x = 2004 dan y = 1 maka f(2004)f(1) − f(2004) = 2005
     2f(2004) − f(2004) = 2005 sehingga f(2004) = 2005

- Jika $x = 2004$ dan $y = 0$ maka $f(2004)f(0) - f(0) = 2004$
  $f(2004) - 1 = 2004$ sehingga $f(2004) = 2005$

$\therefore$ $f(2004) = 2005$

19. $fpb(a_1, a_2, a_3) = 1$.

    Karena $fpb(a_i, a_j) > 1$ untuk $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$ maka a_i dan a_j untuk $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$ tidak saling prima relatif. Misalkan $fpb(a_1, a_2) = q$, $fpb(a_1, a_3) = p$ dan $fpb(a_1, a_2) = r$ dengan $p, q, r > 1$. Maka a_i dengan $i = 1, 2, 3$ akan berbentuk :

    $a_1 = pq$
    $a_2 = qr$
    $a_3 = pr$

    p dan q, q dan r, p dan r masing-masing saling prima relatif.

    3 bilangan terkecil (p, q, r) yang memenuhi adalah (2, 3, 5) sehingga $a_1 = 2 \cdot 3 = 6$, $a_2 = 2 \cdot 5 = 10$ dan $a_3 = 3 \cdot 5 = 15$.

    $\therefore$ Agar $a_1 + a_2 + a_3$ minimal maka $(a_1, a_2, a_3) =$ **(6, 10, 15)**

20. a o b = a + b + ab

    c = a + b + ab

    67 = a + b + ab

    67 = (a + 1) (b + 1) − 1

    (a + 1) (b + 1) = 68

    Faktor yang sebenarnya dari 68 adalah 1, 2, 4, 17, 34 dan 68

    Jika a + 1 = 1 maka a = 0 Jika a + 1 = 2 maka a = 1 Jika a + 1 = 4 maka a = 3

    Jika a + 1 = 17 maka a = 16 Jika a + 1 = 34 maka a = 33 Jika a + 1 = 68 maka a = 67

    $\therefore$ *faktor* positif dari 67 adalah **1, 3, 16, 33 dan 67**

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2004

TINGKAT PROVINSI

SOLUSI SOAL

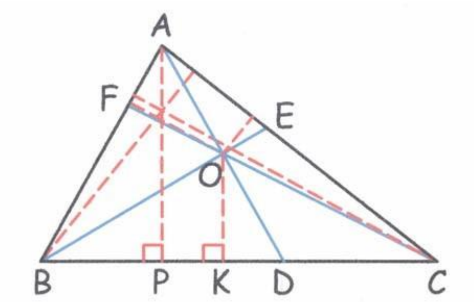
Bagian Kedua

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2004

BAGIAN KEDUA

1. $x^2 + 4 = y^3 + 4x - z^3$ ⋯⋯⋯ (1)
   $y^2 + 4 = z^3 + 4y - x^3$ ⋯⋯⋯ (2)
   $z^2 + 4 = x^3 + 4z - y^3$ ⋯⋯⋯ (3)
   Jumlahkan (1) + (2) + (3) sehingga $x^2 + 4 + y^2 + 4 + z^2 + 4 = 4x + 4y + 4z$
   $(x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 4y + 4) + (z^2 - 4z + 4) = 0$
   $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = 0$
   Karena persamaan kuadrat tidak mungkin negatif, maka persamaan di atashanya dipenuhi jika :
   $x - 2 = 0$; $y - 2 = 0$ dan $z - 2 = 0$
   Didapat $x = 2$; $y = 2$ dan $z = 2$. Subtitusikan hasil ini ke persamaan (1), (2) dan (3)
   Persamaan (1), $(2)^2 + 4 = (2)^3 + 4(2) - (2)^3$. Memenuhi 8 = 8
   Persamaan (2), $(2)^2 + 4 = (2)^3 + 4(2) - (2)^3$. Memenuhi 8 = 8
   Persamaan (3), $(2)^2 + 4 = (2)^3 + 4(2) - (2)^3$. Memenuhi 8 = 8
   ∴ **(x, y, z) yang memenuhi adalah (2, 2, 2)**
2. Dibuat garis tinggi pada segitiga ABC dan segitiga BOC yang masing-masing ditarik dari titik A dan O. Garis tinggi ini masing-masing memotong sisi BC di titik P dan K.



Luas $\Delta ABC = \frac{1}{2}(BC)(AP)$ dan Luas $\Delta BOC = \frac{1}{2}(BC)(OK)$

$\frac{Luas\ \Delta BOC}{Luas\ \Delta ABC} = \frac{OK}{AP}$ ……… (1)

ΔDAP sebangun dengan ΔDOK sehingga $\frac{OD}{AD} = \frac{OK}{AP}$ ⋯⋯⋯⋯ (2)

Dari (1) dan (2) didapat $\frac{Luas\ \Delta BOC}{Luas\ \Delta ABC} = \frac{OD}{AD}$ ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ (3)

Dengan cara yang sama didapat $\frac{Luas\ \Delta AOC}{Luas\ \Delta ABC} = \frac{OE}{BE}$ ⋯ (4) dan $\frac{Luas\ \Delta AOB}{Luas\ \Delta ABC} = \frac{OF}{CF}$ ⋯ (5)

Luas ΔBOC + Luas ΔAOC + Luas ΔAOB = Luas ΔABC

$\frac{Luas\ \Delta BOC}{Luas\ \Delta ABC} + \frac{Luas\ \Delta AOC}{Luas\ \Delta ABC} + \frac{Luas\ \Delta AOB}{Luas\ \Delta ABC} = 1$

$\frac{OD}{AD} + \frac{OE}{BE} + \frac{OF}{CF} = 1$

$1 - \frac{OA}{AD} + 1 - \frac{OB}{BE} + 1 - \frac{OC}{CF} = 1$ sehingga $\frac{OA}{AD} + \frac{OB}{BE} + \frac{OC}{CF} = 2$

$\therefore$ Terbukti bahwa $\frac{OA}{AD} + \frac{OB}{BE} + \frac{OC}{CF} = 2$

3. Misal jarak dari rumah mereka ke sekolah = S

Untuk Doni :

Misalkan agar waktu yang diperlukan Doni adalah $2\frac{3}{4}$ menit maka ia harus naik sepeda sejauh X dan sisanya dengan jalan kaki dengan catatan bahwa Doni tidak pernah istirahat atau bergerak mundur.

$\frac{X}{S} + \frac{(S-X)8}{S} = \frac{11}{4}$. Maka 4X + 32S − 32X = 11S sehingga X = $\frac{3}{4}$ S

Untuk Coki :

Misalkan agar waktu yang diperlukan Coki adalah $2\frac{3}{4}$ menit maka ia harus naik sepeda sejauh Y dan sisanya dengan jalan kaki dengan catatan bahwa Coki tidak pernah istirahat atau bergerak mundur.

$\frac{Y}{S} + \frac{(S-Y)4}{S} = \frac{11}{4}$. Maka 4Y + 16S − 16Y = 11S sehingga Y = $\frac{5}{12}$ S

Karena $\frac{3}{4}$ S + $\frac{5}{12}$ S = $1\frac{1}{6}$ S maka berarti sepeda harus dimundurkan dalam perjalanannya.

Alternatif 1:

Doni naik sepeda sejauh $\frac{3}{4}$ S lalu melanjutkan perjalan dengan jalan kaki. Maka ia akan sampai dalam waktu $\frac{3}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 8 = 2\frac{3}{4}$ menit.

Beni akan sampai di tempat di mana sepeda ditinggalkan dalam waktu $1\frac{1}{2}$ menit. Agar Coki juga dapat sampai di sekolah dalam waktu $2\frac{3}{4}$ menit maka Beni harus memundurkan sepedanya menuju ke arah rumahnya. Anggap Beni memundurkan sepedanya sejauh Z dari tempat di mana sepeda tersebut ditemukan olehnya.

Alternatif 1a :

Jika yang diinginkan adalah Beni yang mencapai sekolah dalam waktu $2\frac{3}{4}$ menit maka :

$\frac{3}{4} \cdot 2 + \frac{Z}{S} + \frac{(Z+0{,}25S)}{S} \cdot 2 = \frac{11}{4}$. Maka 4Z + 8Z + 2S = 5S sehingga $Z = S$. Artinya posisi sepeda kini berada di tengah-tengah antara rumah dan sekolah. Waktu yang diperlukan sampai dengan sepeda sampai di tempat tersebut adalah $\left(1\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)$ menit = $1\frac{3}{4}$ menit. Waktu yang diperlukan Coki untuk mencapai pertengahan rumah dan sekolah adalah 2 menit > $1\frac{3}{4}$ menit. Artinya ketika ia mencapai tempat tersebut, sepeda telah berada di sana.

Waktu yang diperlukan Coki untuk mencapai sekolah adalah $2 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 2\frac{1}{2} < 2\frac{3}{4}$ menit.

$\therefore$ **Waktu yang diperlukan oleh Beni = $2\frac{3}{4}$ menit ; Coki = $2\frac{1}{2}$ menit ; Doni = $2\frac{3}{4}$ menit.**

Alternatif 1b :

Jika yang diinginkan adalah Coki yang mencapai sekolah dalam waktu $2\frac{3}{4}$ menit maka sesuai dengan hitungan sebelumnya, sepeda harus ditaruh pada $\frac{5}{12}$ S dihitung dari sekolah atau $\left(\frac{5}{12} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{6}S$ dihitung dari tempat dimana sepeda ditemukan oleh Beni.

Waktu yang diperlukan Beni untuk mencapai sekolah adalah $\frac{3}{4} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{5}{12} \cdot 2 = 2\frac{1}{2} < 2\frac{3}{4}$ menit.

$\therefore$ **Waktu yang diperlukan oleh Beni = $2\frac{1}{2}$ menit ; Coki = $2\frac{3}{4}$ menit ; Doni = $2\frac{3}{4}$ menit.**

Alternatif 2 :

Coki naik sepeda sejauh $\frac{1}{2}$ S dan melanjutkan perjalannya dengan jalan kaki. Waktu yang diperlukan untuk mencapai sekolah adalah $\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 4 = 2\frac{1}{2} < 2\frac{3}{4}$ menit

Beni akan mencapai pertengahan jarak terlebih dulu. Agar Doni dapat mencapai sekolah dalam waktu $2\frac{3}{4}$ menit maka Beni harus memundurkan sepedanya sejauh $\frac{1}{4}$ S. Waktu yang diperlukan agar sepeda sampai pada jarak $\frac{1}{4}$ S dari rumah adalah $\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{3}{4}$ menit.

Waktu yang diperlukan Doni untuk mencapai jarak ini adalah $\frac{1}{4} \cdot 8 = 2$ menit $> \frac{3}{4}$ menit.

Artinya sepeda telah berada di sana saat Doni mencapai tempat tersebut.

Waktu yang diperlukan Beni untuk mencapai sekolah adalah $\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 1 + \frac{3}{4} \cdot 2 = 2\frac{3}{4}$ menit.

$\therefore$ **Waktu yang diperlukan oleh Beni = $2\frac{3}{4}$ menit ; Coki = $2\frac{1}{2}$ menit ; Doni = $2\frac{3}{4}$ menit**

4. Anggap terdapat persamaan yang memenuhi $m(m^2 + 1) = k^e$ dengan k dan e bulat dan $e > 2$

   Jika ada m bilangan asli yang memenuhi, maka ruas kiri ≥ 2 yang berarti $k \geq 2$ ············· (1)

   Karena persamaan berbentuk $ab = c^d$ dengan a, b, c, d ∈ Asli, maka a membagi c atau c membagi a.

   Alternatif 1 :

   - Jika k membagi m maka $m = p \cdot k^q$ dengan p bukan kelipatan k dan q ∈ bilangan bulat dan p ∈ bilangan asli. Persamaan menjadi $p^3k^{3q} + pk^q = k^e$ sehingga $p^3k^{2q} + p = k^{e-q}$ ················· (2)
     - Jika $e > q$

       Ruas kanan persamaan (2) adalah sebuah bilangan yang habis dibagi k sedangkan ruas kiri adalah sebuah bilangan yang bersisa p jika dibagi k dengan p bukan bilangan kelipatan k. Maka tanda kesamaan tidak akan mungkin terjadi.
     - Jika $e \leq q$

       Ruas kanan persamaan (2) bernilai ≤ 1

       Karena $p \geq 1$ dan $k \geq 2$ maka $p^3k^{2q} + p \geq 3$ yang berarti tidak ada nilai p dan k yang memenuhi.

     Maka tidak ada nilai m ∈ bilangan asli yang memenuhi $m(m^2 + 1) = k^e$ dengan k membagi m.
   - Jika m membagi k

     maka $k = rm$ dengan r ∈ bilangan asli sebab $k \geq 2$

     Persamaan akan menjadi $m(m^2 + 1) = r^em^e$ sehingga $m + \frac{1}{m} = r^em^{e-2}$ ················ (3)
     - Jika $m = 1$

       Persamaan (3) menjadi $2 = r^e$. Karena $2 = 2^1$ maka persamaan hanya akan dipenuhi jika $r = 2$ dan $e = 1$ yang tidak memenuhi syarat bahwa $e \geq 2$.
     - Jika $m > 1$

Ruas kiri persamaan (3) bukan merupakan bilangan bulat sedangkan ruas kanan merupakan bilangan bulat sebab $e \geq 2$.

Maka tidak ada nilai $m \in$ bilangan asli yang memenuhi $m(m^2 + 1) = k^e$ dengan m membagi k.

$\therefore$ **Terbukti bahwa tidak ada bilangan asli m sehingga terdapat bilangan-bilangan bulat k, e, dengan $e \geq 2$, yang memenuhi $m(m^2 + 1) = k^e$**

Alternatif 2 :

FPB $(m, m^2 + 1)$ = FPB$(m, 1) = 1$ yang artinya m dan $m^2 + 1$ relatif prima.

Jadi, persamaan $m(m^2 + 1) = k^e$ hanya akan terpenuhi jika m dan $m^2 + 1$ memiliki pangkat yang sama.

Misalkan $m = a^e$ dan $m^2 + 1 = b^e = a^{2e} + 1$.

Karena $(a^2 + 1)^e = {}_eC_0 a^{2e} + {}_eC_1 a^{2(e-1)} + \cdots + {}_eC_e\, 1^e = a^{2e} + e \cdot a^{2(e-1)} + \cdots + 1 > a^{2e} + 1 = m^2 + 1$ maka $(a^2)^e < m^2 + 1 = (a^2)^e + 1 < (a^2 + 1)^e$

Dari ketaksamaan di atas didapat $m^2 + 1$ terletak di antara dua bilangan asli berurutan berpangkat e. Maka tidak mungkin $m^2 + 1$ berbentuk b^e.

$\therefore$ **Terbukti bahwa tidak ada bilangan asli m sehingga terdapat bilangan-bilangan bulat k, e, dengan $e \geq 2$, yang memenuhi $m(m^2 + 1) = k^e$**

5. Misal x_{ij} adalah jarak titik P_i dan P_j dalam arah sumbu X dan Misal y_{ij} adalah jarak titik P_i dan P_j dalam arah sumbu Y.

   Jika x_{ij} dan y_{ij} keduanya genap, maka dapat dipastikan bahwa sekurang-kurangnya satu titik letis selain titik P_i dan P_j akan terletak pada ruas garis P_iP_j, yaitu pada pertengahan ruas garis P_iP_j yang akan berjarak $\frac{1}{2}x_{ij}$ pada arah sumbu X dan $\frac{1}{2}y_{ij}$ pada arah sumbu Y terhadap titik P_i maupun P_j dengan $\frac{1}{2}x_{ij}$ dan $\frac{1}{2}y_{ij}$ adalah juga bilangan bulat.

   Sifat penjumlahan berikut juga akan membantu menjelaskan :

   Bilangan Genap − Bilangan Genap = Bilangan Genap

   Bilangan Ganjil − Bilanagn Ganjil = Bilangan Genap.

   Kemungkinan jenis koordinat (dalam bahasa lain disebut paritas) suatu titik letis pada bidang hanya ada 4 kemungkinan yaitu (genap,genap), (genap,ganjil), (ganjil,ganjil) dan (ganjil,genap). Jika 2 titik letis mempunyai paritas yang sama maka sesuai sifat penjumlahan maka dapat dipastikan kedua titik letis memiliki jarak mendatar dan jarak vertikal merupakan bilangan genap yang berarti koordinat titik tengah dari garis yang menghubungkan kedua titik letis tersebut juga merupakan bilangan genap.

   Karena ada 5 titik letis sedangkan hanya ada 4 paritas titik letis maka sesuai *Pigeon Hole Principle* (PHP) maka dapat dipastikan sekurang-kurangnya ada dua titik letis yang memiliki paritas yang sama.

   $\therefore$ **Dari penjelasan di atas dapat dibuktikan bahwa jika P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 adalah lima titik letis berbeda pada bidang maka terdapat sepasang titik (P_i, P_j), $i \neq j$, demikian, sehingga ruas garis P_iP_j memuat sebuah titik letis selain P_i dan P_j.**

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2004

TINGKAT NASIONAL

BIDANG MATEMATIKA

Hari Pertama

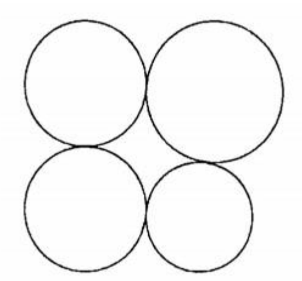
WAKTU : 180 MENIT

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Nasional Tahun 2004

1. Berapa banyaknya pembagi genap dan pembagi ganjil dari $5^6 - 1$?
2. Sebuah bak bila diisi dengan keran air dingin akan penuh dalam 14 menit. Untuk mengosongkan bak yang penuh dengan membuka lubang pada dasar bak, air akan keluar semua dalam waktu 21 menit. Jika keran air dingin dan air panas dibuka bersamaan dan lubang pada dasar bak dibuka, bak akan penuh dalam 12,6 menit. Maka berapa lamakah waktu yang diperlukan untuk memenuhkan bak hanya dengan keran air panas dan lubang pada dasar bak ditutup ?
3. 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 * 10

   Berapa carakah untuk menyusun deretan tersebut dengan mengganti mengganti tanda ekspresi "*" dengan tanda "+" atau "−" sehingga jumlahnya menjadi 29 ?
4. Lingkaran yang berbeda bentuk disusun sebagai berikut :



   Buktikan bahwa ada lingkaran yang melewati keempat titik singgung keempat lingkaran.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2004

TINGKAT NASIONAL

BIDANG MATEMATIKA

Hari Kedua

WAKTU : 180 MENIT

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Nasional Tahun 2004

5. $x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 + 25x_5 + 36x_6 + 49x_7 = 1$

   $4x_1 + 9x_2 + 16x_3 + 25x_4 + 36x_5 + 49x_6 + 64x_7 = 12$

   $9x_1 + 16x_2 + 25x_3 + 36x_4 + 49x_5 + 64x_6 + 81x_7 = 123$

   Berapakah nilai S jika

   $S = 16x_1 + 25x_2 + 36x_3 + 49x_4 + 64x_5 + 81x_6 + 100x_7$

6. Persamaan kuadrat $x^2 + ax + b + 1 = 0$ dengan a, b adalah bilangan bulat, memiliki akar-akar bilangan asli. Buktikan bahwa $a^2 + b^2$ bukan bilangan prima.

7. Buktikan bahwa suatu segitiga ABC siku-siku di C dengan a menyatakan sisi dihadapan sudut A, b menyatakan sisi di hadapan sudut B, c menyatakan sisi di hadapan sudut C memiliki diameter lingkaran dalam = a + b − c.

8. Sebuah lantai berluas 3 m^2 akan ditutupi oleh karpet dengan bermacam bentuk sebanyak 5 buah dengan ukuran @ $1m^2$. Tunjukkan bahwa ada 2 karpet yang tumpang tindih dengan luasan tumpang tindih lebih dari 1/5 m^2.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2004

TINGKAT NASIONAL

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Nasional Tahun 2004

1. $5^6 - 1 = (5^3 + 1)(5^3 - 1) = 126 \cdot 124$

   $5^6 - 1 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 2^2 \cdot 31$

   $5^6 - 1 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 31$

   Misalkan $M = p_1^{d1} \cdot p_2^{d2} \cdot p_3^{d3} \cdot \cdots \cdot p_n^{dn}$ dengan $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$ adalah bilangan prima maka banyaknya pembagi positif dari M adalah $(d_1 + 1)(d_2 + 1)(d_3 + 1) \cdots (d_n + 1)$

   Banyaknya pembagi (disebut juga faktor) dari $5^6 - 1$ adalah $(3 + 1)(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 48$

   Misal $K = 3^2 \cdot 7 \cdot 31$. Mengingat bahwa bilangan ganjil hanya didapat dari perkalian bilangan ganjil maka semua pembagi dari K pasti ganjil.

   Banyaknya pembagi dari K adalah $(2 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 12$

   Banyaknya pembagi dari K sama dengan banyaknya pembagi ganjil dari $5^6 - 1$

   $\therefore$ **Banyaknya pembagi ganjil dari $5^6 - 1$ adalah 12.**

   Banyaknya pembagi genap dari $5^6 - 1$adalah $48 - 12 = 36$

   (Catatan : Ke-48 pembagi $5^6 - 1$ adalah : 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 12, 14, 18, 21, 24, 28, 31, 36, 42, 56, 62, 63, 72, 84, 93, 124, 126, 168, 186, 217, 248, 252, 279, 372, 434, 504, 558, 651, 744, 868, 1116, 1302, 1736, 1953, 2232, 2604, 3906, 5208, 7812, 15624)

2. Misalkan v_d = kelajuan air keluar dari keran air dingin

   v_p = kelajuan air keluar dari keran air panas

   v_b = kelajuan air keluar dari lubang di dasar bak

   X = volume bak

   $v_d = \frac{X}{14}$

   $v_b = \frac{X}{21}$

   $v_d + v_p - v_b = \frac{X}{12{,}6}$

   Dari ketiga persamaan di atas didapat :

   $\frac{X}{14} + v_p - \frac{X}{21} = \frac{5X}{63}$

   $v_p = \frac{X}{7}\left(\frac{5}{9} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)$

   $v_p = \frac{X}{18}$

   $\therefore$ Waktu yang diperlukan untuk memenuhkan bak hanya dengan keran air panas dan lubang pada dasar bak ditutup adalah **18 menit**

3. Misalkan S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55

   Jika + k kita ganti dengan − k maka S akan berkurang sebanyak 2k.

   Karena 55 − 29 = 26 maka bilangan yang yang bertanda “−” harus berjumlah 13.

Jika ada 4 bilangan yang bertanda "−" maka jumlah minimum bilangan tersebut = 2 + 3 + 4 + 5 = 14 > 13. Maka banyaknya bilangan yang bertanda "−" harus kurang dari 4.

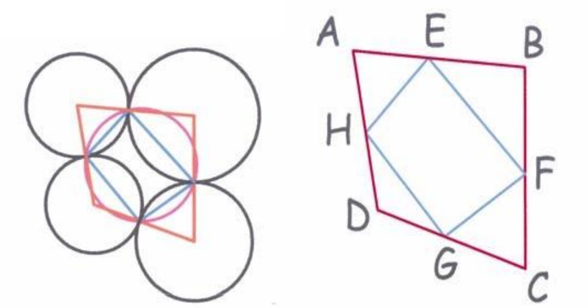
- Untuk 2 bilangan yang bertanda "−" maka pasangan yang mungkin adalah (3,10), (4,9), (5,8), (6,7)
- Untuk 3 bilangan yang bertanda "−" maka tripel yang mungkin adalah (2,3,8), (2,4,7), (2,5,6), (3,4,6)

∴ **Banyaknya kemungkinan seluruhnya ada 8.**

(Catatan : Ke-8 kemungkinan tersebut adalah :

1 + 2 − 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 − 10	1 − 2 − 3 + 4 + 5 + 6 + 7 − 8 + 9 + 10
1 + 2 + 3 − 4 + 5 + 6 + 7 + 8 − 9 + 10	1 − 2 + 3 − 4 + 5 + 6 − 7 + 8 + 9 + 10
1 + 2 + 3 + 4 − 5 + 6 + 7 − 8 + 9 + 10	1 − 2 + 3 + 4 − 5 − 6 + 7 + 8 + 9 + 10
1 + 2 + 3 + 4 + 5 − 6 − 7 + 8 + 9 + 10	1 + 2 − 3 − 4 + 5 − 6 + 7 + 8 + 9 + 10

4. Misalkan A, B, C dan D adalah keempat pusat lingkaran dan E, F, G dan H adalah titik singgung keempat lingkaran. Maka persoalan tersebut dapat digambarkan sebagai berikut :



ΔAEH, ΔBEF, ΔCFG dan ΔDGh semuanya adalah segitiga sama kaki.

Misalkan ∠A menyatakan ∠DAC

∠B menyatakan ∠ABC

∠C menyatakan ∠BCD

∠D menyatakan ∠CDA

$\angle EHA = \angle AEH = 90^o - \frac{1}{2}\angle A$

$\angle BEF = \angle BFE = 90^o - \frac{1}{2}\angle B$

$\angle CFG = \angle CGF = 90^o - \frac{1}{2}\angle C$ $\angle D = 360^o - \angle A - \angle B - \angle C$

$\angle DGH = \angle DHG = \frac{1}{2}(180^o - (360^o - \angle A - \angle B - \angle C)) = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C) - 90^o$

$\angle HEF = 180^o - \angle AEH - \angle BEF = \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$

$\angle HGF = 180^o - \angle DGH - \angle CGF = 180^o - \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$

$\angle HEF + \angle HGF = 180^o$

Karena $\angle HEF + \angle HGF = 180^o$ maka segiempat EFGH adalah segiempat tali busur yang berarti titik E, F, G, dan H terletak pada satu lingkaran.

∴ **Terbukti bahwa ada lingkaran yang melewati keempat titik singgung keempat lingkaran.**

5. $x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 + 25x_5 + 36x_6 + 49x_7 = 1$ ⋯⋯⋯⋯⋯ (1)

$4x_1 + 9x_2 + 16x_3 + 25x_4 + 36x_5 + 49x_6 + 64x_7 = 12$ ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ (2)

$9x_1 + 16x_2 + 25x_3 + 36x_4 + 49x_5 + 64x_6 + 81x_7 = 123$ ························ (3)

Kurangkan (2) dengan (1), $3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 9x_4 + 11x_5 + 13x_6 + 15x_7 = 11$ ························ (4)

Kurangkan (3) dengan (2), $5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 11x_4 + 13x_5 + 15x_6 + 17x_7 = 111$ ······················ (5)

Kurangkan (5) dengan (4), $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6 + 2x_7 = 100$ ···························· (6)

Jumlahkan (5) dengan (6), $7x_1 + 9x_2 + 11x_3 + 13x_4 + 15x_5 + 17x_6 + 19x_7 = 211$ ····················· (7)

Jumlahkan (3) dengan (7), $16x_1 + 25x_2 + 36x_3 + 49x_4 + 64x_5 + 81x_6 + 100x_7 = 334$

∴ **$16x_1 + 25x_2 + 36x_3 + 49x_4 + 64x_5 + 81x_6 + 100x_7 = 334$**

6. Misalkan x_1 dan x_2 adalah akar-akar persamaan $x^2 + ax + b + 1 = 0$ maka :

$x_1 + x_2 = -a$

$x_1 x_2 = b + 1$

$b = x_1 x_2 - 1$

$a^2 + b^2 = (x_1 + x_2)^2 + (x_1 x_2 - 1)^2$

$a^2 + b^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + (x_1 x_2)^2 - 2 x_1x_2 + 1$

$a^2 + b^2 = (x_1x_2)^2 + x_1^2 + x_2^2 + 1$

$a^2 + b^2 = (x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)$

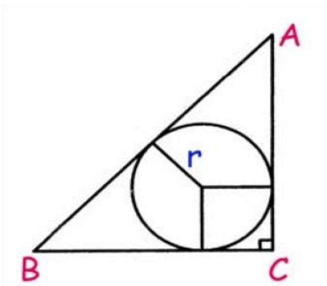
Karena x_1 dan x_2 keduanya adalah bilangan asli maka $(x_1^2 + 1)$ dan $(x_2^2 + 1)$ keduanya adalah bilangan asli lebih dari 1.

Maka $a^2 + b^2$ adalah perkalian dua bilangan asli masing-masing > 1 yang mengakibatkan $a^2 + b^2$ adalah bukan bilangan prima.

∴ **Terbukti $a^2 + b^2$ bukan bilangan prima.**

7. Misalkan d adalah diameter lingkaran dalam segitiga dan r adalah jejari lingkaran dalam maka :

Alternatif 1 :



½ r (a + b + c) = Luas segitiga

d (a + b + c) = 4 · Luas segitiga

d (a + b + c) = 2ab

$d (a + b + c) = (a + b)^2 - (a^2 + b^2)$

Karena ABC adalah segitiga siku-siku di C maka :

$d (a + b + c) = (a + b)^2 - c^2$

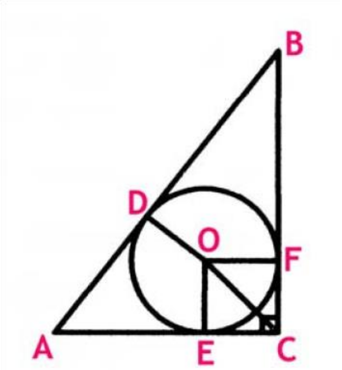
$d (a + b + c) = (a + b + c)(a + b - c)$

$d = a + b - c$

∴ **Terbukti bahwa diameter lingkaran dalam segitiga tersebut adalah a + b − c.**

Alternatif 2 :

Misalkan O adalah pusat lingkaran dalam $\triangle ABC$. Misalkan juga garis AB, AC dan BC berturut-turut menyinggung lingkaran dalam di titik D, E dan F.



Jelas bahwa CE = CF = r.

Jelas juga bahwa AD = AE dan BD = BF

Maka AE = b − r dan BF = a − r

AB = AD + BD

c = (b − r) + (a − r)

d = 2c = a + b − c

∴ **Terbukti bahwa diameter lingkaran dalam segitiga tersebut adalah a + b − c.**

8. Alternatif 1 :

Misalkan A_i menyatakan karpet ke-i. $A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = 1$

Berdasarkan Prinsip Inklusi Eksklusi maka :

$(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5) = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 - (A_1 \cap A_2) - (A_1 \cap A_3) - (A_1 \cap A_4) - (A_1 \cap A_5) - (A_2 \cap A_3) - (A_2 \cap A_4) - (A_2 \cap A_5) - (A_3 \cap A_4) - (A_3 \cap A_5) - (A_4 \cap A_5) + (A_1 \cap A_2 \cap A_3) + (A_1 \cap A_2 \cap A_4) + (A_1 \cap A_2 \cap A_5) + (A_1 \cap A_3 \cap A_4) + (A_1 \cap A_3 \cap A_5) + (A_1 \cap A_4 \cap A_5) + A_2 \cap A_3 \cap A_4) + (A_2 \cap A_3 \cap A_5) + (A_2 \cap A_4 \cap A_5) + (A_3 \cap A_4 \cap A_5) - (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) - (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5) - (A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5) - (A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) - (A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) + (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)$

$3 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 - (A_1 \cap A_2) - (A_1 \cap A_3) - (A_1 \cap A_4) - (A_1 \cap A_5) - (A_2 \cap A_3) - (A_2 \cap A_4) - (A_2 \cap A_5) - (A_3 \cap A_4) - (A_3 \cap A_5) - (A_4 \cap A_5) + (A_1 \cap A_2 \cap A_3) + (A_1 \cap A_2 \cap A_4) + (A_1 \cap A_2 \cap A_5) + (A_1 \cap A_3 \cap A_4) + (A_1 \cap A_3 \cap A_5) + (A_1 \cap A_4 \cap A_5) + (A_2 \cap A_3 \cap A_4) + (A_2 \cap A_3 \cap A_5) + (A_2 \cap A_4 \cap A_5) + (A_3 \cap A_4 \cap A_5) - (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) - (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5) - (A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5) - (A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) - (A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) + (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5)$

$2 + (A_1 \cap A_2 \cap A_3) + (A_1 \cap A_2 \cap A_4) + (A_1 \cap A_2 \cap A_5) + (A_1 \cap A_3 \cap A_4) + (A_1 \cap A_3 \cap A_5) + (A_1 \cap A_4 \cap A_5) + (A_2 \cap A_3 \cap A_4) + (A_2 \cap A_3 \cap A_5) + (A_2 \cap A_4 \cap A_5) + (A_3 \cap A_4 \cap A_5) - (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) - (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5) - (A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5) - (A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) - (A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) + (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) = (A_1 \cap A_2) +$

$(A_1 \cap A_3) + (A_1 \cap A_4) + (A_1 \cap A_5) + (A_2 \cap A_3) + (A_2 \cap A_4) + (A_2 \cap A_5) + (A_3 \cap A_4) + (A_3 \cap A_5) + (A_4 \cap A_5)$ ··· (1)

$(A_a \cap A_b \cap A_c \cap A_d)$ merupakan himpunan bagian dari $(A_a \cap A_b \cap A_c)$ sehingga $(A_a \cap A_b \cap A_c \cap A_d) \leq (A_a \cap A_b \cap A_c)$

$(A_a \cap A_b \cap A_c)$ merupakan himpunan bagian dari $(A_a \cap A_b)$ sehingga $(A_a \cap A_b \cap A_c) \leq (A_a \cap A_b)$ dan seterusnya ·········

Akibatnya :

$(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \leq (A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ atau $(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \leq (A_1 \cap A_2 \cap A_4)$ dan seterusnya

$(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5) \leq (A_1 \cap A_2 \cap A_5)$ atau $(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_5) \leq (A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ dan seterusnya

$(A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5) \leq (A_1 \cap A_2 \cap A_4)$ atau $(A_1 \cap A_2 \cap A_4 \cap A_5) \leq (A_1 \cap A_2 \cap A_5)$ dan seterusnya

$(A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \leq (A_1 \cap A_3 \cap A_4)$ atau $(A_1 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \leq (A_3 \cap A_4 \cap A_5)$ dan seterusnya

$(A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \leq (A_2 \cap A_3 \cap A_5)$ atau $(A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \leq (A_2 \cap A_3 \cap A_4)$ dan seterusnya

Maka ruas kiri persamaan (1) bernilai minimal 2.

Karena ada 10 irisan di ruas kanan persamaan (1) maka dapat dipastikan sekurang-kurangnya ada 1 di antara 10 irisan 2 karpet tersebut yang memiliki irisan minimal 2/10 = 0,2 m^2.

Alternatif 2 :

Andaikan tidak ada 2 karpet yang tumpang tindih dengan luasan tumpang tindih lebih dari 1/5 m^2. Karpet pertama akan menempati ruang dengan luas 1 m^2. Maka karpet kedua akan menempati ruang dengan luas minimum 4/5 m^2. Karpet ketiga akan menempati ruang dengan luas minimum 3/5 m^2. Karpet keempat akan menempati ruang dengan luas minimum 2/5 m^2. Karpet kelima akan menempati ruang dengan luas minimum 1/5 m^2.

Luas minimum karpet yang diperlukan adalah $1 + \frac{4}{5} + \frac{3}{5} + \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = 3$ m^2.

$\therefore$ **Hanya dapat dibuktikan bahwa ada 2 karpet yang tumpang tindih dengan luasan tumpang tindih minimal 1/5 m^2.**

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2005

TINGKAT KABUPATEN/KOTA

BIDANG MATEMATIKA

WAKTU : 3,5 JAM

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Kabupaten/Kota Tahun 2005

Bagian Pertama

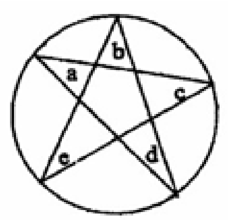
Pilih satu jawaban yang benar. Dalam hal terdapat lebih dari satu jawaban yang benar, pilih jawaban yang paling baik.

1. Bilangan $\frac{1}{(1+\sqrt{2})(2+\sqrt{3})(1-\sqrt{2})(2-\sqrt{3})}$ adalah bilangan

   A. takrasional positif C. rasional tidak bulat E. bulat negatif

   B. takrasional negatif D. bulat positif

2.



   Pada gambar di samping, a, b, c, d dan e berturut-turut menyatakan besar sudut pada titik-titik ujung bintang lima yang terletak pada suatu lingkaran. Jumlah a + b + c + d + e =

   A. 135° B. 180° C. 270°

   D. 360° E. tidak dapat ditentukan dengan pasti

3. Semula harga semangkuk bakso dan harga segelas jus masing-masing adalah Rp. 5000. Setelah kenaikan BBM, semangkuk bakso harganya naik 16% sedangkan harga segelas jus naik 4%.
   Kenaikan harga dari semangkuk bakso dan segelas jus adalah

   A. 8% B. 10% C. 12% D. 15% E. 20%

4. Jika a bilangan real yang memenuhi $a^2 < a$, maka

   A. a negatif C. $1 < a$ E. tidak ada a yang memenuhi

   B. $a < 1$ D. $\frac{1}{2} < a < 2$

5. Aries menggambar bagian dari parabola $y = x^2 - 6x + 7$. Titik-titik parabola yang muncul dalam gambar memiliki absis mulai dari 0 sampai +4. Maka ordinat terkecil dan ordinat terbesar titiktitik pada parabola yang muncul dalam gambar berturut-turut adalah

   A. -2 dan -1 B. -2 dan 7 C. -1 dan 7 D. 0 dan -1 E. 0 dan 7

6. Dua buah dadu dilemparkan bersamaan. Berapakah peluang jumlah angka yang muncul adalah 6 atau 8 ?

   A. $\frac{5}{36}$ B. $\frac{7}{36}$ C. $\frac{10}{36}$ D. $\frac{14}{36}$ E. $\frac{35}{36}$

7. Titik A(a, b) disebut *titik letis* jika a dan b keduanya adalah bilangan bulat. Banyaknya titik letis pada lingkaran yang berpusat di O dan berjari-jari 5 adalah

   A. 4 B. 6 C. 8 D. 12 E. tidak bisa dipastikan

8. Mana di antara 5 ekspresi berikut yang angka terakhirnya berturut-turut bukan 5, 6, 8, 9 atau 0 ?

   A. $5^{5^{5^5}}$ B. $6^{6^{6^6}}$ C. $8^{8^{8^8}}$ D. $9^{9^{9^9}}$ E. $10^{10^{10^{10}}}$

9. Diberikan tiga bilangan positif x, y dan z yang semuanya berbeda. Jika $\frac{y}{x-z} = \frac{x+y}{z} = \frac{x}{y}$ maka nilai $\frac{x}{y}$ sama dengan

   A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{5}$ C. 1 D. 2 E. $\frac{10}{3}$

10. Jika diberikan persamaan $(x^2 - x - 1)^{x+2} = 1$, maka banyaknya bilangan bulat x yang merupakan solusi dari persamaan tersebut adalah

    A. 2 B. 3 C. 4 D. 5 E. 6

Bagian Kedua

Isikan hanya jawaban saja pada tempat yang disediakan

11. Faktor prima terbesar dari 2005 adalah ·····
12. Tentukan semua solusi persamaan $|x - 1| + |x - 4| = 2$.
13. Misalkan a dan b adalah bilangan real tak nol yang memenuhi $9a^2 - 12ab + 4b^2 = 0$. Tentukan $\frac{a}{b}$.
14. Diberikan dua buah persegi, A dan B, dimana luas A adalah separuh dari luas B. Jika keliling B adalah 20 cm, maka keliling A, dalam centimeter, adalah ····
15. Seorang siswa mempunyai dua celana berwarna biru dan abu-abu, tiga kemeja berwarna putih, merah muda dan kuning, serta dua pasang sepatu berwarna hitam dan coklat. Banyaknya cara siswa tersebut memakai pakaian dan sepatu adalah ······
16. Tentukan semua bilangan real x yang memenuhi $x^4 + \frac{1}{x^4} \le 2$.

17. Tentukan semua bilangan tiga-angka sehingga nilai bilangan itu adalah 30 kali jumlah ketiga angka itu.
18. Nilai $\sin^8 75^\circ - \cos^8 75^\circ = \cdots\cdots$
19. Diketahui bahwa segiempat ABCD memiliki pasangan sisi yang sejajar. Segiempat tersebut memiliki tepat satu sumbu simetri lipat jika ia berbentuk $\cdots\cdots\cdots$
20. Tentukan banyaknya pasangan bilangan bulat positif (m, n) yang merupakan solusi dari persamaan $\frac{4}{m} + \frac{2}{n} = 1$.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2005

TINGKAT KABUPATEN/KOTA

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Kabupaten/Kota Tahun 2005

BAGIAN PERTAMA

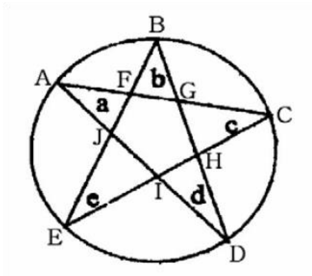
1. (Jawaban : E)

$$\frac{1}{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)} = \frac{1}{\left(1-2\right)\left(2^2-3\right)} = -1$$

$\therefore \dfrac{1}{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}$

adalah bilangan **bulat negatif**.

2. (Jawaban : B)



Misalkan penamaan titik seperti pada gambar.

Pada ΔEFC berlaku ∠EFC = 180° − (c + e). Maka ∠BFG = c + e

Pada ΔAGD berlaku ∠AGD = 180° − (a + d). Maka ∠FGB = a + d

Pada ΔFGB berlaku ∠BFG + ∠FGB + ∠FBG = 180°. Maka (c + e) + (a + d) + (b) = 180°.

∴ a + b + c + d + e = **180°.**

3. (Jawaban : B)

Kenaikan harga dari semangkuk bakso dan segelas jus = $\frac{16\% \cdot 5000 + 4\% \cdot 5000}{5000+5000}$ = 10%

∴ Kenaikan harga dari semangkuk bakso dan segelas jus adalah **10 %.**

4. (Jawaban : ?)

$a^2 < a$. Maka $a(a - 1) < 0$ sehingga $0 < a < 1$.

∴ Jika $a^2 < a$ maka $0 < a < 1$.

5. (Jawaban : B)

$y = x^2 - 6x + 7$

Nilai pada ujung-ujung interval, untuk x = 0 maka y = 7 sedangkan untuk x = 4 maka y = −1

$y_{maks} = -\frac{D}{4a} = -\frac{(-6)^2-4(1)(7)}{4(1)} = -2$ yang didapat untuk $x = -\frac{b}{2a} = 3$.

∴ Maka ordinat terkecil dan ordinat terbesar adalah **−2 dan 7.**

6. (Jawaban : C)

Kemungkinan penjumlahan mata dadu sama dengan 6 ada 5, yaitu (1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1).

Kemungkinan penjumlahan mata dadu sama dengan 8 ada 5, yaitu (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2).

Peluang jumlah angka yang muncul adalah 6 atau 8 = $\frac{5+5}{36}$

∴ Peluang jumlah angka yang muncul adalah 6 atau 8 = $\frac{10}{36}$

7. (Jawaban : D)

Persamaan lingkaran yang berpusat di O dan berjari-jari 5 adalah $x^2 + y^2 = 25$

Karena $0^2 + 5^2 = 3^2 + 4^2 = 25$ maka pasangan (x, y) bulat yang memenuhi ada 12, yaitu (0, 5), (0, −5), (5, 0), (−5, 0), (3, 4), (3, −4), (−3, 4), (−3, −4), (4, 3), (4, −3), (−4, 3) dan (−4, −3).

∴ Banyaknya titik letis pada lingkaran yang berpusat di O dan berjari-jari 5 ada **12.**

8. (Jawaban : C)

Karena 5^k memiliki angka satuan 5 untuk setiap k asli maka $5^{5^{5^5}}$ memiliki angka terakhir 5.

Karena 6^k memiliki angka satuan 6 untuk setiap k asli maka $6^{6^{6^6}}$ memiliki angka terakhir 6.

Karena 10^k memiliki angka satuan 0 untuk setiap k asli maka $10^{10^{10^{10}}}$ memiliki angka terakhir 0.

8^1 memiliki angka satuan 8

8^2 memiliki angka satuan 4

8^3 memiliki angka satuan 2

8^4 memiliki angka satuan 6

8^5 memiliki angka satuan 8 dst

Maka $8^{4k+i} \equiv 8^i \pmod{10}$ untuk setiap k dan i bilangan asli.

Karena 8^{8_8} habis dibagi 4 maka $8^{8^{8_8}}$ memiliki angka satuan yang sama dengan 8^4 yaitu 6.

9^1 memiliki angka satuan 9

9^2 memiliki angka satuan 1

9^3 memiliki angka satuan 9 dst

Maka $9^{2k+i} \equiv 9^i \pmod{10}$ untuk setiap k dan i bilangan asli.

Karena 9^k ganjil untuk k asli maka $9^{9^{9^9}}$ memiliki angka satuan yang sama dengan 9^1 yaitu 9.

∴ Maka di antara $5^{5^{5^5}}$, $6^{6^{6^6}}$, $8^{8^{8^8}}$, $9^{9^{9^9}}$ dan $10^{10^{10^{10}}}$ yang angka terakhirnya berturut-turut bukan 5, 6, 8, 9 atau 0 adalah 8^{8_8}.

9. (Jawaban : D)

Misalkan $\frac{y}{x-z} = \frac{x+y}{z} = \frac{x}{y} = k$

Maka : y = k(x − z) .... (1)

x + y = kz .... (2)

x = ky .... (3)

Jumlahkan (1) + (2) + (3) sehingga 2(x + y) = k(x + y).

Karena x dan y keduanya positif maka x + y ≠ 0 sehingga k = 2.

Karena $\frac{x}{y} = k$ maka $\frac{x}{y} = 2$

∴ nilai $\frac{x}{y}$ sama dengan **2**

10. (Jawaban : C)
$(x^2 - x - 1)^{x+2} = 1$
Kemungkinan-kemungkinan yang memenuhi adalah :
- $x + 2 = 0$. Maka $x = -2$
  $((-2)^2 - (-2) - 1) \neq 0$ maka $x = -2$ memenuhi
- $x^2 - x - 1 = 1$. Maka $(x - 2)(x + 1) = 0$
  $x = 2$ dan $x = -1$ keduanya memenuhi
- $x^2 - x - 1 = -1$. Maka $x(x - 1) = 0$ sehingga $x = 0$ atau $x = 1$
  Jika $x = 0$ maka $x + 2 = 2$ (bilangan genap). Maka $x = 0$ memenuhi
  Jika $x = 1$ maka $x + 2 = 3$ (bilangan ganjil). Maka $x = 1$ tidak memenuhi.

Nilai-nilai x yang memenuhi adalah -2, -1, 0 dan 2.
$\therefore$ Banyaknya bilangan bulat x yang merupakan solusi dari persamaan $(x^2 - x - 1)^{x+2} = 1$ ada **4**.

BAGIAN KEDUA

11. $2005 = 5 \cdot 401$ dengan 401 adalah bilangan prima.
$\therefore$ Faktor prima terbesar dari 2005 adalah **401.**
12. $|x - 1| + |x - 4| = 2$
- Jika $x \leq 1$
  Maka $|x - 1| = 1 - x$ dan $|x - 4| = 4 - x$
  $1 - x + 4 - x = 2$ sehingga $x = \frac{3}{2}$ (tidak memenuhi $x \leq 1$)
- Jika $1 < x \leq 4$
  Maka $|x - 1| = x - 1$ dan $|x - 4| = 4 - x$
  $x - 1 + 4 - x = 2$ sehingga $3 = 2$ (tidak memenuhi kesamaan)
- Jika $x > 4$
  Maka $|x - 1| = x - 1$ dan $|x - 4| = x - 4$
  $x - 1 + x - 4 = 2$ sehingga $x = \frac{7}{2}$ (tidak memenuhi $x > 4$)

$\therefore$ Nilai x yang memenuhi persamaan $|x - 1| + |x - 4| = 2$ adalah **tidak ada**.
13. $9a^2 - 12ab + 4b^2 = 0$
Untuk $b \neq 0$ maka $\left(3\frac{a}{b} - 2\right)^2 = 0$
$\therefore$ Maka $= \frac{a}{b} = \frac{2}{3}$
14. Luas B = 2 Luas A, maka B = 2A
Misalkan panjang sisi A = x dan panjang sisi B = y maka Luas B $= y^2 = 2x^2$ sehingga $y = x\sqrt{2}$
Keliling B = 4y. Maka $4x\sqrt{2} = 20$ sehingga $x = \frac{5}{2}\sqrt{2}$

Keliling A = 4x = $10\sqrt{2}$

∴ Keliling A = **$10\sqrt{2}$ cm**

15. Banyaknya cara siswa tersebut memakai pakaian dan sepatu = 2 x 3 x 2 = 12 cara

∴ Banyaknya cara siswa tersebut memakai pakaian dan sepatu adalah **12.**

16. $x^4 + \frac{1}{x^4} \leq 2$

Sesuai dengan ketaksamaan AM-GM maka $x^4 + \frac{1}{x^4} \geq 2\sqrt{x^4 \cdot \frac{1}{x^4}} = 2$

Karena $x^4 + \frac{1}{x^4} \leq 2$ dan $x^4 + \frac{1}{x^4} \geq 2$ maka ketaksamaan hanya dipenuhi jika $x^4 + \frac{1}{x^4} = 2.$

$\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2 = 0$

∴ Bilangan real x yang memenuhi persamaan adalah **x = 1 atau x = −1**

17. Misalkan bilangan tersebut adalah n = 100a + 10b + c

100a + 10b + c = 30(a + b + c)

10(7a − 2b) = 29c

$\frac{c}{7a-2b} = \frac{10}{29}$

Karena 10 dan 29 relatif prima maka 7a − 2b = 29k dan c = 10k.

Karena 0 ≤ c ≤ 9 maka nilai k yang memenuhi hanya k = 0 sehingga c = 0.

7a = 2b

Karena 2 dan 7 relatif prima sedangkan 0 ≤ a, b ≤ 9 maka nilai a dan b yang memenuhi adalah a = 2 dan b = 7.

∴ Bilangan tiga angka yang memenuhi adalah **270.**

18. $\sin^8 75^\circ - \cos^8 75^\circ = (\sin^4 75^\circ + \cos^4 75^\circ)(\sin^4 75^\circ - \cos^4 75^\circ)$

$\sin^8 75^\circ - \cos^8 75^\circ = ((\sin^2 75^\circ + \cos^2 75^\circ)^2 - 2(\sin^2 75^\circ)(\cos^2 75^\circ))(\sin^2 75^\circ + \cos^2 75^\circ)(\sin^2 75^\circ - \cos^2 75^\circ)$

Mengingat bahwa $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ dan $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha$ maka :

$\sin^8 75^\circ - \cos^8 75^\circ = (1 - \frac{1}{2}\sin^2 150^\circ)(-\cos 120^\circ)$

∴ $\sin^8 75^\circ - \cos^8 75^\circ = \frac{7}{16}$

19. Jika segiempat adalah trapesium sebarang maka belum dapat dipastikan bangun tersebut memiliki tepat satu sumbu simetri lipat sebab ada kemungkinan trapesium tersebut tidak memiliki sumbu simetri lipat.

∴ Maka bangun tersebut adalah **trapesium sama kaki.**

20. $\frac{4}{m} + \frac{2}{n} = 1$

$mn - 4n - 2m = 0$

$(m-4)(n-2) = 8 = 2^3$

Karena 4 dan 2 memiliki paritas yang sama maka m − 4 dan n − 2 memiliki paritas yang sama. Maka kemungkinan-kemungkinan penyelesaiannya adalah :

- m − 4 = −2 dan n − 2 = −4

  m = 2 dan n = −2 (tidak memenuhi m dan n keduanya bulat positif)
- m − 4 = 2 dan n − 2 = 4

$m = 6$ dan $n = 6$ (memenuhi m dan n keduanya bulat positif)

- $m - 4 = -4$ dan $n - 2 = -2$
  $m = 0$ dan $n = 0$ (tidak memenuhi m dan n keduanya bulat positif)
- $m - 4 = 4$ dan $n - 2 = 2$
  $m = 8$ dan $n = 4$ (memenuhi m dan n keduanya bulat positif)

$\therefore$ Banyaknya pasangan bilangan bulat positif (m, n) yang memenuhi ada **2.**

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2005

TINGKAT PROVINSI

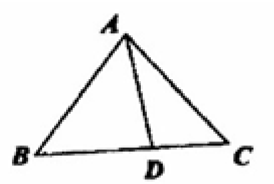
BAGIAN PERTAMA

WAKTU : 90 MENIT

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2005

BAGIAN PERTAMA

1. Jika a sebuah bilangan rasional dan b adalah sebuah bilangan tak rasional, maka a + b adalah bilangan ······
2. Jumlah sepuluh bilangan prima yang pertama adalah ·····
3. Banyaknya himpunan X yang memenuhi {1, 2} ⊆ X ⊆ {1, 2, 3, 4, 5} adalah ·····
4. Jika N = 123456789101112 ··· 9899100, maka tiga angka pertama $\sqrt{N}$ adalah ·····
5. Misalkan ABCD adalah sebuah trapesium dengan BC ∥ AD. Titik-titik P dan R berturut-turut adalah titik tengah sisi AB dan CD. Titik Q terletak pada sisi BC sehingga BQ : QC = 3 : 1, sedangkan titik S terletak pada sisi AD sehingga AS : SD = 1 : 3. Maka rasio luas segiempat PQRS terhadap luas trapesium ABCD adalah ······
6. Bilangan tiga-angka terkecil yang merupakan bilangan kuadrat sempurna dan bilangan kubik (pangkat tiga) sempurna sekaligus adalah ·····
7. Jika a, b dua bilangan asli a ≤ b sehingga $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{4}+\sqrt{b}}$ adalah bilangan rasional, maka pasangan terurut (a, b) = ······
8. 

Jika AB = AC, AD = BD, dan besar sudut DAC = 39°, maka besar sudut BAD adalah ·····
9. Ketika mendaki sebuah bukit, seorang berjalan dengan kecepatan 1½ km/jam. Ketika menuruni bukit tersebut, ia berjalan tiga kali lebih cepat. Jika waktu yang dibutuhkan untuk melakukan perjalanan bolak-balik dari kaki bukit ke puncak bukit dan kembali ke kaki bukit adalah 6 jam, maka jarak antara kaki bukit dan puncak bukit (dalam km) adalah ····
10. Sebuah segienam beraturan dan sebuah segitiga sama sisi mempunyai keliling yang sama. Jika luas segitiga adalah $\sqrt{3}$, maka luas segienam adalah ····
11. Dua buah dadu dilemparkan secara bersamaan. Peluang jumlah kedua angka yang muncul adalah bilangan prima adalah ····
12. Keliling sebuah segitiga samasisi adalah p. Misalkan Q adalah sebuah titik di dalam segitiga tersebut. Jika jumlah jarak dari Q ke ketiga sisi segitiga adalah s, maka, dinyatakan dalam s, p = ········
13. Barisan bilangan asli (a, b, c) dengan a ≥ b ≥ c, yang memenuhi sekaligus kedua persamaan ab + bc = 44 dan ac + bc = 23 adalah ·····

14. Empat buah titik berbeda terletak pada sebuah garis. Jarak antara sebarang dua titik dapat diurutkan menjadi barisan 1, 4, 5, k, 9, 10. Maka k = ····
15. Sebuah kelompok terdiri dari 2005 anggota. Setiap anggota memegang tepat satu rahasia. Setiap anggota dapat mengirim surat kepada anggota lain manapun untuk menyampaikan seluruh rahasia yang dipegangnya. Banyaknya surat yang perlu dikirim agar semua anggota kelompok mengetahui seluruh rahasia adalah ·····
16. Banyaknya pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi persamaan 2xy − 5x + y = 55 adalah ····
17. Himpunan A dan B saling lepas dan A ∪ B = {1, 2, 3, ···, 9}. Hasil perkalian semua unsur A sama dengan jumlah semua unsur B. Unsur terkecil B adalah ····
18. Bentuk sederhana dari

$$\frac{(2^3-1)(3^3-1)(4^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)(4^3+1)}\cdots\frac{(100^3-1)}{(100^3+1)}$$

adalah ····
19. Misalkan ABCD adalah limas segitiga beraturan, yaitu bangun ruang bersisi empat yang berbentuk segitiga samasisi. Misalkan S adalah titik tengah rusuk AB dan T titik tengah rusuk CD. Jika panjang rusuk ABCD adalah 1 satuan panjang, maka panjang ST adalah ····
20. Untuk sembarang bilangan real a, notasi $\lfloor a \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari atau sama dengan a. Jika x bilangan real yang memenuhi $\lfloor x+\sqrt{3} \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor \sqrt{3} \rfloor$, maka x − $\lfloor x \rfloor$ tidak akan lebih besar dari ·····

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2005

TINGKAT PROVINSI

BAGIAN KEDUA

WAKTU : 120 MENIT

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2005

BAGIAN KEDUA

1. Panjang sisi terbesar pada segiempat talibusur ABCD adalah a, sedangkan jari-jari lingkaran luar ΔACD adalah 1. Tentukan nilai terkecil yang mungkin bagi a. Segiempat ABCD yang bagaimana yang memberikan nilai a sama dengan nilai terkecil tersebut ?
2. Di dalam sebuah kotak terdapat 4 bola yang masing-masing bernomor 1, 2, 3 dan 4. Anggi mengambil bola secara acak, mencatat nomornya, dan mengembalikannya ke dalam kotak. Hal yang sama ia lakukan sebanyak 4 kali. Misalkan jumlah dari keempat nomor bola yang terambil adalah 12. Berapakah peluang bola yang terambil selalu bernomor 3 ?
3. Jika α, β dan γ adalah akar-akar persamaan $x^3 - x - 1 = 0$, tentukan
$$\frac{1+\alpha}{1-\alpha}+\frac{1+\beta}{1-\beta}+\frac{1+\gamma}{1-\gamma}$$
4. Panjang ketiga sisi a, b, c dengan $a \le b \le c$, sebuah segitiga siku-siku adalah bilangan bulat. Tentukan semua barisan (a, b, c) agar nilai keliling dan nilai luas segitiga tersebut sama.
5. Misalkan A dan B dua himpunan, masing-masing beranggotakan bilangan-bilangan asli yang berurutan. Jumlah rata-rata aritmatika unsur-unsur A dan rata-rata aritmatika unsur-unsur B adalah 5002. Jika $A \cap B = \{2005\}$, tentukan unsur terbesar yang mungkin dari himpunan $A \cup B$.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2005

TINGKAT PROVINSI

SOLUSI SOAL

Bagian Pertama

WWW.JELAJAHNALAR.COM

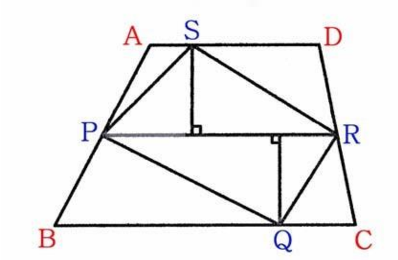
Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2005

BAGIAN PERTAMA

1. Bilangan rasional + bilangan tak rasional = bilangan tak rasional
   $\therefore$ a + b adalah bilangan **tak rasional.**
2. Sepuluh bilangan prima pertama adalah 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.
   2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 19 + 23 + 29 = 129
   $\therefore$ Jumlah sepuluh bilangan prima pertama = **129**
3. $\{1, 2\} \subseteq X \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$
   X terdiri dari sedikitnya 2 unsur dan maksimal 5 unsur dengan 2 unsur di antaranya haruslah 1 dan 2. Sedangkan sisanya dipilih dari unsur-unsur 3, 4 atau 5.
   Jika X terdiri dari 2 unsur maka banyaknya himpunan X = ${}_3C_0 = 1$
   Jika X terdiri dari 3 unsur maka banyaknya himpunan X = ${}_3C_1 = 3$
   Jika X terdiri dari 4 unsur maka banyaknya himpunan X = ${}_3C_2 = 3$
   Jika X terdiri dari 5 unsur maka banyaknya himpunan X = ${}_3C_3 = 1$
   $\therefore$ Banyaknya himpunan X = 1 + 3 + 3 + 1 = **8.**
4. N = 123456789101112 $\cdots$ 9899100
   Banyaknya angka 123456789 adalah 9.
   Karena 10, 11, $\cdots$, 99 adalah bilangan 2 angka maka banyaknya digit 101112$\cdots$99 adalah genap.
   Banyaknya angka 100 = 3
   Maka banyaknya angka N adalah merupakan bilangan genap.
   Mengingat $350^2 = 122500$, $351^2 = 123201$, $352^2 = 123904$, $110^2 = 12100$, $111^2 = 12321$, $112^2 = 12544$
   maka kemungkinan tiga angka pertama dari $\sqrt{N}$ adalah 351 atau 111.
   Akan dibuktikan bahwa jika tiga angka pertama $\sqrt{N}$ adalah 111 maka banyaknya digit $\lfloor\lfloor N\rfloor$ akan ganjil sedangkan jika tiga angka pertama $\sqrt{N}$ adalah 351 maka banyaknya digit $\lfloor N\rfloor$ akan genap.
   $N = (111 \cdot 10^k + p)^2 = 12321 \cdot 10^{2k} + 222p \cdot 10^k + p^2$ dengan banyaknya angka $\lfloor p\rfloor$ tidak lebih dari k.
   Karena banyaknya angka $\lfloor p\rfloor$ tidak lebih dari k maka $p < 10^k$.
   $N < 12321 \cdot 10^{2k} + 222 \cdot 10^{2k} + 10^{2k} = 12544 \cdot 10^{2k}$
   $12321 \cdot 10^{2k} < N < 12544 \cdot 10^{2k}$
   Maka banyaknya angka N sama dengan banyaknya angka $12321 \cdot 10^{2k}$ yang merupakan bilangan ganjil.
   $N = (351 \cdot 10^k + p)^2 = 123201 \cdot 10^{2k} + 702p \cdot 10^k + p^2$ dengan banyaknya angka $\lfloor p\rfloor$ tidak lebih dari k.
   Karena banyaknya angka $\lfloor p\rfloor$ tidak lebih dari k maka $p < 10^k$.
   $N < 123201 \cdot 10^{2k} + 702 \cdot 10^{2k} + 10^{2k} = 123904 \cdot 10^{2k}$
   $123201 \cdot 10^{2k} < N < 123904 \cdot 10^{2k}$
   Maka banyaknya angka N sama dengan banyaknya angka $123201 \cdot 10^{2k}$ yang merupakan bilangan genap.

∴ Tiga angka pertama $\sqrt{N}$ adalah **351.**

5. Misalkan [PQRS] menyatakan luas segiempat PQRS

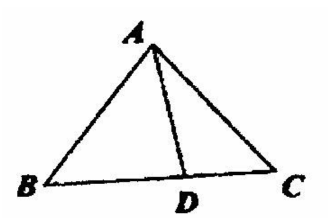


Misalkan juga jarak antara garis AD dan BC adalah t
[ABCD] = ½ (AD + BC) · t
Karena P dan R berurutan adalah pertengahan AB dan CD maka PR sejajar CD dan berlaku :
PR = ½ (AD + BC)
Jarak titik Q ke PR = jarak titik S ke PR = ½ t
[PQRS] = [PQR] + [PRS] = ½ (½t)(PR) + ½ (½t)(PR)
[PQRS] = (½t)(PR) = ½ (½ (AD + BC) · t) = ½ [ABCD]
∴ Rasio luas segiempat PQRS terhadap luas trapesium ABCD adalah **1 : 2**

6. Bilangan kuadrat yang juga merupakan bilangan pangkat tiga adalah bilangan pangkat enam.
$2^6 = 64$ dan $3^6 = 729$
∴ Bilangan tiga-angka terkecil yang merupakan bilangan kuadrat sempurna dan bilangan kubik (pangkat tiga) sempurna sekaligus adalah **729.**

7. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{4}+\sqrt{b}} = \frac{p}{q}$ dengan a, b, p dan q asli dan a ≤ b serta p dan q keduanya relatif prima.
$\left(q\sqrt{3} - 2p\right)^2 = \left(p\sqrt{b} - q\sqrt{a}\right)^2$
$3q^2 + 4p^2 - 4pq\,3 = p^2b + q^2a - 2pq\sqrt{a}$
Karena a, b, p, q semuanya asli maka $2\sqrt{3} = \sqrt{ab}$ sehingga ab = 12.
Kemungkinan pasangan (a, b) yang memenuhi adalah (1, 12), (2, 6) dan (3, 4)
Jika a = 1 dan b = 12 maka $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{4}+\sqrt{b}} = \frac{1}{2}$ yang merupakan bilangan rasional.
Jika a = 2 dan b = 6 maka $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{4}+\sqrt{b}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ yang bukan merupakan bilangan rasional.
Jika a = 3 dan b = 4 maka $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{a}}{\sqrt{4}+\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ yang bukan merupakan bilangan rasional.
∴ Pasangan terurut (a, b) adalah **(1, 12)**

8.



Misalkan ∠BAD = α

Karena AD = BD maka ∠ABD = α

Karena AB = AC maka ∠ACB = α

Pada ΔABC berlaku (α) + (α + 39°) + (α) = 180°. Maka α = 47°

∴ Besarnya sudut BAD = **47°.**

9. v_n = 1½ km/jam dan v_t = 4½ km/jam

Misalkan jarak antara kaki bukit dan puncak bukit dalam km adalah s.

$\frac{s}{1,5} + \frac{s}{4,5} = 6$ maka $s = \frac{27}{4}$ km

∴ Jarak antara kaki bukit dan puncak bukit = $\frac{27}{4}$ **km**

10. Karena keliling segienam beraturan sama dengan keliling segitiga sama sisi maka panjang sisi segitiga beraturan dua kali panjang sisi segienam beraturan.

Misalkan panjang sisi segienam beraturan = a maka panjang sisi segitiga sama sisi = 2a.

Luas segitiga sama sisi = ½ $(2a)^2$ sin 60° = $\sqrt{3}$

a = 1

Pada segienam beraturan, jari-jari lingkaran luar segienam beraturan sama dengan panjang sisinya.

Luas segienam beraturan = 6 · ½ (a^2) sin 60°

∴ Luas segienam beraturan = $\frac{3}{2}\sqrt{3}$

11. Kemungkinan penjumlahan dua angka dadu bilangan prima adalah 2, 3, 5, 7, atau 11.

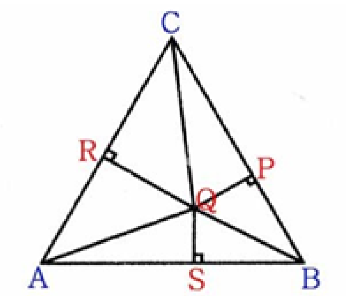
Jika jumlah angka dadu = 2 maka banyaknya kemungkinan ada 1, yaitu (1,1)

* Jika jumlah angka dadu = 3 maka banyaknya kemungkinan ada 2, yaitu (1,2), (2,1)
* Jika jumlah angka dadu = 5 maka banyaknya kemungkinan ada 4, yaitu (1,4), (2,3), (3,2), (4,1)
* Jika jumlah angka dadu = 7 maka banyaknya kemungkinan ada 6, yaitu (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)
* Jika jumlah angka dadu = 11 maka banyaknya kemungkinan ada 2, yaitu (5,6), (6,5)

Banyaknya kemungkinan seluruhnya = 1 + 2 + 4 + 6 + 2 = 15

∴ Peluang jumlah kedua angka dadu yang muncul adalah bilangan prima = $\frac{15}{16}$

12. Misalkan segitiga tersebut adalah ΔABC. Maka AB + AC + BC = p sehingga AB = AC = BC = $\frac{1}{3}p$



Luas ΔABC = $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}p\right)^2 \sin 60° = \frac{1}{36}p^2\sqrt{3}$ dan QP + QR + QS = s

Luas ΔABC = Luas ΔABQ + Luas ΔACQ + Luas ΔBCQ = ½ AB QS + ½ AC QR + ½ BC QP

$\frac{1}{36}p^2\sqrt{3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}p\right)(s)$

$\therefore p = 2s\sqrt{3}$

13. $ab + bc = 44$ dan $ac + bc = 23$ dengan a, b, c asli dan $a \geq b \geq c$

    Karena $c(a + b) = 23$ dengan a, b dan c asli maka c = 1 atau 23

    Jika c = 23 maka a + b = 1 (tidak memenuhi sebab $a + b \geq 2$). Maka c = 1

    $a + b = 23$ dan $ab + b = 44$

    $(23 - b)b + b = 44$, maka $b^2 - 24b + 44 = 0$ sehingga $(b - 22)(b - 2) = 0$

    b = 2 atau b = 22

    Jika b = 22 maka a = 1 (tidak memenuhi $a \geq b$). Maka b = 2 dan a = 21

    $\therefore$ Barisan bilangan asli (a, b, c) yang memenuhi adalah **(21, 2, 1).**

14. Misal garis tersebut terletak pada sumbu X.

    Angap titik A adalah titik paling kiri, D paling kanan serta B dan C terletak di antara A dan D dengan titik terdekat pada A adalah B.

    Tanpa mengurangi keumuman misalkan titik A berada pada x = 0 dan D pada koordinat x = 10.

    Karena ada yang berjarak 1 dan 9 maka salah satu B berada di x = 1 atau C pada x = 9

    - Jika B terletak pada x = 1

      Jarak B dan D = 9

      Karena harus ada dua titik yang berjarak 4 maka kemungkinan posisi C ada di x = 4, 5 atau 6. Posisi C tidak mungkin di x = 4 sebab akan membuat jarak antara sebarang dua titik adalah 1, 3, 4, 6, 9, 10.

      Posisi C tidak mungkin di x = 5 sebab akan membuat jarak antara sebarang dua titik adalah 1, 4, 5, 9, 10 (tidak ada nilai k)

      Maka posisi C di x = 6 yang akan membuat jarak dua titik sebarang adalah 1, 4, 5, 6, 9, 10

      k = 6

    - Jika C terletak pada x = 9

      Jarak C dan A = 9

      Karena harus ada dua titik yang berjarak 4 maka kemungkinan posisi B ada di x = 4, 5 atau 6. Posisi B tidak mungkin di x = 6 sebab akan membuat jarak antara sebarang dua titik adalah 1, 3, 4, 6, 9, 10.

      Posisi B tidak mungkin di x = 5 sebab akan membuat jarak antara sebarang dua titik adalah 1, 4, 5, 9, 10 (tidak ada nilai k)

      Maka posisi B di x = 4 yang akan membuat jarak dua titik sebarang adalah 1, 4, 5, 6, 9, 10

      k = 6

    $\therefore$ Maka k = **6**

15. Secara umum untuk kelompok terdiri dari n anggota. Orang ke-k akan menerima surat setelah sedikitnya terjadi $k - 2$ telepon. Maka orang terakhir akan menerima surat yang pertama sedikitnya setelah terjadi $n - 2$ kiriman surat. Setelah orang ke-n menerima surat berarti sedikitnya telah terjadi $n - 1$ kiriman surat. Semua informasi yang didapat oleh orang ke-n akan disebar kepada seluruh orang selain dirinya. Sedikitnya dibutuhkan $n - 1$ surat.

Maka banyaknya surat minimum yang diperlukan sehingga setiap orang akan mengetahui n informasi adalah $2(n - 1)$

$\therefore$ Banyaknya surat yang diperlukan adalah **4008.**

16. $2xy - 5x + y = 55$, maka $(2x + 1)(2y - 5) = 105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$

    Maka $2y - 5$ membagi 105 sehingga $2y - 5 = \pm1, \pm3, \pm5, \pm7, \pm15, \pm21, \pm35, \pm105$.

    Karena 105 merupakan perkalian bilangan ganjil maka semua faktor 105 adalah bilangan ganjil. Karena penjumlahan dua bilangan ganjil adalah bilangan genap yang pasti habis dibagi 2 maka berapa pun faktor positif dan faktor negatif dari 105 akan membuat $2x + 1$ dan $2y - 5$ keduanya membagi faktor dari 105 tersebut.

    105 miliki 8 faktor positif dan 8 faktor negatif.

    $\therefore$ Maka banyaknya pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi adalah **16.**

17. Misalkan hasil perkalian semua unsur A = p dan penjumlahan semua unsur B = s, maka p = s Himpunan A dapat terdiri dari 1 atau lebih unsur.

    $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$

    - Andaikan 1 adalah unsur terkecil B.
        - Jika A terdiri dari sedikitnya 4 unsur

          Karena 1 bukanlah unsur dari A maka $p \geq 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 > 45$ (tidak dapat tercapai p=s)
        - Jika A terdiri dari 3 unsur

          Misalkan ketiga unsur A tersebut adalah a, b dan c. Jelas bahwa $abc < 45$

          Kemungkinan unsur-unsur A adalah (2,3,4), (2,3,5), (2,3,6), (2,3,7) dan (2,4,5)

          Jika unsur-unsur A adalah (2,3,4) maka $p = 24$ dan $s = 45 - 9 = 36$ (tidak memenuhi p=s)

          Jika unsur-unsur A adalah (2,3,5) maka $p = 30$ dan $s = 45 - 10 = 35$ (tidak memenuhi p=s)

          Jika unsur-unsur A adalah (2,3,6) maka $p = 36$ dan $s = 45 - 11 = 34$ (tidak memenuhi p=s)

          Jika unsur-unsur A adalah (2,3,7) maka $p = 42$ dan $s = 45 - 12 = 33$ (tidak memenuhi p=s)

          Jika unsur-unsur A adalah (2,4,5) maka $p = 40$ dan $s = 45 - 11 = 34$ (tidak memenuhi p=s)

          Maka jika A terdiri dari 3 unsur maka tidak ada yang memenuhi p = s.
        - Jika A terdiri dari 2 unsur

          Misalkan kedua unsur A tersebut adalah a dan b dengan $1 \leq a, b \leq 9$.

          Karena p = s maka $ab = 45 - a - b$ sehingga $(a + 1)(b + 1) = 46 = 23 \cdot 2$

          Misalkan $a > b$ maka $a + 1 = 23$ dan $b + 1 = 2$. Maka $a = 22$ (tidak memenuhi $a \leq 9$)
        - Jika A terdiri dari 1 unsur

          $p \leq 9$ sedangkan $s \geq 45 - 9 = 36$ (tidak mungkin tercapai p = s)
    - Andaikan 2 adalah unsur terkecil B

      Jika A = {1, 4, 8} dan B = {2, 3, 5, 6, 7, 9} maka :

      $p = 1 \cdot 4 \cdot 8 = 32$ dan $s = 45 - 1 - 4 - 8 = 32$ (terpenuhi p = s)

    $\therefore$ Unsur terkecil dari B adalah **2**.

18. Misalkan $\frac{(2^3-1)(3^3-1)(4^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)(4^3+1)} \cdots \frac{(100^3-1)}{(100^3+1)} = X$

$\frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)}$

$X = \frac{(2-1)(3-1)(4-1)}{(2+1)(3+1)(4+1)} \cdots \frac{(100-1)}{(100+1)} \frac{(2^2+2+1)(3^2+3+1)(4^2+4+1)}{(2^2-2+1)(3^2-3+1)(4^2-4+1)} \cdots \frac{(100^2+100+1)}{(100^2-100+1)}$

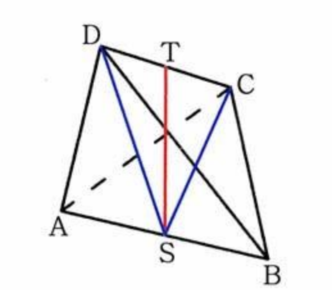
Perhatikan bahwa $n^2 + n + 1 = (n + 1)^2 - (n + 1) + 1$. Maka $2^2 + 2 + 1 = 3^2 - 3 + 1$; $3^2 + 3 + 1 = 4^2 - 4 + 1$ dan seterusnya.

$X = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 99}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdots 101} \cdot \frac{100^2+100+1}{2^2-2+1}$

$X = \frac{2}{101 \cdot 101} \cdot \frac{10101}{3} = \frac{1}{50 \cdot 101} \cdot 3367$

$\therefore \frac{(2^3-1)(3^3-1)(4^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)(4^3+1)} \cdots \frac{(100^3-1)}{(100^3+1)} = \frac{3367}{5050}$

19.



Karena ΔABD sama sisi dan S pertengahan AB maka DS garis tinggi.

DS = AD sin 60° = ½ $\sqrt{3}$.

Dengan cara yang sama CS = ½ $\sqrt{3}$. Maka ΔCDS sama kaki. Karena ΔCDS sama kaki dan T pertengahan CD maka ST tegak lurus DT.

$ST^2 = DS^2 - DT^2$

$ST = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$

$\therefore \ ST = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

20. $\lfloor x + \sqrt{3} \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor \sqrt{3} \rfloor$

$\lfloor x + \sqrt{3} \rfloor > x + \sqrt{3} - 1$

$\lfloor x \rfloor + \lfloor \sqrt{3} \rfloor > x + \sqrt{3} - 1$

Mengingat $\lfloor \sqrt{3} \rfloor = 1$ maka :

$x - \lfloor x \rfloor < 2 - \sqrt{3}$

Jika $x - \lfloor x \rfloor = 2 - \sqrt{3}$ maka $\lfloor x + \sqrt{3} \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor \sqrt{3} \rfloor$ akan menjadi $\lfloor x \rfloor + 2 = \lfloor x \rfloor + 1$ sehingga kesamaan tidak mungkin terjadi.

Jika $x - \lfloor x \rfloor$ kurang sedikit dari $2 - \sqrt{3}$ maka $\lfloor x + \sqrt{3} \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor \sqrt{3} \rfloor$ akan menjadi $\lfloor x \rfloor + 1 = \lfloor x \rfloor + 1$ sehingga kesamaan terjadi.

$\therefore$ Maka $x - \lfloor x \rfloor$ tidak akan lebih besar dari $2 - \sqrt{3}$.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2005

TINGKAT PROVINSI

SOLUSI SOAL

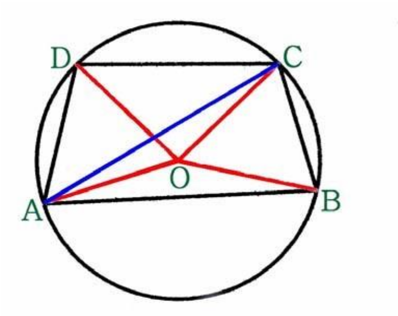
Bagian Kedua

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2005

BAGIAN KEDUA

1.



Misalkan ABCD adalah segiempat tali busur tersebut dan O adalah pusat lingkaran. Karena lingkaran tersebut juga merupakan lingkaran luar ΔABC maka sesuai dalil sinus :

$\frac{AB}{\sin \angle ACB} = 2R = 2$ dengan R menyatakan jari-jari lingkaran luar ΔABC

Karena ∠AOB = 2∠ACB maka :

$AB = 2\sin\left(\frac{\angle AOB}{2}\right)$

Dengan cara yang sama didapat :

$BC = 2\sin\left(\frac{\angle BOC}{2}\right)$

$CD = 2\sin\left(\frac{\angle COD}{2}\right)$

$AD = 2\sin\left(\frac{\angle AOD}{2}\right)$

∠AOB + ∠BOC + ∠COD + ∠AOD = 360°

Maka min(∠AOB, ∠BOC, ∠COD, ∠AOD) ≤ 90°

Diketahui bahwa a = maks (AB, BC, CD, AD)

Karena untuk 0° ≤ x ≤ 90° nilai sin x naik maka :

a = maks (AB, BC, CD, AD) ≥ 2 sin $\left(\frac{90^o}{2}\right)$

$a \geq \sqrt{2}$

Maka nilai minimal a = $\sqrt{2}$

Karena maks(∠AOB, ∠BOC, ∠COD, ∠AOD) = min(∠AOB, ∠BOC, ∠COD, ∠AOD) = 90° maka :

∠AOB = ∠BOC = ∠COD = ∠AOD = 90° yang berarti AB = BC = CD = AD.

Karena ∠AOD = 90° sedangkan ΔAOD sama kaki maka ∠DOA = 45°. Dengan cara yang sama didapat ∠COD = 45° yang berarti segiempat ABCD adalah persegi.

∴ **Maka nilai a terkecil adalah $\sqrt{2}$ yang membuat segiempat ABCD adalah persegi.**

2. Kemungkinan empat jenis bola yang terambil adalah :
   - Keempat bola tersebut adalah (1, 3, 4, 4)

     Karena ada 4 obyek dan terdapat 2 yang sama maka banyaknya kemungkinan = $\frac{4!}{2!} = 12$

     Semua kemungkinannya adalah (1, 3, 4, 4); (1, 4, 3, 4); (1, 4, 4, 3); (3, 1, 4, 4); (3, 4, 1, 4); (3, 4, 4, 1); (4, 1, 3, 4); (4, 1, 4, 3); (4, 3, 1, 4); (4, 3, 4, 1); (4, 4, 1, 3); (4, 4, 3, 1).
   - Keempat bola tersebut adalah (2, 3, 3, 4)

     Banyaknya kemungkinan = $\frac{4!}{2!}$ = 12

     Semua kemungkinannya adalah (2, 3, 3, 4); (2, 3, 4, 3); (2, 4, 3, 3); (3, 2, 3, 4); (3, 2, 4, 3); (3, 3, 2, 4); (3, 3, 4, 2); (3, 4, 2, 3); (3, 4, 3, 2); (4, 2, 3, 3); (4, 3, 2, 3); (4, 3, 3, 2).
   - Keempat bola tersebut adalah (2, 2, 4, 4)

     Banyaknya kemungkinan = $\frac{4!}{2!\cdot 2!}$ = 6

     Semua kemungkinannya adalah (2, 2, 4, 4); (2, 4, 2, 4); (2, 4, 4, 2); (4, 2, 2, 4); (4, 2, 4, 2); (4, 4, 2, 2).
   - Keempat bola tersebut adalah (3, 3, 3, 3)

     Banyaknya kemungkinan = $\frac{4!}{4!}$ = 1

     Semua kemungkinannya adalah (3, 3, 3, 3)

   Total banyaknya kemungkinan adalah 12 + 12 + 6 + 1 = 31

   Hanya ada satu cara kemungkinan angka yang muncul selalu 3.

   ∴ Peluang bola yang terambil selalu bernomor 3 adalah = $\frac{1}{31}$

3. Dari $x^3 - x - 1 = 0$ serta $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$ didapat A = 1, B = 0, C = −1 dan D = −1

   $\alpha+\beta+\gamma = -\frac{B}{A} = 0$

   $\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma = C = \frac{-1}{1} = -1$

   $\alpha\beta\gamma = -\frac{D}{A} = \frac{(-1)}{1} = 1$

   $$\frac{1+\alpha}{1-\alpha}+\frac{1+\beta}{1-\beta}+\frac{1+\gamma}{1-\gamma} = \frac{(1+\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)+(1+\beta)(1-\alpha)(1-\gamma)+(1+\gamma)(1-\alpha)(1-\gamma)}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)}$$

   $$= \frac{3-(\alpha+\beta+\gamma)-(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)+3\alpha\beta\gamma}{1-(\alpha+\beta+\gamma)+(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)-\alpha\beta\gamma}$$

   $$= \frac{3-(0)-(-1)+3(1)}{1-(0)+(-1)-(1)}$$

   $$= -7$$

   $$\therefore \frac{1+\alpha}{1-\alpha}+\frac{1+\beta}{1-\beta}+\frac{1+\gamma}{1-\gamma} = -7$$

4. $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ ······························ (1)

   Luas ΔABC = ½ab = a + b + c, maka ab = 2(a + b + c) ···························· (2)

   Karena a, b dan c adalah bilangan bulat maka sekurang-kurangnya salah satu di antara a atau b adalah kelipatan 2.

   Jika a = 2k dengan k ∈ bilangan asli maka :

$2k\sqrt{c^2-4k^2} = 2(2k + \sqrt{c^2-4k^2} + c)$
$k\sqrt{c^2-4k^2} = (2k + \sqrt{c^2-4k^2} + c)$
$(k-1)\sqrt{c^2-4k^2} = c + 2k$
$(k-1)^2(c+2k)(c-2k) = (c+2k)^2$
$(k-1)^2(c-2k) = (c+2k)$
$(k-1)^2(c-2k) = c - 2k + 4k$
$(c-2k)(k^2-2k) = 4k$

Karena k ≠ 0 maka $(c-2k)(k-2) = 4$ .... (3)

Karena c, k ∈ bilangan asli maka (k − 2) pasti membagi 4 dan karena c > 2k maka (k − 2) > 0 Nilai k yang memenuhi adalah 3; 4; 6

Untuk k = 3 maka a = 6 sehingga c = 10 dan b = 8 .... (4)
Untuk k = 4 maka a = 8 sehingga c = 10 dan b = 6 .... (5)
Untuk k = 6 maka a = 12 sehingga c = 13 dan b = 5 .... (6)
Karena a dan b simetris maka jika b = 2k akan didapat
Untuk k = 3 maka b = 6 sehingga c = 10 dan a = 8 .... (7)
Untuk k = 4 maka b = 8 sehingga c = 10 dan a = 6 .... (8)
Untuk k = 6 maka b = 12 sehingga c = 13 dan a = 5 .... (9)

Tripel (a, b, c) yang memenuhi a ≤ b ≤ c adalah (6, 8, 10) dan (5, 12, 13).
Setelah dicek ke persamaan a + b + c = ½ab maka kedua tripel ini memenuhi.

∴ **Maka tripel (a, b, c) yang memenuhi adalah (6, 8, 10) dan (5, 12, 13)**

5. Karena A dan B masing-masing beranggotakan bilangan asli berurutan sedangkan A ∩ B = {2005} maka 2005 adalah anggota terbesar dari A dan anggota terkecil dari B. A = {x, x + 1, x + 2, ⋯, 2005) dan B = {2005, 2006, ⋯, y − 1, y} A ∪ B = {x, x + 1, ⋯, y − 1, y}

   Maka unsur yang terbesar dari A ∪ B adalah y.

   $\frac{x+x+1+\cdots+2005}{2006-x} + \frac{2005+2006+\cdots+y}{y-2004} = 5002$

   $\frac{x+2005}{2} + \frac{2005+y}{2} = 5002$

   x + y + 4010 = 10004

   x + y = 5994

   Karena x bilangan asli maka x terkecil = 1 sehingga maksimum y = 5994 − 1 = 5993.

   ∴ **Unsur terbesar yang mungkin dari A ∪ B adalah 5993.**

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2005

TINGKAT NASIONAL

HARI PERTAMA

WAKTU : 180 MENIT

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Nasional Tahun 2005

1. Misalkan n bilangan bulat positif. Tentukan banyaknya segitiga (tidak saling kongruen) yang panjang setiap sisinya adalah bilangan bulat dan panjang sisi terpanjangnya adalah n.
2. Untuk sebarang bilangan asli n, didefinisikan p(n) sebagai hasil kali digit-digit n (dalam representasi basis 10). Tentukan semua bilangan asli n sehingga $11 \cdot p(n) = n^2 - 2005$.
3. Misalkan k dan m bilangan-bilangan asli sehingga $\frac{1}{2}\left(\sqrt{k+4\sqrt{m}}-\sqrt{k}\right)$ adalah bilangan bulat.
   a. Buktikan bahwa $\sqrt{k}$ bilangan rasional
   b. Buktikan bahwa $\sqrt{k}$ bilangan asli
4. Misalkan M suatu titik di dalam segitiga ABC sedemikian rupa hingga $\angle AMC = 90^o$, $\angle AMB = 150^o$ dan $\angle BMC = 120^o$. Titik pusat lingkaran luar dari segitiga-segitiga AMC, AMB dan BMC berturutturut adalah P, Q dan R. Buktikan bahwa luas segitiga PQR lebih besar dari luas segitiga ABC.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2005

TINGKAT NASIONAL

HARI KEDUA

WAKTU : 180 MENIT

Soal Olimpiade Matematika Tingkat Nasional Tahun 2005

5. Untuk sebarang bilangan real x, notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x. Buktikan bahwa ada tepat satu bilangan bulat m yang memenuhi persamaan
$$m - \left\lfloor \frac{m}{2005} \right\rfloor = 2005$$
6. Tentukan semua tripel bilangan bulat (x, y, z) yang memenuhi sistem persamaan
$$x(y + z) = y^2 + z^2 - 2$$
$$y(z + x) = z^2 + x^2 - 2$$
$$z(x + y) = x^2 + y^2 - 2$$
7. Misalkan ABCD sebuah segiempat konveks. Persegi AB_1A_2B dibuat sehingga kedua titik A_2, B_1 terletak di luar segiempat ABCD. Dengan cara serupa diperoleh persegi-persegi BC_1B_2C, CD_1C_2D dan DA_1D_2A. Misalkan K adalah titik potong AA_2 dengan BB_1, L adalah titik potong BB_2 dengan CC_1, M adalah titik Potong CC_2 dengan DD_1, dan N adalah titik potong DD_2 dengan AA_1. Buktikan bahwa KM tegak lurus LN.
8. Sebuah kompetisi matematika diikuti oleh 90 peserta. Setiap peserta berkenalan dengan paling sedikit 60 peserta lainnya. Salah seorang peserta, Amin, menyatakan bahwa setidaknya terdapat empat orang peserta yang banyak teman barunya sama. Periksa kebenaran pernyataan Amin.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2005

TINGKAT NASIONAL

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Nasional Tahun 2005

1. Misalkan panjang sisi-sisi segitiga adalah a, b dan c dengan a adalah sisi terpanjang, maka a = n
   Karena panjang salah satu sisi segitiga selalu kurang dari jumlah kedua sisi yang lain dan karena $b \le n$ dan $c \le n$ maka $a < b + c$ maka $b + c = n + 1, n + 2, n + 3, \cdots, 2n$.
   Jika c = k untuk k bilangan asli maka $b = n - k + i$ untuk suatu nilai $i = 1, 2, 3, \cdots, k$.
   Jika k = 1 maka nilai (b, c) ada 1 yaitu (n, 1)
   Jika k = 2 maka nilai (b, c) ada 2 yaitu (n − 1, 2) dan (n, 2)
   Jika k = 3 maka nilai (b, c) ada 3 yaitu (n − 2, 3), (n − 1, 3) dan (n, 3).
   Jika k = 4 maka nilai (b, c) ada 4 yaitu (n − 3, 4), (n − 2, 4), (n − 1, 4) dan (n, 4).
   ⋮
   Jika k = n − 1 maka nilai (b, c) ada n − 1 yaitu (2, n − 1), (3, n − 1), (4, n − 1), ⋯, (n, n − 1)
   Jika k = n maka nilai (b, c) ada n yaitu (1, n), (2, n), (3, n), ⋯, (n, n)
   Banyaknya seluruh segitiga adalah $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{1}{2}n(n + 1)$
   Tetapi segitiga-segitiga sama kaki dengan sisi-sisi a = n, b = k untuk $1 \le k < n$ dan c = n kongruen dengan segitiga-segitiga sama kaki dengan sisi-sisi a = n, b = n dan c = k untuk $1 \le k < n$. Segitiga-segitiga yang seperti itu banyaknya ada n − 1 yang terhitung dua kali di dalam perhitungan ½n(n + 1).
   Perlu diingat pula bahwa segitiga-segitiga yang bukan sama kaki dengan a = n, b = n − p dan c = p + r ≤ n tidak kongruen dengan segitiga-segitiga yang panjang sisinya a = n, b = p + r ≤ n dan c = n − p walaupun ketiga sisinya sama.
   Maka jumlah segitiga yang dicari = ½n(n + 1) − (n − 1)
   ∴ **Banyaknya segitiga** = $\frac{n^2-n+2}{2}$
2. Alternatif 1 :
   Akan ditunjukkan bahwa untuk setiap n bilangan asli maka $p(n) \le n$
   Misalkan $n = 10^k a_k + 10^{k-1}a_{k-1} + \cdots + 10a_1 + a_o$ dengan $a_1, a_2, \cdots, a_k \in \{0, 1, 2, \cdots, 9\}$
   Karena $a_{0\,maks} = a_{1\,maks} = a_{2\,maks} = \cdots = a_{k-1\,maks} = 9$ maka $p(n) = a_o \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_k \le 9^k \cdot a_k \le 10^k \cdot a_k \le n$
   Maka $n^2 - 2005 = 11\,p(n) \le 11n$
   $\left(n - \frac{11}{2}\right)^2 \le \frac{8141}{4} \le 45^2$
   $1 \le n \le 50$ ······························ (1)
   Selain itu $n^2 - 2005 = 11\,p(n) \ge 0$
   $n \ge 45$ ··· (2)
   Dari (1) dan (2) didapat n = 45, 46, 47, 48, 49 atau 50
   Dengan menguji ke persamaan $n^2 - 2005 = 11\,p(n)$ didapat hanya n = 49 yang memenuhi.

∴ Nilai n yang memenuhi hanya n = **49**

Alternatif 2 :

- Jika n terdiri dari k digit dengan $k \geq 4$
  n^2 merupakan bilangan dengan sedikitnya $2k - 1$ digit. Maka $n^2 - 2005$ merupakan bilangan dengan sedikitnya $2k - 2$ digit.
  $11\ p(n) \leq 11 \cdot 9 \cdot 9 \cdot \cdots \cdot 9 < 10^{k+1}$.
  Maka 11 p(n) merupakan bilangan dengan sebanyak-banyaknya terdiri dari k + 1 digit.
  Untuk $k \geq 4$ maka $2k \geq k + 4$ sehingga $2k - 2 \geq k + 2$
  maka $2k - 2 > k + 1$ sehingga tidak ada yang memenuhi $11 \cdot p(n) = n^2 - 2005$
- Jika n terdiri dari 3 digit
  Jika angka ratusan n lebih dari 1 maka $n^2 - 2005 \geq 200^2 - 2005 = 37995$
  $11 \cdot p(n) \leq 11 \cdot 9^3 = 8019 < n^2 - 2005$ (tanda kesamaan tidak akan terjadi)
  Jika angka ratusan n sama dengan 1 maka $n^2 - 2005 \geq 100^2 - 2005 = 7995$
  $11 \cdot p(n) \leq 11 \cdot 1 \cdot 9^2 = 891 < n^2 - 2005$ (tanda kesamaan tidak akan terjadi)
- Jika n terdiri dari 2 digit
  Misalkan n = 10a + b
  n tidak mungkin genap sebab ruas kanan akan ganjil sedangkan ruas kiri genap.
  Karena n ganjil dan $2005 \equiv 1 \pmod 4$ maka $n^2 - 2005 \equiv 0 \pmod 4$
  Akibatnya salah satu a atau b habis dibagi 4. Karena n ganjil maka a = 4 atau 8.
  $n^2 \equiv 0, 1, 4 \pmod 8$
  $2005 \equiv 5 \pmod 8$
  Ruas kanan tidak habis dibagi 8, maka a = 4
  $11ab = (10a + b)^2 - 2005$
  $44b = 1600 + 80b + b^2 - 2005$
  $b^2 - 36b - 405 = 0$. Maka $(b - 9)(b + 45) = 0$ sehingga b = 9
  Bilangan tersebut adalah n = 49
- Jika n terdiri dari 1 digit
  Ruas kanan akan bernilai negatif (tidak memenuhi)
  ∴ Nilai n yang memenuhi hanya n = **49**

3. Alternatif 1 :

Perhatikan bahwa $\frac{1}{2}\left(\sqrt{k+4\sqrt{m}}-\sqrt{k}\right)$ merupakan akar persamaan $x^2 + x\sqrt{k} - \sqrt{m} = 0$.

a. Misalkan $\frac{1}{2}\left(\sqrt{k+4\sqrt{4}}-\sqrt{k}\right) = n$ adalah akar bulat dari $x^2 + x\sqrt{k} - \sqrt{m} = 0$ maka :
   $n^2 + n\sqrt{k} = \sqrt{m} = 0$, maka $\sqrt{m} = n^2 + n\sqrt{k}$
   Karena m bilangan asli maka $n \neq 0$
   $m = n^4 + 2n^3\sqrt{k} + kn^2$
   $\sqrt{k} = \frac{m-n^4-kn^2}{2n^3}$

Karena m dan k adalah bilangan asli dan n bilangan bulat tak nol maka $\sqrt{k}$ merupakan bilangan rasional (terbukti).

b. Misalkan $\sqrt{k} = \frac{p}{q}$ untuk suatu bilangan asli p dan q dengan FPB(p, q) = 1.

$k = \frac{p^2}{q^2}$. Karena FPB(p, q) = 1 maka FPB(p^2, q^2) = 1

Karena k adalah bilangan asli maka $q^2 = 1$.

k = p^2, maka $\sqrt{k} = p$ dengan p bilangan asli.

Terbukti bahwa $\sqrt{k}$ adalah bilangan asli.

Alternatif 2 :

a. Karena $\frac{1}{2}\left(\sqrt{4 + 4\sqrt{m}} - \sqrt{k}\right)$ bulat dan m asli maka $\sqrt{k + 4\sqrt{m}} - \sqrt{k} = p$ untuk bilangan asli p.

$\left(\sqrt{k + 4\sqrt{m}}\right)^2 = \left(p + \sqrt{k}\right)^2$

$4\sqrt{m} = p^2 + 2p\sqrt{k}$

Karena m asli maka tidak mungkin p = 0.

$16m = p^4 + 4p^2k + 4p^3\sqrt{k}$

$\sqrt{k} = \frac{16m - p^4 - 4p^2k}{4p^3}$

Karena m dan k asli sedangkan p bulat tak nol maka $\sqrt{k}$ merupakan bilangan rasional (terbukti).

b. Misalkan $\sqrt{k} = \frac{p}{q}$ untuk suatu bilangan asli p dan q dengan FPB(p, q) = 1.

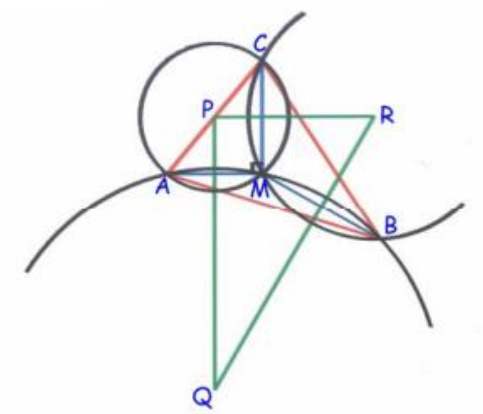
$k = \frac{p^2}{q^2}$. Karena FPB(p, q) = 1 maka FPB(p^2, q^2) = 1

Karena k adalah bilangan asli maka $q^2 = 1$.

k = p^2, maka $\sqrt{k} = p$ dengan p bilangan asli.

Terbukti bahwa $\sqrt{k}$ adalah bilangan asli.

4. Perhatikan gambar berikut



Misalkan AB = c, BC = a, CA = b, ∠BAC = α, ∠ABC = β dan ∠ACB = γ

Diketahui bahwa $\angle AMC = 90^o$, $\angle AMB = 150^o$ dan $\angle BMC = 120^o$

Misalkan juga notasi [ ] menyatakan luas suatu segitiga.

$[ABC] = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$

Karena $\angle AMC = 90^o$ sedangkan P pusat lingkaran luar ΔAMC maka P adalah pertengahan AC.

Karena P, Q dan R pusat lingkaran dan AM, BM serta CM adalah tali busur persekutuan dua lingkaran maka $PR \perp CM$, $PQ \perp AM$ dan $QR \perp BM$.

Karena $\angle AMC = 90^o$ sedangkan $PR \perp CM$ serta $PQ \perp AM$ maka $\angle RPQ = 90^o$.

Karena $\angle BMC = 120^o$ sedangkan $PR \perp CM$ serta $QR \perp BM$ maka $\angle PRQ = 60^o$.

$\angle PQR = 180^o - 90^o - 60^o = 30^o$

Karena PR tegak lurus CM dan RC = RM maka $\angle CRP = \angle PRM = \theta$

Karena $RQ \perp MB$ dan RM = RB maka $\angle MRQ = \angle QRB = \varphi$ sehingga $\angle PRM + \angle MRQ = \theta + \varphi = 60^o$

$\angle CRB = 2(\theta + \varphi) = 120^o$

Karena RC = RB sedangkan $\angle CRB = 120^o$ maka $\angle RCB = 30^o$

Misalkan R_1 adalah jari-jari lingkaran luar ΔBMC $\Rightarrow$ $a = 2R_1 \sin \angle BMC$

$R_1 = CR = \frac{a}{\sqrt{3}}$

Pada ΔCPR berlaku :

$$PR^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2\left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)\cos(\gamma + 30^\circ)$$

$$PR^2 = \frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{3} - \frac{ab}{\sqrt{3}}(\cos \gamma \cos 30^\circ - \sin \gamma \sin 30^\circ)$$

$$PR^2 = \frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{3} - \frac{ab}{\sqrt{3}}\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2[ABC]}{ab} \cdot \frac{1}{2}\right)$$

$$PR^2 = \frac{a^2}{12} + \frac{c^2}{4} + \frac{[ABC]}{\sqrt{3}}$$

$PQ = PR \tan 60^o = PR\sqrt{3}$

$[PQR] = \frac{1}{2} \cdot PQ \cdot PR$

$[PQR] = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{a^2}{12} + \frac{c^2}{4} + \frac{[ABC]}{\sqrt{3}}\right)$

$[PQR] - [ABC] = \frac{\sqrt{3}}{8}\left(\frac{a^2}{3} + c^2\right) - \frac{[ABC]}{2}$

Dengan ketaksamaan AM-GM didapat:

$$[PQR]-[ABC]\geq\frac{\sqrt{3}}{8}\cdot 2\sqrt{\frac{a^2}{3}\cdot c^2}-\frac{[ABC]}{2}$$
$$[PQR]-[ABC]\geq\frac{ac}{4}-\frac{[ABC]}{2}=\frac{ac}{4}-\frac{ac\sin\beta}{4}$$
$$[PQR]-[ABC]\geq\frac{ac}{4}(1-\sin\beta)>0 \text{ sebab } \beta\neq 90^\circ$$
$$[PQR]>[ABC]$$

∴ **Terbukti bahwa luas segitiga PQR lebih besar dari luas segitiga ABC**.

5. Alternatif 1 :

$$m-\left\lfloor\frac{m}{2005}\right\rfloor=2005\text{, maka }\left\lfloor\frac{m}{2005}\right\rfloor=m-2005$$
$$\frac{m}{2005}-1<m-2005\leq\frac{m}{2005}$$
$m - 2005 < 2005(m - 2005) \leq m$
$-2005 < 2004m - 2005^2 \leq 0$
$2005^2 - 2005 < 2004m \leq 2005^2$
$$2005 < m \leq \frac{2005^2}{2004}$$
$2005 < m \leq 2006$

Nilai m yang memenuhi hanya m = 2006

Jika m = 2006 diuji ke persamaan semula maka ini akan memenuhi.

∴ **Terbukti bahwa** $m-\left\lfloor\frac{m}{2005}\right\rfloor=2005$ **mempunyai tepat satu penyelesaian.**

Alternatif 2 :

Bilangan bulat dapat dibuat ke bentuk m = 2005k + n untuk k bulat dan n ∈ {0, 1, 2, ⋯, 2004}.

$m-\left\lfloor\frac{m}{2005}\right\rfloor=2005$, maka $2005k+n-\left\lfloor\frac{2005k+n}{2005}\right\rfloor=2005$

Karena 0 ≤ n < 2004 maka 2005k + n − k = 2005

2004k + n = 2005

Karena 0 ≤ n < 2004 maka 2004k > 0 sehingga k > 0

Karena 0 ≤ n < 2004 maka 2004k ≤ 2005

0 < k ≤ 1, maka k = 1

2004 (1) + n = 2005, maka n = 1

Karena nilai k yang memenuhi hanya ada 1 maka kemungkinan nilai m yang memenuhi juga hanya ada 1 yaitu m = 2005 ⋅ 1 + 1 = 2006.

Jika m = 2006 diuji ke persamaan semula maka ini akan memenuhi.

∴ **Terbukti bahwa** $m-\left\lfloor\frac{m}{2005}\right\rfloor=2005$ **mempunyai tepat satu penyelesaian**

6. $x(y + z) = y^2 + z^2 - 2$ ······································ (1)
$y(z + x) = z^2 + x^2 - 2$ ······································ (2)

$z(x + y) = x^2 + y^2 - 2$ ·· (3)

Kurangkan (1) dengan (2),

$z(x - y) = y^2 - x^2 = (x + y)(y - x)$, maka $(x - y)(x + y + z) = 0$ ······························ (4)

Kurangkan (1) dengan (3),

$y(x - z) = z^2 - x^2 = (x + z)(z - x)$, maka $(x - z)(x + y + z) = 0$ ······························ (5)

Kurangkan (2) dengan (3),

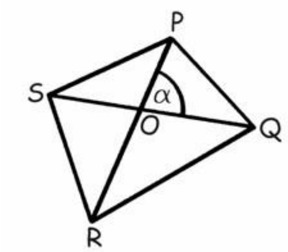
$x(y - z) = z^2 - y^2 = (y + z)(z - y)$, maka $(y - z)(x + y + z) = 0$ ······························ (6)

- Kasus I :
  $x + y + z = 0$
  Subtitusikan ke persamaan (1), (2) atau (3)
  $x(-x) = y^2 + z^2 - 2$, maka $x^2 + y^2 + z^2 = 2$
  Maka penyelesaiannya adalah $x^2 = 1$; $y^2 = 1$ dan $z^2 = 0$ serta permutasinya.
  Tripel (x, y, z) yang memenuhi adalah (x, y, z) = (1, −1, 0), (1, 0, −1), (−1, 1, 0), (−1, 0, 1), (0, 1, −1) dan (0, −1, 1)
- Kasus II :
  $x + y + z \neq 0$
  Berdasarkan persamaan (4), (5) dan (6) maka $x = y = z$
  Subtitusikan ke persamaan (1) didapat $2x^2 = 2x^2 - 2$, maka tidak ada nilai (x, y, z) yang memenuhi.

∴ **(x, y, z) = (1, −1, 0), (1, 0, −1), (−1, 1, 0), (−1, 0, 1), (0, 1, −1) dan (0, −1, 1)**

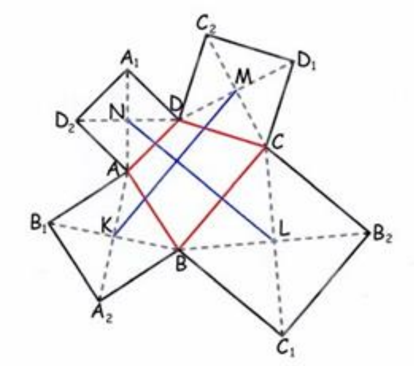
7. Alternatif 1 :

Akan dibutikan bahwa pada segiempat konveks PQRS berlaku $PQ^2 + RS^2 = QR^2 + PS^2$ jika dan hanya jika PR tegak lurus QS.



- Jika PR tegak lurus QS atau $\alpha = 90^\circ$.
  $PQ^2 + RS^2 = (PO^2 + OQ^2) + (OR^2 + OS)^2 = (PO^2 + OS^2) + (OR^2 + OQ^2)$
  $PQ^2 + RS^2 = PS^2 + QR^2$
- Jika $PQ^2 + RS^2 = QR^2 + PS^2$
  Dengan dalil cosinus didapat :
  $PQ^2 + RS^2 = QR^2 + PS^2$
  $OP^2 + OQ^2 - 2\ OP \cdot OQ \cos\alpha + OR^2 + OS^2 - 2\ OR \cdot OS \cos\alpha = OQ^2 + OR^2 - 2\ OQ \cdot OR \cos(180^\circ - \alpha)$
  $+ OP^2 + OS^2 - 2\ OP \cdot OS \cos(180^\circ - \alpha)$
  $(2\ OQ\ OR + 2\ OP\ OS + 2\ OP\ OQ + 2\ OR\ OS) \cos\alpha = 0$
  $\alpha = 90^\circ$

Terbukti bahwa pada segiempat konveks PQRS berlaku $PQ^2 + RS^2 = QR^2 + PS^2$ jika dan hanya jika PR tegak lurus QS.



Perhatikan ΔKAN.

AA_1 dan AA_2 keduanya diagonal bidang persegi maka ∠KAB = ∠KAB_1 = ∠NAD_2 = ∠NAD = 45°.

Dengan dalil cosinus didapat :

$KN^2 = AK^2 + AN^2 - 2\ AK \cdot AN \cos \angle KAN$.

Jika ∠BAD ≥ 90° maka ∠KAN = 270° − ∠BAD dan jika ∠BAD < 90° maka ∠KAN = 90° + ∠BAD

Akibatnya cos ∠KAN akan tetap bernilai −sin ∠BAD.

$KN^2 = AK^2 + AN^2 + 2\ AK \cdot AN \sin \angle BAD$.

$KN^2 = \frac{1}{2}AB^2 + \frac{1}{2}AD^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}AB \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}AD \cdot \sin \angle BAD$

Dengan mengingat luas ΔABD = [ABD] = ½ AB · AD sin ∠BAD maka

$KN^2 = ½AB^2 + ½AD^2 + 2[ABD]$

Dengan cara yang sama untuk ΔKBL, ΔLCM dan ΔMDN didapat :

$KL^2 = ½AB^2 + ½BC^2 + 2[ABC]$

$LM^2 = ½BC^2 + ½CD^2 + 2[BCD]$

$MN^2 = ½CD^2 + ½AD^2 + 2[ACD]$

Sehingga mengingat [ABD] + [BCD] = [ABC] + [ACD] maka

$KN^2 + LM^2 = KL^2 + MN^2$

Mengingat pembuktian yang telah dibuat di awal maka KM tegak lurus LN (terbukti)

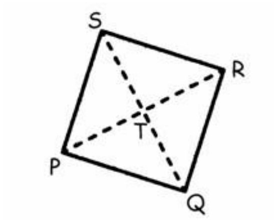
Alternatif 2 :

Jika titik (x, y) dirotasi sebesar θ berlawanan arah jarum jam dengan titik pusat (a, b) sehingga diperoleh bayangan (x', y') maka berlaku :

$x' = a + (x - a)\cos\theta - (y - b)\sin\theta$ ·· (1)

$y' = b + (x - a)\sin\theta + (y - b)\cos\theta$ ·· (2)

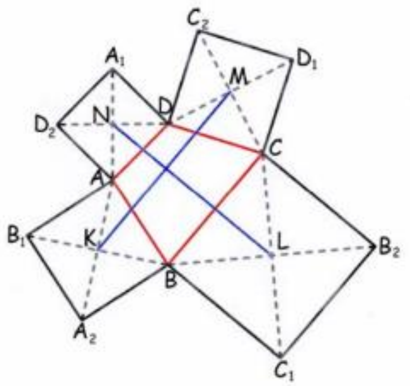
Pembuktian persamaan di atas dapat dilihat di Buku Matematika SMA Bab Transformasi Geometri.



Misalkan koordinat P(x_1, y_1) dan Q(x_2, y_2).

Karena PQRS adalah persegi maka koordinat titik S didapat dengan merotasi titik Q sejauh 90^o berlawanan arah jarum jam dengan pusat di P. Maka koordinat S($x_1 + y_1 - y_2$, $x_2 - x_1 + y_1$)

Karena T adalah pertengahan S dan Q maka koordinat $T\left(\frac{x_1+x_2+y_1-y_2}{2}, \frac{x_2-x_1+y_1+y_2}{2}\right)$



Tanpa mengurangi keumuman soal misalkan titik A terletak pada (0,0) sedangkan koordinat B(x_B, y_B), C(x_C, y_C) dan D(x_D, y_D).

Dari penjelasan sebelumnya didapat koordinat

$K\left(\frac{x_B+y_B}{2}, \frac{-x_B+y_B}{2}\right), L\left(\frac{x_C+x_B+y_C-y_B}{2}, \frac{x_B-x_C+y_B+y_C}{2}\right),$

$M\left(\frac{x_D+x_C+y_D-y_C}{2}, \frac{x_C-x_D+y_C+y_D}{2}\right)$ dan $N\left(\frac{x_D-y_D}{2}, \frac{x_D+y_D}{2}\right)$.

$$\overrightarrow{KM} = \frac{x_D+x_C-x_B+y_D-y_C-y_B}{2}\hat{i} + \frac{x_C+x_B-x_D+y_C+y_D-y_B}{2}\hat{j}$$

$$\overrightarrow{LN} = \frac{x_D-x_C-x_B-y_D-y_C+y_B}{2}\hat{i} + \frac{x_D-x_B+x_C+y_D-y_B-y_C}{2}\hat{j}$$

$$\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{LN} = \frac{1}{4}(x_D+x_C-x_B+y_D-y_C-y_B)(x_D-x_C-x_B-y_D-y_C+y_B)+\frac{1}{4}(x_C+x_B-x_D+y_C+y_D-y_B)(x_D-x_B+x_C+y_D-y_B-y_C)$$

Mengingat (a + b)(a − b) = $a^2 - b^2$ maka :

$$\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{LN} = \frac{1}{4}\left((x_D-x_B-y_C)^2-(x_C+y_D-y_B)^2\right)+\frac{1}{4}\left((x_C+y_D-y_B)^2-(x_D-x_B-y_C)^2\right)=0$$

Karena $\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{LN} = 0$ maka KM tegak lurus LN (terbukti)

8. Misalkan k_i adalah banyaknya kenalan peserta i dan $K = \sum_{i-1}^{90} k_i$ adalah penjumlahan banyaknya kenalan masing-masing peserta.

Jika peserta A berkenalan dengan B maka banyaknya kenalan A bertambah 1 begitu juga dengan B. Jelas bahwa K akan bernilai genap.
Andaikan bahwa paling banyak tiga orang siswa akan memiliki jumlah kenalan sama banyaknya.
Karena $k_i \geq 60$ maka $k_i \in \{60, 61, 62, 63, \cdots, 89\}$. Banyaknya kemungkinan nilai k_i ada 30.
Karena 90/3 = 30 maka terdapat tepat masing-masing 3 peserta memiliki kenalan sebanyak 60 orang, 61 orang, 62 orang, $\cdots$, 89 orang.
Maka $K = 3 \cdot 60 + 3 \cdot 61 + 3 \cdot 62 + \cdots + 3 \cdot 89$
Di antara 60, 61, 62, 63, $\cdots$, 89 terdapat 15 bilangan ganjil dan 15 bilangan genap. Mengingat bahwa penjumlahan sejumlah ganjil dari bilangan ganjil menghasilkan bilangan ganjil maka :
$K = 3 \cdot 60 + 3 \cdot 61 + 3 \cdot 62 + \cdots + 3 \cdot 89$ merupakan bilangan ganjil (kontradiksi dengan kenyatan semula bahwa K bernilai genap).
Maka pengandaian bahwa paling banyak tiga orang siswa akan memiliki jumlah kenalan sama banyaknya tidak terbukti.
$\therefore$ **Terbukti bahwa setidaknya terdapat 4 peserta yang banya**k kenalannya sama.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2006

TINGKAT KABUPATEN/KOTA

WAKTU : 3,5 JAM

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Kabupaten/Kota Tahun 2006

Bagian Pertama

Pilih satu jawaban yang benar. Dalam hal terdapat lebih dari satu jawaban yang benar, pilih jawaban yang paling baik.

1. Jumlah tiga bilangan prima pertama yang lebih dari 50 adalah
   A. 169 B. 171 C. 173 D. 175 E. 177
2. Dalam sebuah kotak terdapat 5 bola merah dan 10 bola putih. Jika diambil dua bola secara bersamaan, peluang memperoleh dua bola berwarna sama adalah
   A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{2}{21}$ D. $\frac{10}{21}$ E. $\frac{11}{21}$
3. Jika $X = \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}$, maka X =
   A. $\frac{2}{9}$ B. $\frac{5}{12}$ C. $\frac{4}{9}$ D. $\frac{9}{4}$ E. $\frac{12}{5}$
4. Pada segitiga ABC, titik F membagi sisi AC dalam perbandingan 1 : 2. Misalkan G titik tengah BF dan E titik perpotongan antara sisi BC dengan AG. Maka titik E membagi sisi BC dalam perbandingan
   A. 1 : 4 B. 1 : 3 C. 2 : 5 D. 4 : 11 E. 3 : 8
5. Dalam suatu pertemuan terjadi 28 jabat tangan (salaman). Setiap dua orang salaing berjabat tangan paling banyak sekali. Banyaknya orang yang hadir dalam pertemuan tersebut paling sedikit adalah
   A. 28 B. 27 C. 14 D. 8 E. 7
6. Gaji David lebih banyak 20% daripada gaji Andika. Ketika Andika memperoleh kenaikan gaji, gajinya menjadi lebih banyak 20% daripada gaji David. Persentase kenaikan gaji Andika adalah
   A. 0,44 B. 20 C. 44 D. 144 E. tidak bisa dipastikan
7. Misalkan T adalah himpunan semua titik pada bidang-xy yang memenuhi $|x| + |y| \leq 4$. Luas daerah T adalah
   A. 4 B. 8 C. 12 D. 16 E. 32
8. Definisikan a*b = a + b + 1 untuk semua bilangan bulat a, b. Jika p memenuhi a*p = a, untuk setiap bilangan bulat a, maka p =
   A. −1 B. 0 C. 1 D. 2 E. tidak ada yang memenuhi
9. Setiap dong adalah ding, dan beberapa dung juga dong.
   X : Terdapat dong yang juga ding sekaligus dung
   Y : Beberapa ding adalah dung
   Z : Terdapat dong yang bukan dung
   A. Hanya X yang benar C. Hanya Z yang benar E. X, Y dan Z semuanya salah
   B. Hanya Y yang benar D. X dan Y keduanya benar
10. Banyaknya solusi pasangan bilangan bulat positif persamaan 3x + 5y = 501 adalah
   A. 33 B. 34 C. 35 D. 36 E. 37

Bagian Kedua

Isikan hanya jawaban saja pada tempat yang disediakan

11. Diketahui $a + (a + 1) + (a + 2) + \cdots + 50 = 1139$. Jika a bilangan positif, maka a = $\cdots\cdots$
12. Di antara lima orang gadis, Arinta, Elsi, Putri, Rita, dan Venny, dua orang memakai rok dan tiga orang memakai celana panjang. Arinta dan Putri mengenakan jenis pakaian yang sama. Jenis pakaian Putri dan Esi berbeda, demikian pula dengan Elsi dan Rita. Kedua gadis yang memakai rok adalah $\cdots\cdots$
13. Barisan 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, $\cdots$ terdiri dari semua bilangan asli yang bukan kuadrat atau pangkat tiga bilangan bulat. Suku ke-250 barisan adalah $\cdots\cdots$
14. Jika $f(xy) = f(x + y)$ dan $f(7) = 7$, maka $f(49) = \cdots\cdot$
15. Pada sebuah barisan aritmatika, nilai suku ke-25 tiga kali nilai suku ke-5. Suku yang bernilai dua kali nilai suku pertama adalah suku ke $\cdots\cdots$
16. Dimas membeli majalah setiap 5 hari sekali, sedangkan Andre membeli majalah setiap 8 hari sekali. Kemarin Dimas membeli majalah. Andre membeli majalah hari ini. Keduanya paling cepat akan membeli majalah pada hari yang sama $\cdots\cdots$ hari lagi.
17. Nanang mencari semua bilangan empat-angka yang selisihnya dengan jumlah keempat angkanya adalah 2007. Banyaknya bilangan yang ditemukan Nanang tidak akan lebih dari $\cdots\cdots$
18. Parabola $y = ax^2 + bx + c$ memiliki puncak dengan koordinat (4, 2). Jika titik (2, 0) terletak pada parabola, maka abc = $\cdots\cdots$
19. Sebuah garis ℓ_1 mempunyai kemiringan -2 dan melalui titik $(p, -3)$. Sebuah garis lainnya ℓ_2, tegak lurus terhadap ℓ_1 di titik (a, b) dan melalui titik (6, p). Bila dinyatakan dalam p, maka a =
20. Pada segitiga ABC yang tumpul di C, titik M adalah titik tengah AB. Melalui C dibuat garis tegak lurus pada BC yang memotong AB di titik E. Dari M tarik garis memotong BC tegak lurus di D. Jika luas segitiga ABC adalah 54 satuan luas, maka luas segitiga BED adalah $\cdots\cdots$

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2006

TINGKAT KABUPATEN/KOTA

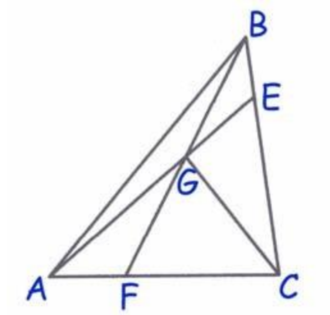
SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Kabupaten/Kota Tahun 2006

BAGIAN PERTAMA

1. (Jawaban : C)
   Tiga bilangan prima pertama yang lebih besar dari 50 adalah 53, 59 dan 61.
   53   59 + 61 = 173
   $\therefore$ Jumlah tiga bilangan prima pertama yang lebih besar dari 50 = **173**
2. (Jawaban : E)
   Kemungkinan kedua bola tersebut adalah keduanya berwarna merah atau keduanya berwarna putih.
   Peluang = $\frac{{}_5C_2}{{}_{15}C_2} + \frac{{}_{10}C_2}{{}_{15}C_2}$
   $\therefore$ Peluang = $\frac{11}{21}$
3. (Jawaban : B)
   $X = \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2+\frac{2}{5}} = \frac{5}{12}$
   $\therefore\ X = \frac{5}{12}$
4. (Jawaban : B)



   Misalkan tanda [KML] menyatakan luas ΔKML
   Misalkan [ABC] = X. Karena AF : FC = 1 : 2 maka [ABF] = $\frac{1}{3}$ [ABC] = $\frac{1}{3}$ X
   Karena G pertengahan BF maka [ABG]= ½ [ABF] = $\frac{1}{6}$ X = [AFG]
   Karena AF : FC = 1 : 2 maka [CGF]= 2 [AFG]= $\frac{1}{3}$ X sehingga [CGB] = $\frac{1}{3}$ X
   Misalkan [CGE] = P dan [EGB] = Q
   $\frac{BE}{EC} = \frac{Q}{P} = \frac{Q+X/6}{P+X/3+X/6}$
   $6PQ + 3XQ = 6PQ + PX$
   $\frac{Q}{P} = \frac{1}{3}$ sehingga BE : EC = 1 : 3
   $\therefore$ Titik E membagi BC dalam perbandingan = **1 : 3**
5. (Jawaban : D)

Misalkan banyaknya orang = n

${}_{n}C_{2}$ = 28, maka $\frac{n(n-1)}{2} = 28$

$n^2 - n - 56 = 0$, maka $(n - 8)(n + 7) = 0$

∴ Banyaknya orang yang hadir = **8**

6. (Jawaban : C)

Misal gaji Andika sebelum kenaikan = A dan setelah memperoleh kenaikan gaji gajinya menjadi A_x.

Gaji David sebelum kenaikan = 1,2A .

$A_x = 1{,}2 \cdot (1{,}2A) = 1{,}44A$

Kenaikan gaji Andika = 1,44A − A = 0,44A

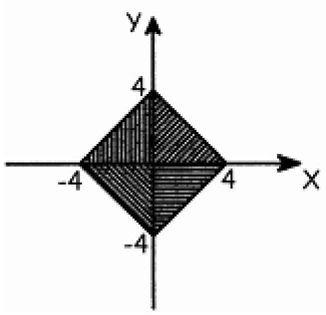
∴ Kenaikan gaji Andika adalah **44 %**

7. (Jawaban : E)

$|x| + |y| \leq 4$

- Jika x dan y di kuadran I maka $|x| = x$ dan $|y| = y$. Persamaannya adalah $x + y \leq 4$
- Jika x dan y di kuadran II maka $|x| = -x$ dan $|y| = y$. Persamaannya adalah $-x + y \leq 4$
- Jika x dan y di kuadran III maka $|x| = -x$ dan $|y| = -y$. Persamaannya adalah $-x - y \leq 4$
- Jika x dan y di kuadran IV maka $|x| = x$ dan $|y| = -y$. Persamaannya adalah $x - y \leq 4$

Gambar persamaan-persamaan tersebut adalah :



Karena panjang sisi-sisinya sama yaitu $4\sqrt{2}$ sedangkan kedua diagonalnya saling tegak lurus maka luasan berupa persegi.

Luas daerah T = $4\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}$

∴ Luas daerah T = **32**

8. (Jawaban : A)

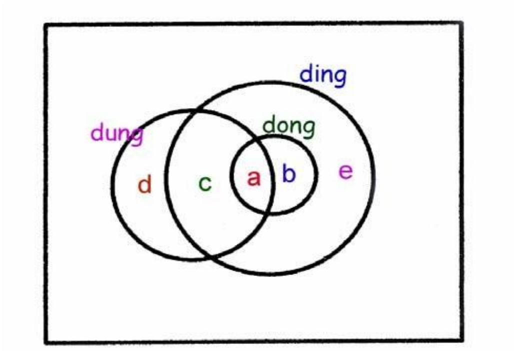
a * b = a + b + 1

a * p = a + p + 1

a = a + p + 1

∴ p = **−1**

9. (Jawaban : D)



Karena setiap dong adalah ding maka dong merupakan himpunan bagian dari ding.
Karena beberapa dung juga dong maka dung dan dong memiliki irisan. Maka a pasti ada.
Karena a pasti ada maka a merupakan dong yang ding sekaligus dung (pernyataan X benar)
Karena a pasti ada maka a adalah merupakan ding yang sekaligus dung (pernyataan Y benar).
Dong yang bukan dung adalah b. Karena b belum pasti ada maka pernyataan Z belum dapat dibuktikan kebenarannya.

∴ **X dan Y keduanya benar.**

10. (Jawaban : A)

$3x + 5y = 501$

$5y = 3(167 - x)$

Karena 3 dan 5 relatif prima maka $y = 3k$ dan $167 - x = 5k$ untuk suatu k bulat positif.

Jelas bahwa $0 < 5y \le 501$ dan $0 < 3x \le 501$, maka $0 < y \le 100$ dan $0 < x \le 167$

Karena terdapat 100 nilai y yang memenuhi dan 167 nilai x yang memenuhi maka banyaknya nilai k yang memenuhi adalah $\left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor = 33$ atau $\left\lfloor \frac{167}{5} \right\rfloor = 33$ yaitu $1 \le k \le 33$.

Contoh : Jika k = 1 maka y = 3 dan x = 162 memenuhi. (k, x, y) = (2,157,6) ; (3,152,9) ; ⋯ juga memenuhi.

∴ Banyaknya pasangan (x, y) yang memenuhi adalah **33**

BAGIAN KEDUA

11. $a + (a + 1) + (a + 2) + \cdots + 50 = 1139$.

Banyaknya bilangan a, (a + 1), (a + 2), ⋯, 50 adalah $50 - a + 1 = 51 - a$

$\frac{1}{2}(51 - a) \cdot (a + 50) = 1139$, maka $a^2 - a - 272 = 0$ sehingga $(a - 17)(a + 16) = 0$

∴ **a = 17**

12. Karena pakaian Elsi baik dengan Putri maupun Rita berbeda maka Putri dan Rita memakai pakaian yang sama.

Karena Arinta, Putri dan Rita memakai pakaian yang sama maka ketiganya tidak mungkin mamakai rok.
Maka Arinta, Putri dan Rita memakai celana panjang sedangkan Elsi dan Venny memakai rok.

∴ Kedua gadis yang memakai rok adalah **Elsi dan Venny.**

13. Bilangan kuadrat yang sekaligus juga bilangan pangkat tiga adalah bilangan pangkat enam.
    Bilangan kuadrat ≤ 265 adalah $1^2, 2^2, \cdots, 16^2$ ada sebanyak 16 bilangan.
    Bilangan pangkat tiga ≤ 265 adalah $1^3, 2^3, \cdots, 6^3$ ada sebanyak 6 bilangan.
    Bilangan pangkat enam ≤ 265 adalah 1^6 dan 2^6 ada sebanyak 2 bilangan.
    Banyaknya bilangan yang bukan pangkat dua atau pangkat tiga yang ≤ 265 = 16 + 6 − 2 = 20.
    Maka 265 adalah suku ke 265 − 20 = 245.
    Lima bilangan setelah 265 yang bukan bilangan kuadrat atau pangkat tiga adalah 266, 267, 268, 269 dan 270.
    ∴ Suku ke-250 dari barisan tersebut adalah **270**
14. f(xy) = f(x + y)
    Jika x = n dan y = 1 maka f(n) = f(n + 1)
    Maka f(49) = f(48) = f(47) = f(46) = ⋯ = f(7)
    ∴ f(49) = **7**
15. $u_{25} = 3(u_5)$, maka a + 24b = 3(a + 4b) sehingga a = 6b
    $u_n = a + (n - 1)b = 2u_1 = 2a$
    6b + (n − 1)b = 2(6b), maka n = 7
    ∴ Suku tersebut adalah suku ke-**7**
16. Misalkan hari ini adalah hari ke-0
    Karena kemarin Dimas membeli majalah sedangkan Dimas membeli setiap 5 hari sekali maka Dimas akan membeli majalah pada hari $h_1 = 5k + 4$ dengan k bilangan asli.
    Karena hari ini Andre membeli majalah sedangkan Andre membeli setiap 8 hari sekali maka Andre akan membeli majalah pada hari $h_2 = 8n$ dengan n bilangan asli.
    Mereka akan membeli majalah pada hari yang sama jika 5k + 4 = 8n.
    Karena 4 dan 8 keduanya habis dibagi 4 maka k harus habis dibagi 4. Nilai k terkecil adalah 4.
    $h_1 = h_2 = 5(4) + 4 = 24$
    ∴ Maka mereka akan membeli majalah pada hari yang sama paling cepat **24** hari lagi.
17. Misalkan bilangan tersebut adalah 1000a + 100b + 10c + d
    Maka 1000a + 100b + 10c + d − a − b − c − d = 2007
    999a + 99b + 9c = 2007, maka 111a + 11b + c = 223
    Karena a > 0 dan 111a < 223 maka a = 1 atau 2.
    Jika a = 1 maka 11b + c = 112 > 11(9) + 9 = 108 (tidak ada nilai b dan c yang memenuhi).
    Jika a = 2 maka 11b + c = 1. Nilai b dan c yang memenuhi hanya b = 0 dan c = 1.
    Tripel (a, b, c) yang memenuhi hanya ada 1 kemungkinan yaitu (2, 0, 1). Nilai d yang memenuhi ada 10 kemungkinan yaitu 0, 1, 2, ⋅⋅, 9.
    Bilangan 4 angka tersebut yang memenuhi ada 10 yaitu 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, ⋯, 2019.
    ∴ Banyaknya bilangan yang ditemukan Nanang tidak akan lebih dari **10.**
18. Persamaan parabola yang berpuncak di (x_p, y_p) adalah $y = a(x - x_p)^2 + y_p$.
    Karena titik puncak parabola di (4, 2) maka $y = a(x - 4)^2 + 2$
    Karena titik (2, 0) terletak pada parabola maka :

$0 = a(2 - 4)^2 + 2$, maka $a = -½$

Persamaan parabola tersebut adalah $y = -½(x - 4)^2 + 2 = -½x^2 + 4x - 6$

$a = -½$; $b = 4$ dan $c = -6$

∴ **abc =** 12

19. Persamaan garis ℓ_1 adalah $y + 3 = -2(x - p)$

Karena ℓ_2 tegak lurus ℓ_1 maka gradien garis ℓ_2 adalah ½.

Persamaan garis ℓ_2 adalah $y - p = ½(x - 6)$ Kedua garis melalui (a, b) maka :

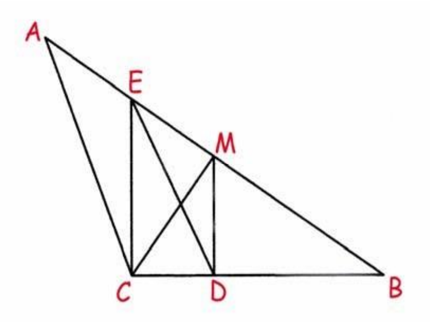
$b + 3 = -2(a - p)$ dan $b - p = ½(a - 6)$

$3 + p = -2(a - p) - ½(a - 6)$

$6 \quad + 2p = -4a + 4p - a + 6$

∴ $a = \frac{2}{5}$ **p**

20. Misalkan ∠ABC = β



Luas ΔABC = ½ · BA · BC sin β = 54

Karena MD sejajar EC maka ΔBMD sebangun dengan ΔBEC

$$\frac{BM}{BD} = \frac{BE}{BC}$$

BM · BC = BD · BE

Luas ΔBED = ½ · BE · BD sin β = ½ · BM · BC sin β

Luas ΔBED = ½ (½ · BA · BC sin β)

Luas ΔBED = ½ Luas ΔABC

∴ Luas segitiga BED adalah **27 satuan luas.**

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2006

TINGKAT PROVINSI

BAGIAN PERTAMA

WAKTU : 90 MENIT

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2006

BAGIAN PERTAMA

1. Hasil penjumlahan semua bilangan bulat di antara $\sqrt[3]{2006}$ dan $\sqrt{2006}$ adalah ····
2. Pada trapesium ABCD, sisi AB sejajar dengan DC. Sebuah lingkaran yang menyinggung keempat sisi trapesium dapat dibuat. Jika AB = 75 dan DC = 40, maka keliling trapesium ABCD = ········
3. Himpunan semua x yang memenuhi $(x - 1)^3 + (x - 2)^2 = 1$ adalah ·····
4. Bilangan prima dua angka terbesar yang merupakan jumlah dua bilangan prima lainnya adalah ····
5. Afkar memilih suku-suku barisan geometri takhingga 1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ untuk membuat barisan geometri takhingga baru yang jumlahnya $\frac{1}{7}$. Tiga suku pertama pilihan Afkar adalah ·····
6. Luas sisi-sisi sebuah balok adalah 486, 486, 243, 243, 162, 162. Volume balok tersebut adalah ·····
7. Nilai maksimum fungsi $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4x+3}$ adalah ····
8. Diberikan fungsi f(x) = $||x - 2| - a| - 3$. Jika grafik f memotong sumbu-x tepat di tiga titik, maka a = ····
9. Untuk bilangan asli n, tuliskan s(n) = 1 + 2 + ··· + n dan p(n) = 1 x 2 x ··· x n. Bilangan genap n terkecil yang memenuhi p(n) habis dibagi s(n) adalah ····
10. Jika $|x| + x + y = 10$ dan $x + |y| - y = 12$, maka x + y = ······
11. Sebuah himpunan tiga bilangan asli disebut *himpunan aritmatika* jika salah satu unsurnya merupakan rata-rata dari dua unsur lainnya. Banyaknya subhimpunan aritmatika dari {1, 2, 3, ···, 8} adalah ····
12. Dari setiap bilangan satu-angka a, bilangan N dibuat dengan menyandingkan ketiga bilangan a + 2, a + 1, a yaitu N = $\overline{(a\ +\ 2)(a\ +1)a}$. Sebagai contoh, untuk a = 8, N = 1098. Kesepuluh bilangan N semacam itu memiliki faktor persekutuan terbesar ·····
13. Jika $x^2 + \frac{1}{x^2} = 47$, maka $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} =$ …………
14. Sebuah kelas akan memilih seorang murid di antara mereka untuk mewakili kelas tersebut. Setiap murid mempunyai kesempatan yang sama untuk dipilih. Peluang seorang murid laki-laki terpilih sama dengan

$\frac{2}{3}$ kali peluang terpilihnya seorang murid perempuan. Persentase murid laki-laki di kelas tersebut adalah ....

15. Pada segitiga ABC, garis bagi sudut A memotong sisi BC di titik D. Jika AB = AD = 2 dan BD = 1, maka CD = ...
16. Jika $(x - 1)^2$ membagi $ax^4 + bx^3 + 1$, maka ab = $\cdots\cdot$
17. Dari titik O ditarik dua setengah-garis (sinar) ℓ_1 dan ℓ_2 yang membentuk sudut lancip α. Titik – titik berbeda A_1, A_3, A_5 terletak pada garis ℓ_2, sedangkan titik-titik A_2, A_4, A_6 terletak di ℓ_1. Jika $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4O = OA_5 = A_5A_6 = A_6A_1$, maka $\alpha = \cdots\cdot\cdot$
18. Banyaknya bilangan 7-angka berbeda yang dapat dibentuk dengan cara mengubah susunan angka 2504224 adalah $\cdots\cdot$
19. Evan membuat sebuah barisan bilangan asli $a_1, a_2, a_3, \cdots$ yang memenuhi $a_{k+1} - a_k = 2(a_k - a_{k-1}) - 1$, untuk $k = 2, 3, \cdots$, dan $a_2 - a_1 = 2$. Jika 2006 muncul dalam barisan, nilai a_1 terkecil yang mungkin adalah $\cdots\cdot\cdot$
20. Pada segitiga ABC, garis-garis berat dari titik sudut B dan titik sudut C saling berpotongan tegak lurus. Nilai minimum ctg B + ctg C adalah $\cdots\cdot\cdot$

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2006

TINGKAT PROVINSI

BAGIAN KEDUA

WAKTU : 120 MENIT

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2006

BAGIAN KEDUA

1. Misalkan segitiga ABC siku-siku di B. Garis tinggi dari B memotong sisi AC di titik D. Jika titik E dan F berturut-turut adalah titik tengah BD dan CD, buktikan bahwa $AE \perp BF$.
2. Misalkan m bilangan asli yang memenuhi $1003 < m < 2006$. Diberikan himpunan bilangan asli $S = \{1, 2, 3, \cdots, m\}$, berapa banyak anggota S harus dipilih agar selalu terdapat paling sedikit satu pasang anggota terpilih yang hasil tambahnya 2006 ?
3. Misalkan d = FPB(7n + 5, 5n + 4), dimana n adalah bilangan asli.
   (a) Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku d = 1 atau 3.
   (b) Buktikan bahwa d = 3 jika dan hanya jika n = 3k + 1, untuk suatu bilangan asli k.
4. Win memiliki dua koin. Ia akan melakukan prosedur berikut berulang-ulang selama ia masih memiliki koin : lempar semua koin yang dimilikinya secara bersamaan; setiap koin yang muncul dengan sisi angka akan diberikannya kepada Albert. Tentukan peluang bahwa Win akan mengulangi prosedur ini lebih dari tiga kali.
5. Misalkan a, b, c bilangan-bilangan asli. Jika semua akar ketiga persamaan

$$x^2 - 2ax + b = 0$$

$$x^2 - 2bx + c = 0$$

$$x^2 - 2cx + a = 0$$

   adalah bilangan asli, tentukan a, b dan c.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2006

TINGKAT PROVINSI

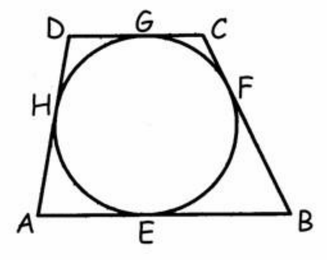
SOLUSI SOAL
BAGIAN PERTAMA

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2006

BAGIAN PERTAMA

1. $12^3 = 1728$; $13^3 = 2197$; $44^2 = 1936$; $45^2 = 2025$
   $\sqrt[3]{2006} < m < \sqrt{2006}$ dapat disederhanakan menjadi $13 \le m \le 44$ untuk m bulat Himpunan m yang memenuhi = {13, 14, 15, ⋯, 44}
   $13 + 14 + 15 + \cdots + 44 = 912$
   ∴ Penjumlahan semua bilangan yang memenuhi sama dengan **912.**
2. Jika titik P di luar lingkaran dan garis yang ditarik dari titik P menyinggung lingkaran tersebut di titik Q dan R maka PQ = PR



   Dari gambar di atas didapat DG = DH ; CG = CF ; BF = BE ; AE = AH
   Keliling = AE + AH + BE + BF + CF + CG + DG + DH = 2 (DG + CG + AE + BE)
   Keliling = 2(DC + AB) = 2(40 + 75)
   ∴ Keliling trapesium = **230**
3. $(x - 1)^3 + (x - 2)^2 = 1$
   $(x - 1)^3 = 1 - (x - 2)^2 = (1 - (x - 2))(1 + (x - 2)) = (3 - x)(x - 1)$
   $(x - 1)((x - 1)^2 - (3 - x)) = 0$
   $(x - 1)(x^2 - x - 2) = 0$
   $(x - 1)(x + 1)(x - 2) = 0$
   ∴ Himpunan semua nilai x yang memenuhi adalah **{−1, 1, 2}**
4. Misalkan a, b dan c adalah ketiga bilangan prima tersebut dengan a = b + c
   Bilangan prima genap hanya ada satu yaitu 2.
   Karena a > 2 maka a pasti ganjil yang menyebabkan paritas b dan c harus berbeda.
   Tanpa mengurangi keumuman misalkan $c \le b$ maka c = 2 a = b + 2 sehingga a − b = 2
   Karena a − b = 2 maka terdapat tepat 1 bilangan asli di antara a dan b. Misalkan bilangan tersebut adalah k. Maka b, k dan a adalah 3 bilangan asli berurutan. Salah satunya harus habis dibagi 3. Karena b dan a bilangan prima lebih dari 3 maka k habis dibagi 3. Karena k juga genap maka k habis dibagi 6.
   Jika k = 16 · 6 = 96 maka b = 95 bukan prima. Jika k = 15 · 6 = 90 maka a = 91 bukan prima. Jika k = 14 · 6 = 84 maka a = 85 bukan prima. Jika k = 13 · 6 = 78 maka b = 77 bukan prima. Jika k = 12 · 6 = 72 maka a = 73 dan b = 71 yang memenuhi keduanya prima

∴ Bilangan prima dua angka terbesar yang memenuhi adalah **73.**

5. $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

   Misalkan bilangan pertama yang dipilih Afkar adalah $(½)^a$ untuk a bilangan bulat tak negatif dan rasio, r = $(½)^b$ untuk b bilangan asli maka :

   $$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^a}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^b} = \frac{1}{7}$$

   Karena b asli maka ½ ≤ 1 − $(½)^b$ < 1

   $$\frac{1}{14} \le \left(\frac{1}{2}\right)^a < \frac{1}{7}$$

   Nilai a yang memenuhi hanya a = 3 sehingga b = 3

   Maka 3 suku pertama yang dipilih Afkar adalah $(½)^3$, $(½)^6$ dan $(½)^9$

   ∴ Tiga suku pertama yang dipilih Afkar adalah $\frac{1}{8}, \frac{1}{64}, \frac{1}{512}$.

6. Misalkan panjang sisi-sisi balok tersebut adalah a, b dan c.

   Tanpa mengurangi keumuman misalkan ab = 486 = $2 \cdot 3^5$; ac = 243 = 3^5 ; bc = 162 = $2 \cdot 3^4$

   (ab)(ac)(bc) = $(abc)^2 = 2^2 \cdot 3^{14}$

   abc = $2 \cdot 3^7$ = 4374

   ∴ Volume balok = **4374**

7. $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4x+3}$, maka $f(x) = 3^{-x^2+4x-3}$

   Agar f(x) maksimum maka y = $-x^2 + 4x - 3$ harus maksimum.

   y = $-x^2 + 4x - 3 = -(x-2)^2 + 1$

   y maksimum = 1 saat x = 2

   $f(x)_{maksimum}$ = 3

   ∴ $f(x)_{maksimum}$ = **3**

8. f(x) = ||x − 2| − a| − 3

   f memotong sumbu x maka ||x − 2| − a| − 3 = 0

   ||x − 2| − a| = 3

   |x − 2| − a = 3 atau |x − 2| − a = −3

   |x − 2| = a + 3 atau |x − 2| = a − 3

   Jika a + 3 = 0 maka |x − 2| = 0 hanya ada 1 penyelesaian. Sebaliknya jika a + 3 ≠ 0 maka penyelesaian |x − 2| = a + 3 ada 2 penyelesaian yaitu x − 2 = a + 3 atau x − 2 = −(a + 3)

   Hal yang sama untuk persamaan |x − 2 | = a − 3

   Maka jika a = −3 akan menyebabkan hanya ada 1 penyelesaian x untuk persamaan |x − 2| = a + 3 namun ada dua nilai x untuk penyelesaian |x − 2| = a − 3

   Sedangkan jika a = 3 akan menyebabkan hanya ada 1 penyelesaian x untuk persamaan |x − 2| = a − 3 namun ada dua nilai x untuk penyelesaian |x − 2| = a + 3

   ∴ Nilai a yang membuat grafik f memotong sumbu x tepat di 3 titik adalah **a = 3 atau a = −3.**

9. s(n) = 1 + 2 + ⋯ + n = ½n(n + 1)
   p(n) = 1 x 2 x ⋯ x n
   Karena n genap maka ½n bilangan bulat.
   Karena n + 1 > 1 ; n + 1 > 2 ; ⋯ ; n + 1 > n maka agar p(n) habis dibagi s(n) maka n + 1 tidak boleh prima.
   Bilangan genap terkecil yang menyebabkan n + 1 bukan prima adalah 8.
   ∴ Bilangan genap terkecil yang memenuhi p(n) habis dibagi s(n) adalah **8.**
10. |x| + x + y = 10 dan x + |y| − y = 12
   - Jika x dan y di kuadran I maka |x| = x dan |y| = y
     2x + y = 10 dan x = 12 sehingga y = −14 (tidak memenuhi (x, y) di kuadran I)
   - Jika x dan y di kuadran II maka |x| = −x dan |y| = y
     y = 10 dan x = 12 (tidak memenuhi (x, y) di kuadran II)
   - Jika x dan y di kuadran III maka |x| = −x dan |y| = −y
     y = 10 dan x − 2y = 12 sehingga x = 32 (tidak memenuhi (x, y) di kuadran III)
   - Jika x dan y di kuadran IV maka |x| = x dan |y| = −y
     2x + y = 10 dan x − 2y = 12
     Nilai (x, y) yang memenuhi adalah $(\frac{32}{5}, -\frac{14}{54})$ (memenuhi (x, y) di kuadran IV)

   ∴ x + y = $\frac{32}{5} - \frac{14}{5} = \frac{18}{5}$
11. Jika a, b dan c adalah himpunan aritmatika maka 2b = a + c dengan a < c.
   - Jika b = 2 maka a + c = 4. Ada 1 pasangan (a, c) yang memenuhi yaitu (1, 3)
   - Jika b = 3 maka a + c = 6. Ada 2 pasangan (a, c) yang memenuhi yaitu (1, 5), (2, 4)
   - Jika b = 4 maka a + c = 8. Ada 3 pasangan (a, c) yang memenuhi yaitu (1, 7), (2, 6), (3, 5)
   - Jika b = 5 maka a + c = 10. Ada 3 pasangan (a, c) yang memenuhi yaitu (2, 8), (3, 7), (4, 6)
   - Jika b = 6 maka a + c = 12. Ada 2 pasangan (a, c) yang memenuhi yaitu (4, 8), (5, 7)
   - Jika b = 7 maka a + c = 14. Ada 1 pasangan (a, c) yang memenuhi yaitu (6, 8)

   ∴ Banyaknya himpunan aritmatika = 1 + 2 + 3 + 3 + 2 + 1 = **12**
12. (a + 2) + (a + 1) + a = 3(a + 1)
   Maka semua bilangan yang berbentuk N = $\overline{(a+2)(a+1)a}$ habis dibagi 3 sebab penjumlahan digitnya habis dibagi 3.
   321 = 3 · 107 dengan 3 dan 107 adalah bilangan prima.
   Tetapi 432/107 bukan bilangan bulat atau 107 tidak membagi 432.
   FPB (321, 432) = 3
   ∴ Maka kesepuluh bilangan N semacam itu memiliki faktor persekutuan terbesar = **3**
13. $x^2 + \frac{1}{x^2} = 47$, maka $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = 47$ sehingga $x + \frac{1}{x} = 7$
   $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 - 2 = 7$
   ∴ $\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} = 3$
14. Misalkan jumlah murid laki-laki = m dan jumlah murid perempuan = n

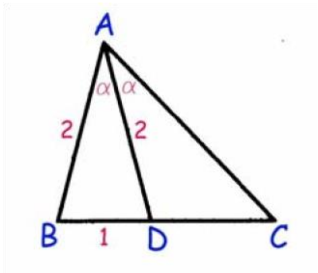
(m : (m + n)) : (n : (m + n)) = 2 : 3

m : n = 2 : 3, maka 3m = 2n

$\frac{m}{m+n} = \frac{2m}{2m+3m} = \frac{2}{5}$

∴ Persentase murid laki-laki di kelas tersebut adalah **40 %**

15.



Karena α < 45 maka AC > AD sehingga AC > 2

Karena AD adalah garis bagi ΔABC maka berlaku $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$ sehingga AC = 2 CD

Misalkan panjang CD = x maka AC = 2x

Pada ΔABD berlaku $\cos\alpha = \frac{2^2+2^2-1^2}{2\cdot 2\cdot 2} = \frac{7}{8}$

Pada ΔABC berlaku $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{(2x)^2+2^2-(1+x)^2}{2\cdot(2x)\cdot 2}$

$\frac{34}{64} = \frac{4x^2+4-(1+2x+x^2)}{8x}$

$17x = 12x^2 - 8x + 12$

$(4x - 3)(3x - 4) = 0$

Karena AC > 2 maka x > 1

Nilai x yang memenuhi hanya x = $\frac{4}{3}$

∴ CD = $\frac{4}{3}$

16. $ax^4 + bx^3 + 1 = q(x) \cdot (x - 1)^2$

Jelas bahwa q(x) harus merupakan fungsi kuadrat.

Karena koefisien x^4 adalah a dan konstanta ruas kiri = 1 maka $q(x) = ax^2 + px + 1$

$ax^4 + bx^3 + 1 = (ax^2 + px + 1) \cdot (x^2 - 2x + 1)$

$ax^4 + bx^3 + 1 = ax^4 + (-2a + p)x^3 + (a - 2p + 1)x^2 + (p - 2)x + 1$

Dari persamaan di atas didapat :

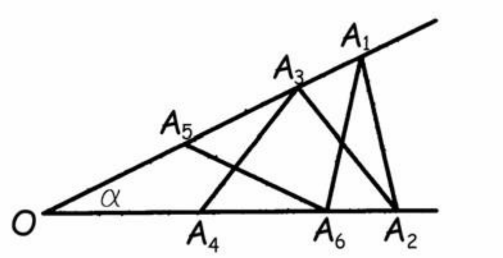
Berdasarkan koefisien x maka p − 2 = 0 sehingga p = 2

Berdasarkan koefisien x^2 maka a − 2p + 1 = 0 sehingga a = 3

Berdasarkan koefisien x^3 maka b = −2a + p sehingga b = −4

∴ ab = −**12**

17.



Karena $A_4O = A_3A_4$ maka ΔOA_4A_3 sama kaki sehingga $\angle OA_3A_4 = \alpha$ dan $\angle A_3A_4A_6 = 2\alpha$

Pada $\Delta A_4A_3A_2$ sama kaki berlaku $\angle A_3A_2A_4 = 2\alpha$, maka $\angle A_4A_3A_2 = 180^o - 4\alpha$ sehingga $\angle A_2A_3A_1 = 3\alpha$

Pada $\Delta A_1A_2A_3$ sama kaki berlaku $\angle A_2A_1A_3 = 3\alpha$, maka $\angle A_1A_2A_3 = 180^o - 6\alpha$

$\angle A_1A_2A_6 = \angle A_3A_2A_4 + \angle A_1A_2A_3 = 180^o - 4\alpha$

Pada $\Delta A_1A_2A_6$ sama kaki berlaku, $\angle A_1A_2A_6 = \angle A_1A_2A_6 = 180^o - 4\alpha$, maka $\angle A_6A_1A_2 = 8\alpha - 180^o$

$\angle A_5A_1A_6 = \angle A_2A_1A_3 - \angle A_6A_1A_2 = 3\alpha - (8\alpha - 180) = 180 - 5\alpha$

Pada $\Delta A_1A_6A_5$ sama kaki berlaku $\angle A_6A_5A_1 = \angle A_5A_1A_6 = 180^o - 5\alpha$, maka $\angle A_6A_5O = 5\alpha$

Pada ΔOA_5A_6 sama kaki berlaku $\angle OA_6A_5 = \angle A_5OA_6 = \alpha$

Pada ΔOA_5A_6 berlaku $\angle A_5OA_6 + \angle OA_5A_6 + \angle OA_6A_5 = 180^o$

$\alpha + 5\alpha + \alpha = 180^o$

$\therefore\ \alpha = \frac{180^o}{7}$

18. Banyaknya susunan 7 angka dengan 3 buah angka 2 yang sama dan 2 buah angka 4 yang sama adalah $\frac{7!}{3!\cdot 2!} = 420$. Tetapi 420 bilangan tersebut termasuk bilangan dengan angka 0 pada angka pertama.

    Banyaknya bilangan dengan 0 pada angka pertama adalah $\frac{6!}{3!\cdot 2!} = 60$

    $\therefore$ Banyaknya bilangan yang dapat dibentuk adalah 420 − 60 = **360.**

19. $a_{k+1} - a_k = 2(a_k - a_{k-1}) - 1$

    Misalkan $a_2 - a_1 = 2 = u_1$

    $a_3 - a_2 = 2(a_2 - a_1) - 1 = 2u_1 - 1 = u_2$

    $a_4 - a_3 = 2(a_3 - a_2) - 1 = 2u_2 - 1 = u_3$

    $\vdots$

    $a_{k+1} - a_k = 2(a_k - a_{k-1}) - 1 = 2u_{k-1} - 1 = u_k$

    Jumlahkan seluruh persamaan di atas didapat :

    $a_{k+1} - a_1 = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_k$

    Karena $a_1, a_2, a_3, \cdots$ semuanya asli maka $a_{k+1} > u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_k$

    Misalkan $a_{k+1} = 2006$

    Agar didapat $(a_1)_{minimal}$ maka $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_k$ harus paling dekat dengan 2006 namun kurang dari 2006

    $u_1 = 2$; $u_2 = 3$; $u_3 = 5$; $u_4 = 9$; $u_5 = 17$; $u_6 = 33$; $u_7 = 65$; $u_8 = 129$; $u_9 = 257$; $u_{10} = 513$ dan $u_{11} = 1025$.

$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{10} = 1033$ sedangkan $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{11} = 2058 > 2006$

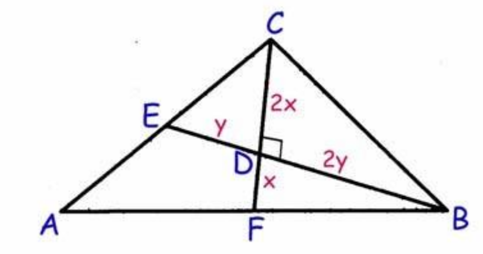
maka $2006 = a_{11}$

$a_{11} - a_1 = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{10} = 1033$

$(a_1)_{minimum} = 2006 - 1033$

$\therefore (a_1)_{minimum} =$ **973**

20.



CF dan BE adalah garis berat yang berpotongan di titik D. Maka CD : DF = 2 : 1 dan BD : DE = 2 : 1

Misalkan DF = x maka CD = 2x dan jika DE = y maka BD = 2y

$\tan B = \tan(\angle CBD + \angle FBD) = \dfrac{\tan\angle CBD + \tan\angle FBD}{1 - \tan\angle CBD \cdot \tan\angle FBD}$

$$\tan B = \frac{\frac{2x}{2y} + \frac{x}{2y}}{1 - \frac{2x}{2y}\cdot\frac{x}{2y}} = \frac{3xy}{2y^2 - x^2}, \text{ maka } ctgB = \frac{2y}{3x} - \frac{x}{3y}$$

$\tan C = \tan(\angle BCD + \angle ECD) = \dfrac{\tan\angle BCD + \tan\angle ECD}{1 - \tan\angle BCD \cdot \tan\angle ECD}$

$$\tan C = \frac{\frac{2y}{2x} + \frac{y}{2x}}{1 - \frac{2y}{2x}\cdot\frac{y}{2x}} = \frac{3xy}{2x^2 - y^2}, \text{ maka } ctgC = \frac{2x}{3y} - \frac{y}{3x}$$

$$ctgB + ctgC = \frac{x}{3y} + \frac{y}{3x}$$

Berdasarkan ketaksamaan AM-GM maka :

$$ctgB + ctgC \geq 2\sqrt{\frac{x}{3y}\cdot\frac{y}{3x}} = \frac{2}{3}$$

$\therefore$ Maka nilai minimum ctg B + ctg C adalah $\frac{2}{3}$

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2006

TINGKAT PROVINSI

SOLUSI SOAL

BAGIAN KEDUA

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2006

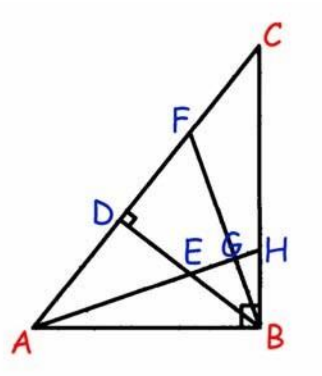
BAGIAN KEDUA

1. Alternatif 1 :

Misalkan ∠GAF = α dan ∠GFA = γ

$\tan A = \frac{BD}{AD}$ sedangkan $\tan \alpha = \frac{DE}{AD} = \frac{BD}{2AD} = \frac{\tan A}{2}$ ················ (1)

$\tan C = \frac{BD}{CD}$ sedangkan $\tan \gamma = \frac{BD}{FD} = \frac{2BD}{CD} = 2\tan C$ ················ (2)



A + C = 90°, maka tan A = tan (90° − C) = ctg C sehingga tan A tan C = 1

tan α · tan γ = tan A · tan C = 1

$$\tan\left(\alpha + \gamma\right) = \frac{\tan\ \alpha + \tan\ \gamma}{1 - \tan\ \alpha \tan\ \gamma}$$

Karena tan α · tan γ = 1 maka α + γ = 90°

Pada ΔAGF berlaku ∠AGF = 180° − (α + γ) = 90°

Karena ∠AGF = 90° maka AG tegak lurus FG

∴ **Terbukti bahwa AE ⊥ BF**

Alternatif 2 :

Misalkan ∠BAC = θ maka ∠ABD = 90° − θ

Jelas bahwa ∠DBC = θ. Karena △BCD siku-siku di D maka ∠BCD = 90° − θ.

Akibatnya △ABD sebangun dengan △BCD.

Karena E pertengahan BD dan F pertengahan CD maka △EAD sebangun dengan △BDF.

Misalkan ∠GAF = α. Karena △EAD sebangun dengan △BDF, maka ∠FBD = α.

Karena △AED siku-siku di D maka ∠DEA = ∠GEB = 90° − α.

Pada △BEG berlaku :

∠BEG + ∠FBD + ∠EGB = 180°

(α) + (90° − α) + ∠EGB = 180°

∠EGB = 90°

Karena ∠EGB = 90° maka garis AG tegak lurus BF.
Jadi garis AE tegak lurus BF (terbukti).

∴ **Terbukti bahwa AE ⊥ BF**

2. Dibuat subhimpunan {1, 2005}, {2, 2004}, {3, 2003}, ⋯, {1002, 1004}, {1003}

Jika diambil satu bilangan dari masing-masing subhimpunan tersebut maka terdapat 1003 bilangan yang tidak ada sepasang di antaranya yang berjumlah 2006.
Jika ditambahkan satu bilangan lagi selain 1003 bilangan tersebut maka dapat dipastikan terdapat sepasang bilangan yang berjumlah 2006.

$\therefore$ Banyaknya anggota S harus dipilih agar selalu terdapat paling sedikit satu pasang anggota terpilih yang hasil tambahnya 2006 adalah **1004.**

3. d = FPB(7n + 5, 5n + 4)
   a. Maka $d \mid 7n + 5$ dan $d \mid 5n + 4$
      Karena d membagi 7n + 5 maka d juga membagi 5(7n + 5)
      Karena d membagi 5n + 4 maka d juga membagi 7(5n + 4)
      Akibatnya d juga membagi 7(5n + 4) − 5(7n + 5) = 3
      Karena $d \mid 3$ maka d = 1 atau 3 (terbukti)
   b. Sebuah bilangan akan termasuk ke dalam salah satu bentuk dari 3k, 3k + 1 atau 3k + 2
      Jika n = 3k maka $7n + 5 = 21k + 5 \equiv 2 \pmod 3$ dan $5n + 4 = 15k + 4 \equiv 1 \pmod 3$
      Jika n = 3k + 1 maka $7n + 5 = 21k + 12 \equiv 0 \pmod 3$ dan $5n + 4 = 15k + 9 \equiv 0 \pmod 3$
      Jika n = 3k + 2 maka $7n + 5 = 21k + 19 \equiv 1 \pmod 3$ dan $5n + 4 = 15k + 14 \equiv 2 \pmod 3$

   $\therefore$ **Terbukti bahwa hanya bentuk n = 3k + 1 yang menyebabkan kedua bilangan 7n + 5 dan 5n + 4 habis dibagi 3 untuk n bilangan asli.**
4. Agar Win akan mengulangi prosedur pelemparan koin lebih dari tiga kali maka pada lemparan yang ketiga masih terdapat sedikitnya satu koin yang muncul dengan sisinya bukan angka.
   Pada lemparan pertama agar hal tersebut terjadi maka sisi koin yang muncul haruslah terdapat tepat satu sisi angka dan satu sisi bukan angka atau kedua sisi bukan angka.
   - Jika pada lemparan pertama yang muncul adalah satu sisi angka dan satu bukan angka.
     Peluang tersebut adalah ½.
     Pada lemparan kedua dan ketiga sisi satu-satunya koin yang ia lempar harus bukan angka.
     Peluang pada masing-masing kejadian adalah ½.
     Peluang Win akan mengulangai prosedur lebih dari tiga kali adalah ½ · ½ · ½ = $\frac{1}{8}$
   - Jika pada lemparan pertama kedua koin muncul dengan sisi bukan angka
     Peluang kejadian tersebut adalah ½ · ½ = ¼
     Agar Win akan mengulangi prosedur maka pada lemparan kedua sisi koin yang muncul haruslah terdapat tepat satu sisi angka dan satu sisi bukan angka atau kedua sisi bukan angka.
     - Jika pada lemparan kedua yang muncul adalah satu sisi angka dan satu bukan angka Peluang tersebut adalah ½.
       Pada lemparan ketiga sisi satu-satunya koin yang ia lempar tersebut harus bukan angka. Peluang kejadian tersebut adalah ½.
       Peluang Win akan mengulangi prosedur lebih dari tiga kali adalah ¼ · ½ · ½ = $\frac{1}{16}$
     - Jika pada lemparan kedua, kedua koin muncul dengan sisi bukan angka
       Peluang kejadian tersebut adalah ½ · ½ = ¼

Agar Win akan mengulangai prosedur maka pada lemparan ketiga sisi koin yang muncul haruslah terdapat tepat satu sisi angka dan satu sisi bukan angka atau kedua sisi bukan angka. Peluang kejadian ini adalah ¾.

Peluang Win akan mengulangi prosedur lebih dari tiga kali adalah ¼ · ¼ · ¾ = $\frac{3}{64}$

∴ Maka peluang Win akan mengulangi prosedur tersebut lebih dari 3 kali adalah

$$\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{3}{64}=\frac{15}{64}$$

5. $x^2 - 2ax + b = 0$ .... (1)

$x^2 - 2bx + c = 0$ .... (2)

$x^2 - 2cx + a = 0$ .... (3)

Karena akar-akar persamaan kuadrat di atas adalah bilangan asli maka diskriminannya harus merupakan kuadrat sempurna.

Dari pers (1) didapat fakta bahwa $4a^2 - 4b$ merupakan kuadrat sempurna

Maka $a^2 - b$ merupakan kuadrat sempurna .... (4)

Dengan cara yang sama untuk persamaan (2) dan (3) didapat :

$b^2 - c$ juga kuadrat sempurna .... (5)

$c^2 - a$ juga kuadrat sempurna .... (6)

Pada persamaan (4) karena a dan b bilangan asli maka $a^2 - b < a^2$ atau $a^2 - b \le (a - 1)^2$

$-b \le -2a + 1$, maka $b \ge 2a - 1$ .... (7)

Dengan cara yang sama untuk persamaan (5) dan (6) didapat :

$c \ge 2b - 1$ .... (8)

$a \ge 2c - 1$ .... (9)

Maka :

$a \ge 2c - 1 \ge 2(2b - 1) - 1 \ge 2(2(2a - 1) - 1) - 1$.

$a \ge 8a - 7$, maka $a \le 1$ sehingga $a = 1$

Dari persamaan (9) didapat $1 \ge 2c - 1$ maka $c \le 1$ sehingga $c = 1$

Dari persamaan (8) didapat $1 \ge 2b - 1$ maka $b \le 1$ sehingga $b = 1$

∴ a, b dan c yang memenuhi persamaan tersebut hanya **a = b = c = 1**

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2006

TINGKAT NASIONAL

HARI PERTAMA

WAKTU : 180 MENIT

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Nasional Tahun 2006

1. Tentukan semua pasangan bilangan real (x, y) yang memenuhi

$$x^3 - y^3 = 4(x - y)$$

$$x^3 + y^3 = 2(x + y)$$

2. Misalkan a, b, c adalah bilangan-bilangan asli. Jika $30 | (a + b + c)$, buktikan bahwa

$$30 | (a^5 + b^5 + c^5)$$

   [Catatan : $x | y$ menyatakan x habis membagi y.]

3. Misalkan S adalah himpunan semua segitiga ABC yang memenuhi sifat : tan A, tan B dan tan C adalah bilangan-bilangan asli. Buktikan bahwa semua segitiga anggota S sebangun.

4. Misalkan n > 2 sebuah bilangan asli tetap.
   Sebuah bidak hitam ditempatkan pada petak pertama dan sebuah bidak putih ditempatkan pada petak terakhir sebuah papan 'catur' berukuran 1 x n. Wiwit dan Siti lalu melangkah bergantian. Wiwit memulai permainan dengan bidak putih. Pada setiap langkah, pemain memindahkan bidaknya sendiri satu atau dua petak ke kanan atau ke kiri tanpa melompati bidak lawan. Pemain yang tidak bisa melangkah dinyatakan kalah. Pemain manakah yang memiliki cara (strategi) untuk selalu memenangkan permainan, apa pun yang dilakukan lawannya ? Jelaskan strategi pemain tersebut ?

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2006

TINGKAT NASIONAL

HARI KEDUA

WAKTU : 180 MENIT

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Nasional Tahun 2006

5. Pada segitiga ABC, M adalah titik tengah BC dan G adalah titik berat segitiga ABC. Sebuah garis ℓ melalui G memotong ruas garis AB di P dan ruas garis AC di Q, dimana P ≠ B dan Q ≠ C. Jika [XYZ] menyatakan luas segitiga XYZ, tunjukkan bahwa
$$\frac{[BGM]}{[PAG]} + \frac{[CMG]}{[QGA]} = \frac{3}{2}$$
6. Setiap nomor telepon di suatu daerah terdiri dari 8 angka dan diawali dengan angka 8. Pak Edy, yang baru pindah ke daerah itu, mengajukan pemasangan sebuah telepon baru. Berapakah peluang pak Edy mendapatkan nomor telepon yang memuat tidak lebih dari 5 angka berbeda ?
7. Misalkan a, b, c bilangan-bilangan real sehingga ab, bc, ca bilangan-bilangan rasional. Buktikan bahwa ada bilangan-bilangan bulat x, y, z yang tidak semuanya nol, sehingga ax + by + cz = 0.
8. Tentukan bilangan bulat 85-angka terbesar yang memenuhi sifat ; jumlah semua angkanya sama dengan hasilkali semua angkanya.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2006

TINGKAT NASIONAL

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Nasional Tahun 2006

1. $x^3 - y^3 = 4(x - y)$, maka $(x - y)(x^2 + xy + y^2) = 4(x - y)$ ………………………………… (1)

   $x^3 + y^3 = 2(x + y)$, maka $(x + y)(x^2 - xy + y^2) = 2(x + y)$ ………………………………… (2)

   - Jika x = y

     Subtitusikan ke persamaan (2).

     $(2x)(x^2) = 4x$, maka $x(x^2 - 2) = 0$ sehingga x = 0 atau x = $\pm\sqrt{2}$

     Pasangan (x, y) yang memenuhi adalah (0, 0), $(2, \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$
   - Jika x = −y

     Subtitusikan ke persamaan (1).

     $(2x)(x^2) = 8x$, maka $x(x^2 - 4) = 0$

     x = 0, x = 2 atau x = −2

     Pasangan (x, y) yang memenuhi adalah (0,0), (2, −2), (−2, 2)
   - Jika x ≠ y dan x ≠ −y

     $x^2 + xy + y^2 = 4$ ………………………… (3)

     $x^2 - xy + y^2 = 2$ ………………………… (4)

     Kurangkan (3) dengan (4), maka xy = 1 dan $x^2 + y^2 = 3$

     $(x + y)^2 - 2xy = 3$, maka $(x + y)^2 = 5$

     - Jika $x + y = \sqrt{5}$

       $$x\left(\sqrt{5} - x\right) = 1$$

       $$x^2 - x\sqrt{5} + 1 = 0$$

       $x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$, maka $y = \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ sehingga (x y) = $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

       $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, maka $y = \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ sehingga (x y) = $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$
     - Jika $x + y = -\sqrt{5}$

       $$x\left(-\sqrt{5} - x\right) = 1$$

       $$x^2 + x\sqrt{5} + 1 = 0$$

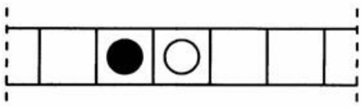
       $x = \frac{-\sqrt{5}+1}{2}$, maka $y = \frac{1}{x} = -\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ sehingga (x y) = $\left(\frac{-\sqrt{5}+1}{2}, -\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$

       $x = \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$, maka $y = \frac{1}{x} = -\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ sehingga (x y) = $\left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2}, -\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

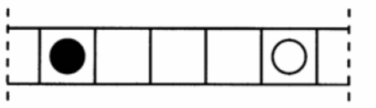
   Setelah dicek ke persamaan semula, semua pasangan (x, y) tersebut memenuhi.

   ∴ **Pasangan (x, y) yang memenuhi adalah (0,0), $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, (2, −2), (−2, 2),** $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, -\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right), \left(\frac{-\sqrt{5}+1}{2}, -\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right), \left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2}, -\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

2. Akan dibuktikan bahwa $30 | n^5 - n$ untuk n bilangan asli.
   $n^5 - n = n(n^2 - 1)(n^2 + 1) = n(n - 1)(n + 1)(n^2 - 4 + 5)$
   $n^5 - n = (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2) + 5(n - 1)n(n + 1)$
   Karena $n-2$, $n-1$, n, $n+1$, $n+2$ adalah 5 bil. bulat berurutan maka $(n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)$ habis dibagi $5! = 120$ sehingga $30 | (n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2)$
   $n - 1$, n dan $n + 1$ adalah 3 bilangan bulat berurutan maka $3! = 6$ membagi $(n - 1)n(n + 1)$.
   Akibatnya $30 | 5(n - 1)n(n + 1)$
   Maka $30 | n^5 - n$ untuk n bilangan asli
   $30 | a^5 - a + b^5 - b + c^5 - c$ untuk a, b, c bilangan asli, maka$30 | a^5 + b^5 + c^5 - (a + b + c)$
   $\therefore$ **Karena $30 | (a + b + c)$ maka $30 | (a^5 + b^5 + c^5)$ (terbukti)**
3. Pada segitiga ABC berlaku $A + B = 180^o - C$
   $\tan (A + B) = \tan (180^o - C)$
   $\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B} = -\tan C$
   $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$
   Misalkan $\tan A = x$, $\tan B = y$ dan $\tan C = z$ untuk $x, y, z \in$ Bilangan Asli
   Tanpa mengurangi keumuman misalkan $x \le y \le z$
   $x + y + z = xyz$, maka $3z \ge xyz$ sehingga $xy \le 3$
   Nilai (x, y) yang memenuhi adalah $(1, 1)$, $(1, 2)$ dan $(1, 3)$
   Jika $x = 1$ dan $y = 1$ maka $1 + 1 + z = z$ sehingga $2 + z = z$ (tidak ada z yang memenuhi)
   Jika $x = 1$ dan $y = 2$ maka $1 + 2 + z = 2z$ sehingga $z = 3$ (memenuhi)
   Jika $x = 1$ dan $y = 3$ maka $1 + 3 + z = 3z$ sehingga $z = 2$ (tidak memenuhi bahwa $z \ge y$)
   Maka tripel bilangan asli (tan A, tan B, tan C) yang memenuhi adalah (1, 2, 3) dan permutasinya.
   Akibatnya nilai (A, B, C) yang memenuhi hanya ada satu kemungkinan.
   $\therefore$ **Karena hanya ada satu tripel (A, B, C) yang memenuhi maka semua segitiga anggota S sebangun (terbukti)**
4. Misalkan kejadian (a) adalah kejadian dengan posisi sebagai berikut :

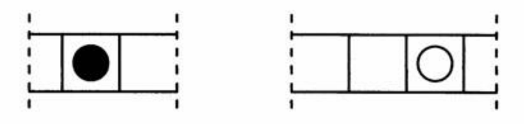


   Pemain yang melangkah terlebih dahulu setelah kejadian (a) terjadi akan kalah sebab pemain pertama tersebut hanya bisa melangkah mundur. Jika pemain pertama mundur dua langkah maka pemain kedua akan melangkah maju dua langkah sedangkan jika pemain pertama mundur satu langkah maka pemain kedua akan melangkah maju satu langkah sehingga kejadian (a) akan selalu terjaga sampai suatu saat pemain pertama tersebut tidak dapat melangkah lagi.
   Misalkan kejadian (b) adalah kejadian dengan jarak antara dua bidak sama dengan 3 petak sebagaimana posisi sebagai berikut :



Jika pemain pertama setelah posisi (b) terjadi, melangkah mundur satu langkah maka pemain kedua akan maju satu langkah sedangkan jika pemain pertama mundur dua langkah maka pemain kedua akan maju dua langkah sehingga posisi (b) akan terjaga sampai pemain pertama maju atau ia tidak dapat lagi mundur sehingga harus maju. Jika pemain pertama maju satu langkah maka pemain kedua akan maju dua langkah sedangkan jika pemain pertama maju dua langkah maka pemain kedua akan maju satu langkah sehingga posisi akan menjadi posisi (a) sehingga sesuai dengan penjelasan sebelumnya maka pemain pertama akan kalah.

Misalkan kejadian (c) adalah kejadian dengan banyaknya petak di antara dua bidak sama dengan 3k petak dengan k bilangan asli :



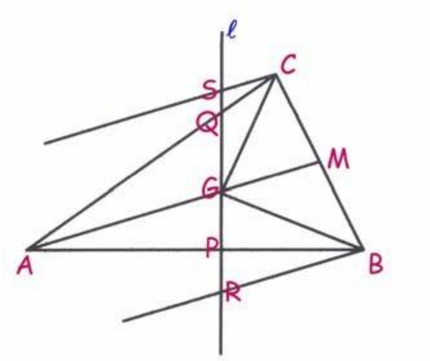
Jika pemain pertama setelah posisi (c) terjadi melangkah mundur satu langkah maka pemain kedua akan maju satu langkah sedangkan jika pemain pertama mundur dua langkah maka pemain kedua akan maju dua langkah sehingga posisi (c) akan terjaga sampai pemain pertama maju atau ia tidak dapat lagi mundur sehingga harus maju. Jika pemain pertama maju satu langkah maka pemain kedua akan maju dua langkah sedangkan jika pemain pertama maju dua langkah maka pemain kedua akan maju satu langkah sehingga banyaknya petak diantara kedua bidak kedua pemain akan menjadi $3(k-1)$ petak. Demikian seterusnya sehingga nilai k akan semakin kecil sampai suatu saat nilai k akan menjadi 1 dan sebagaimana penjelasan pada posisi (b) pemain pertama akan kalah.

Jika banyaknya petak di antara kedua bidak tidak habis dibagi 3 maka pemain pertama akan memenangkan permainan sebab ia punya kesempatan untuk membuat banyaknya petak di antara kedua bidak akan habis dibagi 3.

$\therefore$ **Maka dapat disimpulkan bahwa :**

Jika n dibagi 3 bersisa 2 maka pemain kedua (Siti) akan memenangkan permainan sedangkan jika n dibagi 3 bersisa 0 atau 1 maka pemain pertama (Wiwit) akan memenangkan permainan.

5.



Karena G adalah titik berat dan AM adalah garis berat maka AG : GM = 2 : 1.

ΔBGM dan ΔBAG adalah dua segitiga dengan alas yang sama sehingga perbandingan luas dapat dinyatakan sebagai perbandingan tinggi. Karena AG : GM = 2 : 1 maka [BAG] = 2[BGM]. Dengan cara yang sama maka [CMG] = 2[CGA].

$$\frac{[BGM]}{[PAG]} + \frac{[CMG]}{[QGA]} = \frac{1}{2}\left(\frac{[BAG]}{[PAG]} + \frac{[CGA]}{[QGA]}\right)$$

Segitiga BAG dan segitiga PAG adalah dua segitiga dengan tinggi yang sama maka perbandingan luas dapat dinyatakan sebagai perbandingan alas. [BAG] : [PAG] = AB : AP.

Dengan cara yang sama maka [CGA] : [QGA] = AC : AQ

$$\frac{[BGM]}{[PAG]} + \frac{[CMG]}{[QGA]} = \frac{1}{2}\left(\frac{[BAG]}{[PAG]} + \frac{[CGA]}{[QGA]}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{AB}{AP} + \frac{AC}{AQ}\right)$$

Alternatif 1 :

$$\frac{[BGM]}{[PAG]} + \frac{[CMG]}{[QGA]} = \frac{1}{2}\left(\frac{AP+BP}{AP} + \frac{AQ+CQ}{AQ}\right) = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{BP}{AP} + \frac{CQ}{AQ}\right)$$

Buat garis melalui B dan C masing-masing sejajar AM. Misalkan garis yang melalui B memotong garis di R dan garis yang melalui C memotong garis ℓ di S. (Lihat gambar).

Karena AG sejajar BR maka ΔAGP sebangun dengan ΔBRP sehingga $\frac{BP}{AP} = \frac{BR}{AG}$

Karena AG sejajar CS maka ΔAGQ sebangun dengan ΔCSQ sehingga $\frac{CQ}{AQ} = \frac{CS}{AG}$

$$\frac{[BGM]}{[PAG]} + \frac{[CMG]}{[QGA]} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{BP}{AP} + \frac{CQ}{AQ}\right) = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{BR}{AG} + \frac{CS}{AG}\right)$$

Mengingat bahwa BR + CS = 2 · GM maka :

$$\frac{[BGM]}{[PAG]} + \frac{[CMG]}{[QGA]} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{BR+CS}{AG}\right) = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2GM}{AG}\right)$$

Mengingat bahwa AG : GM = 2 : 1 maka :

$\therefore \frac{[BGM]}{[PAG]} + \frac{[CMG]}{[QGA]} = \frac{3}{2}$ **(terbukti)**

Alternatif 2 :

Tanpa mengurangi keumuman misalkan koordinat A(0, 0), B(b, 0), C(a, c) sehingga G $\left(\frac{a+b}{3}, \frac{c}{3}\right)$.

Titik M adalah pertengahan BC sehingga M $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{c}{2}\right)$.

Garis AC melalui (0, 0) dan gradien $\frac{c}{a}$ sehingga persamaan garis AC, $y = \frac{c}{a}x$.

Misalkan persamaan garis ℓ adalah y = mx + k. Garis ℓ melalui titik G maka :

$\frac{c}{3} = m\left(\frac{a+b}{3}\right) + k$, maka $k = \frac{c-ma-mb}{3}$. Persamaan garis ℓ adalah $y = mx + \frac{c-ma-mb}{3}$

Garis ℓ memotong AB di titik P maka $x_p = \frac{ma-mb-c}{3m}$ sehingga $P\left(\frac{ma-mb-c}{3m}, 0\right)$

Garis ℓ memotong AC di Q, maka $\frac{c}{a}x_Q = mx_Q + \frac{c-ma-mb}{3}$

$x_Q = \frac{a(c-ma-mb)}{3(c-ma)}$ maka $y_Q = \frac{c(c-ma-mb)}{3(c-ma)}$

Sehingga $Q\left(\frac{a(c-ma-mb)}{3(c-ma)}, \frac{c(c-ma-mb)}{3(c-ma)}\right)$.

$|AB| = b$; $|AP| = \frac{ma+mb-c}{3m}$; $|AC| = \sqrt{a^2+c^2}$; $|AQ| = \frac{(c-ma-mb)}{3(c-ma)}\sqrt{a^2+c^2}$

$$\frac{[BGM]}{[PAG]} + \frac{[CMG]}{[QGA]} = \frac{1}{2}\left(\frac{AB}{AP} + \frac{AC}{AQ}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3mb}{ma+mb-c} + \frac{3(c-ma)}{c-ma-mb}\right)$$

$$\frac{[BGM]}{[PAG]} + \frac{[CMG]}{[QGA]} = \frac{1}{2}\left(\frac{3mb-3(c-ma)}{ma+mb-c}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3(ma+mb-c)}{ma+mb-c}\right)$$

$\therefore \frac{[BGM]}{[PAG]} + \frac{[CMG]}{[QGA]} = \frac{3}{2}$ **(terbukti)**

6. Akan dicari nomor telepon tersebut terdiri dari sedikitnya 6 angka berbeda.
   - Jika nomor telepon tersebut terdiri dari 6 angka berbeda

     Banyaknya cara memilih 5 angka tersisa dari 9 angka tersisa adalah ${}_9C_5$.
     - Jika nomor telepon tersebut terdiri dari 1 angka muncul 3 kali dan 5 angka lainnya muncul 1 kali
       - Jika angka yang muncul tiga kali adalah angka 8

         Banyaknya nomor telepon = ${}_9C_5 \cdot \frac{7!}{2!} = 317.520$
       - Jika angka yang muncul tiga kali adalah bukan angka 8

         Banyaknya nomor telepon = ${}_9C_5 \cdot {}_5C_1 \cdot \frac{7!}{2!} = 529.200$
     - Jika nomor telepon tersebut terdiri dari 2 angka masing-masing muncul 2 kali dan 4 angka lainnya muncul 1 kali
       - Jika salah satu angka yang muncul dua kali tersebut adalah angka 8 Banyaknya nomor telepon = ${}_9C_5 \cdot {}_5C_1 \cdot \frac{7!}{2!}$ = 1.587.600
       - Jika kedua angka yang muncul dua kali tersebut keduanya bukan angka 8 Banyaknya nomor telepon = ${}_9C_5 \cdot {}_5C_2 \cdot \frac{7!}{2!2!}$ = 1.587.600
   - Jika nomor telepon tersebut terdiri dari 7 angka berbeda

     Banyaknya cara memilih 6 angka tersisa dari 9 angka tersisa adalah ${}_9C_6$.

     Satu angka akan muncul 2 kali sedangkan 6 angka lain akan muncul satu kali.
     - Jika angka yang muncul dua kali tersebut adalah angka 8

       Banyaknya nomor telepon = ${}_9C_6 \cdot 7! = 423.360$
     - Jika angka yang muncul dua kali tersebut adalah bukan angka 8

       Banyaknya nomor telepon = ${}_9C_6 \cdot {}_6C_1 \cdot \frac{7!}{2!} = 1.270.080$
   - Jika nomor telepon tersebut terdiri dari 8 angka berbeda

Banyaknya cara memilih 7 angka tersisa dari 9 angka tersisa adalah ${}_9C_7$.

Banyaknya nomor telepon = ${}_9C_7 \cdot 7!$ = 181.440

Misalkan A adalah kejadian banyaknya nomor telepon dengan sedikitnya 6 angka berbeda.

A = 317.520 + 529.200 + 1.587.600 + 1.587.600 + 423.360 + 1.270.080 + 181.440 = 5.896.800

p(A) = $\frac{A}{10^7} = 0{,}58968$

∴ **Peluang bahwa pak Edy mendapatkan nomor telepon yang memuat tidak lebih dari 5 angka berbeda = 1 − p(A) = 0,41032**

7. Karena ab, ac dan bc adalah bilangan rasional maka $\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c}$, $\frac{ab}{bc} = \frac{a}{c}$ adalah juga bilangan rasional.

   Misalkan $\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c} = \frac{m}{n}$, $\frac{ab}{bc} = \frac{a}{c} = \frac{p}{q}$ untuk m, n, p, q ∈ Bil. Bulat dan n, q ≠ 0

   - Jika a, b, c ketiganya sama dengan 0

     Jelas bahwa berapa pun nilai (x, y, z) bulat akan memenuhi ax + by + cz = 0
   - Jika dua di antara a, b, c sama dengan 0

     Tanpa mengurangi keumuman misalkan a = b = 0 dan c ≠ 0

     Nilai z = 0 dan x, y ≠ 0 akan memenuhi ax + by + cz = 0
   - Jika salah satu a, b atau c sama dengan 0

     Tanpa mengurangi keumuman misalkan a = 0 dan b, c ≠ 0

     Maka untuk x ≠ 0, y = z = 0 akan memenuhi ax + by + cz = 0.
   - Jika tidak ada a, b dan c bernilai 0

     $ax + by + cz = c\left(\frac{a}{c}x + \frac{b}{c}y + z\right) = c\left(\frac{p}{q}x + \frac{m}{n}y + z\right)$

     Maka untuk x = kq, y = wn dan z = −(kp + wm) dengan k, w ∈ Bilangan Bulat akan memenuhi ax + by + cz = 0

   ∴ **Terbukti bahwa ada bilangan-bilangan bulat x, y, z yang tidak semuanya nol, sehingga ax + by + cz = 0**

8. Misalkan bilangan 85-angka tersebut adalah n. Misalkan juga S(n) adalah jumlah semua angkaangka n dan P(n) adalah hasilkali semua angka-angka n.

   Jika 0 adalah salah satu digit dari n maka P(n) = 0 sehingga S(n) = 0. Akibatnya semua digit dari n harus 0 yang tidak memenuhi n adalah bilangan bulat 85-angka. Maka 0 bukanlah salah satu angka n.

   S(n) maksimal = 9 · 85 = 765 jika semua angka n adalah 9.

   Karena 2^9 = 512 < 765 dan 2^{10} = 1024 > 765 maka paling banyak 9 angka n bukan 1 dan paling sedikit 76 angka terakhir n harus sama dengan 1. Maka S(n) maksimal = 9 · 9 + 1 · 76 = 157. Karena 2^7 = 128 < 157 dan 2^8 = 256 > 157 maka paling banyak 7 angka n bukan 1 dan paling sedikit 78 angka terakhir n harus sama dengan 1.

   P(n) terkecil saat n = 2222222111········111, maka P(n) = 128 dan S(n) = 92 sehingga P(n) ≠ S(n) Jika 7 angka pertama n tidak semuanya 2 maka P(n) minimal saat n = 3222222111····111 yaitu 192. Karena S(n) maksimal = 9 · 7 + 1 · 78 = 141 < P(n) minimal. Maka tidak ada nilai n yang memenuhi. Akibatnya paling banyak 6 angka n bukan 1.

Jika paling banyak dua angka dari n bukan 1 maka P(n) maksimal = $9 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cdots \cdot 1 = 81$ sedangkan S(n) minimal = $1 \cdot 85 = 85$. Maka sedikitnya tiga angka n bukan 1.

Maka banyaknya angka n yang bukan 1 paling sedikit 3 dan paling banyak 6.

- Jika angka pertama n adalah 9

  S(n) minimal = $9 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 79 = 98$ dan S(n) maksimal = $9 \cdot 6 + 1 \cdot 79 = 133$

  Karena P(n) habis dibagi 9 maka S(n) juga harus habis dibagi 9. Maka kemungkinan nilai P(n) adalah 99, 108, 117, 126.

  $99 = 9 \cdot 11$ dan $117 = 9 \cdot 13$. Karena 11 dan 13 adalah bilangan prima dua angka maka tidak mungkin P(n) = 99 atau 117.

  Jika P(n) = $126 = 9 \cdot 7 \cdot 2$ maka ke-85 angka n adalah 9, 7, 2 dan 1 sebanyak 82 kali.

  S(n) = 9 + 7 + 2 + 82 = 100 (tidak memenuhi P(n) = S(n)).

  Jika P(n) = $108 = 9 \cdot 2^2 \cdot 3$ maka kemungkinan angka-angka n adalah :

  - Ke-85 angka n adalah 9, 4, 3 dan 1 sebanyak 82 kali. S(n) = 9 + 4 + 3 + 82 = 98 (tidak memenuhi P(n) = S(n))
  - Ke-85 angka n adalah 9, 6, 2 dan 1 sebanyak 82 kali. S(n) = 9 + 6 + 2 + 82 = 99 (tidak memenuhi P(n) = S(n))
  - Ke-85 angka n adalah 9, 3, 2, 2 dan 1 sebanyak 81 kali.
    S(n) = 9 + 3 + 2 + 2 + 81 = 97 (tidak memenuhi P(n) = S(n))

  Maka tidak ada nilai n dengan angka pertama adalah 9 yang memenuhi.

- Jika angka pertama n adalah 8

  S(n) minimal = $8 + 1 \cdot 84 = 92$ dan S(n) maksimal = $8 \cdot 6 + 1 \cdot 79 = 127$

  Karena P(n) habis dibagi 9 maka S(n) juga harus habis dibagi 8. Maka kemungkinan nilai P(n) adalah 96, 104, 112, 120.

  Jika P(n) = $120 = 8 \cdot 5 \cdot 3$ maka maka ke-85 angka n adalah 8, 5, 3 dan 1 sebanyak 82 kali.

  S(n) = 8 + 5 + 3 + 82 = 98 (tidak memenuhi P(n) = S(n)).

  Jika P(n) = $112 = 8 \cdot 7 \cdot 2$ maka maka ke-85 angka n adalah 8, 7, 2 dan 1 sebanyak 82 kali.

  S(n) = 8 + 7 + 2 + 82 = 99 (tidak memenuhi P(n) = S(n)).

  Jika P(n) = $104 = 8 \cdot 13$. Karena 13 adalah bilangan prima dua angka maka tidak ada n yang memenuhi.

  Jika P(n) = $96 = 8 \cdot 2^2 \cdot 3$ maka kemungkinan angka-angka n adalah :

  - Ke-85 angka n adalah 8, 4, 3 dan 1 sebanyak 82 kali. S(n) = 8 + 4 + 3 + 82 = 97 (tidak memenuhi P(n) = S(n))
  - Ke-85 angka n adalah 8, 6, 2 dan 1 sebanyak 82 kali. S(n) = 8 + 6 + 2 + 82 = 98 (tidak memenuhi P(n) = S(n))
  - Ke-85 angka n adalah 8, 3, 2, 2 dan 1 sebanyak 81 kali. S(n) = 8 + 3 + 2 + 2 + 81 = 96 (memenuhi)

Karena angka-angka n adalah 8, 3, 2, 2 dan 1 sebanyak 81 kali maka n terbesar yang memenuhi adalah $83221111\cdots111$.

∴ Dapat disimpulkan bahwa nilai n terbesar yang memenuhi adalah **$8322111\cdots\cdots111$**.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2007

TINGKAT KABUPATEN/KOTA

WAKTU : 3,5 JAM

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Kabupaten/Kota Tahun 2007

Bagian Pertama

Pilih satu jawaban yang benar. Dalam hal terdapat lebih dari satu jawaban yang benar, pilih jawaban yang paling baik.

1. Jika $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari atau sama dengan bilangan real x, maka $\lfloor \sqrt{3}-\sqrt{5} \rfloor^2 =$
   A. -1 B. 0 C. 1 D. 9 E. 81
2. Bilangan $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ merupakan bilangan
   A. bulat negatif B. bulat positif C. pecahan D. irrasional positif E. irrasional negatif
3. Banyaknya soal yang dikerjakan Amin hari ini bertambah tepat 40% dibandingkan dengan yang dikerjakannya kemarin.Banyaknya soal yang dikerjakan Amin hari ini paling sedikit ada
   A. 5 B. 6 C. 7 D. 8 E. tidak bisa ditentukan
4. Misalkan H adalah himpunan semua faktor positif dari 2007.Banyaknya himpunan bagian dari H yang tidak kosong adalah
   A. 6 B. 31 C. 32 D. 63 E. 64
5. Misalkan N sebuah bilangan asli dua-angka dan M adalah bilangan asli yang diperoleh dengan mempertukarkan kedua angka N. Bilangan prima yang selalu habis membagi $N - M$ adalah
   A. 2 B. 3 C. 7 D. 9 E. 11
6. Sebuah sampel diperoleh dari lima pengamatan. Jika rataan hitung(mean) sampel sama dengan 10 dan median sampel sama dengan 12, maka nilai terkecil jangkauan sampel sama dengan
   A. 2 B. 3 C. 5 D. 7 E. 10
7. Peluang menemukan di antara tiga orang ada paling sedikit dua orang yang lahir dalam bulan yang sama adalah
   A. $\frac{17}{12}$ B. $\frac{33}{72}$ C. $\frac{39}{72}$ D. $\frac{48}{72}$ E. $\frac{55}{72}$
8. Keliling sebuah segitiga adalah 8. Jika panjang sisi-sisinya adalah bilangan bulat,maka luas segitiga tersebut sama dengan
   A. $2\sqrt{2}$ B. $\frac{16}{9}\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{3}$ D. 4 E. $4\sqrt{2}$
9. Sepotong kawat dipotong menjadi 2 bagian,dengan perbandingan panjang 3:2. Masing-masing bagian kemudian dibentuk menjadi sebuah persegi. Perbandingan luas kedua persegi adalah
   A. 4 : 3 B. 3 : 2 C. 5 : 3 D. 9 : 4 E. 5 : 2
10. Untuk setiap bilangan real x berlaku $\frac{\tan^2 x+\cos^2 x}{\sin x+\sec x} =$
    A. sec x + sin x B. sec x − sin x C. cos x + csc x

D. cos x − csc x E. cos x + sin x

Bagian Kedua

Isikan hanya jawaban saja pada tempat yang disediakan

11. Misalkan f(x) = 2x - 1, dan g(x) = $\sqrt{x}$. Jika f(g(x)) = 3, maka x = ⋯⋯
12. Pengepakan buah "Drosophila" akan mengemas 44 apel ke dalam beberapa kotak. Ada dua jenis kotak yang tersedia, yaitu kotak untuk 10 apel dan kotak untuk 6 apel. Banyak kotak yang diperlukan adalah ⋯⋯
13. Semua pasangan bilangan bulat (x,y) yang memenuhi x + y = xy − 1 dan x ≤ y, adalah ⋯⋯
14. Jika n adalah bilangan asli sehingga 3^n adalah faktor dari 33!, maka nilai n terbesar yang mungkin adalah ⋯⋯
15. Sebuah ruas garis mulai dari titik $\left(3, 2\frac{1}{5}\right)$ dan berakhir di $\left(99, 68\frac{3}{5}\right)$. Banyaknya titik dengan koordinat bilangan bulat yang dilalui garis tersebut adalah ⋯⋯
16. Pada segitiga PQR samasisi diberikan titik-titik S dan T yang terletak berturut-turut pada sisi QR dan PR demikian rupa,sehingga ∠SPR = 40° dan ∠TQR = 35°. Jika titik X adalah perpotongan garis-garis PS dan QT,maka ∠SXT = ⋯⋯
17. Pada segitiga ABC yang siku-siku di C, AE dan BF adalah garis-garis berat (median). Maka $\dfrac{|AE|^2 + |BF|^2}{|AB|^2} = \cdots$
18. Diketahui empat titik pada bidang dengan koordinat A(1,0), B(2008,2007), C(2007,2007), D(0,0). Luas jajaran genjang ABCD sama dengan ⋯⋯
19. Sebuah lingkaran berjari-jari 1. Luas maksimal segitiga samasisi yang dapat dimuat di dalam lingkaran adalah ⋯⋯
20. Sebuah daerah persegi dibagi menjadi 2007 daerah kecil dengan menarik garis-garis lurus yang menghubungkan dua sisi berbeda pada persegi. Banyak garis lurus yang harus ditarik paling sedikit ada ⋯⋯

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2007

TINGKAT KABUPATEN/KOTA

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika Tingkat Kabupaten/Kota Tahun 2007

BAGIAN PERTAMA

1. (Jawaban : C)

$\sqrt{3} \approx 1{,}7$; $\sqrt{5} \approx 2{,}2$

$\sqrt{3} - \sqrt{5} \approx -0{,}5$ sehingga $\lfloor \sqrt{3} - \sqrt{5} \rfloor = -1$. Maka $\lfloor \sqrt{3} - \sqrt{5} \rfloor^2 = 1$

$\therefore \lfloor \sqrt{3} - \sqrt{5} \rfloor^2 = 1$

2. (Jawaban : B)

Misalkan $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = X$

$X^3 = (\sqrt{5}+2) - (\sqrt{5}-2) - 3\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}\right)\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)\left(\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} + \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}\right)$

$X^3 = 4 - 3\left(\sqrt[3]{5-4}\right)(X)$

$X^3 + 3X - 4 = 0$

$(X-1)(X^2 + X + 4) = 0$

Akar-akar persamaan $X^2 + X + 4 = 0$ tidak real. Maka X = 1

$\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2} = 1$

$\sqrt[3]{\sqrt{5}+2} - \sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$ merupakan bilangan **bulat positif**.

3. (Jawaban : C)

Misalkan banyaknya soal yang dikerjakan Amin kemarin y maka banyaknya soal yang dikerjakan hari ini adalah n = $\frac{7}{5}$ y dengan y dan n keduanya asli.

$\frac{n}{y} = \frac{7}{5}$

Maka y = 5k dan n = 7k untuk suatu bilangan asli k.

Nilai n terkecil adalah saat k = 1 sehingga n = 7

∴ Banyaknya soal yang dikerjakan Amin hari ini paling sedikit ada **7.**

4. (Jawaban : D)

   $2007 = 3^2 \cdot 223^1$

   Banyaknya faktor positif dari 2007 adalah (2 + 1)(1 + 1) = 6

   Banyaknya himpunan bagian tak kosong dari H adalah $2^6 - 1 = 63$.

   ∴ Banyaknya himpunan bagian tak kosong dari H adalah $2^6 - 1 =$ **63.**

5. (Jawaban : B)

   Misalkan N = 10a + b maka M = 10b + a

   N − M = 9(a − b) sehingga 9 | (N − M)

   ∴ Maka bilangan prima yang selalu membagi N − M adalah **3.**

6. (Jawaban : C)

   Misalkan bilangan tersebut adalah $x_1 \le x_2 \le x_3 \le x_4 \le x_5$.

   Maka $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 50$ dan $x_3 = 12$.

   Agar jangkauan minimal maka x_5 harus sekecil mungkin dan x_1 harus sebesar mungkin. Jelas bahwa $x_1 < 10$ dan $x_5 \ge 12$.

   Jika $x_1 = x_2 = 9$ maka $x_4 + x_5 = 20$. Tidak mungkin $x_5 \ge x_4 \ge 12$.

   Jika $x_5 = x_4 = 12$ maka $x_1 + x_2 = 36$. Nilai terbesar x_1 adalah saat $x_1 = x_2 = 7$.

   Kelima bilangan tersebut adalah 7, 7, 12, 12, 12.

   ∴ Jangkauan = 12 − 7 = **5.**

7. (Jawaban : A)

   Alternatif 1 :

   Misalkan A adalah kejadian sedikitnya 2 dari 3 orang lahir pada bulan yang sama. Maka A’ adalah kejadian 3 orang lahir pada bulan yang berbeda.

   Banyaknya kemungkinan tripel 3 orang lahir adalah 12x12x12 kemungkinan. Banyaknya 3 orang lahir pada bulan yang berbeda adalah 12x11x10

   $P(A') = \frac{12\cdot11\cdot10}{12\cdot12\cdot12} = \frac{55}{72}$

   Maka $p(A) = 1 - \frac{55}{72} = \frac{17}{72}$

Alternatif 2 :

Banyaknya kemungkinan tripel 3 orang lahir adalah 12x12x12 kemungkinan.

Banyaknya kemungkinan tepat 2 dari 3 orang lahir pada bulan yang sama = ${}_3C_2$ x 12x1x11 = 3x12x1x11

Banyaknya kemungkinan tepat 3 dari 3 orang lahir pada bulan yang sama = ${}_3C_3$ x 12x1x1 = 1x12x1x1

Peluang paling sedikit dua orang lahir dalam bulan yang sama = $\frac{3x\ 12x\ 1x\ 11+1x\ 12x\ 1x\ 1}{12x\ 12x\ 12} = \frac{17}{72}$

∴ Peluang di antara tiga orang ada paling sedikit dua orang lahir dalam bulan yang sama = $\frac{17}{72}$

8. (Jawaban : A)

   a + b + c = 8 dengan a, b, dan c semuanya bilangan asli.

   Syarat : panjang salah satu sisi selalu kurang dari jumlah kedua sisi yang lain, Dengan memperhatikan syarat tersebut maka panjang sisi-sisi segitiga yang memenuhi adalah 2, 3, 3.

   s = ½ (a + b + c) = 4

   Dengan rumus Heron, Luas Δ = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 2\sqrt{2}$

   ∴ Luas Δ = $\mathbf{2}\sqrt{2}$

9. (Jawaban : D)

   Misalkan panjang kawat semula 20a maka kawat akan terbagi dua dengan panjang 12a dan 8a.

   Panjang sisi persegi pertama = 3a dan panjang sisi persegi kedua = 2a.

   Perbandingan luas = $3^2 : 2^2$ = 9 : 4.

   ∴ Perbandingan luas kedua persegi adalah **9 : 4**.

10. (Jawaban : B)

    $\frac{\tan^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x+\sec x} = \frac{\sec^2 x-1+1-\sin^2 x}{\sin x+\sec x} = \frac{\sec^2 x-\sin^2 x}{\sin x+\sec x} = \sec x - \sin x$

    ∴ $\frac{\tan^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x+\sec x} = \sec x - \sin x$

BAGIAN KEDUA

11. $f(\sqrt{x}) = 3$

$2\sqrt{x} - 1 = 3$

∴ x = **4**

12. Misalkan banyaknya keranjang berisi 10 apel = x dan keranjang berisi 6 apel = y dengan x dan y keduanya bulat tak negatif.

Maka 10x + 6y = 44 sehingga 5x + 3y = 22

5x ≤ 22

Nilai x yang mungkin adalah 0, 1, 2, 3 atau 4.

Setelah dicek satu-satu, nilai x yang memenuhi hanya x = 2 yang membuat y = 4 Maka x + y = 6

∴ Banyak kotak yang diperlukan adalah **6**

13. xy − x − y − 1 = 0 sehingga (x − 1)(y − 1) = 2

Maka (x − 1)│ 2. Nilai x − 1 yang mungkin adalah −1, 1, −2, 2

Untuk x − 1 = −1 maka x = 0 dan y = −1

Untuk x − 1 = 1 maka x = 2 dan y = 3

Untuk x − 1 = −2 maka x = −1 dan y = 0

Untuk x − 1 = 2 maka x = 3 dan y = 2

Setelah dicek satu-satu pasangan (x, y) yang memenuhi persamaan dan berlaku x ≤ y adalah (−1, 0) dan (2, 3)

∴ Semua pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi adalah **(−1, 0), (2, 3)**

14. Alternatif 1 :

n terbesar = $\left\lfloor\frac{33}{3}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{33}{3^2}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{33}{3^3}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{33}{3^4}\right\rfloor + \cdots$

n terbesar = 11 + 3 + 1 + 0 + 0 + ⋯

n terbesar = 15

Alternatif 2 :

Bilangan dari 1 sampai dengan 33 yang memiliki faktor 3 ada 11 yaitu 3, 6, 9, 12, 15, 18, ⋯, 33

Di antara 11 bilangan tersebut yang habis dibagi $3^3 = 27$ ada 1 yaitu 27.

Di antara 11 bilangan tersebut yang habis dibagi $3^2 = 9$ tetapi tidak habis dibagi $3^3 = 27$ ada 2 yaitu 9, 18.

Sisanya adalah 8 bilangan yang habis dibagi 3 tetapi tidak habis dibagi 9 maupun 27.

Maka nilai n terbesar yang membagi 33! = 3x1 + 2x2 + 1x8 = 15.

∴ Nilai n terbesar yang mungkin adalah **15**.

15. Persamaan garis yang melalui $\left(3,2\frac{1}{5}\right)$ dan $\left(99,68\frac{3}{5}\right)$ adalah 120y = 83x + 15.

    15(8y − 1) = 83x

    Karena 15 tidak membagi 83 maka 15 membagi x.

    Nilai x yang mungkin adalah 15, 30, 45, 60, 75 atau 90.

    Setelah dicek satu-satu maka nilai x bulat yang memenuhi y juga bulat hanyalah x = 75 yang membuat y = 52

    ∴ Banyaknya titik dengan koordinat bilangan bulat yang dilalui garis tersebut adalah **1.**

16. Pada ΔQRT berlaku ∠RTQ = 180° − 60° − 35° = 85°

    Pada ΔPRS berlaku ∠PSR = 180° − 60° − 40° = 80°

    Pada segiempat RSXT berlaku 360° = 60° + ∠RTQ + ∠PSR + ∠SXT

    ∠SXT = 135°.

    ∴ ∠SXT = **135°.**

17. Misalkan AC = b dan BC = a maka $AB^2 = a^2 + b^2$

    $AE^2 = (0{,}5a)^2 + b^2$ dan $BF^2 = a^2 + (0{,}5b)^2$

    $AE^2 + BF^2 = 1{,}25(a^2 + b^2)$

    ∴ $\frac{AE^2+BF^2}{AB^2} = \frac{5}{4}$

18. Diketahui A = (1, 0), B(2008, 2007), C(2007, 2007) dan D(0, 0)

    Alternatif 1 :

    Misalkan E(0, 2007) dan F(2008, 0)

    Luas jajaran genjang = Luas persegi panjang DFBE − Luas ΔDCE − Luas ΔAFB.

    Luas jajaran genjang = 2008 · 2007 − ½ · 2007 · 2007 − ½ · 2007 · 2007 = 2007

Alternatif 2 :

Panjang alas = |DA| = 1

Tinggi = 2007 − 0 = 2007

Luas jajaran ganjang = alas x tinggi

Luas jajaran genjang = 2007

∴ Luas jajaran genjang = **2007**

19. Misalkan segitiga tersebut adalah ΔABC. Agar luas segitiga maksimum maka ketiga titik sudut segitiga sama sisi tersebut harus terletak pada lingkaran.

    $R = \frac{abc}{4[ABC]}$ dengan [ABC] menyatakan luas segitiga ABC.

    Karena ΔABC sama sisi maka abc = a^3

    $$1 = \frac{a^3}{2a^2 \sin 60^o}$$

    $$a = \sqrt{3}$$

    Luas ΔABC = ½ a^2 sin 60°

    ∴ Luas ΔABC = $\frac{3}{4}\sqrt{3}$

20. Misalkan r_n adalah banyaknya region maksimal yang terjadi akibat terdapat n buah garis lurus.

    Banyaknya region akan maksimal apabila tidak ada sedikitnya dua garis sejajar dan tidak ada sedikitnya tiga garis yang bertemu di satu titik.

    Jelas bahwa $r_0 = 1$, $r_1 = 2$, $r_2 = 4$, $r_3 = 7$, $r_4 = 11$ dan seterusnya.

    Ini dirumuskan dengan $r_n = r_{n-1} + n$

    $r_2 - r_1 = 2$

    $r_3 - r_2 = 3$

    $r_4 - r_3 = 4$

    $\vdots$

    $r_n - r_4 = n$

    Jumlahkan semua persamaan didapat :

    $r_n - r_1 = \frac{n-1}{2}(2 + n)$

Karena $r_1 = 2$ maka $r_n = \frac{n^2+n+2}{2}$

Jika n = 62 maka $r_n = 1954 < 2007$

Jika n = 63 maka $r_n = 2017 > 2007$

Maka banyaknya garis minimal adalah 63.

$\therefore$ Banyaknya garis lurus yang harus ditarik paling sedikit ada **63.**

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2007

TINGKAT PROVINSI

BAGIAN PERTAMA

WAKTU : 90 MENIT

Soal Olimpiade Matematika Tingkat Provinsi Tahun 2007

BAGIAN PERTAMA

1. Bilangan ganjil 4-angka terbesar yang hasil penjumlahan semua angkanya bilangan prima adalah
2. Sejumlah uang terdiri dari koin pecahan Rp. 500, Rp. 200, dan Rp. 100 dengan nilai total Rp. 100.000. Jika nilai uang pecahan 500-an setengah dari nilai uang pecahan 200-an, tetapi tiga kali nilai uang pecahan 100-an, maka banyaknya koin adalah ····
3. Panjang sisi miring sebuah segitiga siku-siku sama dengan dua kali panjang sisi terpendeknya, sedangkan panjang sisi ketiga 1 satuan panjang lebih panjang dari panjang sisi terpendeknya. Luas segitiga itu adalah ·········· satuan luas.
4. Di antara bilangan-bilangan 2006, 2007 dan 2008, bilangan yang memiliki faktor prima berbeda terbanyak adalah ·······
5. Seorang pedagang mobil bekas menjual dua buah mobil dengan harga sama. Ia merugi 10% untuk mobil pertama, tetapi impas (kembali modal) untuk kedua mobil. Persentase keuntungan pedagang itu untuk mobil kedua adalah ·····
6. Dona menyusun lima buah persegi yang kongruen menjadi sebuah bangun datar. Tidak ada persegi yang menindih persegi lainnya. Jika luas bangun yang diperoleh Dona adalah 245 cm^2, keliling bangun tersebut paling sedikit adalah ···· cm.
7. Empat tim sepakbola mengikuti sebuah turnamen. Setiap tim bertanding melawan masingmasing tim lainnya sekali. Setiap kali bertanding, sebuah tim memperoleh nilai 3 jika menang, 0 jika kalah dan 1 jika pertandingan berakhir seri. Di akhir turnamen salah satu tim memperoleh nilai total 4. Jumlah nilai total ketiga tim lainnya paling sedikit adalah ····
8. Untuk bilangan asli n, didefinisikan n! = 1 x 2 x 3 x ··· x n. Dalam bentuk sederhana, 1!1 + 2!2 + 3!3 + ··· + n!n = ·······
9. Titik P terletak di kuadran I pada garis y = x. Titik Q terletak pada garis y = 2x demikian sehingga PQ tegak lurus terhadap garis y = x dan PQ = 2. Maka koordinat Q adalah ·····
10. Himpunan semua bilangan asli n sehingga 6n + 30 adalah kelipatan 2n + 1 adalah ·····
11. Suku konstanta pada ekspansi $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^9$ adalah ········
12. Absis titik potong garis ℓ dengan sumbu-x dan ordinat titik potong ℓ dengan sumbu-y adalah bilangan-bilangan prima. Jika ℓ juga melalui titik (3, 4), persamaan ℓ adalah ····
13. Tujuh belas permen dikemas ke dalam kantong-kantong sehingga banyak permen dalam setiap dua kantong berselisih paling banyak 1. Banyaknya cara mengemas permen tersebut ke dalam paling sedikit dua kantong adalah ····

14. Jika nilai maksimum x + y pada himpunan $\{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + 3y \leq 6, 3x + y \leq a\}$ adalah 4, haruslah a = $\cdots\cdots$
15. Sebuah kubus berukuran 5 x 5 x 5 disusun dari 125 kubus satuan. Permukaan kubus besar lalu dicat. Rasio sisi (permukaan) ke-125 kubus satuan yang dicat terhadap yang tidak dicat adalah $\cdots$
16. Sebuah papan persegi dibagi ke dalam 4 x 4 petak dan diwarnai seperti papan catur. Setiap petak diberi nomor dari 1 hingga 16. Andi ingin menutup petak-petak pada papan dengan 7 kartu seukuran 2 x 1 petak. Agar ke-7 kartunya dapat menutupi papan, ia harus membuang dua petak. Banyak cara ia membuang dua petak adalah $\cdots\cdot$
17. Bilangan-bilangan asli 1, 2, $\cdots$, n dituliskan di papan tulis, kemudian salah satu bilangan dihapus. Rata-rata aritmatika bilangan yang tertinggal adalah $35\frac{7}{17}$. Bilangan n yang memungkinkan ini terjadi adalah $\cdots\cdots$
18. Diberikan segitiga ABC siku-siku di A, titik D pada AC dan titik F pada BC. Jika AF $\perp$ BC dan BD = DC = FC = 1, maka AC = $\cdots\cdot$
19. Di antara semua solusi bilangan asli (x, y) persamaan $\frac{x+y}{2} + \sqrt{xy} = 54$, solusi dengan x terbesar adalah (x, y) = $\cdots\cdots$
20. Misalkan V adalah himpunan titik-titik pada bidang dengan koordinat bilangan bulat dan X adalah himpunan titik tengah dari semua pasangan titik pada himpunan V. Untuk memastikan bahwa ada angota X yang juga memiliki koordinat bilangan bulat, banyak anggota V paling sedikit harus $\cdots\cdots$

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2007

TINGKAT PROVINSI

BAGIAN KEDUA

WAKTU : 120 MENIT

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika Tingkat Provinsi Tahun 2007

BAGIAN KEDUA

1. Misalkan ABCD sebuah segiempat dengan AB = BC = CD = DA.
   (A) Buktikan bahwa titik A harus berada di luar segitiga BCD.
   (B) Buktikan bahwa setiap pasangan sisi berhadapan pada ABCD selalu sejajar.
2. Misalkan a dan b dua bilangan asli, yang satu bukan kelipatan yang lainnya. Misalkan pula KPK(a,b) adalah bilangan 2-angka, sedangkan FPB(a,b) dapat diperoleh dengan membalik urutan angka pada KPK(a,b). Tentukan b terbesar yang mungkin.
   [KPK : Kelipatan Persekutuan terKecil; FPB : Faktor (pembagi) Persekutuan terBesar]
3. Tentukan semua bilangan real x yang memenuhi $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$
4. Pada segitiga lancip ABC, AD, BE dan CF adalah garis-garis tinggi, dengan D, E, F berturut-turut pada sisi BC, CA, dan AB. Buktikan bahwa
   $$DE + DF \le BC$$
5. Bilangan-bilangan 1, 2, 3, $\cdots$, 15, 16 disusun pada persegi 4 x 4. Untuk i = 1, 2, 3, 4, misalkan b_i adalah jumlah bilangan-bilangan pada baris ke-i dan k_i adalah jumlah bilangan-bilangan pada kolom ke-i. Misalkan pula d_1 dan d_2 adalah jumlah bilangan-bilangan pada kedua diagonal. Susunan tersebut dapat disebut *antimagic* jika b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4, d_1, d_2 dapat disusun menjadi sepuluh bilangan berurutan. Tentukan bilangan terbesar di antara sepuluh bilangan berurutan ini dapat diperoleh dari sebuah *antimagic*.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2007

TINGKAT PROVINSI

SOLUSI SOAL

BAGIAN PERTAMA

WWW.JELAJAHNALAR.COM

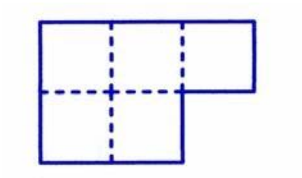
Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2007

BAGIAN PERTAMA

1. Penjumlahan semua angkanya maksimal = 36. Tetapi 36, 35, 34, 33 dan 32 bukan bilangan prima. Maka penjumlahan maksimal semua angkanya = 31.
   Dua angka pertama harus sebesar mungkin, yaitu 99. Jika angka ke-3 juga 9 maka angka ke-4 harus 4, tetapi 9994 bukanlah bilangan ganjil. Maka angka ketiga haruslah 8 dengan angka keempat adalah 5 yang merupakan bilangan ganjil.
   $\therefore$ Bilangan ganjil 4-angka yang memenuhi adalah **9985.**
2. Misalkan nilai uang pecahan 100-an = x
   Maka nilai uang pecahan 500-an = 3x dan nilai uang pecahan 200-an = 6x
   Karena (x) + (3x) + (6x) = 100.000 maka x = 10.000
   Banyaknya koin 100-an = 10000 : 100 = 100
   Banyaknya koin 200-an = (6 · 10000) : 200 = 300
   Banyaknya koin 500-an = (3 · 10000) : 500 = 60
   $\therefore$ Banyaknya koin = 100 + 300 + 60 = **460.**
3. Misalkan panjang sisi miring segitiga tersebut = r, sisi terpendek = x dan sisi lainnya = y
   Diketahui bahwa r = 2x dan y = x + 1
   $x^2 + y^2 = r^2$ maka $x^2 + (x + 1)^2 = (2x)^2$
   $2x^2 - 2x - 1 = 0$ maka $x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4(2)(-1)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$
   Ambil nilai x yang positif maka $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ sehingga $y = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$
   Luas segitiga = ½ · x · y
   $\therefore$ Luas segitiga = $\frac{3+2\sqrt{3}}{4}$
4. $2006 = 2 \cdot 17 \cdot 59$; $2007 = 3^2 \cdot 223$; $2008 = 2^3 \cdot 251$
   Banyaknya fakor prima dari 2006 = 3
   Banyaknya fakor prima dari 2007 = 2
   Banyaknya fakor prima dari 2008 = 2
   $\therefore$ Maka bilangan yang memiliki faktor prima berbeda terbanyak adalah **2006.**
5. Misalkan ia menjual mobil masing-masing seharga y. Misalkan juga modal mobil pertama adalah x. Maka agar impas modal mobil kedua haruslah 2y − x.
   $\frac{x-y}{x} = \frac{1}{10}$ sehingga 10y = 9x
   Keuntungan mobil kedua = $\frac{y-(2y-x)}{2y-x} = \frac{x-y}{2y-x} = \frac{10x-9x}{18x-10x} = \frac{1}{8}$

$\therefore$ Persentase keuntungan pedagang untuk mobil kedua = **12,5 %**

6. Karena tidak ada yang tumpang tindih maka luas persegi = 245 : 5 = 49 cm^2.
   Panjang sisi persegi = 7.
   Agar kelilingnya kecil maka harus semakin banyak sisi-sisi persegi yang menempel dengan sisi-sisi yang lain.



   $\therefore$ Keliling persegi = 10 x panjang sisi persegi = **70 cm**

7. Apabila pertandingan dua tim berakhir seri maka total nilai yang didapat kedua tim adalah 2 sedangkan apabila pertandingan dua buah tim berakhir dengan kemenangan salah satu tim maka total nilai kedua tim sama dengan 3.
   Total pertandingan = ${}_4C_2$ = 6.
   Nilai 4 hanya didapat jika tim tersebut menang satu kali, seri satu kali dan kalah satu kali. Agar jumlah nilai ketiga tim lainnya paling sedikit maka haruslah tiga pertandingan lainnya berakhir seri.
   Maka dari 6 pertandingan terdapat 4 pertandingan yang berakhir seri.
   Nilai total keempat tim = $2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 14$
   Maka total nilai ketiga tim lainnya = 14 − 4 = 10.
   $\therefore$ Maka total nilai ketiga tim lainnya paling sedikit = 14 − 4 = **10**.

8. $1!1 + 2!2 + 3!3 + \cdots + n!n = 1!(2-1) + 2!(3-1) + 3!(4-1) + \cdots + n!((n+1)-1)$
   $1!1 + 2!2 + 3!3 + \cdots + n!n = (2! - 1!) + (3! - 2!) + (4! - 3!) + \cdots + (n+1)! - n!$
   $1!1 + 2!2 + 3!3 + \cdots + n!n = (n+1)! - 1!$
   $\therefore$ $1!1 + 2!2 + 3!3 + \cdots + n!n =$ $\mathbf{(n+1)! - 1}$

9. Misalkan koordinat $Q(x_Q, y_Q)$ dan $P(x_P, y_P)$
   Alternatif 1 :
   Karena P di kuadran I maka Q pun akan di kuadran I. Karena $y_Q = 2x_Q$ maka $y_Q \geq x_Q$
   Jarak Q ke garis y = x adalah PQ = 2.
   Jarak $Q(x_Q, y_Q)$ ke garis Ax + By + C = 0 dirumuskan dengan :
   $d = \left|\frac{Ax_Q + By_Q + C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$
   Maka :
   $d = \left|\frac{y_Q - x_Q}{\sqrt{1^2+1^2}}\right| = 2$. Maka $y_Q - x_Q = 2\sqrt{2}$ .... (1)
   Karena garis y = 2x melalui Q maka $y_Q = 2x_Q$ .... (2)
   Dari persamaan (1) dan (2) didapat $x_Q = 2\sqrt{2}$ dan $y_Q = 4\sqrt{2}$
   Alternatif 2 :
   Gradien garis y = x adalah m = 1. Maka gradien garis yang melalui PQ adalah $m_{PQ} = -1$
   $\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = -1$. Maka $2x_Q - x_P = x_P - x_Q$ sehingga $3x_Q = 2x_P$ ····················· (3)

$\sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2} = 2$ sehingga $(x_Q^2 - 2x_Qx_P + x_P^2) + (4x_Q^2 - 4x_Qx_P + x_P^2) = 4$

$5x_Q^2 - 6x_Qx_P + 2x_P^2 = 4$ ············· (4)

Subtitusikan persamaan $3x_Q = 2x_P$ ke persamaan (4)

$10x_Q^2 - 18x_Q^2 + 9x_Q^2 = 8$

Karena Q di kuadran I maka $x_Q = 2\sqrt{2}$ dan $y_Q = 4\sqrt{2}$

∴ Koordinat Q adalah $(2\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$**.**

10. 6n + 30 = k(2n + 1) untuk suatu k dan n bilangan asli.

    $(k - 3)(2n + 1) = 27 = 3^3$

    Nilai 2n + 1 yang memenuhi hanya jika 2n + 1 = 3, 9 atau 27

    Jika 2n + 1 = 3 maka k − 3 = 9 sehingga n = 1 dan k = 12

    Jika 2n + 1 = 9 maka k − 3 = 3 sehingga n = 4 dan k = 6

    Jika 2n + 1 = 27 maka k − 3 = 1 sehingga n = 13 dan k = 4

    ∴ Nilai n asli yang memenuhi 6n + 30 adalah kelipatan 2n + 1 adalah **n = 1, 4, 13.**

11. $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^9 = {}_9C_0(2x^2)^9\left(-\frac{1}{x}\right)^0 + \cdots + {}_9C_k(2x^2)^k\left(-\frac{1}{x}\right)^{9-k} + \cdots$

    Untuk mencari suku konstanta maka harus dipenuhi $x^{2k} \cdot x^{k-9} = x^0$ sehingga k = 3

    ${}_9C_3(2x^2)^3(x)^{3-9} = 672$

    ∴ Maka konstanta pada ekspansi $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^9$ adalah **672**.

12. Misalkan persamaan garis ℓ adalah y = mx + c

    Karena titik potongnya dengan sumbu y bilangan prima maka c adalah bilangan prima.

    Titik potong dengan sumbu x jika y = 0. Maka mx + c = 0 sehingga x = $-\frac{c}{m}$ adalah bilangan prima.

    Karena c prima maka $-\frac{c}{m}$ akan prima hanya jika m = −1. Maka y = −x + c

    Karena garis melalui titik (3, 4) maka 4 = −3 + c. Akibatnya c = 7 dan y = −x + 7

    ∴ Persamaan garis ℓ adalah **y = −x + 7.**

13. Karena dalam setiap dua kantong berselisih paling bayak 1, maka banyaknya permen hanya akan ada 2 jenis, yaitu m dan m + 1.

    Pendapat 1 :

    Karena 17 ≡ 1 (mod 2) maka untuk dua kantong akan terdapat dua kemungkinan yaitu satu kantong berisi 8 permen sedangkan kantong lainnya 9 permen dan sebaliknya.

    Karena 17 ≡ 2 (mod 3) maka untuk tiga kantong, kemungkinan mengemas permen akan terdiri dari dua kantong berisi 6 permen dan satu kantong lagi berisi 5 permen. Banyaknya cara mengemas permen pada kasus ini adalah $\frac{3!}{2!\cdot 1!}$ = 3 cara.

    Karena 17 ≡ 1 (mod 4) maka untuk empat kantong, kemungkinan mengemas permen akan terdiri dari satu kantong berisi 5 permen dan tiga kantong lagi berisi 4 permen. Banyaknya cara mengemas permen pada kasus ini adalah $\frac{4!}{1!\cdot 3!}$ = 4 cara. Demikian seterusnya.

    Misalkan Banyaknya cara = N maka :

$$N = \frac{2!}{1!\cdot 1!} + \frac{3!}{2!\cdot 1!} + \frac{4!}{1!\cdot 3!} + \frac{5!}{2!\cdot 3!} + \frac{6!}{5!\cdot 1!} + \frac{7!}{3!\cdot 4!} + \frac{8!}{1!\cdot 7!} + \frac{9!}{8!\cdot 1!} + \frac{10!}{7!\cdot 3!} + \frac{11!}{6!\cdot 5!} + \frac{12!}{5!\cdot 7!} + \frac{13!}{4!\cdot 9!} + \frac{14!}{3!\cdot 11!} + \frac{15!}{2!\cdot 13!} + \frac{16!}{1!\cdot 15!} + \frac{17!}{0!\cdot 17!}$$

Banyaknya cara = 2 + 3 + 4 + 10 + 6 + 35 + 8 + 9 + 120 + 462 + 792 + 715 + 364 + 105 + 16 + 1

∴ Banyaknya cara mengemas permen = **2652**

Pendapat 2 :

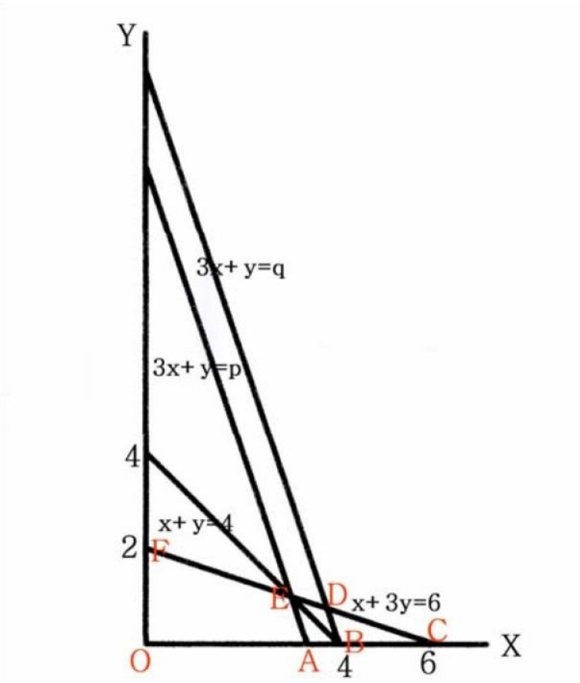
Karena banyaknya permen pada masing-masing kantong adalah m atau m + 1 maka pada masing-masing banyaknya kantong hanya akan ada 1 kemungkinan cara mengemas permen.

∴ Karena kemungkinan banyaknya kantong ada 16, maka banyaknya cara mengemas permen ada **16.**

Catatan: Pendapat 1 didasarkan asumsi bahwa kantong-kantong tersebut semuanya berbeda sehingga 8 permen dimasukkan ke kantong pertama dan 9 permen dimasukkan ke kantong kedua akan berbeda dengan bila 9 permen dimasukkan ke kantong pertama dan 8 permen dimasukkan ke kantong kedua. Sedangkan Pendapat 2 didasarkan asumsi bahwa kantong-kantong tersebut semuanya identik sehingga 8 permen dimasukkan ke kantong pertama dan 9 permen dimasukkan ke kantong kedua akan sama dengan bila 9 permen dimasukkan ke kantong pertama dan 8 permen dimasukkan ke kantong kedua. Solusi Panitia Pusat adalah sesuai dengan pendapat 2.

14. Alternatif 1 :

Digambar daerah x ≥ 0, y ≥ 0 dan x + 3y ≤ 6.



Daerah yang memenuhi x ≥ 0, y ≥ 0 dan x + 3y ≤ 6 adalah OCF.

Dibuat garis x + y = 4

Perpotongan garis x + 3y = 6 dengan x + y = 4 adalah di E(3, 1).

Perpotongan garis y = 0 dengan x + y = 4 adalah di B(4, 0).

Dibuat garis 3x + y = p yang melalui E(3, 1) dan 3x + y = q yang melalui B(4, 0).

Maka akan didapat nilai p = 10 dan q = 12.

Garis 3x + y = 12 memotong garis x + 3y = 6 di $D\left(\frac{15}{4},\frac{3}{4}\right)$ yang membuat x + y > 4.

Garis 3x + y = 10 memotong garis y = 0 di $A\left(\frac{10}{3},0\right)$ yang membuat x + y < 4.

Karena nilai x + y yang diminta dalam soal adalah nilai maksimum maka persamaan 3x + y ≤ a yang memenuhi adalah 3x + y ≤ 10.

∴ Maka nilai a yang memenuhi adalah **a = 10.**

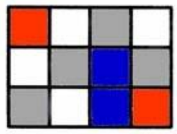
Alternatif 2 :

Karena x + 3y ≤ 6 dan 3x + y ≤ a maka 4(x + y) ≤ 6 + a

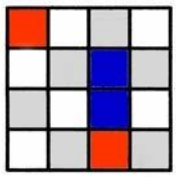
Karena maks(x + y) = 4 maka haruslah dipenuhi 4 · 4 = 6 + a a = 10

∴ Maka nilai a yang memenuhi adalah **a = 10.**

15. Banyaknya sisi dapat dinyatakan dalam luasan.
    Luasan yang dicat = 6 x 5 x 5 = 150.
    Luasan keseluruhan = 125 buah x 6 x 1 x 1 = 750
    Luasan yang tidak dicat = 750 − 150 = 600
    ∴ Rasio sisi yang dicat terhadap yang tidak dicat = 150 : 600 = **1 : 4.**
16. Jika satu kartu ditaruh pada papan maka kartu tersebut akan menutupi satu petak warna hitam dan satu petak warna putih. Maka jelas bahwa dua petak yang dibuang agar dipenuhi bahwa sisa petak dapat ditutupi oleh 7 buah kartu harus memenuhi bahwa kedua petak tersebut berbeda warna.
    Akan dibuktikan bahwa bagaimana pun cara memilih petak asalkan berbeda warna maka sisanya akan dapat ditutupi oleh 7 buah kartu.
    Dalam satu baris 4 x 1 petak maupun dalam satu kolom 1 x 4 petak, jelas dapat ditutupi oleh dua buah kartu.
    - Jika dua petak yang dibuang berada pada satu baris
      Jika 2 petak tersebut berada pada kolom ke-1 dan 2 atau kolom 3 dan 4 maka sisanya dapat ditutupi oleh 1 buah kartu. Tiga baris sisa akan dapat ditutupi oleh 6 buah kartu. Jika 2 petak tersebut berada pada kolom ke-2 dan 3 maka jelas baris tersebut dan baris didekatnya dapat ditutupi oleh 3 buah kartu. Sedangkan 2 baris sisanya dapat ditutupi oleh 4 buah kartu lagi.
    - Jika dua petak yang dibuang, salah satunya di baris ke-n sedangkan satu lagi di baris ke-(n+1) Jelas juga bahwa dua baris tersebut dapat ditutupi oleh tiga buah kartu. Dua baris lainnya sesuai dengan keterangan sebelumnya dapat ditutupi oleh 4 buah kartu.
    - Jika dua petak yang dibuang, salah satunya di baris ke-n sedangkan satu lagi di baris ke-(n+2) Taruh sebuah kartu dalam arah vertikal sedemikian sehingga terdapat satu baris berisi satu petak yang dibuang dan satu petak lagi merupakan salah satu petak dari kartu yang ditaruh dengan warna kedua petak tersebut berbeda. Maka akan terbentuk 2 bagian. Satu bagian terdiri dari 2 baris dengan 2 petak “dibuang” dan satu baris sisanya terdiri 2 petak yang ‘dibuang’. Sesuai dengan keterangan sebelumnya maka sisa petak akan dapat ditutupi oleh 6 buah kartu.



- Jika dua petak yang dibuang, salah satunya di baris ke-1 sedangkan satu lagi di baris ke-4 Taruh sebuah kartu vertikal dengan kedua petaknya terletak pada baris ke-2 dan ke-3 sedemikian sehingga dua petak pada baris ke-1 dan ke-2 yang tidak dapat ditaruh kartu lagi akan berbeda warna. Maka sesuai dengan keterangan sebelumnya pada baris ke-1 dan ke-2 dapat ditutupi oleh tiga buah kartu lagi. Demikian juga dengan baris ke-3 dan ke-4.



Terbukti bahwa bagaimana pun cara memilih petak asalkan berbeda warna maka sisanya akan dapat ditutupi oleh 7 buah kartu.

Banyaknya petak hitam dan putih masing-masing ada 8. Maka banyaknya cara memilih dua petak agar dapat dipenuhi adalah 8 x 8 = 64.

$\therefore$ Banyaknya cara memilih dua petak = **64.**

(Catatan : Pembuktian dapat dilakukan dengan induksi matematika)

17. Misalkan bilangan yang dihapus adalah k.

$\frac{1+2+\cdots+n-k}{n-1} = \frac{602}{17}$ maka $\frac{n}{2} + \frac{n-k}{n-1} = 35\frac{7}{17}$

Karena k ≥ 1 maka n − k ≤ n − 1 sehingga $0 \leq \frac{n-k}{n-1} \leq 1$

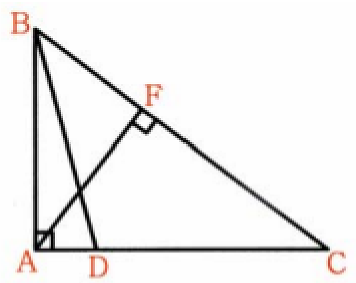
$34\frac{7}{17} \leq \frac{n}{2} \leq 35\frac{7}{17}$ sehingga 68 < n ≤ 70

Jika n = 70 maka $k = (1+2+3+\cdots+70) - \frac{602}{17} \cdot 69$. Karena 17 tidak membagi 69 maka tidak ada nilai k asli yang memenuhi.

Jika n = 69 maka $k = (1+2+3+\cdots+69) - \frac{602}{17} \cdot 68 = 7$

$\therefore$ Maka **n = 69**

18. Misalkan panjang AC = x maka AD = x − 1



Pada ΔAFC berlaku AC cos C = FC maka cos C = $\frac{1}{x}$

Karena DC = DB maka ΔCDB sama kaki sehingga ∠DBC = C.

Akibatnya $\angle BDA = 2C$

Pada ΔBDA berlaku :

BD cos $\angle BDA$ = AD. Maka $1 \cdot \cos 2C = x - 1$ sehingga $2\cos^2 C - 1 = x - 1$

$\frac{2}{x^2} = x$

$x = \sqrt[3]{2}$

$\therefore$ Maka AC = $\sqrt[3]{2}$

19. $\frac{x+y}{2} + \sqrt{xy} = 54$. Maka $\left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 = 108$

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = 6\sqrt{3}$

Karena x dan y keduanya bilangan asli maka x dan y keduanya harus berbentuk $3k^2$.

Agar didapat solusi x terbesar maka y haruslah minimal. Nilai terkecil y adalah y = 3.

Maka didapat $\sqrt{x} = 5\sqrt{3}$ sehingga x = 75.

$\therefore$ Maka solusi dengan x terbesar adalah (x, y) = **(75, 3)**.

20. Misal koordinat $V_1(x_1, y_1)$ dan $V_2(x_2, y_2)$ dengan titik tengah V_1 dan V_2 adalah X_{12}.

Maka koordinat X_{12} adalah $(\frac{1}{2}(x_1 + x_2), \frac{1}{2}(y_2 + y_2))$.

Jika X_{12} memiliki koordinat bilangan bulat maka haruslah $x_1 + x_2$ dan $y_1 + y_2$ genap.

Syarat itu terjadi haruslah x_1 dan x_2 memiliki paritas yang sama dan y_1 dan y_2 juga memiliki paritas yang sama.

Kemungkinan jenis koordinat (dalam bahasa lain disebut paritas) suatu titik letis pada bidang hanya ada 4 kemungkinan yaitu (genap, genap), (genap,ganjil), (ganjil, ganjil) dan (ganjil, genap).

Agar dapat dipastikan bahwa ada anggota X yang memiliki koordinat bilangan bulat maka sesuai *Pigeon Hole Principle* (PHP) maka haruslah terdapat sekurang-kurangnya 5 buah titik letis.

$\therefore$ Maka anggota V paling sedikit harus **5**.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2007

TINGKAT PROVINSI

SOLUSI SOAL

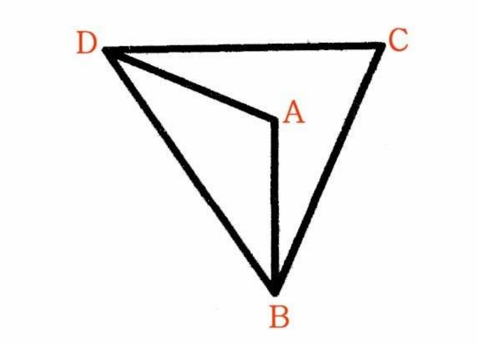
BAGIAN KEDUA

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2007

BAGIAN KEDUA

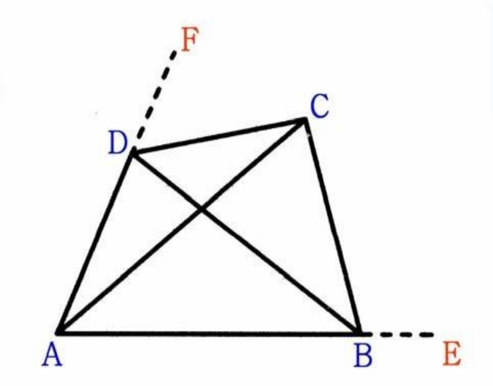
1. (a) Andaikan A berada di dalam segitiga BCD.



Karena panjang sisi-sisi ΔBAD dan ΔBDC sama maka ΔBAD dan ΔBCD kongruen dan karena sisi BD berhimpit serta AB = AD = BC = CD maka titik A haruslah berhimpit dengan C. Kontradiksi dengan kenyataan bahwa ABCD adalah segiempat.

∴ **Terbukti bahwa A haruslah berada di luar segitiga BDC.**

(b) Misalkan $\angle BAD = \alpha$ dan $\angle ABC = \beta$



Pada ΔBAD dan ΔBDC berlaku :

$BD^2 = AD^2 + AB^2 - 2 \cdot AD \cdot AB \cos \angle BAD$

$BD^2 = CD^2 + CB^2 - 2 \cdot CD \cdot CB \cos \angle BCD$

Karena AD = AB = CD = CB maka $\angle BAD = \angle BCD = \alpha$

Pada ΔABC dan ΔADC berlaku :

$AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2 \cdot BA \cdot BC \cos \angle ABC$

$AC^2 = DA^2 + DC^2 - 2 \cdot DA \cdot DC \cos \angle ADC$

Karena BA = BC = DA = DC maka $\angle ABC = \angle ADC = \beta$

Akibatnya $\alpha + \beta = 180^\circ$

Karena $\alpha + \beta = 180^o$ dan $\angle ABC = \beta$ maka $\angle CBE = \alpha$

Karena $\angle DAE = \angle CBE = \alpha$ maka haruslah AD sejajar BC

Karena $\alpha + \beta = 180^o$ dan $\angle ADC = \beta$ maka $\angle CDF = \alpha$

Karena $\angle BAF = \angle CDF = \alpha$ maka haruslah AB sejajar DC

$\therefore$ **Terbukti bahwa setiap pasangan sisi berhadapan pada ABCD selalu sejajar.**

2. Misalkan FPB(a, b) = d = 10p + q maka KPK(a, b) = 10q + p

Pendapat 1 :

a = dx dan b = dy untuk suatu bilangan asli d, x, y serta FPB(x, y) = 1 dan x, y $\neq$ 1

Karena a dan b simetri dan diinginkan b maksimum maka b > a sehingga y > x

Jelas bahwa KPK(a, b) = dxy

(10p + q)xy = (10q + p)

Karena 10p + q dan 10q + p keduanya bilangan asli dua angka maka xy < 10

Karena x, y $\neq$ 1 dan FPB(x, y) = 1 maka pasangan (x, y) yang memenuhi hanya x = 2 dan y = 3.

6(10p + q) = 10q + p sehingga 59p = 4q

Karena 59 adalah bilangan prima maka q haruslah kelipatan 59. Tetapi q bilangan asli satu angka. Maka tidak ada nilai q yang memenuhi.

$\therefore$ **Tidak ada nilai b yang memenuhi.**

Pendapat 2 :

Jika p $\geq$ 1.

Karena $10p + q \mid 10q + p$ maka $10p + q \mid 10(q + 10p) - 99p$ sehingga $10p + q \mid 99p$

Jika 11 tidak membagi q + 10p maka $10p + q \mid 9p$ tetapi $0 < 9p < q + 10p$. Kontradiksi.

Jika $11 \mid 10p + q$ maka $11 \mid 11p + q - p$ sehingga $11 \mid q - p$

Karena $0 \leq q - p \leq 9$ maka q − p = 0 sehingga KPK (a, b) = FPB (a, b). Akibatnya a = b. Kontradiksi.

Jadi p = 0

KPK (a, b) = 10q dan FPB (a, b) = q.

Misalkan a = xq dan b = yq dengan FPB (x, y) = 1.

Karena KPK (a, b) = 10q maka KPK (x, y) = 10.

Maka y = 10, 5, 2, 1.

Jika y = 10 maka x = 1. Akibatnya $x \mid y$ sehingga $a \mid b$. Kontradiksi.

Jika y = 5 maka x = 2. Akibatnya karena $1 \leq q \leq 9$ maka b_{maks} = yq = 45 dan a = 18.

b = 45 dan a = 18 memenuhi syarat pada soal.

Untuk $1 \leq y \leq 5$ maka karena $1 \leq q < 9$ maka $b = yq \leq 45$

$\therefore$ Nilai maksimum b yang memenuhi adalah b_{maks} = **45.**

Pendapat 1 memiliki pendapat sebagai berikut. Pada soal diketahui bahwa KPK(a, b) adalah bilangan 2-angka, sedangkan FPB(a, b) dapat diperoleh dengan membalik urutan angka pada KPK(a, b). Artinya jika KPK(a, b) = xy maka FPB(a, b) = yx. Jika KPK(a, b) = 90 maka FPB(a, b) = 09. Dari pengertian ini maka

KPK(a, b) tidak boleh berakhiran dengan angka 0 sebab akan menyebabkan penulisan FPB(a, b) akan dimulai dengan angka 0 sehingga hal ini tidak lazim.

Pendapat 2 memiliki pendapat sebagai berikut. Berdasarkan soal maka hanya KPK (a, b) yang harus merupakan bilangan dua angka sedangkan FPB(a, b) tidak harus merupakan bilangan dua angka. Membalik urutan angka bukan merupakan fungsi satu-satu. Ekspresi matematika haruslah kita tuliskan dalam bentuk yang paling sederhana walaupun dari mana asalnya. 009, 09, dan 9 mempunyai arti yang sama kalau mereka kita artikan sebagai bilangan. Dengan demikian mereka merupakan satu kelas dan cukup diwakili oleh 9 (sebagai ekspresi yang paling sederhana). Solusi dari Panitia Pusat adalah sesuai dengan pendapat 2.

3. $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$

   $(x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1) - x^2 = 0$

   $((x - 1)^2)^2 - x^2 = 0$

   Mengingat $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ maka :

   $(x^2 - 2x + 1 - x)(x^2 - 2x + 1 + x) = 0$

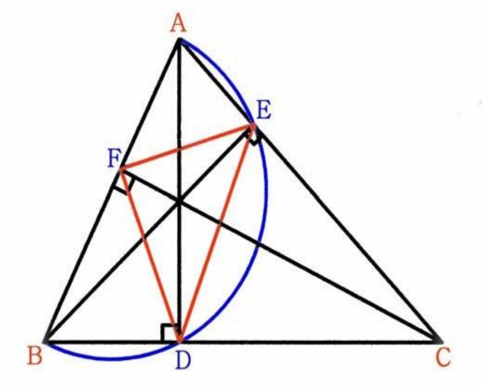
   $(x^2 - 3x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$

   Karena $(-1)^2 - 4(1)(1) < 0$ maka tidak ada x real yang memenuhi $x^2 - x + 1 = 0$.

   Untuk $x^2 - 3x + 1 = 0$ dipenuhi oleh $x_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{3^2-4(1)(1)}}{2\cdot 1}$ sehingga $x_{1,2} = x_{1,2} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

   $\therefore$ Maka nilai x real yang memenuhi adalah $x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ **atau** $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

4. Misalkan $\angle BAC = \alpha$, $\angle ABC = \beta$ dan $\angle ACB = \gamma$



Karena ΔAEB siku-siku di E dan ΔADB siku-siku di D maka dengan AB sebagai diameter, dapat dibuat sebuah lingkaran yang melalui A, E, D dan B. Maka AEDB adalah segiempat talibusur. Karena AEDB adalah segiempat talibusur maka $\angle ABD + \angle AED = 180^\circ$

$(\beta) + (90^\circ + \angle BED) = 180^\circ$ sehingga $\angle BED = 90^\circ - \beta$. Maka $\angle DEC = \beta$

Dengan cara yang sama ACDF adalah segiempat talibusur.

Karena ACDF segiempat talibusur maka $\angle ACD + \angle DFA = 180^\circ$

$(\gamma) + (90^\circ + \angle CFD) = 180^\circ$ sehingga $\angle CFD = 90^\circ - \gamma$. Maka $\angle BFD = \gamma$

Karena ΔBFC siku-siku di F maka $\angle BCF = 90^\circ - \beta$

Karena ΔBEC siku-siku di E maka $\angle EBC = 90^\circ - \gamma$

Pada ΔBDF berlaku $= \frac{DF}{\sin\beta} = \frac{BD}{\sin\gamma}$ ………………… (1)

Pada ΔCDF berlaku $= \frac{DF}{\sin(90^o-\beta)} = \frac{DC}{\sin(90^o-\gamma)}$ sehingga $\frac{DF}{\cos\beta} = \frac{DC}{\cos\gamma}$ ………………… (2)

Pada ΔCDE berlaku $\frac{DE}{\sin\gamma} = \frac{DC}{\sin\beta}$ ………………… (3)

Pada ΔBDE berlaku $\frac{DE}{\sin(90^o-\gamma)} = \frac{BD}{\sin(90^o-\beta)}$ sehingga $\frac{DE}{\cos\gamma} = \frac{BD}{\cos\beta}$ ………………… (4)

Dari persamaan (1) dan (4) didapat :

$DE + DF = BD\left(\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} + \frac{\cos\gamma}{\cos\beta}\right)$

Mengingat sin 2x = 2 sin x cos x maka :

$2 \sin\gamma \cos\beta\ (DE + DF) = BD\ (\sin 2\beta + \sin 2\gamma)$ ………………………………… (5)

Dari persamaan (2) dan (3) didapat :

$DE + DF = DC\left(\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} + \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)$

Mengingat sin 2x = 2 sin x cos x maka :

$2 \sin\beta \cos\gamma\ (DE + DF) = DC\ (\sin 2\beta + \sin 2\gamma)$ ………………………………… (6)

Mengingat $\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma = \sin(\beta+\gamma)$ dan $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{1}{2}(x + y) \cos \frac{1}{2}(x - y)$ maka :

Persamaan (5) + Persamaan (6) :

$\sin(\beta + \gamma)(DE + DF) = 2\ (BD + DC) \sin(\beta + \gamma) \cos(\beta - \gamma)$

$DE + DF = BC \cos(\beta - \gamma)$

Mengingat $\cos(\beta - \gamma) \le 1$ maka $DE + DF \le BC$ (terbukti)

Tanda kesamaan terjadi apabila $\beta - \gamma = 0$ atau $\beta = \gamma$ sehingga ΔABC sama kaki dengan AB = AC yang berakibat D adalah pertengahan BC.

∴ Terbukti bahwa **DE + DF ≤ BC**

5. $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 16 = 136$. Jelas bahwa $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 136$.

Misalkan $m = \min(b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4)$ dan $M = \text{maks}(b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4)$

Misalkan juga $S = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 2 \cdot 136 = 272$

Alternatif 1 :

Andaikan bahwa $(b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4)$ dapat disusun menjadi 8 bilangan berurutan, maka haruslah terdapat nilai n bulat sehingga memenuhi :

$(n - 4) + (n - 3) + (n - 2) + (n - 1) + (n) + (n +1) + (n +2) + (n + 3) = 2 \cdot 136 = 272$

Karena $8n - 4 = 272$ maka tidak ada n bulat yang memenuhi.

Maka harus terdapat sedikitnya salah satu d_1 atau d_2 yang memenuhi $m < d_i < M$.

- Jika $m < d_1 < M$ dan $d_2 > M$

  Maka $\text{maks}(b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4, d_1, d_2) = d_2$ dan $M = m + 8$ dan $d_2 = m + 9$

  $(m) + (m + 1) + \cdots + (m + 6) + (m + 8) \le S \le (m) + (m + 2) + (m + 3) + \cdots + (m + 8)$

  $8m + 29 \le 272 \le 8m + 35$ sehingga $29 < m \le 30$. Maka nilai m yang mungkin hanya $m = 30$

  $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + k_1 + k_2 + k_3 + k_4 + d_1 = 30 + 31 + 32 + \cdots + 38 = 306$

  $d_1 = 306 - 272 = 34$ sehingga $d_2 = m + 9 = 39$

Maka maks ($b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4, d_1, d_2$) = 39

Contoh *antimagic* yang memenuhi nilai maksimumnya = 39

	15	2	12	4	33
	1	14	10	5	30
	8	9	3	16	36
	11	13	6	7	37
34	35	38	31	32	39

- Jika $m < d_1 < d_2 < M$

  Maka maks ($b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4, d_1, d_2$) = M dan $M = m + 9$

  $(m) + (m + 1) + \cdots + (m + 6) + (m + 9) \le S \le (m) + (m + 3) + (m + 4) + \cdots + (m + 9)$

  $8m + 30 \le 272 \le 8m + 42$ sehingga $28 < m \le 30$. Maka nilai m yang mungkin hanya m = 29 atau 30

  Karena ingin dicapai nilai M maksimum maka dipilih m = 30 sehingga M = m + 9 = 39

Alternatif 2 :

Nilai maks ($b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4, d_1, d_2$) semakin besar apabila m semakin besar.

Jika $m \ge 31$ maka $31 + 32 + 33 + 34 + 35 + 36 + 37 + 38 \le S$ sehingga $276 \le 272$ (tidak memenuhi)

Maka tidak mungkin min ($b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4$) ≥ 31 sehingga $m \le 30$

Jika m = 30 maka $30 + 31 + 32 + \cdots + 37 \le S \le 32 + 33 + 34 + \cdots + 39$ sehingga $268 \le 272 \le 284$ Ada kemungkin terdapat *antimagic* yang memenuhi m = 30.

Jika ada *antimagic* yang memenuhi untuk m = 30 maka maks ($b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4, d_1, d_2$) = 39.

Contoh *antimagic* yang memenuhi untuk m = 30.

	15	2	12	4	33
	1	14	10	5	30
	8	9	3	16	36
	11	13	6	7	37
34	35	38	31	32	39

Untuk m < 30 tidak perlu dicari sebab nilai maks ($b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4, d_1, d_2$) akan semakin kecil.

∴ Nilai maks ($b_1, b_2, b_3, b_4, k_1, k_2, k_3, k_4, d_1, d_2$) = **39.**

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2007

TINGKAT NASIONAL

HARI PERTAMA

WAKTU : 180 MENIT

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Nasional Tahun 2007

1. Misalkan ABC segitiga dengan $\angle ABC = \angle ACB = 70^o$. Misalkan titik D pada sisi BC sehingga AD garis tinggi, titik E pada sisi AB sehingga $\angle ACE = 10^o$, dan titik F adalah perpotongan AD dan CE. Buktikan bahwa CF = BC.
2. Untuk setiap bilangan asli n, b(n) menyatakan banyaknya faktor positif n dan p(n) menyatakan hasil penjumlahan semua faktor positif n. Sebagai contoh, b(14) = 4 dan p(14) = 24. Misalkan k sebuah bilangan asli yang lebih besar dari 1.
   a. Buktikan bahwa ada tak berhingga banyaknya bilangan asli n yang memenuhi $b(n) = k^2 - k + 1$.
   b. Buktikan bahwa ada berhingga banyaknya bilangan asli n yang memenuhi $p(n) = k^2 - k + 1$.
3. Misalkan a, b, c bilangan-bilangan real positif yang memenuhi ketaksamaan $5(a^2 + b^2 + c^2) < 6(ab + bc + ca)$.

   Buktikan bahwa ketiga ketaksamaan berikut berlaku : $a + b > c$, $b + c > a$, dan $c + a > b$.
4. Suatu susunan 10-angka 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 dikatakan cantik jika (i) saat dibaca dari kiri ke kanan, 0, 1, 2, 3, 4 membentuk barisan naik, sedangkan 5, 6, 7, 8, 9 membentuk barisan turun, dan (ii) angka 0 tidak berada pada ujung kiri. Sebagai contoh, 9807123654 adalah susunan cantik. Tentukan banyaknya susunan cantik.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2007

TINGKAT NASIONAL

HARI KEDUA

WAKTU : 180 MENIT

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Nasional Tahun 2007

5. Misalkan r,s dua bilangan asli dan P sebuah `papan catur' dengan r baris dan s lajur. Misalkan M menyatakan banyak maksimal benteng yang dapat diletakkan pada P sehingga tidak ada dua benteng yang saling menyerang.
   a. Tentukan M.
   b. Ada berapa cara meletakkan M buah benteng pada pada P sehingga tidak ada dua benteng yang saling menyerang ?
6. Tentukan semua tripel bilangan real (x,y,z) yang memenuhi ketiga persamaan berikut sekaligus

$$x = y^3 + y - 8$$

$$y = z^3 + z - 8$$

$$z = x^3 + x - 8$$

7. Titik-titik A,B,C,D terletak pada lingkaran S demikian rupa, sehingga AB merupakan garis tengah S, tetapi CD bukan garis tengah S. Diketahui pula bahwa C dan D berada pada sisi yang berbeda terhadap AB. Garis singgung terhadap S di C dan D berpotongan di titik P. Titik-titik Q dan R berturut-turut adalah perpotongan garis AC dengan garis BD dan garis AD dengan garis BC.
   a. Buktikan bahwa P, Q dan R segaris.
   b. Buktikan bahwa garis QR tegak lurus terhadap garis AB.
8. Misalkan m dan n dua bilangan asli. Jika ada tak berhingga banyaknya bilangan bulat k sehingga $k^2 + 2kn + m^2$ adalah bilangan kuadrat sempurna, buktikan bahwa m = n.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2007

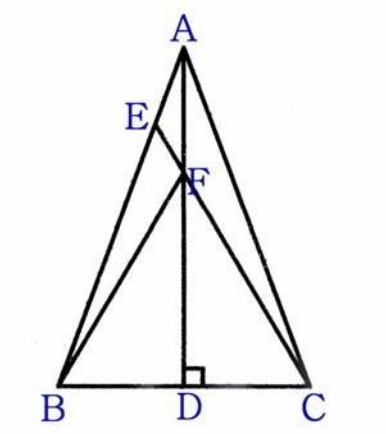
TINGKAT NASIONAL

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Nasional Tahun 2007

1. Karena $\angle ABC = \angle ACB = 70^o$ maka ΔABC sama kaki.



Alternatif 1 :

Karena AD adalah garis tinggi dan ΔABC sama kaki maka AD akan memotong pertengahan BC. Karena FD memotong pertengahan BC dan FD garis tinggi ΔBFC maka ΔBFC sama kaki dengan FB = FC. $\angle FCB = 70^o - 10^o = 60^o$. Maka $\angle FBC = \angle FCB = 60^o$. Akibatnya $\angle BFC = 60^o$. Maka ΔFBC adalah segitiga sama sisi.

$\therefore$ Jadi CF = BC (terbukti)

Alternatif 2 :

$\angle BAC = 180^o - 70^o - 70^o = 40^o$. Karena AD garis tinggi maka $\angle FAC = 20^o$ sehingga $\angle AFC = 150^o$.

Karena $\angle ACF = 10$ maka pada ΔAFC berlaku $\frac{CF}{\sin 20^o} = \frac{AC}{\sin 150^o}$

Sehingga CF = 2 AC sin 20^o ·································· (1)

Pada ΔABC berlaku $\frac{BC}{\sin 40^o} = \frac{AC}{\sin 70^o}$

Mengingat sin 70^o = cos 20^o dan sin 40^o = 2 sin 20^o cos 20^o maka

BC = 2 AC sin 20^o ·································· (2)

$\therefore$ Dari (1) dan (2) dapat disimpulkan bahwa CF = BC (terbukti)

2. Misalkan $n = p_1^{d1} \cdot p_2^{d2} \cdot p_3^{d3} \cdot \cdots \cdot p_n^{dn}$ dengan $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_n$ adalah bilangan prima maka banyaknya faktor positif dari n adalah $(d_1 + 1)(d_2 + 1)(d_3 + 1) \cdots (d_n + 1)$

   a. Dengan mengambil $n = p^{k^2-k}$ maka banyaknya faktor positif $n = b(n) = k^2 - k + 1$

      $\therefore$ Karena ada tak berhingga bilangan prima maka ada tak berhingga n yang memenuhi banyaknya faktor positif $n = b(n) = k^2 - k + 1$ (terbukti).

   b. Untuk n > 1 maka n memiliki sedikitnya 2 faktor positif.

      Untuk $n > 1$ maka $p(n) \ge 1 + n > 2$

      $k^2 - k + 1 \ge 1 + n > 2$

      $1 < n \le k^2 - k$

Karena n terletak pada suatu selang tertentu maka tidak mungkin ada tak berhingga banyaknya bilangan asli n yang memenuhi $p(n) = k^2 - k + 1$.

$\therefore$ Maka berhingga banyaknya bilangan asli n yang memenuhi $p(n) = k^2 - k + 1$.

3. $5(a^2 + b^2 + c^2) < 6(ab+bc+ca)$ ································ (1)

Alternatif 1 :

Tanpa mengurangi keumuman misalkan maks (a, b, c) = c

$5ac + 5bc - 5c^2 - a^2 - ab + ac - ab - b^2 + bc > 4a^2 - 8ab + 4b^2$

$(5c - a - b)(a + b - c) > (2a - 2b)^2$

Karena bilangan kudrat tidak mungkin negatif maka

$(5c - a - b)(a + b - c) > 0$ ································ (2)

Karena maks (a, b, c) = c maka $5c - a - b > 0$

Maka agar ketaksamaan (2) terpenuhi maka haruslah $a + b > c$

Karena $c > a$ maka $b + c > a$ dan karena $c > b$ maka $a + c > b$

$\therefore$ Terbukti bahwa $a + b > c$, $b + c > a$ dan $a + c > b$

Alternatif 2 :

Tanpa mengurangi keumuman misalkan maks (a, b, c) = c

Ketaksamaan (1) ekuivalen dengan

$4(a + b)(a + b - c) > 4(a - b)^2 + 5(a + b - c)^2$

Karena bilangan kudrat tidak mungkin negatif maka

$4(a + b)(a + b - c) > 0$ ································ (3)

Karena a dan b positif maka ketaksamaan (3) akan terpenuhi bila $a + b > c$

Karena $c > a$ maka $b + c > a$ dan karena $c > b$ maka $a + c > b$

$\therefore$ Terbukti bahwa $a + b > c$, $b + c > a$ dan $a + c > b$

Alternatif 3 :

Tanpa mengurangi keumuman misalkan maks (a, b, c) = c

$5(a^2 + b^2 + c^2) < 6(ab+bc+ca)$

$(b + c - a)^2 + (a + c - b)^2 + (a + b - c)^2 < 4(ab + ac + bc) - 2(a^2 + b^2 + c^2) = 2((b + c - a)(c + a - b) + (b + c - a)(a + b - c) + (c + a - b)(a + b - c))$

Misalkan $x = b + c - a$, $y = c + a - b$ dan $z = a + b - c$.

$x^2 + y^2 + z^2 < 2(xy + xz + yz)$ ································ (4)

Jelas bahwa karena maks (a, b, c) = c maka $x > 0$ dan $y > 0$. Akan dibuktikan bahwa $z > 0$

Jika $z \le 0$ maka

$x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + xz + yz) = (x - y)^2 + z^2 - 2z(x + y)$

Karena $z \le 0$ maka $2z(x + y) \le 0$ maka $x^2 + y^2 + z^2 - 2(xy + xz + yz) \ge 0$. Kontradiksi dengan ketaksamaan (4). Maka haruslah terpenuhi $z > 0$.

$\therefore$ Terbukti bahwa $a + b > c$, $b + c > a$ dan $a + c > b$

Alternatif 4 :

Tanpa mengurangi keumuman misalkan c = maks (a, b, c)

Ketaksamaan (1) ekuivalen dengan

$5(a + b + c)(a + b - c) > 10a^2 + 10b^2 + 4ab - 6ac - 6bc$ .... (5)

Misalkan $x = a + b - c$, $y = a + c - b$, $z = b + c - a$ maka $2a = x + y$, $2b = x + z$ dan $2c = y + z$

Ketaksamaan (5) akan menjadi

$10(x + y + z)x > 5(x + y)^2 + 5(x + z)^2 + 2(x + y)(x + z) - 3(x + y)(y + z) - 3(x + z)(y + z)$

$10(x + y + z)x > 12x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 6xy + 6xz - 4yz$

$10(x + y + z)x > 6x^2 + 6x(x + y + z) + 2(y - z)^2$

$4(x + y + z)x > 6x^2 + 2(y - z)^2$

Karena bilangan kuadrat tidak mungkin negatif maka

$4(x + y + z)x > 0$

Karena $a + b + c > 0$ maka $x + y + z > 0$ sehingga $x > 0$. Jadi $a + b - c > 0$

Karena $c > a$ maka $b + c > a$ dan karena $c > b$ maka $a + c > b$.

$\therefore$ Terbukti bahwa $a + b > c$, $b + c > a$ dan $a + c > b$

4. Karena saat dibaca dari kiri ke kanan, 0, 1, 2, 3, 4 membentuk barisan naik, sedangkan 5, 6, 7, 8, 9 membentuk barisan turun maka jelas bahwa angka paling kiri haruslah 0 atau 9. Tetapi karena 0 tidak berada di ujung kiri maka angka paling kiri haruslah 9.

Alternatif 1 :

Misalkan ujung paling kiri adalah tempat pertama. Maka angka-angka 5, 6, 7 dan 8 akan berada di 9 tempat lainnya. Banyaknya cara memilih 4 dari 9 tempat lainnya tersebut = ${}_9C_4$ = 126. Angka-angka 5, 6, 7 dan 8 akan ditempatkan di 4 tempat tersebut. Karena angka-angka 5, 6, 7, 8 tersebut telah ditentukan urutannya maka hanya ada 1 cara menempatkan angkaangka 5, 6, 7, dan 8 pada ke-4 tempat tersebut. Lima tempat tersisa akan diisi oleh angka-angka 0, 1, 2, 3 dan 4. Karena angka-angka 0, 1, 2, 3, dan 4 tersebut telah ditentukan urutannya maka hanya ada 1 cara menempatkan angkaangka 0, 1, 2, 3 dan 4 pada 5 tempat tersisa tersebut.

$\therefore$ Maka banyaknya susunan cantik = ${}_9C_4$ x 1 x 1 = 126 susunan.

Alternatif 2 :

Angka-angka 5, 6, 7 dan 8 akan ditempatkan pada 4 dari 9 tempat.

Misalkan x_1 menyatakan banyaknya angka-angka yang terletak di antara angka 9 dan 8.
x_2 menyatakan banyaknya angka-angka yang terletak di antara angka 8 dan 7.
x_3 menyatakan banyaknya angka-angka yang terletak di antara angka 7 dan 6.
x_4 menyatakan banyaknya angka-angka yang terletak di antara angka 6 dan 5.
x_5 menyatakan banyaknya angka-angka yang terletak di sebelah kanan angka 5.

Jelas bahwa x_1, x_2, x_3, x_4 dan x_5 adalah bilangan bulat tak negatif dan kurang dari 6 serta memenuhi persamaan $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5$.

Banyaknya pasangan bulat tak negatif (x_i, x_j) yang memenuhi $x_i + x_j = m$ adalah $m + 1$, yaitu

$(0, m), (1, m - 1), (2, m - 2), \cdots, (m, 0)$.

Misalkan $x_i + x_j + x_k = n$. Karena x_k adalah bilangan bulat tak negatif maka banyaknya tripel bilangan bulat tak negatif (x_i, x_j, x_k) yang memenuhi adalah merupakan penjumlahan banyaknya pasangan (x_i, x_j) yang memenuhi $x_i + x_j = p$ dengan $p = 0, 1, 2, \cdots, n$.

Banyaknya pasangan (x_1, x_2) yang memenuhi $x_1 + x_2 = 0$ ada 1.
Banyaknya pasangan (x_1, x_2) yang memenuhi $x_1 + x_2 = 1$ ada 2.
Banyaknya pasangan (x_1, x_2) yang memenuhi $x_1 + x_2 = 2$ ada 3.
Banyaknya pasangan (x_1, x_2) yang memenuhi $x_1 + x_2 = 3$ ada 4.
Banyaknya pasangan (x_1, x_2) yang memenuhi $x_1 + x_2 = 4$ ada 5.
Banyaknya pasangan (x_1, x_2) yang memenuhi $x_1 + x_2 = 5$ ada 6.
Banyaknya tripel (x_3, x_4, x_5) yang memenuhi $x_3 + x_4 + x_5 = 0$ ada 1.
Banyaknya tripel (x_3, x_4, x_5) yang memenuhi $x_3 + x_4 + x_5 = 1$ ada $1 + 2 = 3$
Banyaknya tripel (x_3, x_4, x_5) yang memenuhi $x_3 + x_4 + x_5 = 2$ ada $1 + 2 + 3 = 6$
Banyaknya tripel (x_3, x_4, x_5) yang memenuhi $x_3 + x_4 + x_5 = 3$ ada $1 + 2 + 3 + 4 = 10$
Banyaknya tripel (x_3, x_4, x_5) yang memenuhi $x_3 + x_4 + x_5 = 4$ ada $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$
Banyaknya tripel (x_3, x_4, x_5) yang memenuhi $x_3 + x_4 + x_5 = 5$ ada $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$
Maka banyaknya susunan cantik = $1 \cdot 21 + 2 \cdot 15 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 1$
$\therefore$ Maka banyaknya susunan cantik = 126.

5. Misalkan p = min (r, s) dan q = maks (r, s)
Agar tidak ada dua benteng yang saling menyerang maka tidak boleh ada sedikitnya dua benteng terletak pada baris maupun lajur yang sama.
   a. Jika M > min (r, s)
   Jika min (r, s) = r maka sesuai dengan *Pigeon Hole Principle* maka akan ada sedikitnya dua benteng terletak pada satu baris yang sama. Maka akan terdapat dua benteng yang saling menyerang.
   Jika min (r, s) = s maka sesuai dengan *Pigeon Hole Principle* maka akan ada sedikitnya dua benteng terletak pada satu lajur yang sama. Maka akan terdapat dua benteng yang saling menyerang.
   Jadi, jelas bahwa M ≤ min (r, s).
   Misalkan $x_{i,j}$ menyatakan petak catur pada baris ke-i dan lajur ke-j.
   Jika p = min (r, s) buah benteng diletakkan pada petak $x_{k,k}$ dengan k = 1, 2, 3, ⋯, p maka p buah benteng ini tidak akan saling menyerang.
   $\therefore$ Maka M = min (r, s).
   b. Jika min (r, s) = r
   Cara meletakkan benteng pada baris ke-1 ada s cara.
   Karena benteng pada baris ke-1 dan ke-2 tidak boleh pada satu lajur maka banyaknya cara meletakkan benteng pada baris ke-2 ada s − 1 cara.
   Cara meletakkan benteng pada baris ke-3 ada s − 2 cara. Dan seterusnya.
   Cara meletakkan benteng pada baris ke-r ada s − r + 1
   Maka banyaknya cara meletakkan r benteng tersebut = $s \cdot (s - 1) \cdot (s - 2) \cdot \cdots \cdot (s - r + 1)$
   Banyaknya cara meletakkan r benteng tersebut = $\frac{s!}{(s-r)!} = \frac{(maks\ (r,s))!}{(maks\ (r,s)-\min(r,s))!}$
   Jika min (r, s) = s
   Cara meletakkan benteng pada lajur ke-1 ada r cara.
   Karena benteng pada lajur ke-1 dan ke-2 tidak boleh pada satu baris maka banyaknya cara meletakkan benteng pada lajur ke-2 ada r − 1 cara.

Cara meletakkan benteng pada lajur ke-3 ada $r - 2$ cara. Dan seterusnya.

Cara meletakkan benteng pada lajur ke-s ada $r - s + 1$

Maka banyaknya cara meletakkan s benteng tersebut = $r \cdot (r - 1) \cdot (r - 2) \cdot \cdots \cdot (r - s + 1)$

Banyaknya cara meletakkan r benteng tersebut = $\frac{r!}{(r-s)!} = \frac{(maks\ (r,s))!}{(maks\ (r,s)-\min(r,s))!}$

$\therefore$ Dapat disimpulkan bahwa banyaknya cara meletakkan M buah benteng pada pada P sehingga tidak ada dua benteng yang saling menyerang $\frac{(maks\ (r,s))!}{(maks\ (r,s)-\min(r,s))!}$.

6. $x = y^3 + y - 8$ ………………………………………… (1)

   $y = z^3 + z - 8$ ………………………………………… (2)

   $z = x^3 + x - 8$ ………………………………………… (3)

   Alternatif 1 :

   Jika $x < 0$, berdasarkan persamaan (3) maka $z < 0$. Sedangkan jika $z < 0$, berdasarkan persamaan (2) maka $y < 0$ serta jika $y < 0$, berdasarkan persamaan (1) maka $x < 0$.

   Maka dapat disimpulkan bahwa jika salah satu x, y atau z negatif maka x, y dan z semuanya negatif.

   - Jika $y > x$

     $y - x = (z^3 - y^3) + (z - y)$

     Maka $(z - y)(z^2 + yz + y^2 + 1) > 0$

     Karena jika salah satu dari y atau z negatif akan menyebabkan y dan z keduanya negatif maka jelas bahwa $z^2 + yz + y^2 + 1 > 0$. Akibatnya $z > y$.

     Karena $z > y$ maka $z - y = (x^3 - z^3) + (x - z) > 0$

     Maka $(x - z)(x^2 + xz + z^2 + 1) > 0$

     Karena jika salah satu dari x atau z negatif akan menyebabkan x dan z keduanya negatif maka jelas bahwa $x^2 + xz + z^2 + 1 > 0$. Akibatnya $x > z$.

     Maka dapat disimpulkan bahwa $x > z > y > x$. Kontradiksi.

   - Jika $y < x$

     $y - x = (z^3 - y^3) + (z - y)$

     Maka $(z - y)(z^2 + yz + y^2 + 1) < 0$

     Karena jika salah satu dari y atau z negatif akan menyebabkan y dan z keduanya negatif maka jelas bahwa $z^2 + yz + y^2 + 1 > 0$. Akibatnya $z < y$.

     Karena $z < y$ maka $z - y = (x^3 - z^3) + (x - z) < 0$

     Maka $(x - z)(x^2 + xz + z^2 + 1) < 0$

     Karena jika salah satu dari x atau z negatif akan menyebabkan x dan z keduanya negatif maka jelas bahwa $x^2 + xz + z^2 + 1 < 0$. Akibatnya $x < z$.

     Maka dapat disimpulkan bahwa $x < z < y < x$. Kontradiksi.

   - Jika $y = x$

     Berdasarkan persamaan (1) maka $x^3 - 8 = 0$ sehingga $x = y = 2$.

     $z = 2^3 + 2 - 8 = 2$

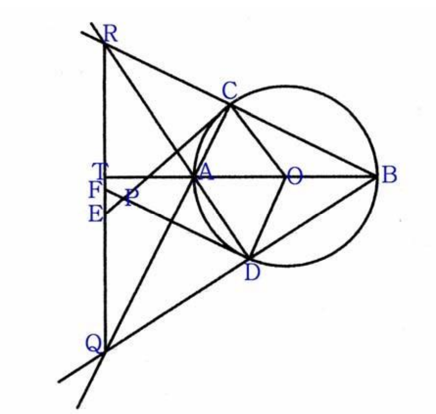
     $\therefore$ Maka $x = y = z = 2$ adalah satu-satunya penyelesaian.

   Alternatif 2 :

Perhatikan bahwa fungsi $f(t) = t^3 + t - 8$ adalah fungsi monoton naik.
Andaikan bahwa $x \neq y$.
Tanpa mengurangi keumuman misalkan $x < y$.
Karena f(t) merupakan fungsi monoton naik maka $z = f(x) < f(y) = x$.
Karena $z < x$ maka $y = f(z) < f(x) = z$ sehingga $y < z < x$ yang merupakan kontradiksi dengan pengandaian bahwa $x < y$.
Jadi $x = y$.
Dengan cara yang sama akan diperoleh bahwa $y = z$.
Dengan demikian $x = y = z$.
Maka $x = x^3 + x - 8$ sehingga $x^3 = 8$.
$x = y = z = 2$.
Setelah diuji ke persamaan (1), (2) dan (3) ternyata tripel (2, 2, 2) memenuhi ketiga persamaan tersebut.
Jadi (2, 2, 2) merupakan penyelesaian persamaan pada soal.
$\therefore$ Maka $x = y = z = 2$ adalah satu-satunya penyelesaian.

Alternatif 3 :
Jumlahkan persamaan (1), (2) dan (3) diperoleh
$x^3 + y^3 + z^3 = 24$ ································ (4)
Tanpa mengurangi keumuman misalkan $x \geq y, z$.
Jadi $3x^3 \geq x^3 + y^3 + z^3 = 24$ sehingga $x \geq 2$.
Akibatnya $z = x^3 + x - 8 \geq 2$ dan $y = z^3 + z - 8 \geq 2$.
Karena $x \geq 2$, $y \geq 2$ dan $z \geq 2$ maka $x^3 + y^3 + z^3 \geq 24$.
Agar memenuhi persamaan (4) maka haruslah $x = y = z = 2$.
Setelah diuji ke persamaan (1), (2) dan (3) ternyata $x = y = z = 2$ memenuhi ketiga persamaan tersebut.
$\therefore$ Maka $x = y = z = 2$ adalah satu-satunya penyelesaian.

7.



Alternatif 1 :

a. Karena AB diameter dan C terletak pada lingkaran S maka $\angle ACB = 90^o$ sehingga QC tegak lurus BR.
Karena AB diameter dan D terletak pada lingkaran S maka $\angle ADB = 90^o$ sehingga RD tegak lurus BQ.

Karena RD dan QC merupakan garis tinggi dan keduanya melalui titik A maka perpanjangan BA haruslah merupakan garis tinggi ΔBRQ.

$\therefore$ Terbukti bahwa QR tegak lurus terhadap garis AB.

b. Misalkan $\angle$CBA = α dan $\angle$ABD = β serta perpotongan AB dengan RQ adalah titik T.

Karena BT tegak lurus RQ maka $\angle$ERB = $90^o - \alpha$

Karena O pusat lingkaran maka $\angle$OCB = α sedangkan CQ $\perp$ BC maka $\angle$QCO = $90^o - \alpha$

EC adalah garis singgung di titik C maka FC tegak lurus CO sehingga $\angle$ECQ = α

Karena QC tegak lurus CR maka $\angle$ECR = $90^o - \alpha$.

Karena $\angle$ERC = $\angle$ECR maka ER = EC.

Karena BT tegak lurus RQ maka $\angle$FQD = $90^o - \beta$

Karena O pusat lingkaran maka $\angle$ODB = β sedangkan DR $\perp$ BD maka $\angle$RDO = $90^o - \beta$ FD adalah garis singgung di titik D maka ED tegak lurus DO sehingga $\angle$EDA = β

Karena RD tegak lurus DQ maka $\angle$FDQ = $90^o - \beta$.

Karena $\angle$FQD = $\angle$FDQ maka FD = FQ.

Karena RC tegak lurus CQ dan $\angle$QRC = $90^o - \alpha$ maka $\angle$EQC = α sehingga ΔEQC sama kaki dengan EQ = EC = ER. Karena $\angle$QCR = 90^o maka E adalah pusat lingkaran yang melalui titik Q, C dan R dengan QR adalah diameter sehingga E adalah pertengahan QR.

Karena QD tegak lurus DR dan $\angle$RQD = $90^o - \beta$ maka $\angle$FRD = B sehingga ΔFRD sama kaki dengan FR = FD = FQ. Karena $\angle$RDQ = 90^o maka F adalah pusat lingkaran yang melalui titik Q, D dan R dengan QR adalah diameter sehingga F adalah pertengahan QR.

Akibatnya haruslah E dan F berhimpit. Tetapi garis singgung terhadap S di C dan D berpotongan di titik P, maka P = E = S sehingga P adalah pertengahan QR.

$\therefore$ Terbukti bahwa P, Q dan R segaris.

Alternatif 2 :

a. Karena AB diameter maka $\angle$ACB = $\angle$ADB = 90^o sehingga $\angle$CQB = $\angle$BRD = $90^o - \angle$DBC. Misalkan O adalah pusat lingkaran S.

$\angle$CPD = $180^o - \angle$DOC = $180^o - 2\angle$CAD = $2\angle$CQB = $2\angle$CQD.

Karena $\angle$CPD = $2\angle$CQD maka titik C, D dan Q terletak pada satu lingkaran dengan P adalah pusat lingkaran tersebut.

Dengan cara yang sama dapat ditunjukkan bahwa P juga merupakan pusat lingkaran yang melalui titik C, D dan R.

Karena P adalah pusat sebuah lingkaran yang melalui titik-titik Q, D, C dan R maka ΔPCR dan ΔPQD keduanya adalah segitiga sama kaki.

$\angle$DPQ + $\angle$RPC = $(180^o - 2\angle PDQ) + (180^o - 2\angle PCR) = 2((90^o - \angle PDQ) + (90^o - \angle PCR))$

Karena RD tegak lurus BQ dan QC tegak lurus BR maka

$\angle$DPQ + $\angle$RPC = $2(\angle RDP + \angle PCQ)$

Karena $\angle$ADB = $\angle$ACB = 90^o maka $\angle$RDP = $\angle$ODB dan $\angle$PCQ = $\angle$OCB.

Karena ΔOCB dan ΔODB keduanya sama kaki maka $\angle$ODB = $\angle$OBD dan $\angle$OCB = $\angle$OBC.

$\angle DPQ + \angle RPC = 2(\angle OBD + \angle OBC) = 2\angle DBC = \angle DOC = 180^o - \angle CPD$

Sehingga didapat $\angle DPQ + \angle RPC + \angle CPD = 180^o$.

$\therefore$ Akibatnya haruslah titik-titik R, P dan Q segaris (terbukti).

b. Karena AB diameter dan C terletak pada lingkaran S maka $\angle ACB = 90^o$ sehingga QC tegak lurus BR.

Karena AB diameter dan D terletak pada lingkaran S maka $\angle ADB = 90^o$ sehingga RD tegak lurus BQ.

Karena RD dan QC merupakan garis tinggi dan keduanya melalui titik A maka perpanjangan BA haruslah merupakan garis tinggi ΔBRQ.

$\therefore$ Terbukti bahwa QR tegak lurus terhadap garis AB.

8. Alternatif 1 :

- Jika $m^2 \neq n^2$

  Untuk suatu bilangan bulat $a > |m^2 - n^2|$ tidak mungkin merupakan faktor dari $m^2 - n^2$. Misalkan t adalah faktor dari $m^2 - n^2$ maka jelas bahwa $-|m^2 - n^2| \leq t \leq |m^2 - n^2|$.

  Maka berhingga banyaknya kemungkinan t yang memenuhi. Misalkan $k^2 + 2kn + m^2 = p^2$ untuk suatu bilangan asli p.

  $(k + n)^2 + m^2 - n^2 = p^2$

  $m^2 - n^2 = (p + k + n)(p - (k + n))$

  Maka $p + k + n$ adalah faktor dari $m^2 - n^2$.

  Misalkan $p + k + n = t$ untuk suatu bilangan bulat tak nol t maka $p - (k + n) = \frac{m^2-n^2}{t}$

  Jika kedua persamaan tersebut dikurangkan akan didapat $k = -n + \frac{t}{2} - \frac{m^2-n^2}{2t}$

  Karena berhingga banyaknya kemungkinan nilai t maka akan berhingga juga banyaknya bilangan bulat k yang memenuhi. Kontradiksi karena dinyatakan bahwa ada tak berhingga banyaknya bilangan bulat k yang memenuhi.

- Jika $m^2 = n^2$ $k^2 + 2kn + m^2 = (k + n)^2$

  Maka berapapun bilangan bulat k akan menyebabkan $k^2 + 2kn + m^2$ merupakan bilangan kuadrat sempurna untuk suatu bilangan asli m dan n.

  Sehingga ada tak berhingga banyaknya bilangan bulat k yang memenuhi.

Maka didapat bahwa $k^2 + 2kn + m^2$ akan merupakan bilangan kuadrat sempurna jika $m^2 = n^2$.

$\therefore$ Karena m dan n keduanya bilangan asli maka $k^2 + 2kn + m^2$ akan merupakan bilangan kuadrat sempurna jika m = n (terbukti).

Alternatif 2 :

Andaikan $m \neq n$ sehingga $m^2 - n^2 \neq 0$.

Misalkan $k_1, k_2, \cdots$ dan $s_1, s_2, \cdots$ adalah barisan-barisan bilangan bulat demikian sehingga $k_i^2 + 2k_in + m^2 = s_i^2$ untuk semua $i = 1, 2, \cdots$

Maka $m^2 - n^2 = s_i^2 - k_i^2 + 2k_in - n^2$

$m^2 - n^2 = s_i^2 - (k_i + n)^2$

$m^2 - n^2 = (s_i - k_i - n)(s_i + k_i + n)$

Akibatnya

$|m^2 - n^2| \geq s_i + k_i + n$ dan $|m^2 - n^2| \geq -(s_i - k_i - n)$

Sehingga

$2|m^2 - n^2| \geq (s_i + k_i + n) - (s_i - k_i - n) = 2k_i + 2n$

$|m^2 - n^2| \geq k_i + n$

$|m^2 - n^2| - n \geq k_i$ untuk semua $I = 1, 2, \cdots$

Karena m dan n adalah suatu nilai tetap maka hanya ada 1 nilai k_i untuk semua $i = 1, 2, \cdots$ kontradiksi dengan kenyataan bahwa ada tak berhingga banyaknya bilangan bulat k yang memenuhi.

Jadi haruslah $m = n$.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2008

TINGKAT KABUPATEN/KOTA

WAKTU : 3,5 JAM

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Kabupaten/Kota Tahun 2008

Bagian Pertama

Pilih satu jawaban yang benar. Dalam hal terdapat lebih dari satu jawaban yang benar, pilih jawaban yang paling baik.

1. Jika a bilangan real, maka $\sqrt{a^2}$ =
   A. $-|a|$ B. $-a$ C. $\pm a$ D. a E. $|a|$
2. Banyaknya factor positif dari 5! adalah
   A. 4 B. 5 C. 16 D. 24 E. 120
3. Banyaknya susunan huruf B, I, O, L, A sehingga tidak ada dua huruf hidup (vowel) yang berturutan adalah
   A. 8 B. 10 C. 12 D. 14 E. 16
4. Lingkaran T merupakan lingkaran luar bagi segitiga ABC dan lingkaran dalam bagi segitiga PQR. Jika ABC dan PQR keduanya segitiga samasisi, maka rasio keliling $\triangle$ABC terhadap keliling $\triangle$PQR adalah
   A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 2 E. 4
5. Jumlah empat bilangan asli berturutan senantiasa habis dibagi p. Maka nilai p terbesar adalah
   A. 1 B. 2 C. 4 D. 5 E. 7
6. Banyaknya himpunan X yang memenuhi $\{1, 2\} \subseteq X \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ adalah
   A. 3 B. 4 C. 8 D. 16 E. 32
7. Segitiga ABC sama kaki, yaitu AB = AC, dan memiliki keliling 32. Jika panjang garis tinggi dari A adalah 8, maka panjang AC adalah
   A. $9\frac{1}{3}$ B. 10 C. $10\frac{2}{3}$ D. $11\frac{1}{3}$ E. 12
8. Jika f(x) $= \frac{x+1}{x-1}$, maka untuk $x^2 \neq 1$, f$(-x)$ =
   A. $\frac{1}{f(-x)}$ B. $-f(-x)$ C. $-f(x)$ D. $f(x)$ E. $\frac{1}{f(x)}$
9. Pada trapesium ABCD, sisi AB sejajar sisi DC dan rasio luas segitiga ABC terhadap luas segitiga ACD adalah 1/3. Jika E dan F berturut-turut adalah titik tengah BC dan DA, maka rasio luas ABEF terhadap luas EFDC adalah
   A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{3}{5}$ C. 1 D. $\frac{5}{3}$ E. 3
10. Diketahui bahwa a, b, c dan d adalah bilangan-bilangan asli yang memenuhi $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ dan c < a. Jika b ≠ 1 dan c ≠ d, maka
   A. $\frac{a}{c} < \frac{b-a}{d-c}$ C. $\frac{a}{c} < \frac{b(d-1)}{d(b-1)}$ E. $\frac{a+b}{c+d} < \frac{a}{c}$
   B. $\frac{b-a}{d-c} < \frac{a}{c}$ D. $\frac{b(d-1)}{d(b-1)} < \frac{a}{c}$

Bagian Kedua

Isikan hanya jawaban saja pada tempat yang disediakan

11. Suatu pertujukan dihadiri oleh sejumlah penonton. Setiap penonton dewasa membayar tiket seharga 40 ribu rupiah, sedangkan setiap penonton anak-anak membayar tiket 15 ribu rupiah. Jika jumlah uang penjualan tiket adalah 5 juta rupiah, dan banyaknya penonton dewasa adalah 40 % dari seluruh penonton, maka banyaknya penonton anak-anak adalah ⋯⋯⋯
12. Diketahui FPB (a, 2008) = 251. Jika a > 2008 maka nilai terkecil yang mungkin bagi a adalah ⋯⋯
13. Setiap dung adalah ding. Ada lima ding yang juga dong. Tidak ada dung yang dong. Jika banyaknya ding adalah 15, dan tiga di antaranya tidak dung dan tidak dong, maka banyaknya dung adalah ⋯⋯⋯
14. Dua buah dadu identik (sama persis) dilemparkan bersamaan. Angka yang muncul adalah a dan b. Peluang a dan b terletak pada sisi-sisi yang bertolak belakang (di dadu yang sama) adalah ⋯⋯
15. Bilangan 4-angka dibentuk dari 1, 4, 7 dan 8 dimana masing-masing angka digunakan tepat satu kali. Jika semua bilangan 4-angka yang diperoleh dengan cara ini dijumlahkan, maka jumlah ini mempunyai angka satuan ⋯⋯
16. Titik A dan B terletak pada parabola $y = 4 + x - x^2$. Jika titik asal O merupakan titik tengah ruas garis AB, maka panjang AB adalah ⋯⋯
17. Jika a dan b adalah bilangan-bilangan bulat dan $x^2 - x - 1$ merupakan faktor dari $ax^3 + bx^2 + 1$, maka b = ⋯⋯⋯
18. Kubus ABCDEFGH dipotong oleh bidang yang melalui diagonal HF, membentuk sudut 30^o terhadap diagonal EG dan memotong rusuk AE di P. Jika panjang rusuk kubus adalah 1 satuan, maka panjang ruas AP adalah ⋯⋯⋯
19. Himpunan semua bilangan asli yang sama dengan enam kali jumlah angka-angkanya adalah ⋯⋯
20. Diketahui bahwa a dan b adalah besar dua sudut pada sebuah segitiga. Jika sin a + sin b = $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ dan cos a + cos b = $\frac{1}{2}\sqrt{6}$, maka sin (a + b) = ⋯⋯⋯

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2008

TINGKAT KABUPATEN/KOTA

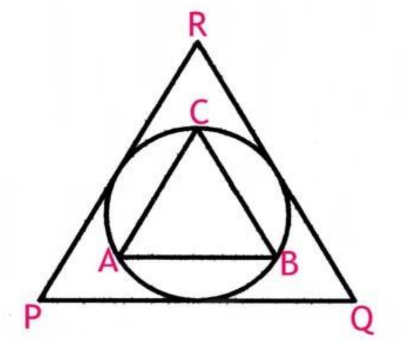
SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Kabupaten/Kota Tahun 2008

BAGIAN PERTAMA

1. (Jawaban : E)
   Akar dari suatu bilangan positif adalah juga bilangan positif, maka
   $\sqrt{a^2} = a$ jika a bilangan real positif
   $\sqrt{a^2} = -a$ jika a bilangan real negative
   ∴ Karena a bilangan real maka $\sqrt{a^2}$ = |**a**|
2. (Jawaban : C)
   $5! = 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$
   Banyaknya faktor positif = (3 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 16
   ∴ Banyaknya faktor positif dari 5! adalah **16**.
3. (Jawaban : C)
   Agar huruf hidup tidak berdekatan maka ketiga huruf hidup tersebut harus berada pada urutan ke-1, ke-3 dan ke-5. Sisanya harus diisi oleh huruf konsonan. Maka banyaknya susunan = 3! · 2! = 12
   ∴ Banyaknya susunan = **12**.
4. (Jawaban : C)



   Misalkan jari-jari lingkaran tersebut adalah R, sisi △ABC = x dan sisi △PQR = y.
   $\frac{x}{\sin 60^o}$ = 2R sehingga 3x = 3R√3
   Luas △PQR = ½ · R · (3y)
   ½ y^2 sin 60° = ½ · R · 3y sehingga 3y = 6R√3
   Keliling △ABC : Keliling △PQR = 3x : 3y = 1 : 2
   ∴ Rasio keliling △ABC terhadap keliling △PQR adalah $\frac{1}{2}$.
5. (Jawaban : B)
   (n) + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 2(2n + 3)
   2n + 3 adalah bilangan ganjil.
   ∴ Maka nilai p terbesar adalah **2**.

6. (Jawaban : C)

   $\{1, 2\} \subseteq X \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$

   X terdiri dari sedikitnya 2 unsur dan maksimal 5 unsur dengan 2 unsur di antaranya haruslah 1 dan 2. Sedangkan sisanya dipilih dari unsur-unsur 3, 4 atau 5.

   Jika X terdiri dari 2 unsur maka banyaknya himpunan X = ${}_3C_0 = 1$

   Jika X terdiri dari 3 unsur maka banyaknya himpunan X = ${}_3C_1 = 3$

   Jika X terdiri dari 4 unsur maka banyaknya himpunan X = ${}_3C_2 = 3$

   Jika X terdiri dari 5 unsur maka banyaknya himpunan X = ${}_3C_3 = 1$

   Banyaknya himpunan X = 1 + 3 + 3 + 1 = 8.

   ∴ Banyaknya himpunan X yang memenuhi adalah **8**.

7. (Jawaban : B)

   Misalkan panjang AB = AC = x maka panjang BC = $2\sqrt{x^2 - 64}$ maka

   $x + \sqrt{x^2 - 64} = 16$

   $x^2 - 64 = (16 - x)^2 = x^2 - 32x + 256$

   32x = 320

   x = 10

   Panjang AC = 10

   ∴ Panjang AC adalah **10**.

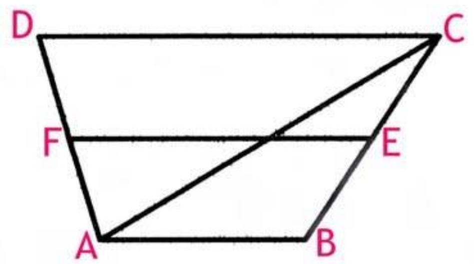
8. (Jawaban : E)

   f(x) = $\frac{x+1}{x-1}$

   f(−x) = $\frac{-x+1}{-x-1} = \frac{x-1}{x+1} = \frac{1}{f(x)}$

   ∴ $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$

9. (Jawaban : D)



   △ABC dan △ACD memiliki tinggi yang sama maka perbandingan luas keduanya dapat dinyatakan sebagai perbandingan alas.

   AB : DC = 1 : 3

   Misalkan panjang sisi AB = x maka panjang sisi DC = 3x.

   E adalah pertengahan BC dan F pertengahan DA sehingga FE sejajar AB dan DC.

   Maka FE = ½ (x + 3x) = 2x

   Misalkan tinggi trapesium = t.

   Luas ABEF = $\frac{(AB+FE)}{2} \cdot \frac{t}{2} = \frac{3tx}{4}$

Luas EFDC = $\frac{(FE+DC)}{2} \cdot \frac{t}{2} = \frac{5tx}{4}$

Rasio luas ABEF terhadap luas EFDC = 3 : 5.

$\therefore$ Rasio luas ABEF terhadap luas EFDC adalah $\frac{3}{5}$.

10. (Jawaban : A)

Karena $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ maka $\frac{b}{a} > \frac{d}{c}$.

$\frac{b-a}{a} > \frac{d-c}{c}$ sehingga $\frac{a}{c} < \frac{b-a}{d-c}$

$\therefore\ \frac{a}{c} < \frac{b-a}{d-c}$

BAGIAN KEDUA

11. Misal penonton dewasa = x dan penonton anak-anak = y maka

40.000x + 15.000y = 5.000.000

8x + 3y = 1000 ·················· (1)

x = 40% (x + y)

3x = 2y ························ (2)

Subtitusikan persamaan (2) ke (1)

16y + 9y = 3000

y = 120

$\therefore$ Banyaknya penonton anak-anak adalah **120**

12. 2008 = 8 · 251 dan a = 251 · k dengan k dan 8 relatif prima serta k bilangan asli.

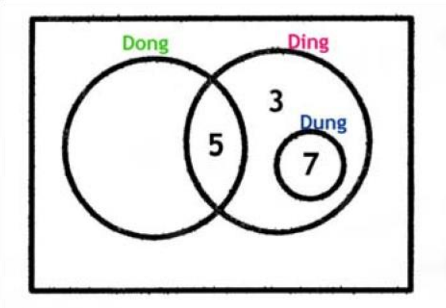
Karena k > 8 dan dua bilangan asli berurutan akan relatif prima maka k_{min} = 9.

a minimum = k_{min} · 251

a minimum = 9 · 251 = 2259.

$\therefore$ Nilai a terkecil yang mungkin adalah **2259**.

13. Kalau persoalan tersebut digambarkan dalam diagram venn maka



$\therefore$ Maka banyaknya dung adalah **7**.

14. Pasangan bilangan yang muncul adalah 1 dan 6 atau 2 dan 5 atau 3 dan 4. Banyaknya pasangan yang mungkin ada 6.

    $\therefore$ Peluang = $\frac{6}{36}$

15. Banyaknya bilangan yang mungkin ada 4! = 24.

    Masing-masing angka 1, 4, 7 dan 8 akan muncul 6 kali sebagai angka satuan.

    Angka satuan bilangan tersebut = angka satuan $6 \cdot 1 + 6 \cdot 4 + 6 \cdot 7 + 6 \cdot 8$

    $\therefore$ Angka satuan bilangan tersebut adalah **0**.

16. Misalkan koordinat A adalah (p, q) maka karena pertengahan AB adalah titik (0, 0) maka koordinat B adalah $(-p, -q)$.

    Titik A dan B terletak pada parabola maka

    $q = 4 + p - p^2$ .... (1)

    $-q = 4 - p - p^2$ .... (2)

    Jumlahkan persamaan (1) dan (2) didapat

    $0 = 8 - 2p^2$ sehingga $p = \pm 2$

    Jika $p = 2$ maka $q = 4 + 2 - 2^2 = 2$

    Jika $p = -2$ maka $q = 4 - 2 - 2^2 = -2$

    Koordinat A dan B adalah (2, 2) dan $(-2, -2)$

    Panjang AB = $\sqrt{(2-(-2))^2 + (2-(-2))^2}$

    $\therefore$ Panjang AB = $\mathbf{4\sqrt{2}}$.

17. Karena koefisien x^3 adalah a dan konstantanya adalah 1 maka haruslah

    $(ax^3 + bx^2 + 1) = (x^2 - x - 1)(ax - 1)$

    $(ax^3 + bx^2 + 1) = ax^3 - (a + 1)x^2 + (1 - a)x + 1$

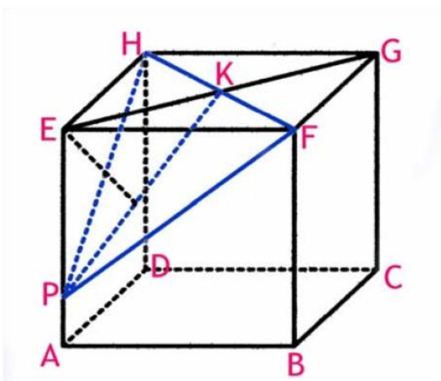
    Maka $1 - a = 0$ sehingga $a = 1$

    $b = -(a + 1)$ sehingga

    $b = -(1 + 1) = -2$

    $\therefore$ Nilai b yang memenuhi adalah $\mathbf{b = 2}$.

18. Perhatikan gambar.



    Perpotongan bidang yang melalui HF tersebut dengan kubus adalah segitiga PFH.

Misalkan panjang AP = x maka PE = 1 − x.

E.PFH adalah bangunan prisma dengan alas berbentuk segitiga sama kaki.

Karena PF = PH dan FE = HE maka proyeksi E pada bidang PFH akan berada pada garis tinggi PK.

Sudut antara garis EG dengan bidang PFH adalah $\angle$EKP.

EK = $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Pada $\triangle$KEP siku-siku di E.

tan $\angle$EKP = $\frac{EP}{EK} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\frac{1 - x}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

AP = $\frac{6-\sqrt{6}}{6}$

$\therefore$ Panjang ruas AP adalah $\frac{6-\sqrt{6}}{6}$.

19. Misalkan bilangan tersebut adalah N.

Misalkan N adalah bilangan n angka dengan angka-angka N adalah $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$.

$N \geq 10^{n-1}$ dan $N = 6(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \leq 54n$

Lemma :

Akan dibuktikan bahwa jika terbukti $54k < 10^{k-1}$ maka $54(k + 1) < 10^k$ untuk k bilangan asli ≥ 3.

Andaikan bahwa $54k < 10^{k-1}$.

Karena k ≥ 3 maka $54 < 9 \cdot 10^{k-1}$ sehingga

$54k + 54 < 10^{k-1} + 9 \cdot 10^{k-1}$

$54(k + 1) < 10^k$

Terbukti bahwa untuk k asli ≥ 3 maka jika $54k < 10^{k-1}$ maka $54(k + 1) < 10^k$.

Pembuktian di atas sama saja dengan membuktikan bahwa untuk k ≥ 3 maka jika tidak ada N yang terdiri dari k angka yang memenuhi nilainya sama dengan 6 kali jumlah angka-angkanya maka tidak akan ada juga N terdiri dari k + 1 angka yang memenuhi nilainya sama dengan 6 kali jumlah angka-angkanya.

- Jika N terdiri dari 1 angka
  $N = x_1 = 6(x_1)$ sehingga tidak ada N asli yang memenuhi.
- Jika bilangan tersebut adalah bilangan dua angka
  $N = 10x_1 + x_2 = 6(x_1 + x_2)$
  $4x_1 = 5x_2$
  Karena x_1 dan x_2 asli maka pasangan (x_1, x_2) yang memenuhi hanya (5,4).
  Bilangan yang memenuhi hanya 54.
- Jika N terdiri dari 3 angka
  Misalkan $N = 100x_1 + 10x_2 + x_3 = 6(x_1 + x_2 + x_3)$
  $94x_1 + 4x_2 = 5x_3$
  Karena $x_1 \geq 1$ maka tidak ada tripel (x_1, x_2, x_3) yang memenuhi.

Sesuai dengan lemma maka untuk $n \geq 3$ maka tidak ada N yang memenuhi nilainya sama dengan 6 angka jumlah angka-angkanya.

Himpunan semua bilangan yang memenuhi hanya {54}.

$\therefore$ Himpunan semua bilangan yang memenuhi adalah **{54}**.

20. $(\sin a + \sin b)^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

$\sin^2 a + \sin^2 b + 2 \sin a \sin b = \frac{1}{2}$ .... (1)

$(\cos a + \cos b)^2 = \left(\frac{1}{2}\sqrt{6}\right)^2 = \frac{3}{2}$

$\cos^2 a + \cos^2 b + 2 \cos a \cos b = \frac{3}{2}$ .... (2)

Jumlahkan (1) dan (2) dan dengan mengingat $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ maka

$2 + 2 (\sin a \sin b + \cos a \cos b) = 2$

$\sin a \sin b + \cos a \cos b = 0$

$\cos (a - b) = 0$ .... (3)

$(\sin a + \sin b)(\cos a + \cos b) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\sin a \cos a + \sin b \cos b + \sin a \cos b + \cos a \sin b = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\frac{1}{2} (\sin 2a + \sin 2b) + \sin (a + b) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\sin (a + b) \cos (a - b) + \sin (a + b) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Mengingat $\cos (a - b) = 0$ maka $\sin (a + b) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

$\therefore$ $\sin (a + b) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Catatan :

Jika yang dicari adalah nilai a dan b.

Tanpa mengurangi keumuman misalkan $a \geq b$.

Berdasarkan $\cos (a - b) = 0$ maka

$a - b = 90^\circ$ .... (4)

Karena $\sin (a + b) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ maka :

- $a + b = 60^\circ$ .... (5)

  Berdasarkan (4) dan (5) maka didapat $a = 75^\circ$ dan $b = -15^\circ$ yang tidak memenuhi bahwa a dan b adalah besar dua sudut pada sebuah segitiga.
- $a + b = 120^\circ$

  Berdasarkan (4) dan (6) maka didapat $a = 115^\circ$ dan $b = 15^\circ$.

  Tetapi bila $a = 115^\circ$ dan $b = 15^\circ$ disubtitusikan ke persamaan $\sin a + \sin b = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ dan persamaan $\cos a + \cos b = \frac{1}{2}\sqrt{6}$ ternyata tidak memenuhi keduanya.

Dapat disimpulkan bahwa tidak ada pasangan (a, b) yang memenuhi.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2008

TINGKAT PROVINSI

BAGIAN PERTAMA

WAKTU : 90 MENIT

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2008

BAGIAN PERTAMA

1. Banyaknya pembagi positif dari 2008 adalah ⋯⋯
2. Cara menyusun huruf-huruf MATEMATIKA dengan kedua T tidak berdekatan ada sebanyak ⋯⋯⋯⋯
3. Jika $0 < b < a$ dan $a^2 + b^2 = 6ab$, maka $\frac{a+b}{a-b} = \cdots\cdots$
4. Dua dari panjang garis tinggi segitiga ABC lancip, berturut-turut sama dengan 4 dan 12. Jika panjang garis tinggi yang ketiga dari segitiga tersebut merupakan bilangan bulat, maka panjang maksimum garis tinggi segitiga tersebut adalah ⋯⋯
5. Dalam bidang XOY, banyaknya garis yang memotong sumbu X di titik dengan absis bilangan prima dan memotong sumbu Y di titik dengan ordinat bilangan bulat positif serta melalui titik (4, 3) adalah ⋯⋯
6. Diberikan segitiga ABC, AD tegak lurus BC sedemikian rupa sehingga DC = 2 dan BD = 3. Jika $\angle BAC = 45^\circ$, maka luas segitiga ABC adalah ⋯⋯
7. Jika x dan y bilangan bulat yang memenuhi $y^2 + 3x^2y^2 = 30x^2 + 517$, maka $3x^2y^2 = \cdots\cdots$
8. Diberikan segitiga ABC, dengan BC = a, AC = b dan $\angle C = 60^\circ$. Jika $\frac{a}{b} = 2 + \sqrt{3}$, maka besarnya b sudut B adalah ⋯⋯
9. Seratus siswa suatu Provinsi di Pulau Jawa mengikuti seleksi tingkat Provinsi dan skor rataratanya adalah 100. Banyaknya siswa kelas II yang mengikuti seleksi tersebut 50% lebih banyak dari siswa kelas III, dan skor rata-rata siswa kelas III 50% lebih tinggi dari skor rata-rata siswa kelas II. Skor rata-rata siswa kelas III adalah ⋯⋯
10. Diberikan segitiga ABC, dengan BC = 5, AC = 12, dan AB = 13. Titik D dan E berturut-turut pada AB dan AC sedemikian rupa sehingga DE membagi segitiga ABC menjadi dua bagian dengan luas yang sama. Panjang minimum DE adalah ⋯⋯
11. Misalkan a, b, c dan d bilangan rasional. Jika diketahui persamaan $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ mempunyai 4 akar real, dua di antaranya adalah $\sqrt{2}$ dan $\sqrt{2008}$. Nilai dari a + b + c + d adalah
12. Diberikan segitiga ABC dengan sisi-sisi a, b, dan c. Nilai $a^2 + b^2 + c^2$ sama dengan 16 kali luas segitiga ABC. Besarnya nilai ctg A + ctg B + ctg C adalah ⋯⋯

13. Diberikan $f(x) = x^2 + 4$. Misalkan x dan y adalah bilangan-bilangan real positif yang memenuhi $f(xy) + f(y - x) = f(y + x)$. Nilai minimum dari $x + y$ adalah ⋯⋯
14. Banyak bilangan bulat positif n kurang dari 2008 yang mempunyai tepat $\frac{n}{2}$ bilangan kurang dari n dan relatif prima terhadap n adalah ⋯⋯⋯
15. Suatu polinom $f(x)$ memenuhi persamaan $f(x^2) - x^3 f(x) = 2(x^3 - 1)$ untuk setiap x bilangan real. Derajat (pangkat tertinggi x) $f(x)$ adalah ⋯⋯
16. Anggap satu tahun 365 hari. Peluang dari 20 orang yang dipilih secara acak ada dua orang yang berulang tahun pada hari yang sama adalah ⋯⋯⋯
17. Tiga bilangan dipilih secara acak dari $\{1,2,3, \cdots,2008\}$. Peluang jumlah ketiganya genap adalah ⋯
18. Misalkan $|X|$ menyatakan banyaknya anggota himpunan X. Jika $|A \cup B| = 10$ dan $|A| = 4$, maka nilai yang mungkin untuk $|B|$ adalah ⋯⋯
19. Diketahui AD adalah garis tinggi dari segitiga ABC, $\angle DAB = \angle ACD$, AD = 6, BD = 8. Luas segitiga ABC adalah ⋯⋯
20. Nilai dari

$$\sum_{k=0}^{1004} 3^k \binom{1004}{k} = \cdots$$

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2008

TINGKAT PROVINSI

BAGIAN KEDUA

WAKTU : 120 MENIT

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2008

BAGIAN KEDUA

1. Carilah semua pasangan bilangan asli (x, n) yang memenuhi

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = 40$$

2. Diberikan polinom real $P(x) = x^{2008} + a_1x^{2007} + a_2x^{2006} + \cdots + a_{2007}x + a_{2008}$ dan $Q(x) = x^2 + 2x + 2008$. Misalkan persamaan $P(x) = 0$ mempunyai 2008 selesaian real dan $P(2008) \leq 1$. Tunjukkan bahwa persamaan $P(Q(x)) = 0$ mempunyai selesaian real.

3. Lingkaran dalam dari segitiga ABC, menyinggung sisi-sisi BC, CA, dan AB berturut-turut di D, E, dan F. Melalui D, ditarik garis tegak lurus EF yang memotong EF di G. Buktikan bahwa

$$\frac{FG}{EG} = \frac{BF}{CE}$$

4. Bilangan $1, 2, 3, \cdots, 9$ disusun melingkar secara acak. Buktikan bahwa ada tiga bilangan berdekatan yang jumlahnya lebih besar dari 15.

5. Tentukan banyaknya bilangan positif 5-angka palindrom yang habis dibagi 3. Palindrom adalah bilangan/kata yang sama jika dibaca dari kiri ke kanan atau sebaliknya. Sebagai contoh 35353 adalah bilangan palindrom, sedangkan 14242 bukan.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2008

TINGKAT PROVINSI

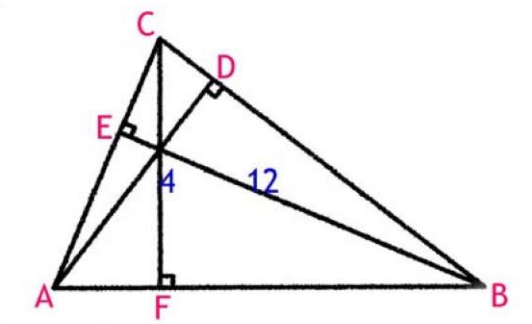
SOLUSI SOAL

BAGIAN PERTAMA

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2008

BAGIAN PERTAMA

1. $2008 = 2^3 \cdot 251$
   Banyaknya pembagi positif dari 2008 = (3 + 1)(1 + 1)
   ∴ Banyaknya pembagi positif dari 2008 = **8**.
2. Alternatif 1 :
   Banyaknya cara menyusun huruf-huruf MATEMATIKA adalah $\frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 2!}$ = 151200
   Banyaknya cara menyusun huruf-huruf MATEMATIKA dengan syarat kedua T berdekatan adalah sama dengan banyaknya cara menyusun huruf-huruf MATEMAIKA, yaitu $\frac{9!}{3!\cdot 2!}$ = 30240
   Banyaknya cara menyusun huruf-huruf MATEMATIKA dengan kedua T tidak berdekatan adalah = 151200 − 30240 = 120960.
   ∴ Banyaknya cara menyusun = **120960**.
   Alternatif 2 :
   Karena T tidak boleh berdekatan maka kedua huruf T hanya dapat ditempatkan ke dalam 9 dari 10 tempat. Banyaknya cara memilih 9 tempat = ${}_9C_2$ = 36 cara
   Ke-8 tempat yang lain akan diisi oleh ke-8 uruf tersisa yang terdiri dari 2 huruf M, 3 huruf A dan masing-masing satu huruf yaitu E, I dan K. Banyaknya cara = $\frac{8!}{2!\cdot 3!}$ = 3360 cara.
   Banyaknya cara menyusun huruf-huruf MATEMATIKA dengan kedua T tidak berdekatan adalah = 36 x 3360 = 120960.
   ∴ Banyaknya cara menyusun = **120960**.
3. Karena 0 < b < a maka $\frac{a+b}{a-b}$ akan bernilai positif.
   $$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 = \frac{a^2+b^2+2ab}{a^2+b^2-2ab} = \frac{6ab+2ab}{6ab-2ab} = 2$$
   $\therefore\ a + b = 2\,a\ -b$
4. Misalkan panjang sisi-sisi segitiga ABC adalah BC = a, AC = b dan AB = c.
   

   Misalkan juga panjang garis tinggi dari A adalah x dengan x bilangan asli.
   Ada dua kemungkinan pemahaman terhadap pertanyaan pada soal.

i) Yang ditanyakan adalah maks (x, 4, 12).

[ABC] = ½ · AC · 12 = ½ · AB · 4

b · 12 = AB · 4

AB = 3b

[ABC] = ½ · a · x = ½ · 4 · 3b

a x = 12b ································ (1)

Akan dibuktikan bahwa $x \leq 12$ sehingga panjang maksimum dari garis tinggi segitiga ABC adalah 12.

Andaikan bahwa x > 12.

Dari persamaan (1) akan didapat bahwa a < b ···················· (2)

Pada segitiga siku-siku ACF jelas bahwa AC = b > AF

Karena AB = 3b maka FB > 2b

Pada segitiga siku-siku BCF berlaku bahwa BC > FB

Karena BC = a < b sedangkan FB > 2b maka ketaksamamaan tidak mungkin terjadi.

Kontradiksi dengan pengandaian awal.

Jadi, $x \leq 12$.

Maka panjang maksimum garis tinggi segitiga ABC adalah **12**.

ii) Yang ditanyakan adalah panjang maksimum dari garis tinggi yang ketiga dari segitiga ABC

Panjang garis tinggi-garis tinggi yang berturut-turut sepadan dengan sisi-sisi a, b dan c adalah x, 12 dan 4.

Dengan rumus luas segitiga ABC didapat hubungan

xa = 12b = 4c

Dengan ketaksamaan segitiga didapat

c < a + b sehingga $1 < \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$

$1 < \frac{4}{x} + \frac{1}{3}$ sehingga didapat x < 6.

Jika x = 5 maka 5a = 12b = 4c

a : b : c = $\frac{1}{5} : \frac{1}{12} : \frac{1}{4}$ = 12 : 5 : 15

Karena $12^2 + 5^2 < 15^2$ maka segitiga tersebut tumpul. Kontradiksi.

Jika x = 4 maka 4a = 12b = 4c

a : b : c = $\frac{1}{4} : \frac{1}{12} : \frac{1}{4}$ = 3 : 1 : 3

Segitiga tersebut adalah segitiga lancip sebab $3^2 + 1^2 > 3^2$.

Jadi, panjang maksimum garis tinggi yang ketiga dari segitiga ABC adalah **4**.

∴ Dari dua kemungkinan ini Penulis lebih cenderung pada kemungkinan pertama yang sesua dengan kata-kata pada soal. Panjang maksimum garis tinggi dari segitiga ABC adalah **12**.

5. Misalkan persamaan garis tersebut adalah y = mx + c

Misalkan juga garis memotong sumbu X di (p, 0) dan sumbu Y di (0, q) dengan p adalah bilangan prima dan q adalah bilangan bulat positif.

Karena garis memotong sumbu X di (p, 0) dan sumbu Y di (0, q) maka persamaan garis tersebut adalah $y = -\frac{q}{p}x + c$.

Garis melalui (0, q) maka c = q. Jadi persamaan garis tersebut adalah $y = -\frac{q}{p}x + q$

Karena garis melalui (4, 3) maka berlaku

3p = −4q + pq

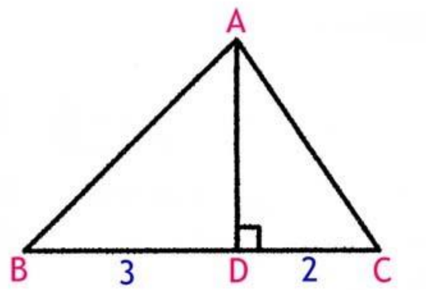
(p − 4)(q − 3) = 12

- Jika p genap maka p = 2 sehingga q = −3. Tidak memenuhi q bulat positif.
- Jika p ganjil maka p − 4 ganjil. Nilai p − 4 yang mungkin memenuhi adalah ±1 atau ±3.
  - Jika p − 4 = −1 maka p = 3 dan q = −9. Tidak memenuhi q bulat positif.
  - Jika p − 4 = 1 maka p = 5 dan q = 15. Jadi persamaan garis adalah y = −3x + 15 yang melalui titik (4, 3)
  - Jika p − 4 = −3 maka p = 1 yang tidak memenuhi bahwa p adalah bilangan prima.
  - Jika p − 4 = 3 maka p = 7 dan q = 7. Jadi persamaan garis adalah y = −x + 7 yang melalui titik (4, 3)

Persamaan garis yang memenuhi adalah y = −3x + 15 dan y = −x + 7.

∴ Banyaknya garis yang memenuhi ada **2**.

6. Perhatikan gambar. Diketahui dari soal ∠BAC = 45°.



Alternatif 1 :

Misalkan luas segitiga ABC = [ABC]

Dengan dalil pitagoras didapat :

$AC^2 = AD^2 + 4$ ·················· (1)

$AB^2 = AD^2 + 9$ ·················· (2)

Persamaan (2) jumlahkan dengan (1) didapat

$AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 13$ ···················· (3)

[ABC] = ½ BC · AD

Karena BC = 5 maka AD = $\frac{2[ABC]}{5}$ ····················· (4)

Pada segitiga ABC berlaku

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\ AB\ AC \cos 45^\circ = AB^2 + AC^2 - 2\ AB\ AC \sin 45^\circ$

$25 = 2\ AD^2 + 13 - 4[ABC]$ ····················· (5)

Subtitusikan persamaan (4) ke (5)

$12 = \frac{8[ABC]^2}{25} - 4[ABC]$

(2[ABC] + 5)([ABC] − 15) = 0

Maka [ABC] = 15

Luas segitiga ABC adalah **15**.

Alternatif 2 :

Misalkan AD = t

∠BAD + ∠CAD = 45°

$1 = \tan 45^o = \frac{\tan\angle BAD+\tan\angle CAD}{1-\tan\angle BAD\cdot\tan\angle CAD}$

$1 = \frac{\frac{3}{t}+\frac{2}{t}}{1-\frac{3}{t}\cdot\frac{2}{t}}$ yang ekivalen dengan

(t − 6)(t + 1) = 0

[ABC] = ½ · BC · AD = ½ · 5 · 6

∴ Luas segitiga ABC adalah **15**.

7. Persamaan tersebut dapat diubah menjadi $(3x^2 + 1)(y^2 - 10) = 507 = 3 \cdot 13^2$

   Karena $3x^2 + 1$ bulat positif maka $y^2 - 10$ juga bilangan bulat positif. Faktor positif dari 507 ada 6 yaitu 1, 3, 13, 39, 169 dan 507.

   $y^2 - 10$ adalah faktor dari 507 maka y^2 = 11, 13, 23, 49, 179 atau 517 dan yang merupakan bilangan kuadrat sempurna hanya 49. Maka $y^2 = 49$.

   Sehingga $3x^2 + 1 = 13$.

   ∴ $3x^2y^2 = 12 \times 49$ = **588.**

8. Alternatif 1 :

   $\tan 15° = \tan(45° - 30°) = \frac{\tan 45^o-\tan 30^o}{1+\tan 45^o \tan 30^o} = \frac{1-\frac{1}{3}\sqrt{3}}{1+1\cdot\frac{1}{3}\sqrt{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\cdot\frac{3+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$

   $\tan 15^o = \frac{\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}}$ .... (1)

   Dengan dalil cosinus

   $\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle b}$ sehingga $\frac{\sin\angle A}{\sin\angle B} = \frac{a}{b} = 2+\sqrt{3}$

   $\sin\angle A = (2+\sqrt{3})\sin\angle B$ .... (2)

   Karena ∠C = 60° maka ∠A = 120° − ∠B

   sin ∠A = sin (120° − ∠B) = sin 120° cos ∠B − cos 120° sin ∠B

   $(2+\sqrt{3})\sin\angle B = \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\angle B + \frac{1}{2}\sin\angle B$

   $\left(\frac{3}{2}+\sqrt{3}\right)\sin\angle B = \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\angle B$

   $\tan\angle B = \frac{\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}} = \tan 15^o$

   Besarnya sudut B adalah **15°**.

Alternatif 2 :

Misal AB = c dan dengan dalil cosinus didapat

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 60°$

Subtitusikan $a = (2+\sqrt{3})b$ yang didapat dari soal.

$c^2 = (2+\sqrt{3})^2 b^2 + b^2 - 2(2+\sqrt{3})b \cdot b \cdot \frac{1}{2}$

$c^2 = (6+3\sqrt{3})b^2$

Dengan dalil sinus didapat

$\frac{c^2}{(\sin\angle C)^2} = \frac{b^2}{(\sin\angle B)^2}$

$\frac{(6+3\sqrt{3})b^2}{\frac{3}{4}} = \frac{b^2}{\sin^2\angle B}$

$\sin^2\angle B = \frac{1}{4(2+\sqrt{3})} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sqrt{3}$

$\angle B = 15^o$

∴ Besarnya sudut B adalah **15°**.

9. Karena banyaknya siswa = 100 orang sedangkan banyaknya siswa kelas II 50% lebih banyak dari siswa kelas III maka banyaknya siswa kelas II yang mengikuti seleksi = 60 orang sedangkan siswa kelas III = 40 orang.

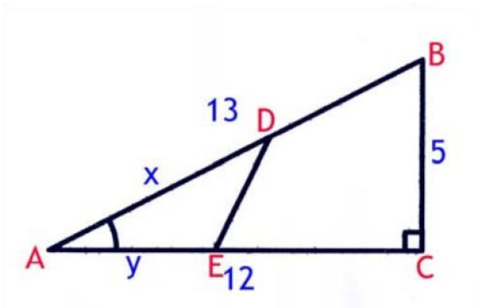
   Misalkan skor rata-rata kelas III adalah x maka skor rata-rata kelas II adalah $\frac{2}{3}$x.

   $100 = \frac{60 \cdot \frac{2}{3}x + 40 \cdot x}{100}$

   x = 125

   ∴ Skor rata-rata siswa kelas III adalah **125**.

10. Misalkan panjang AD = x dan panjang AE = y

    Luas △ABC = $\frac{1}{2}$(5)(12) = 30 dan sin A = $\frac{5}{13}$ serta cos A = $\frac{12}{13}$

    Luas △ADE = $\frac{1}{2}$xy sin A = 15. Maka xy = 78.

    Sesuai dalil cosinus pada △ADE maka :

    $DE^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos A = x^2 + y^2 - 144$

    Dengan AM-GM maka

    $DE^2 \geq 2xy - 144 = 12$

    DE^2 akan minimum sama dengan 12 jika x = y = $\sqrt{78}$

    $DE_{minimum} = 2\sqrt{3}$

11. Misalkan ke-4 akar tersebut adalah x_1, x_2, x_3 dan x_4 dengan $x_1 = \sqrt{2}$ dan $x_2 = \sqrt{2008} = 2\sqrt{502}$.

    Alternatif 1 :

    $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = 0$

    $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a$ yang merupakan bilangan rasional. Maka ada 2 kemungkinan nilai x_3 dan x_4.

    - $x_3 = p - 2 - 2\ 502$ dan $x_4 = q$ untuk p dan q bilangan rasional.

      $x_1x_2x_3x_4 = d$ yang merupakan bilangan rasional.

$(\sqrt{2})(2\sqrt{502})(p-\sqrt{2}-2\sqrt{502})(q)$ = bilangan rasional untuk p, q rasional

$4p\sqrt{251}-4\sqrt{251}-2008\sqrt{2}$ = bilangan rasional. Maka tidak ada p rasional yang memenuhi

- $x_3 = p - \sqrt{2}$ dan $x_4 = q - 2\sqrt{502}$ untuk p dan q bilangan rasional.

  $x_1x_2x_3x_4 = d$ yang merupakan bilangan rasional.

  $(\sqrt{2})(2\sqrt{502})(p-\sqrt{2})(q-2\sqrt{502})$ = bilangan rasional

  $4pq\sqrt{251}-2008p\sqrt{2}-4q\sqrt{502}+4016$ = bilangan rasional

  Kesamaan di atas akan terpenuhi hanya jika p = q = 0 sehingga $x_3 = -\sqrt{2}$ dan $x_4 = -\sqrt{2008}$

  $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - \sqrt{2})(x - \sqrt{2008})(x + \sqrt{2})(x + \sqrt{2008})$

  $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x^2 - 2)(x^2 - 2008) = x^4 - 2010x^2 + 4016$

  Maka a = 0, b = −2010, c = 0 dan d = 4016

  a + b + c + d = 0 − 2010 + 0 + 4016

∴ Nilai a + b + c + d adalah **2006**.

Alternatif 2 :

Jika $\sqrt{2}$ disubtitusikan ke persamaan $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ didapat

$$(2a+c)\sqrt{2} = -(2b+d+4)$$

Karena a, b, c dan d rasional maka kesamaan hanya mungkin terjadi jika 2a + c = 0 ·········· (1)

Sehingga 2b + d + 4 = 0 ··············· (2)

Jika $\sqrt{2008} = 2\sqrt{502}$ disubtitusikan ke persamaan $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ didapat

$$(2008a+c)\sqrt{2} = -(2008b+d+4032064)$$

Karena a, b, c dan d rasional maka kesamaan hanya mungkin terjadi jika 2008a + c = 0 ········· (3)

Sehingga 2008b + d + 4032064 = 0 ··············· (4)

Dari persamaan (1) dan (3) didapat a = 0 dan c = 0

Dari persamaan (2) dan (4) didapat b = −2010 dan d = 4016

a + b + c + d = 0 − 2010 + 0 + 4016 = 2006

∴ Nilai a + b + c + d adalah **2006**.

12. Misalkan [ABC] menyatakan luas △ABC.

Berdasarkan dalil cosinus, cos ∠A = $\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\cdot AB\cdot AC}$

Maka ctg $\angle$A = $\frac{\cos\angle A}{\sin\angle A} = \frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\cdot AB\cdot AC\cdot\sin\angle A} = \frac{AB^2+AC^2-BC^2}{4[ABC]}$

Dengan cara yang sama didapat :

ctg $\angle$B = $\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{4[ABC]}$

ctg $\angle$C = $\frac{AC^2+BC^2-AB^2}{4[ABC]}$

ctg $\angle$A + ctg $\angle$B + ctg $\angle$C = $\frac{AB^2+AC^2+BC^2}{4[ABC]} = \frac{16}{4}$

$\therefore$ ctg $\angle$A + ctg $\angle$B + ctg $\angle$C = **4.**

13. $f(x) = x^2 + 4$

    $f(xy) = x^2y^2 + 4$

    $f(y - x) = (y - x)^2 + 4$

    $f(y + x) = (y + x)^2 + 4$

    $f(xy) + f(y - x) = f(y + x)$

    $x^2y^2 + 4 + (y - x)^2 + 4 = (y + x)^2 + 4$

    $x^2y^2 + y^2 + x^2 - 2xy + 4 = y^2 + x^2 + 2xy$

    $x^2y^2 + 4 = 4xy$

    $(xy - 2)^2 = 0$

    Jadi $xy = 2$

    Dengan ketaksamaan AM-GM maka

    $x + y \geq 2\sqrt{xy} = 2\sqrt{2}$

    Dengan memanfaatkan bilangan kuadrat tak mungkin negative

    $x + y = x + \frac{2}{x} = \left(\sqrt{x} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2\sqrt{2}$

    tanda kesamaan terjadi jika $x = y = \sqrt{2}$

    $\therefore$ Nilai minimum dari x + y adalah $2\sqrt{2}$

14. Jelas bahwa n harus genap.

    Misalkan $n = 2^y \cdot p_1^{x1} \cdot p_2^{x2} \cdot \cdots \cdot p_k^{xk}$ dengan p_i untuk i = 1, 2, $\cdots$, k semuanya bilangan prima ganjil dan x_i untuk i = i, 2, $\cdots$, k semuanya bilangan bulat tak negatif serta y asli.

    Karena salah satu faktor dari n adalah 2 maka semua bilangan genap $\leq$ n tidak akan relatif prima dengan n. Banyaknya bilangan genap $\leq$ n ada tepat sebanyak $\frac{n}{2}$ dan banyaknya bilangan ganjil kurang dari n juga ada sebanyak $\frac{n}{2}$.

    Tetapi untuk semua $1 < p_i < n$ dengan i = 1, 2, $\cdots$, k juga merupakan faktor dari n yang mengakibatkan semua $1 < p_i < n$ dengan i = 1, 2, $\cdots$, k tidak akan relatif prima dengan n.

    Maka agar terpenuhi ada tepat $\frac{n}{2}$ bilangan kurang dari n dan relatif prima terhadap n maka n tidak boleh memiliki faktor ganjil selain 1. Jadi $p_i = 1$ untuk semua i = 1, 2, $\cdots$, k.

    Maka $n = 2^y$ untuk suatu bilangan asli y.

    Karena n < 2008 maka $2^y < 2008$. Jadi $y \leq 10$.

Maka nilai n yang memenuhi adalah 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024.

$\therefore$ Banyaknya bilangan bulat positif n yang memenuhi ada **10**.

15. Misalkan f(x) berderajat n maka $f(x^2)$ akan berderajat 2n.
    $x^3f(x)$ akan berderajat n + 3.
    - Jika n > 3 maka 2n > n + 3 sehingga $f(x^2) - x^3f(x)$ akan berderajat 2n > 6. Jadi, tanda kesamaan tidak mungkin terjadi.
    - Jika n = 3 maka $f(x^2)$ dan $x^3f(x)$ akan berderajat sama yaitu 6 sehingga masih dimungkinkan $f(x^2) - x^3f(x)$ akan berderajat 3.
      Jika $f(x) = x^3 - 2$ maka $f(x^2) - x^3f(x) = (x^6 - 2) - x^3(x^3 - 2) = 2(x^3 - 1)$ yang memenuhi.
    - Jika n < 3 maka 2n < n + 3 sehingga $f(x^2) - x^3f(x)$ akan berderajat n + 3. Karena ruas kanan berderajat 3 maka n = 0.

    $\therefore$ Derajat f(x) adalah **3**.
16. Banyaknya kemungkinan tanggal lahir dari 20 orang = 365^{20}.
    Banyaknya kemungkinan dari 20 orang tersebut tidak ada satupun yang berulang tahun di hari yang sama = $365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \cdots \cdot 346 = {}_{365}P_{20}$.
    Peluang yang ditanyakan pada soal dapat dicari dengan cara komplemen.
    Peluang dari 20 orang yang dipilih secara acak ada dua orang yang berulang tahun pada hari yang sama adalah
    $$1 - \frac{{}_{365}P_{20}}{365^{20}}$$
    $\therefore$ Peluang dari soal = $1 - \frac{{}_{365}P_{20}}{365^{20}}$
17. Ada dua kemungkinan jumlah ketiga bilangan tersebut genap
    - Ketiga bilangan tersebut semuanya genap
      Peluang = $\frac{{}_{1004}C_3}{{}_{2008}C_3} = \frac{\frac{1004\cdot1003\cdot1002}{6}}{\frac{2008\cdot2007\cdot2006}{6}} = \frac{167}{1338}$
    - Ada satu bilangan genap dan dua lainnya ganjil
      $\frac{{}_{1004}C_1 \cdot {}_{1004}C_2}{{}_{2008}C_3} = \frac{1004 \cdot \frac{1004\cdot1003}{2}}{\frac{2008\cdot2007\cdot2006}{6}} = \frac{502}{1338}$

    Peluang jumlah ketiga bilangan tersebut genap = $\frac{167}{1338} + \frac{502}{1338}$

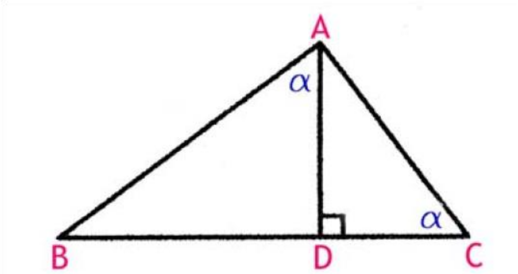
    $\therefore$ Peluang jumlah ketiga bilangan tersebut genap = $\frac{1}{2}$
18. $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
    $10 = 4 + |B| - |A \cap B|$
    $|B| - |A \cap B| = 6$
    Jelas bahwa $0 \le |A \cap B| \le |A|$ sehingga $0 \le |A \cap B| \le 4$.

Jadi 6 ≤ |B| ≤ 10

Karena |B| bulat tak negatif maka |B| = 6, 7, 8, 9 atau 10.

∴ |B| = **6, 7, 8, 9 atau 10**.

19. Misalkan ∠DAB = ∠ACD = α



ctg α = $\frac{AD}{BD} = \frac{CD}{AD}$

$\frac{6}{8} = \frac{CD}{6}$ sehingga CD = $\frac{9}{2}$

Luas segitiga ABC = ½ · (BD + CD) · AD = $\frac{75}{2}$

∴ Luas segitiga ABC = $\frac{75}{2}$

20. Dengan binom Newton didapat

$$4^{1004} = (3+1)^{1004} = \binom{1004}{0}3^0 + \binom{1004}{1}3^1 + \binom{1004}{1004}3^{1004} = \sum_{k=0}^{1004} 3^k \binom{1004}{k}$$

∴ $\sum_{k=0}^{1004} 3^k \binom{1004}{k} = 2^{2008}$

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2008

TINGKAT PROVINSI

SOLUSI SOAL

BAGIAN KEDUA

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2008

BAGIAN KEDUA

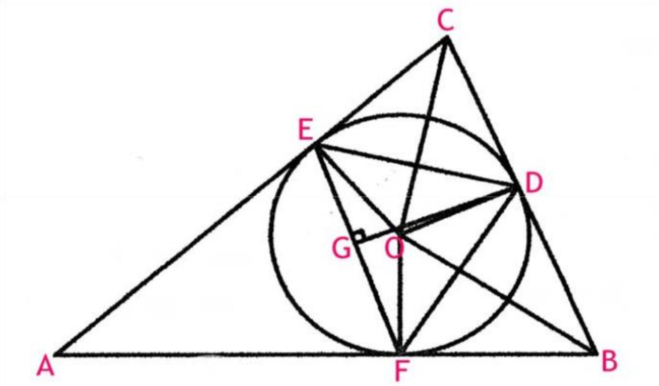
1. $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = 40$
   $x + x^2 + \cdots + x^n = 39$
   $x(1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1}) = 39$
   Karena x dan n bilangan asli maka x merupakan faktor dari 39
   Nilai x yang mungkin memenuhi adalah 1, 3, 13 atau 39.
   - Jika x = 1 maka $1 + 1^2 + \cdots + 1^n = 39$.
     Jadi, n = 39
   - Jika x = 3
     Karena $x \neq 1$ maka $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} = 40$
     Untuk x = 3 maka $3^{n+1} - 1 = 80$
     Nilai n yang memenuhi adalah n = 3.
   - Jika x = 13
     Karena $x \neq 1$ maka $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} = 40$
     Untuk x = 13 maka $13^{n+1} - 1 = 480$
     $13^{n+1} = 481 = 13 \cdot 37$
     Karena 37 tidak habis dibagi 13 maka tidak ada n asli yang memenuhi.
   - Jika x = 39
     Karena $x \neq 1$ maka $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1} = 40$
     Untuk x = 39 maka $39^{n+1} - 1 = 1520$
     $39^{n+1} = 1521 = 39^2$
     Nilai n yang memenuhi adalah n = 1.

   $\therefore$ Semua pasangan bilangan asli (x, n) yang memenuhi adalah **(1, 39), (3, 3), (39, 1)**
2. Karena P(x) = 0 mempunyai 2008 selesaian real maka berlaku
   $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_{2008})$ dengan x_i semua real untuk i = 1, 2, ⋯, 2008.
   Karena $P(2008) \leq 1$ maka tidak mungkin semua $x_i < 2007$.
   $P(Q(x)) = P(x^2 + 2x + 2008)$
   $P(Q(x)) = (x^2 + 2x + 2008 - x_1)(x^2 + 2x + 2008 - x_2)\cdots(x^2 + 2x + 2008 - x_{2008}) = 0$
   Diskriminan $x^2 + 2x + 2008 - x_i$ adalah Diskriminan = $4 - 4(2008 - x_i)$
   Diskriminan = $4(x_i - 2007)$ untuk i = 1, 2, ⋯, 2008.
   Karena tidak semua $x_i < 2007$ maka akan terdapat x_k sehingga Diskriminan = $4(x_i - 2007) \geq 0$.

Karena diskriminan ≥ 0 maka terbukti ada sedikitnya 2 bilangan x real yang memenuhi $P(Q(x)) = 0$

$\therefore$ **Terbukti bahwa persamaan $P(Q(x)) = 0$ mempunyai selesaian real.**

3. Misalkan O adalah pusat lingkaran dalam segitiga ABC. Maka garis bagi dari B dan C akan melalui titik O.



Karena CO dan BO adalah garis bagi maka $\angle ECO = \angle DCO$ dan $\angle DBO = \angle FBO$

Misalkan $\angle ECO = \angle DCO = \gamma$ ·········· (1) dan $\angle DBO = \angle FBO = \beta$ ·········· (2)

Jelas bahwa $\angle CEO = \angle CDO = 90^\circ$ sehingga $\angle EOD = 180^\circ - 2\gamma$ ························ (3)

Jelas juga bahwa $\angle BDO = \angle BFO = 90^\circ$ sehingga $\angle DOF = 180^\circ - 2\beta$ ························ (4)

Maka $\angle EOF = 360^\circ - \angle EOD - DOF = 2(\gamma + \beta)$ ························ (5)

Segitiga EOF adalah segitiga sama kaki sehingga $\angle OEF = \angle OFE = 90^\circ - (\gamma + \beta)$ ························ (6)

Lingkaran dalam menyinggung segitiga ABC di D, E dan F sehingga CE = CD dan BD = BF.

Karena CE = CD dan OE = OD maka segiempat CEOD adalah layang-layang. Jadi, $CO \perp ED$.

$ED = 2\ CE \sin\gamma$ ······················ (7)

$\angle CED = 90^\circ - \gamma$ sehingga $\angle OED = \gamma$

$\angle GED = \angle OEF + \angle OED = (90^\circ - (\gamma + \beta)) + (\gamma) = 90^\circ - \beta$ ··························· (8)

$EG = ED \cos \angle GED = (2\ CE \sin\gamma)(\cos(90^\circ - \beta)$

$\frac{EG}{CE} = 2\sin\gamma\sin\beta$ ······················ (9)

Karena BD = BF dan OD = OF maka segiempat BDOF adalah layang-layang. Jadi, $BO \perp DF$.

$DF = 2\ BF \sin\beta$ ······················ (10)

$\angle BFD = 90^\circ - \beta$ sehingga $\angle OFD = \beta$

$\angle GFD = \angle OFE + \angle OFD = (90^\circ - (\gamma + \beta)) + (\beta) = 90^\circ - \gamma$ ··························· (11)

$FG = DF \cos \angle GFD = (2\ BF \sin\beta)(\cos(90^\circ - \gamma)$

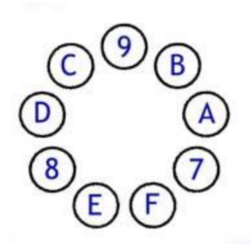
$\frac{FG}{BF} = 2\sin\gamma\sin\beta$ ······················ (12)

Dari persamaan (9) dan (12) dapat disimpulkan bahwa $\frac{FG}{BF} = \frac{EG}{CE}$ sehingga $\frac{FG}{EG} = \frac{BF}{CE}$.

$\therefore$ **Terbukti bahwa** $\frac{FG}{EG} = \frac{BF}{CE}$

4. Alternatif 1 :

Andaikan bahwa tidak ada tiga bilangan berdekatan yang jumlahnya lebih besar dari 15.
Jika terdapat tiga bilangan dengan dua diantaranya adalah 7, 8 atau 9 maka ketiga bilangan tersebut akan memiliki jumlah lebih dari 15. Maka haruslah terdapat dua bilangan di antara 7, 8 dan 9. Kemungkinan susunan hanya ada 1, yaitu :



Rata-rata enam bilangan 1, 2, 3, 4, 5 dan 6 adalah 3,5.
Maka maks (A + B, C + D, E + F) ≥ 7.

- Jika maks (A + B, C + D, E + F) = 7 maka A + B = C + D = E + F = 7
  Maka 9 jika dipasangkan dengan salah satu dari pasangan (A, B), (C, D) atau (E, F) akan membentuk tiga bilangan yang jumlahnya lebih dari 15. Kontradiksi dengan anggapan semula.
- Jika maks (A + B, C + D, E + F) > 7 maka maks (A + B, C + D, E + F) ≥ 8

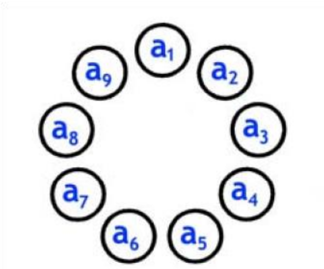
Pasangan bilangan yang memiliki nilai maks tersebut pasti akan berdekatan dengan 8 atau 9 yang penjumlahan ketiga bilangan tersebut akan bernilai lebih besar dari 15. Kontradiksi dengan anggapan semula.

∴ **Terbukti bahwa ada tiga bilangan berdekatan yang jumlahnya lebih besar dari 15.**

Alternatif 2 :

Misalkan $a_i \in \{1, 2, 3, \cdots, 9\}$ untuk $i = 1, 2, \cdots, 9$.

Ke-9 bilangan a_i, $i = 1, 2 \cdots, 9$ disusun sebagai berikut.



Misalkan

$S_1 = a_1 + a_2 + a_3$

$S_2 = a_2 + a_3 + a_4$

$\vdots$

$S_9 = a_9 + a_1 + a_2$

Dengan demikian

$S_1 + S_2 + \cdots + S_9 = 3(a_1 + a_2 + \cdots + a_9) = 3 \cdot 45 = 135$

Karena $a_1 \neq a_4$ maka $S_1 \neq S_2$.

Andaikan tidak ada 3 bilangan berdekatan yang jumlahnya lebih besar dari 15, yaitu $S_i \leq 15$ untuk semua $i = 1, 2, \cdots, 9$.

Karena $S_1 \neq S_2$ maka S_1 atau S_2 kurang dari 15. Akibatnya $S_1 + S_2 + \cdots + S_9 < 9 \times 15 = 135$. Kontradiksi.

∴ **Terbukti bahwa ada tiga bilangan berdekatan yang jumlahnya lebih besar dari 15.**

5. Sebuah bilangan akan habis dibagi 3 apabila penjumlahan angka-angkanya habis dibagi 3.

   Ada 4 angka/digit yang habis dibagi 3 dan masing-masing ada 3 angka/digit yang bersisa 1 atau 2 jika dibagi 3. Misalkan bilangan palindrom tersebut adalah abcba. Penjumlahan angka = $2(a + b) + c$.

   Karena angka pertama tidak boleh 0 maka banyaknya cara memilih digit $a \equiv 0 \pmod 3$ hanya ada 3 kemungkinan.

   - Jika $c \equiv 0 \pmod 3$

     Maka $2(a + b) \equiv 0 \pmod 3$ sehingga $a + b \equiv 0 \pmod 3$

     Tiga kemungkinan pasangan (a, b) adalah $a \equiv 0 \pmod 3$ dan $b \equiv 0 \pmod 3$, $a \equiv 1 \pmod 3$ dan $b \equiv 2 \pmod 3$ atau $a \equiv 2 \pmod 3$ dan $b \equiv 1 \pmod 3$ Banyaknya cara memilih digit c adalah 4.

     Maka banyaknya cara memilih bilangan palindrom jika $c \equiv 0 \pmod 3 = 4 \cdot (3 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3)$ Maka banyaknya cara memilih bilangan palindrom jika $c \equiv 0 \pmod 3 = 120$.

   - Jika $c \equiv 1 \pmod 3$

     Maka $2(a + b) \equiv 2 \pmod 3$ sehingga $a + b \equiv 1 \pmod 3$

     Tiga kemungkinan pasangan (a, b) adalah $a \equiv 0 \pmod 3$ dan $b \equiv 1 \pmod 3$, $a \equiv 1 \pmod 3$ dan $b \equiv 0 \pmod 3$ atau $a \equiv 2 \pmod 3$ dan $b \equiv 2 \pmod 3$

     Banyaknya cara memilih digit c adalah 3.

     Maka banyaknya cara memilih bilangan palindrom jika $c \equiv 1 \pmod 3 = 3 \cdot (3 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 3 \cdot 3)$

     Maka banyaknya cara memilih bilangan palindrom jika $c \equiv 1 \pmod 3 = 90$.

   - Jika $c \equiv 2 \pmod 3$

     Maka $2(a + b) \equiv 1 \pmod 3$ sehingga $a + b \equiv 2 \pmod 3$

     Tiga kemungkinan pasangan (a, b) adalah $a \equiv 0 \pmod 3$ dan $b \equiv 2 \pmod 3$, $a \equiv 1 \pmod 3$ dan $b \equiv 1 \pmod 3$ atau $a \equiv 2 \pmod 3$ dan $b \equiv 0 \pmod 3$

     Banyaknya cara memilih digit c adalah 3.

     Maka banyaknya cara memilih bilangan palindrom jika $c \equiv 2 \pmod 3 = 3 \cdot (3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 4)$ Maka banyaknya cara memilih bilangan palindrom jika $c \equiv 2 \pmod 3 = 90$.

   Banyaknya bilangan palindrom yang memenuhi adalah $120 + 90 + 90 = 300$.

   ∴ Banyaknya bilangan palindrom 5-angka yang habis dibagi 3 adalah **300**.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2008

TINGKAT NASIONAL

HARI PERTAMA

WAKTU : 4 JAM

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Nasional Tahun 2008

1. Diberikan segitiga ABC. Titik-titik D, E, dan F di luar segitiga ABC sedemikian sehingga segitiga ABD, segitiga BCE, dan segitiga CAF adalah segitiga sama sisi. Buktikan bahwa ketiga lingkaran luar segitiga tersebut berpotongan di satu titik.
2. Buktikan bahwa untuk x dan y bilangan real positif, berlaku

$$\frac{1}{(1+\sqrt{x})^2}+\frac{1}{(1+\sqrt{y})^2}\geq\frac{2}{x+y+2}$$

3. Carilah semua bilangan asli yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}$$

untuk suatu a, b, dan c bilangan asli dengan

FPB (a, b) = FPB (b, c) = FPB (c, a) = 1

4. Misalkan A = {1, 2, ⋯, 2008}
   a. Tentukan cacah subhimpunan dari A yang hasilkali semua anggotanya habis dibagi 7.
   b. Misalkan N(i) menyatakan cacah subhimpunan dari A yang jumlah semua anggotanya bersisa I jika dibagi 7. Buktikan bahwa

$$\sum_{i=0}^{7}(-1)^i\,N(i)=0$$

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2008

TINGKAT NASIONAL

HARI KEDUA

WAKTU : 4 JAM

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Nasional Tahun 2008

5. Misalkan m, n > 1 bilangan-bilangan bulat sedemikian hingga n membagi $4^m - 1$ dan 2^m membagi $n - 1$. Haruskah $n = 2^m + 1$? Jelaskan.
6. Ada 21 orang berhubungan secara rahasia dengan menggunakan frekuensi gelombang radio yang berbeda. Ada pasangan dua orang yang dapat berhubungan, mungkin ada yang tidak dapat. Setiap pasang yang berhubungan hanya menggunakan satu frekuensi tertentu yang berbeda dengan frekuensi yang digunakan pasangan lain. Setiap tiga orang selalu ada dua orang di antaranya yang tidak dapat berhubungan. Tentukan banyak maksimum frekuensi berbeda yang diperlukan dan jelaskan.
7. Diberikan segitiga ABC dengan panjang sisi-sisinya a, b, dan c. Garis-garis singgung lingkaran dalam segitiga ABC yang sejajar dengan sisi-sisi segitiga ABC membentuk tiga segitiga kecil. Pada masing-masing segitiga kecil dibuat lingkaran dalam. Buktikan bahwa jumlah luas dari lingkaran dalam segitiga ABC dan ketiga lingkaran dalam segitiga kecil adalah
$$\frac{\pi\left(a^2+b^2+c^2\right)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{(a+b+c)^3}$$
8. Tentukan semua fungsi f : N → N yang memenuhi
$$f(mn) + f(m + n) = f(m)f(n) + 1$$
untuk semua m, n ∈ N.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2008

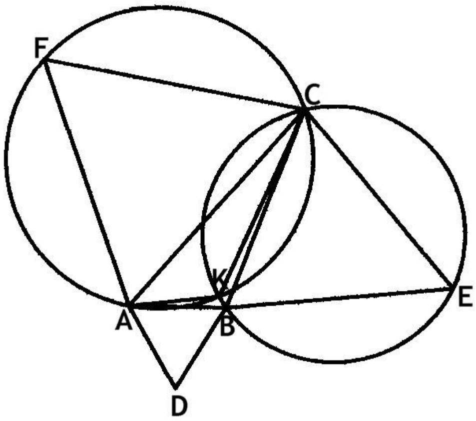
TINGKAT NASIONAL

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Nasional Tahun 2008

1. Misalkan lingkaran luar $\triangle$ACF dan lingkaran luar $\triangle$BCE berpotongan di titik C dan K.



Karena terletak pada satu lingkaran, segi empat AKCF adalah segiempat tali busur.
Maka $\angle$AKC = 180^o − $\angle$AFC = 120^o.
Karena terletak pada satu lingkaran, segi empat BKCE adalah segiempat tali busur.
Maka $\angle$BKC = 180^o − $\angle$BEC = 120^o.
Jadi, $\angle$AKB = 360^o − $\angle$AKC − $\angle$BKC = 120^o.
Karena $\angle$AKB + $\angle$ADB = 120^o + 60^o = 180^o maka segiempat BKAD adalah segiempat talibusur.
Jadi ada sebuah lingkaran yang melalui titik D, B, K dan A.
Maka lingkaran luar $\triangle$ACF, lingkaran luar $\triangle$BCE dan lingkaran luar $\triangle$ABD melalui titik K.

$\therefore$ Terbukti bahwa ketiga lingkaran luar segitiga ACF, BCE dan ABD berpotongan di satu titik

2. Alternatif 1 :

Dengan AM-GM maka

$x + 1 \geq 2\sqrt{x}$

$y + 1 \geq 2\sqrt{y}$

$$x + y + 2 = \frac{x + y + 2 + (x + 1) + (y + 1)}{2} \geq \frac{x + y + 2 + 2\sqrt{x} + 2\sqrt{y}}{2} = \frac{\left(1 + \sqrt{x}\right)^2 + \left(1 + \sqrt{y}\right)^2}{2}$$

Dengan AM-HM maka

$$x + y + 2 \geq \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^2 + (1+\sqrt{y})^2}{2} \geq \frac{2}{\frac{1}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2} + \frac{1}{\left(1+\sqrt{y}\right)^2}}$$

$\therefore \frac{1}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2} + \frac{1}{(1+\sqrt{y})^2} \geq \frac{2}{x+y+2}$ (terbukti)

Alternatif 2 :

Dengan ketaksamaan AM-GM didapat

$x + 1 \geq 2\sqrt{x}$ ……………….. (1)

Tanda kesamaan terjadi jika x = 1

$\left(1+\sqrt{x}\right)^2 = 1 + 2\sqrt{x} + x \leq 2(x+1)$ maka

$\frac{1}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2} \geq \frac{1}{2(x+1)}$ …………………….. (2)

Dengan cara yang sama didapat

$\frac{1}{(1+\sqrt{y})^2} \geq \frac{1}{2(y+1)}$ ………………. (3) maka

$\frac{1}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2} + \frac{1}{(1+\sqrt{y})^2} \geq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1}\right)$

Dengan ketaksamaan AM-HM didapat

$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} \geq \frac{4}{x+1+y+1} = \frac{4}{x+y+2}$ maka

$\therefore \frac{1}{\left(1+\sqrt{x}\right)^2} + \frac{1}{(1+\sqrt{y})^2} \geq \frac{2}{x+y+2}$ (terbukti)

3. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan a = maks (a, b, c)

   Misalkan juga $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = k$ untuk suatu bilangan asli k.

   $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = \frac{ab(a+b)+ac(a+c)+bc(b+c)}{abc}$ = k untuk suatu bilangan asli k.

   Karena c|ac(a + c) + bc(b + c) maka c|ab(a + b)

   Karena FPB(a, c) = FPB(b, c) = 1 maka c|(a + b)

   Dengan cara yang sama didapat

   b|(a + c)

   a|(b + c)

   Karena b ≤ a dan c ≤ a maka a ≤ b + c ≤ 2a

   - Kasus 1, b + c = a

     Karena b|(a + c) maka b|2a − b

     Jadi b|2a

     Karena FPB(a, b) = 1 maka b|2.

     Jadi, b = 1 atau 2

     Karena c|(a + b) maka c|2a − c

     Jadi c|2a

     Karena FPB(a, c) = 1 maka c|2.

     Jadi, c = 1 atau 2

     - Jika b = 1 dan c = 1 maka a = 2

       $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = 7$

     - Jika b = 1 dan c = 2 atau b = 2 dan c = 1 maka a = 3

       $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = 8$

- Jika b = 2 dan c = 2 tidak memenuhi bahwa FPB(b, c) = 1

- Kasus 2, b + c = 2a

  Kesamaan hanya terjadi jika a = b dan a = c.

  Karena FPB(a, b) = FPB(a, c) = FPB(b, c) = 1 maka a = b = c = 1

  $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = 6$

∴ Nilai dari $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}$ adalah **6, 7 atau 8**.

4. A = {1, 2, ⋯, 2008}

   a. Karena cacah anggota A sebanyak 2008 maka cacah subhimpunan A = 2^{2008}.

   Jika suatu himpunan memiliki anggota yang merupakan kelipatan 7 maka hasil kali semua anggotanya merupakan kelipatan 7. Jadi agar hasil kali semua anggota dari suatu himpunan tidak habis dibagi 7 maka anggotanya tidak ada yang merupakan kelipatan 7.

   Banyaknya anggota A yang merupakan kelipatan 7 ada 286, yaitu 7, 14, 28, ⋯, 2002.

   Jadi cacah subhimpunan dari A yang hasilkali anggotanya habis dibagi 7 adalah $2^{2008} - 2^{2008-286}$

   ∴ Cacah subhimpunan dari A yang hasilkali anggotanya habis dibagi 7 adalah $\mathbf{2^{2008} - 2^{1722}}$.

   b. Misalkan $x_i \in$ A maka 2009 − $x_i \in$ A.

   Akan dibuktikan bahwa jika ada sebanyak k bilangan yang merupakan anggota A yang memenuhi jumlah k bilangan tersebut bersisa i jika dibagi 7 maka ada sebanyak k bilangan yang juga merupakan anggota A dan memenuhi jumlah k bilangan tersebut akan bersisa 7 − i jika dibagi 7.

   Misalkan ada sebanyak k bilangan yang merupakan anggota A dan memenuhi $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = 7p + i$ untuk suatu bilangan asli p.

   $(2009 - x_1) + x_1 + (2009 - x_2) + x_2 + \cdots + (2009 - x_k) + x_k = 2009k = 7m$ untuk suatu m ∈ asli.

   $(2009 - x_1) + (2009 - x_2) + \cdots + (2009 - x_k) = 7n + 7 - i$ untuk suatu bilangan asli n.

   Jadi ada k bilangan 2009 − x_i untuk i = 1, 2, ⋯, k yang memenuhi jumlah k bilangan tersebut bersisa 7 − i jika dibagi 7.

   Terbukti bahwa N(i) = N(7 − i)

   $$\sum_{i=0}^{7}(-1)^i N(i) = N(0) - N(1) + N(2) - N(3) + N(4) - N(5) + N(6) - N(7) = 0$$

   ∴ Terbukti bahwa $\sum_{i=0}^{7}(-1)^i N(i) = 0$

5. Karena $2^m | n - 1$ maka $n = k \cdot 2^m + 1$ untuk suatu bilangan asli k.

   Karena $n | 4^m - 1$ maka $n \leq 4^m - 1$

   $k \cdot 2^m + 1 \leq 4^m - 1 < 4^m + 1$

   Maka $k < 2^m$ ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ (1)

   Karena $n | 4^m - 1$ maka $n | (4^m - 1) \cdot k^2 = (k \cdot 2^m)^2 - k^2$.

   Sehingga $n | (n - 1)^2 - k^2 = n^2 - 2n + 1 - k^2$.

   Karena $n | n^2 - 2n$ maka $n | k^2 - 1$. Jadi, $n \leq k^2 - 1$ untuk $k \neq 1$ ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ (2)

   $n \leq k^2 - 1 < k^2 < k \cdot 2^m < k \cdot 2^m + 1 = n$ kontradiksi untuk $k \neq 1$.

Jika k = 1 maka n = $2^m + 1$ yang memenuhi $2^m | n - 1$ dan $n | 4^m - 1$.

∴ Jadi, **haruslah n = 2^m + 1**.

6. Misalkan terdapat 3 orang di antaranya , yaitu A, B dan C dan memiliki hubungan tepat ada dua frekuensi di antara mereka dan yang berhubungan adalah AB dan AC.

   Tentunya kita dapat membagi ketiga orang ini menjadi dua kelompok, misalkan A kelompok merah serta B dan C pada kelompok putih sehingga ketiganya hanya berhubungan jika berbeda kelompok.

   Misalkan juga D berhubungan dengan A maka tentunya A tidak dapat berhubungan C sehingga A dapat dimasukkan ke dalam kelompok yang berbeda dengan A.

   Misalkan juga E berhubungan dengan C maka tentunya E dapat berhubungan dengan B tetapi tidak dapat berhubungan dengan A sehingga E dapat dimasukkan ke dalam kelompok yang sama dengan A.

   Jadi, kita dapat membagi 21 orang tersebut ke dalam dua kelompok sehingga yang dapat berhubungan hanya jika berbeda kelompok.

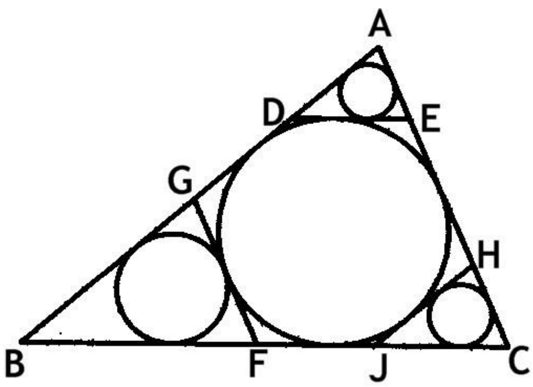
   Misalkan banyaknya anggota masing-masing kelompok adalah k dan 21 − k.

   Banyaknya frekuensi yang mungkin = k(21 − k) = $\frac{21^2}{4} - \left(k - \frac{21}{2}\right)^2$

   Karena k bilangan asli Maka banyaknya frekuensi akan maksimal adalah jika k = 10 atau 11.

   ∴ Banyaknya maksimum frekuensi berbeda yang diperlukan = 10 · 11 = **110**.

7. Perhatikan gambar !



Karena DE sejajar BC maka △ADE sebangun dengan △ABC.

Misalkan jari-jari lingkaran dalam △ABC = r, jari-jari lingkaran dalam △ADE = r_1, jari-jari lingkaran dalam △BFG = r_2 dan jari-jari lingkaran dalam △CHJ = r_3.

Misalkan juga jarak dari A ke BC = t_A dan jarak dari A ke DE = t_1.

Misalkan s = ½ (a + b + c).

Luas $\Delta ABC = \frac{1}{2}r(a+b+c) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$$r = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{2(a+b+c)}$$

$$\frac{1}{2}t_A a = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$t_A = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{2a}$$

Karena jarak dari A ke DE = t_1 maka $t_1 = t_A - 2r$

Karena $\triangle$ADE sebangun dengan $\triangle$ABC maka perbandingan sisi juga merupakan perbandingan garis tinggi kedua segitiga.

$\frac{AD}{c} = \frac{AE}{b} = \frac{DE}{a} = \frac{r_1}{r} = \frac{t_1}{t_A} = \frac{t_A - 2r}{t_A}$

Dengan rumus luas $\triangle$ABC maka $\frac{r}{t_A} = \frac{a+b+c}{a}$ sehingga $\frac{r_1}{r} = 1 - \frac{2a}{a+b+c} = \frac{b+c-a}{a+b+c}$

$r_1 = \frac{b+c-a}{a+b+c} r$

Dengan cara yang sama didapat

$r_2 = \frac{a+c-b}{a+b+c} r$

$r_3 = \frac{a+b-c}{a+b+c}$

Misalkan jumlah luas dari lingkaran dalam segitiga ABC dan ketiga lingkaran dalam segitiga kecil adalah L.

$$\begin{aligned} L &= \pi(r^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) \\ &= \pi\left(\frac{(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{4(a+b+c)}\right)\left(\frac{(a+b+c)^2 + (b+c-a)^2 + (a+b-c)^2}{(a+b+c)^2}\right) \end{aligned}$$

Misalkan P = $(a + b + c)^2 + (b + c - a)^2 + (a + c - b)^2 + (a + b - c)^2$

P = $(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc) + (a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc) + (a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc) + (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc)$

P = $4a^2 + 4b^2 + 4c^2$

$L = \pi \frac{(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}{4(a+b+c)^3}(4a^2 + 4b^2 + 4c^2)$

$L = \frac{\pi(a^2+b^2+c^2)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{(a+b+c)^3}$

$\therefore$ Terbukti bahwa jumlah luas dari lingkaran dalam segitiga ABC dan ketiga lingkaran dalam segitiga kecil adalah $\frac{\pi(a^2+b^2+c^2)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{(a+b+c)^3}$

8. Jika m = n = 1 maka f(1) + f(2) = f(1)f(1) + 1 ································ (1)

   Jika m = 1 dan n = 2 maka f(2) + f(3) = f(1)f(2) + 1 ································ (2)

   Jika m = n = 2 maka 2f(4) = f(2)f(2) + 1 ································ (3)

   Jika m = 1 dan n = 3 maka f(3) + f(4) = f(1)f(3) + 1 ································ (4)

   Misalkan f(1) = a, f(2) = b, f(3) = c dan f(4) = d serta subtitusikan persamaan (2) dan (3) ke (4).

   $(ab + 1 - b) + \left(\frac{b^2+1}{2}\right) = a(ab + 1 - b) + 1$

   $2ab + 2 - 2b + b^2 + 1 = 2a^2b + 2a - 2ab + 2$

   $2a^2b - b^2 - 4ab + 2a + 2b - 1 = 0$ ························· (5)

   Dari persamaan (1) didapat

   $a + b = a^2 + 1$ ··························· (6)

   $2a^2(a^2 - a + 1) - (a^2 - a + 1)^2 - 4a(a^2 - a + 1) + 2a + 2(a^2 - a + 1) - 1 = 0$

   $(2a^4 - 2a^3 + 2a^2) - (a^4 + a^2 + 1 - 2a^3 + 2a^2 - 2a) - (4a^3 - 4a^2 + 4a) + 2a + (2a^2 - 2a + 2) - 1 = 0$

$(2a^4 - 2a^3 + 2a^2) - (a^4 - 2a^3 + 3a^2 - 2a + 1) - (4a^3 - 4a^2 + 4a) + 2a + (2a^2 - 2a + 2) - 1 = 0$

$a^4 - 4a^3 + 5a^2 - 2a = 0$

$a(a - 1)^2(a - 2) = 0$

Karena $f : N \rightarrow N$ maka nilai $f(1)$ yang mungkin memenuhi hanya 1 atau 2.

- Jika $f(1) = 1$

  Untuk $n = 1$ maka $f(m) + f(m + 1) = f(m)f(1) + 1$

  Karena $f(1) = 1$ maka $f(m + 1) = 1$

  Jadi, $f(x) = 1$ untuk $x \in N$.

  Jika $f(x) = 1$ untuk $x \in N$ maka $f(mn) + f(m + n) = 2$ dan $f(m)f(n) + 1 = 2$. Memenuhi.

- Jika $f(1) = 2$

  Untuk $n = 1$ maka $f(m) + f(m + 1) = f(m)f(1) + 1$

  Karena $f(1) = 2$ maka $f(m + 1) = f(m) + 1$

  Jika $m = 1$ maka $f(2) = f(1) + 1$

  Jika $m = 2$ maka $f(3) = f(2) + 1$

  Jika $m = 3$ maka $f(4) = f(3) + 1$

  $\vdots$

  Jika $m = x - 1$ untuk $x \in N$ maka $f(x) = f(x - 1) + 1$

  Jumlahkan seluruh persamaan didapat :

  $f(x) = f(1) + x - 1$

  Karena $f(1) = 2$ maka $f(x) = x + 1$

  Jadi, $f(x) = x + 1$ untuk $x \in N$.

  Jika $f(x) = x + 1$ untuk $x \in N$ maka $f(mn) + f(m + n) = mn + 1 + m + n + 1 = (m + 1)(n + 1) + 1$ dan $f(m)f(n) + 1 = (m + 1)(n + 1) + 1$. Memenuhi.

$\therefore$ Semua fungsi $f : N \rightarrow N$ yang memenuhi adalah $f(x) = 1$ dan $f(x) = x + 1$ untuk $x \in N$.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2009

TINGKAT KABUPATEN/KOTA

WAKTU : 2 JAM

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Kabupaten/Kota Tahun 2009

Isikan hanya jawaban saja pada lembar jawaban yang disediakan.

1. Banyaknya bilangan asli kurang dari 1000 yang dapat dinyatakan dalam bentuk $x^2 - y^2$ untuk suatu bilangan ganjil x dan y adalah ⋯⋯⋯
2. Bilangan bulat positif terkecil n dengan n > 2009 sehingga
$$\sqrt{\frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3}{n}}$$
merupakan bilangan bulat adalah ⋯⋯⋯
3. Banyaknya solusi real x dari persamaan
$$3^{\left(\frac{1}{2}+\log_3(\cos x - \sin x)\right)} + 2^{(\log_2(\cos x + \sin x))} = \sqrt{2}$$
adalah ⋯⋯
4. Diberikan fungsi f : R → R sedemikian hingga
$$x^2f(x) + f(1 - x) = 2x - x^4$$
untuk semua x ∈ R. Nilai f(2009) adalah ⋯⋯
5. Banyaknya segitiga siku-siku yang kelilingnya 2009 dan sisi-sisinya bilangan bulat serta jari-jari lingkaran dalamnya juga bilangan bulat adalah ⋯⋯⋯
6. Nilai eksak dari $\binom{2009}{1} + \binom{2009}{2} + \cdots + \binom{2009}{1004}$ adalah ⋯⋯⋯
7. Jika tiga pasang suami isteri akan menempati tujuh kursi yang berjajar ke samping dengan syarat semua suami isteri duduk berdekatan dan tidak ada laki-laki dan perempuan bukan suami isteri yang duduk berdekatan, maka banyak caranya adalah ⋯⋯⋯
8. Nilai dari $\sum_{k=1}^{2009} FPB(k, 7)$ adalah ⋯⋯⋯
9. Banyaknya pasangan bilangan asli (x, y) sehingga $x^4 + 4y^4$ merupakan bilangan prima adalah ⋯⋯
10. Bilangan real x sehingga pernyataan
$$x^2 = x \text{ jika dan hanya jika } x^3 = x$$
bernilai salah adalah ⋯⋯
11. Diketahui ABC adalah segitiga siku-siku di A dengan AB = 30 cm dan AC = 40 cm. Misalkan AD adalah garis tinggi dari dan E adalah titik tengah AD. Nilai dari BE + CE adalah ⋯⋯⋯
12. Suatu turnamen diikuti 20 tim, dimana setiap tim bertemu satu kali dengan semua tim yang lain. Kemenangan memperoleh poin 1, sedangkan kekalahan 0. Pada klasemen akhir, 3 tim teratas memperoleh poin yang sama, sedangkan 17 tim yang lain memperoleh poin yang berbeda-beda. Jumlah semua bilangan yang tidak muncul pada poin yang dimiliki suatu tim pada klasemen akhir adalah ⋯⋯⋯

13. Titik E terletak di dalam persegi ABCD sedemikian rupa sehingga ABE adalah segitiga sama sisi. Jika panjang AB = $\sqrt{1+\sqrt{3}}$ dan F titik potong antara diagonal BD dengan segmen garis AE, maka luas segitiga ABF sama dengan ……
14. Misalkan f(x) = $\left(\sqrt{3}+1\right)\sin y + \left(\sqrt{3}-1\right)\cos y$. Nilai maksimum untuk $(f(y))^2$ dimana y bilangan real adalah ⋯⋯
15. Diberikan persegi ABCD dengan panjang sisi 10. Misalkan E pada AB dan F pada BD dengan AE = FB = 5. Misalkan P adalah titik potong CE dan AF. Luas DFPC adalah ⋯⋯⋯
16. Jika $x_{k+1} = x_k + \frac{1}{2}$ untuk k = 1, 2, ⋯ dan $x_1 = 1$ maka $x_1 + x_2 + \cdots + x_{400} =$ ⋯⋯⋯
17. Diberikan segitiga ABC tumpul ($\angle ABC > 90^o$), AD dan AE membagi sudut BAC sama besar. Panjang segmen garis BD, DE dan EC berturut-turut adalah 2, 3, dan 6. Panjang terpendek dari sisi segitiga ABC adalah ⋯⋯
18. Jika $10^{999999999}$ dibagi oleh 7, maka sisanya adalah ⋯⋯⋯
19. Diketahui A adalah himpunan semua bilangan asli yang habis dibagi 3, tidak habis dibagi 5, dan tidak lebih dari 100. Banyaknya fungsi f dari himpunan semua bilangan real yang tidak nol ke dalam A yang memenuhi $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x-y)$ adalah ⋯⋯
20. Delapan bilangan asli memiliki rata-rata 6,5. Empat dari delapan bilangan tersebut adalah 4, 5, 7, dan 8. Selisih antara bilangan terbesar dan terkecil adalah 10. Jika ke delapan bilangan diurutkan dari kecil ke besar, maka banyaknya susunan ada ⋯⋯⋯

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2009

TINGKAT KABUPATEN/KOTA

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Kabupaten/Kota Tahun 2009

1. Misalkan x = 2m + 1 dan y = 2n + 1
   $x^2 - y^2 = 4m(m + 1) - 4n(n + 1)$
   m(m + 1) dan n(n + 1) keduanya adalah bilangan genap maka $x^2 - y^2$ merupakan kelipatan 8.
   Selain itu, $8k = (2k + 1)^2 - (2k - 1)^2$ sehingga setiap bilangan kelipatan 8 dapat diubah menjadi selisih kuadrat dua bilangan ganjil.
   Maka banyaknya bilangan asli kurang dari 1000 yang dapat dinyatakan dalam bentuk $x^2 - y^2$ dengan x dan y adalah bilangan ganjil adalah $\frac{1000}{8} - 1$ = 124. Tanda -1 sebab 1000 tidak termasuk ke dalam bagian ini.
   ∴ Maka banyaknya bilangan asli kurang dari 1000 yang dapat dinyatakan dalam bentuk $x^2 - y^2$ dengan x dan y adalah bilangan ganjil adalah **124**.

2. $\sqrt{\frac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}{n}} = \sqrt{n\left(\frac{n+1}{2}\right)^2}$
   Agar $\sqrt{n\left(\frac{n+1}{2}\right)^2}$ merupakan bilangan kuadrat maka haruslah n merupakan bilangan kuadrat sempurna.
   Bilangan kuadrat terdekat setelah 2009 adalah 45^2 = 2025.
   ∴ Nilai n > 2009 yang memenuhi $\sqrt{\frac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n}}$ merupakan bilangan kuadrat adalah **2025**.

3. $3^{\left(\log_3 \sqrt{3}(\cos x - \sin x)\right)} + 2^{(\log_2(\cos x + \sin x))} = \sqrt{2}$
   $\sqrt{3}(\cos x - \sin x) + (\cos x + \sin x) = \sqrt{2}$
   $\left(\sqrt{3} + 1\right)\cos x - \left(\sqrt{3} - 1\right)\sin x = \sqrt{2}$
   $\left(\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\cos x - \left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\sin x = \frac{1}{2}$
   $\sin 105^o = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$ sedangkan $\cos 150^o = -\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$
   $\sin 105^o \cos x + \cos 105^o \sin x = \sin 30^o$
   $\sin(105^o + x) = \sin 30^o$
   $105^o + x = 30^o + k \cdot 360^o$ atau $105^o + x = 180^o - 30^o + k \cdot 360^o$
   $x = 285^o + n \cdot 360^o$ atau $x = 45^o + k \cdot 360^o + k \cdot 360^o$
   Untuk x = 45° + n · 360° akan menyebabkan cos x − sin x = 0 sehingga tidak memenuhi persyaratan bahwa cos x − sin x > 0. Maka :
   Tetapi saat x = 285° + n · 360° maka akan menyebabkan cos x > sin x yang menyebabkan terpenuhinya syarat cos x − sin x > 0.
   Karena ada tak berhingga nilai n yang mungkin maka banyaknya solusi real x yang memenuhi adalah tak berhingga.
   ∴ Jadi, banyaknya solusi real x yang memenuhi adalah **tak berhingga**.

4. $x^2f(x) + f(1 - x) = 2x - x^4$
   $k^2f(k) + f(1 - k) = 2k - k^4$ ·························· (1)
   $(1 - k)^2f(1 - k) + f(k) = 2(1 - k) - (1 - k)^4$ ······················ (2)
   Kalikan persamaan (1) dengan $(1 - k)^2$ lalu kurangkan dengan persamaan (2) didapat
   $(k^2(k - 1)^2 - 1)\ f(k) = 2k(k - 1)^2 - k^4(k - 1)^2 - 2(1 - k) + (k - 1)^4$
   $(k^2(k - 1)^2 - 1)\ f(k) = 2k^3 - 4k^2 + 2k - k^4(k - 1)^2 - 2 + 2k + k^2(k - 1)^2 - 2k(k - 1)^2 + (k - 1)^2$
   $(k^2(k - 1)^2 - 1)\ f(k) = 2k^3 - 4k^2 + 4k - k^4(k - 1)^2 - 2 + k^2(k - 1)^2 - 2k(k - 1)^2 + (k - 1)^2$
   $(k^2(k - 1)^2 - 1)\ f(k) = 2k^3 - 4k^2 + 4k - k^4(k - 1)^2 - 2 + k^2(k - 1)^2 - 2k^3 + 4k^2 - 2k + k^2 - 2k + 1$
   $(k^2(k - 1)^2 - 1)\ f(k) = k^2 - 1 - k^4(k - 1)^2 - 1 + k^2(k - 1)^2$
   $(k^2(k - 1)^2 - 1)\ f(k) = (k^2(k - 1)^2 - 1)(1 - k^2)\ f(k) = 1 - k^2$
   $\therefore$ f(2009) = **$1 - 2009^2$**.
5. Akan dibuktikan bahwa tidak ada segitiga siku-siku dengan sisi-sisinya bilangan bulat dan memenuhi bahwa kelilingnya merupakan bilangan ganjil.
   Alternatif 1 :
   Misalkan sisi-sisi segitiga tersebut adalah a, b dan $2009 - a - b$
   $a^2 + b^2 = (2009 - a - b)^2$
   $2ab - 4018a - 4018b + 2009^2 = 0$
   Karena $2ab - 4018a - 4018b$ genap sedangkan 2009^2 ganjil maka tidak ada bilangan bulat a dan b yang memenuhi $2ab - 4018a - 4018b + 2009^2 = 0$. Jadi tidak ada segitiga yang demikian.
   Alternatif 2 :
   Misalkan sisi-sisi siku-sikunya adalah a dan b sedangkan hipotenusa c.
   Karena 2009 ganjil maka sisi-sisi segitiga tersebut haruslah ketiga-tiganya ganjil atau tepat satu yang ganjil.
   - Jika ketiga-tiganya ganjil
     Karena $a^2 + b^2 \equiv 2 \pmod 4$ maka tidak mungkin ada hipotenusa yang memenuhi.
   - Jika tepat satu yang ganjil
     Jika yang ganjil tersebut merupakan hipotenusa maka $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod 4$ sehingga hipotenusa haruslah merupakan bilangan genap. Kontradiksi.
     Jika hipotenusa genap maka $a^2 + b^2 \equiv 1 \pmod 4$ sehingga hipotenusa haruslah merupakan bilangan ganjil. Kontradiksi.

   Maka tidak ada segitiga siku-siku dengan sisi-sisinya bilangan bulat dan memenuhi bahwa kelilingnya sama dengan 2009.
   $\therefore$ Jadi, banyaknya segitiga yang memenuhi adalah **0**.
6.

$$\binom{2009}{k} = \binom{2009}{2009-k}$$

$$\binom{2009}{0} + \binom{2009}{1} + \cdots + \binom{2009}{2009} = 2^{2009}$$

$$\binom{2009}{0} + \binom{2009}{1} + \cdots + \binom{2009}{1004} = \frac{2^{2009}}{2} = 2^{2008}$$

$$\binom{2009}{1} + \binom{2009}{2} + \cdots + \binom{2009}{1004} = 2^{2008} - 1$$

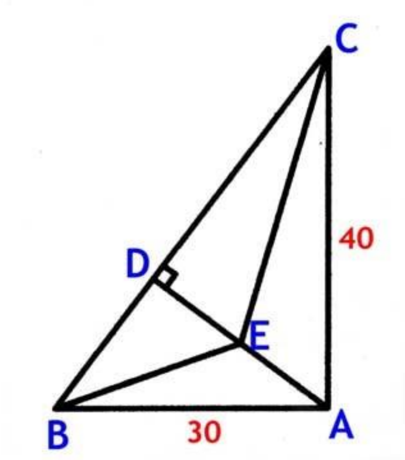
$\therefore$ Jadi, $\binom{2009}{1} + \binom{2009}{2} + \cdots + \binom{2009}{1004} = 2^{2008} - 1$

7. Misalkan penomoran kursi urut dari kiri ke kanan. Ada tiga bentuk susunan yang mungkin.
   - Susunannya berbentuk SIISSI atau ISSIIS
     Karena suami isteri harus berdekatan maka posisi kursi kosong haruslah kursi nomor 1, 3, 5 atau 7. Banyaknya susunan masing-masing bentuk tanpa memperhitungkan kursi kosong adalah 3!. Jadi, banyaknya susunan yang mungkin adalah 4 · 2 · 3! = 48.
   - Susunannya berbentuk SISIIS atau ISISSI
     Karena tidak ada laki-laki dan perempuan yang bukan suami isteri yang duduk berdekatan serta suami isteri harus berdekatan maka posisi kursi kosong haruslah kursi nomor 3. Banyaknya susunan yang mungkin adalah 1 · 2 · 3! = 12
   - Susunannya berbentuk SIISIS atau ISSISI
     Bentuk di atas adalah percerminan bentuk kedua.
     Banyaknya susunan yang mungkin adalah 1 · 2 · 3! = 12

   Maka banyaknya susunan yang mungkin adalah = 48 + 12 + 12 = 72.

   $\therefore$ Maka banyaknya susunan yang mungkin adalah = **72.**
8. FPB (k, 7) = 1 jika k bukan merupakan kelipatan 7 sedangkan FPB (k, 7) = 7 jika k kelipatan 7.
   Bilangan asli dari 1 sampai 2009 yang habis dibagi 7 banyaknya ada $\lfloor 2009/7 \rfloor$ = 287.
   Bilangan asli dari 1 sampai 2009 yang tidak habis dibagi 7 banyaknya ada 2009 − 287 = 1722
   $$\sum_{k=1}^{2009} FPB(k,7) = 287 \cdot 7 + 1722 \cdot 1 = 3731$$
   $$\sum_{k=1}^{2009} FPB(k,7) = 3731$$
9. $x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 = (x^2 + 2y^2 - 2xy)(x^2 + 2y^2 + 2xy)$
   $x^4 + 4y^4 = ((x - y)^2 + y^2)(x^2 + 2y^2 + 2xy)$
   Suku kedua persamaan di atas selalu lebih dari satu. Agar $x^4 + 4y^4$ prima maka $(x - y)^2 + y^2 = 1$ yang terpenuhi hanya jika x = y dan y = 1.
   Maka pasangan (x, y) yang memenuhi hanya (1, 1)
   $\therefore$ Banyaknya pasangan (x, y) bilangan asli sehingga $x^4 + 4y^4$ adalah bilangan prima ada **1**.

10. Agar bernilai salah maka $x^2 = x$ benar dan $x^3 = x$ salah atau $x^2 = x$ salah dan $x^3 = x$ benar.
    Jika $x^2 = x$ benar maka nilai x yang memenuhi adalah 0 atau 1. Tetapi $x = 0$ atau $x = 1$ akan membuat $x^3 = x$ benar.
    Jika $x^3 = x$ benar maka nilai x yang memenuhi adalah 0 atau 1 atau -1. Tetapi $x = 0$ atau $x = 1$ akan membuat $x^3 = x$ benar sedangkan $x = -1$ akan membuat $x^2 = x$ salah.
    $\therefore$ Jadi bilangan real x yang memenuhi adalah $\mathbf{x = -1}$.
11.



Jelas bahwa panjang BC = 50 cm.
$BD = 30 \cdot \frac{30}{50} = 18$ cm.
$DC = 50 - 18 = 32$ cm.
$AD = \frac{30 \cdot 40}{50} = 24$ cm
$DE = 12$ cm
$BE^2 = BD^2 + DE^2 = 18^2 + 12^2 = 6^2 \cdot 13$
$CE^2 = CD^2 + DE^2 = 32^2 + 12^2 = 4^2 \cdot 73$
$BE + CE = 4\sqrt{73} + 6\sqrt{13}$
$\therefore$ **Nilai dari BE + CE adalah $4\sqrt{73} + 6\sqrt{13}$ cm.**

12. Nilai yang mungkin bagi peserta adalah $0, 1, 2, \cdots, 19$.
    Jumlah seluruh pertandingan = ${}_{20}C_2 = 190$.
    Karena dalam satu pertandingan hanya ada nilai 1 atau 0 maka nilai total seluruh peserta haruslah sama dengan 190.
    Misalkan nilai total 17 peserta terbawah adalah M.
    $M_{min} = 0 + 1 + 2 + 3 + \cdots + 16 = 136$.
    Total nilai tiga tim teratas maksimum adalah $190 - 136 = 54$.
    Maka tidak mungkin nilai masing-masing tiga tim teratas sama dengan 19.
    Nilai terkecil masing-masing tiga tim teratas adalah 17 sebab nilai terendah tim ke-4 adalah 16.
    - Jika masing-masing tiga tim teratas sama dengan 17
      Nilai peringkat ke-4 haruslah 16.

Maka M = 136. Tetapi total nilai seluruh peserta = 136 + 3 · 17 = 187 ≠ 190. Tidak memenuhi syarat total nilai seluruh peserta sama dengan 190.

- Jika masing-masing tiga tim teratas sama dengan 18

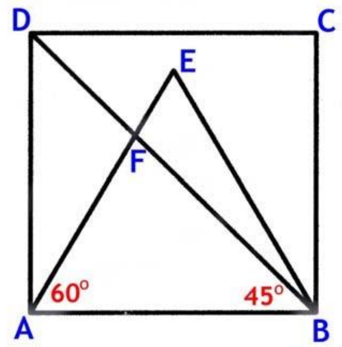
  Maka M = 190 − 3 · 18 = 136 = M_{min}.

  Maka nilai-nilai tim peringkat ke-4 sampai 20 adalah 16, 15, 14, 13, ⋯, 0.

Jadi nilai yang tidak muncul adalah 17 dan 19.

∴ Jumlah semua bilangan yang tidak muncul pada poin yang dimiliki suatu tim = **36**.

13. ∠AFB = 180° − ∠BAF − ∠FBA = 180° − 60° − 45° = 75°.



Dengan dalil sinus pada segitiga AFB maka :

$\frac{\sqrt{1+\sqrt{3}}}{\sin 75^o} = \frac{AF}{\sin 45^o}$

$\sin 75^o = \frac{1}{4}\sqrt{2}\left(1+\sqrt{3}\right)$. Maka

$AF = \frac{2}{\sqrt{1+\sqrt{3}}}$

Luas segitiga ABF = ½ AB · AF sin 60°

∴ **Luas segitiga ABF** = $\frac{\sqrt{3}}{2}$

14. $f(x) = \left(\sqrt{3}+1\right)\sin y + \left(\sqrt{3}-1\right)\cos y$

Alternatif 1 :

$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-a)$ dengan $\tan a = \frac{a}{b}$

$\left(f(y)\right)^2 = 8\cos^2(y-a)$

Alternatif 2 :

$\sin 105^o = \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$ sedangkan $\cos 105^o = -\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$

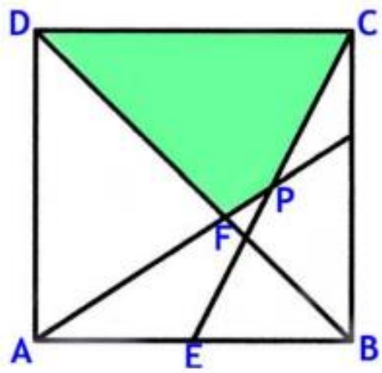
$f(x) = \frac{4}{\sqrt{2}}\left(\left(\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\sin y - \left(-\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\cos y\right)$

$f(x) = \frac{4}{\sqrt{2}}(\sin 105^o \sin y - \cos 105^o \cos y) = -\frac{4}{\sqrt{2}}\cos(y - 105^o)$

$\left(f(y)\right)^2 = 8\cos^2(y - 105^o)$

∴ Nilai maksimum untuk $(f(y))^2$ adalah **8.**

15. Misalkan koordinat A(0,0), B(10,0) maka C(10,10) dan D(0,10).



Panjang BF = 5 sedangkan ∠DBA = 45^o maka koordinat F $\left(10 - \frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$.

Persamaan garis AF adalah $y = \frac{\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}}x$ dan persamaan garis EC adalah y = 2x − 10

$2x_P - 10 = \frac{\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}}x_P$ sehingga $x_P = \frac{10(4-\sqrt{2})}{8-3\sqrt{2}} = \frac{130+20\sqrt{2}}{23}$ dan $y_P = \frac{30+40\sqrt{2}}{23}$

Misalkan [ABCD] menyatakan luas bangunan ABCD.

[AEP] = $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \left(\frac{30+40\sqrt{2}}{23}\right) = \frac{75+100\sqrt{2}}{23}$

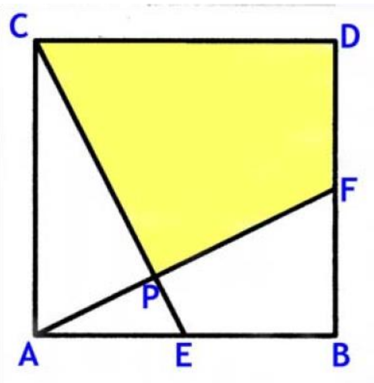
[AFD] = $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \left(\frac{20-5\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{100-25\sqrt{2}}{2}$

[EBC] = 25

[DFPC] = 100 − [AEP] − [AFD] − [EBC]

∴ **Luas DFPC adalah** $\frac{1000+375\sqrt{2}}{46}$.

Catatan : Jawaban yang dikirim dari pusat menyatakan bahwa jawaban dari soal ini adalah 55 yang didapat jika penulisan titik sudutnya sebagai berikut (buktikan).



Tetapi, penulisan titik sudut tersebut tidak sesuai dengan kesepakatan umum penulisan titik sudut.

16. $x_{k+1} - x_k = \frac{1}{2}$

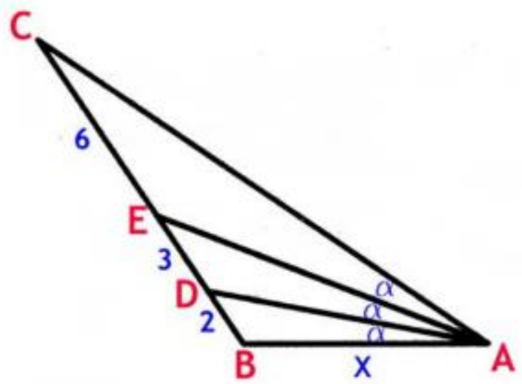
Karena selisih dua bilangan berurutan konstan maka soal tersebut merupakan deret aritmatika dengan beda sama dengan ½ dan suku pertama sama dengan 1.

$x_1 + x_2 + \cdots + x_{400} = \frac{400}{2}\left(2(1) + (400-1)\left(\frac{1}{2}\right)\right)$

$x_1 + x_2 + \cdots + x_{400} = 40300$

∴ $x_1 + x_2 + \cdots + x_{400} = $ **40300.**

17. Perhatikan gambar.



Misalkan ∠CAE = ∠EAD = ∠DAB = α dan panjang AB = x.

Pada ΔEAB, ruas AD adalah garis bagi sehingga $\frac{EA}{AB} = \frac{3}{2}$. Maka EA = $\frac{3x}{2}$.

Misalkan juga AD = y. Dengan dalil cosinus maka

$$\frac{y^2+x^2-2^2}{2xy} = \frac{\frac{9}{4}x^2+y^2-3^2}{3xy} = \cos\alpha$$

$6y^2 + 6x^2 - 24 = 9x^2 + 4y^2 - 36$

$2y^2 = 3x^2 - 12$ ………………………… (1)

Pada △DAC, karena AE adalah garis bagi maka berlaku AC = 2 AD = 2y

Sesuai dalil cosinus pada △CAE maka

$$6^2 = 4y^2 + \frac{9}{4}x^2 - 2(2y)\left(\frac{3}{2}x\right)\left(\frac{y^2+x^2-2^2}{2xy}\right)$$

$144 = 16y^2 + 9x^2 - 12(y^2 + x^2 - 4)$

$96 = 4y^2 - 3y^2$

Subtitusikan persamaan (1)

$96 = 6x^2 - 24 - 3x^2$

$x = 2\sqrt{10}$

Karena ∠ABC > 90° maka sisi terpanjang △ABC adalah sisi AC.

Karena $x = 2\sqrt{10} < 2 \cdot 4 < 2 + 3 + 6 = 11 = BC$ maka panjang sisi yang terpendek adalah AB = x

∴ Panjang sisi segitiga ABC yang terpendek adalah $2\sqrt{10}$.

18. $10^{999999999} = 1000^{333333333} = (7 \cdot 143 - 1)^{333333333}$.

$10^{999999999} \equiv (-1)^{333333333}$ (mod 7) ≡ −1 (mod 7)

$10^{999999999}$ dibagi 7 maka akan bersisa 6.

∴ $10^{999999999}$ dibagi 7 akan bersisa **6**.

19. Banyaknya bilangan asli yang kurang dari 100 dan habis dibagi 3 ada 33.

Banyaknya bilangan asli yang habis dibagi 3 dan habis dibagi 5 serta kurang dari 100 ada 6.

Banyaknya anggota himpunan A adalah 33 − 6 = 27.

Fungsi f dari himpunan semua bilangan real yang tidak nol ke dalam A memenuhi $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x - y)$.

Alternatif 1 :

Ambil $x = \frac{ab}{a-1}$ dan $y = \frac{b}{a-1}$ untuk a ≠ 1 serta a dan b tak nol. Maka

f(a) = f(b)

Jadi f merupakan fungsi konstan. Karena banyaknya anggota himpunan A ada 27 maka banyaknya fungsi yang memenuhi ada 27.

∴ Banyaknya fungsi yang memenuhi adalah **27**.

Alternatif 2 :

f(x) = f(2x − x) = f $\left(\frac{2x}{x}\right)$ = f(2) sehingga f merupakan fungsi konstan.

Karena banyaknya anggota himpunan A ada 27 maka banyaknya fungsi yang memenuhi ada 27.

∴ Banyaknya fungsi yang memenuhi adalah **27**.

20. Karena rata-rata delapan bilangan sama dengan 6,5 maka jumlah kedelapan bilangan = 52. Jumlah empat bilangan yang ada adalah 4 + 5 + 7 + 8 = 24 sehingga jumlah keempat bilangan yang lain sama dengan 28.
    - Jika bilangan yang terkecil sama dengan 1 maka bilangan terbesar sama dengan 11
      Jumlah dua bilangan terakhir = 16. Pasangan yang memenuhi adalah (5, 11), (6, 10), (7, 9) dan (8, 8) yang semuanya ada 4.
    - Jika bilangan yang terkecil sama dengan 2 maka bilangan terbesar sama dengan 12
      Jumlah dua bilangan terakhir = 14. Pasangan yang memenuhi adalah (2, 12), (3, 11), (4, 10), (5, 9), (6, 8) dan (7, 7) yang semuanya ada 6.
    - Jika bilangan yang terkecil sama dengan 3 maka bilangan terbesar sama dengan 13
      Jumlah dua bilangan terakhir = 12. Pasangan yang memenuhi adalah (3, 9), (4, 8), (5, 7) dan (6, 6) yang semuanya ada 4.
    - Jika bilangan yang terkecil sama dengan 4 maka bilangan terbesar sama dengan 14
      Jumlah dua bilangan terakhir = 10. Pasangan yang memenuhi adalah (4, 6) dan (5, 5) yang semuanya ada 2.
    - Jika bilangan yang terkecil sama dengan 4 maka bilangan terbesar sama dengan 14 dengan bilangan 4 tersebut merupakan salah satu dari 4 bilangan awal.
      Jumlah tiga bilangan lain haruslah 14 dan tidak ada salah satu di antaranya sama dengan 4. Karena yang terendah sama dengan 5 maka nilai minimal sama dengan 15. Tidak ada yang memenuhi.

    Banyaknya susunan = 4 + 6 + 4 + 2 + 0 = 16.

    ∴ Banyaknya susunan yang mungkin ada **16**.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2009

TINGKAT PROVINSI

WAKTU : 210 MENIT

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2009

BAGIAN PERTAMA

1. Tiga dadu berwarna hitam, merah, dan putih dilempar bersama-sama. Macam hasil lemparan sehingga jumlah ketiga mata dadu adalah 8 sebanyak ⋯⋯⋯
2. Banyaknya bilangan real x yang memenuhi persamaan $x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 176x + 2009 = 0$ adalah ⋯⋯
3. Bilangan rasional a < b < c membentuk barisan hitung (aritmatika) dan
$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=3$$
Banyaknya bilangan positif a yang memenuhi adalah ⋯⋯⋯⋯
4. Misalkan N menyatakan himpunan semua bilangan bulat positif dan
$$S=\left\{n\in N\left|\frac{n^{2009}+2}{n+1}\in N\right.\right\}$$
Banyaknya himpunan bagian dari S adalah ⋯⋯⋯
5. Diberikan segitiga ABC dengan tan ∠CAB = $\frac{22}{7}$. Melalui titik sudut A ditarik garis tinggi sedemikian rupa sehingga membagi sisi BC menjadi segmen-segmen dengan panjang 3 dan 17. Luas segitiga ABC adalah ⋯⋯⋯
6. Nilai minimum dari $f(x)=\frac{9x^2\sin^2 x+4}{x\sin x}$ untuk 0 < x < π adalah ⋯⋯⋯
7. Diberikan segitiga dengan panjang dari ketiga garis tinggi segitiga itu merupakan bilangan bulat. Jika panjang kedua garis tingginya adalah 10 dan 6, maka panjang maksimum garis tinggi ketiga adalah ⋯⋯
8. Suatu fungsi f : Z → Q mempunyai sifat $f(x+1)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$ untuk setiap x ∈ Z. Jika f(2) = 2, maka nilai fungsi f(2009) adalah ⋯⋯
9. Diketahui segitiga siku-siku ABC dengan panjang sisi-sisinya a, b, dan c serta a < b < c. Misalkan r dan R berturut-turut menyatakan panjang jari-jari lingkaran dalam dan lingkaran luarnya. Jika $\frac{r(a+b+c)}{R^2}=\sqrt{3}$ maka nilai dari $\frac{r}{a+b+c}$ adalah ⋯⋯⋯
10. Jika tan x + tan y = 25 dan cot x + cot y = 30, maka nilai tan (x + y) adalah ⋯⋯
11. Pada bagian kanan 100! terdapat digit 0 berturut-turut sebanyak ⋯⋯⋯
12. Ada empat pasang sepatu akan diambil empat sepatu secara acak. Peluang bahwa yang terambil ada yang berpasangan adalah ⋯⋯
13. Diketahui k, m, dan n adalah tiga bilangan bulat positif yang memenuhi
$$\frac{k}{m}+\frac{m}{4n}=\frac{1}{6}$$
Bilangan m terkecil yang memenuhi adalah ⋯⋯

14. Bilangan prima p yang memenuhi $(2p - 1)^3 + (3p)^2 = 6^p$ ada sebanyak ⋯⋯
15. Jika $x_1, x_2, \cdots, x_{2009}$ bilangan real, maka nilai terkecil dari

$$\cos x_1 \sin x_2 + \cos x_2 \sin x_3 + \cdots + \cos x_{2009} \sin x_1$$

adalah ⋯⋯
16. Misalkan a, b, c adalah akar-akar polinom $x^3 - 8x^2 + 4x - 2$. Jika $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ adalah polinom dengan akar-akar $a + b - c$, $b + c - a$, $c + a - b$ maka $f(1) = \cdots\cdots$
17. Banyaknya segitiga tumpul dengan sisi bilangan asli yang memiliki sisi-sisi terpanjang 10 adalah ⋅⋅
(Catatan : dua segitiga kongruen dianggap sama)
18. Misalkan n bilangan asli terkecil yang mempunyai tepat 2009 faktor dan n merupakan kelipatan 2009. Faktor prima terkeci dari n adalah ⋯⋯
19. Misalkan $p(x) = x^2 - 6$ dan $A = \{x \in R \mid p(p(x)) = x\}$. Nilai maksimal dari $\{|x| : x \in A\}$ adalah ⋯⋯
20. Misalkan $q = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ dan $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x. Nilai $\lfloor q\lfloor qn \rfloor \rfloor - \lfloor q^2 n \rfloor$ untuk sebarang $n \in N$ adalah ⋯⋯

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2009

BAGIAN KEDUA

1. Seekor semut hendak melangkah ke makanan yang berada sejauh 10 langkah di depannya. Semut tersebut sedang mendapatkan hukuman, ia hanya boleh melangkah ke depan sebanyak kelipatan tiga langkah dan selebihnya harus melangkah ke belakang. Tentukan banyaknya cara melangkah agar bisa mencapai makanan, jika ia harus melangkah tidak lebih dari dua puluh langkah. (Catatan : jika semut melangkah dua kali dimana masing-masing melangkah sekali ke belakang, maka dianggap sama saja dengan dua langkah ke belakang.)
2. Diberikan n adalah bilangan asli. Misalkan $x = 6 + 2009\sqrt{n}$. Jika $\frac{x^{2009}-x}{x^3-x}$ merupakan bilangan rasional, tunjukkan bahwa n merupakan kuadrat dari suatu bilangan asli.
3. Diberikan segitiga ABC dan titik D pada sisi AC. Misalkan r_1, r_2 dan r berturut-turut menyatakan jari-jari lingkaran dalam dari segitiga-segitiga ABD, BCD, dan ABC. Buktikan bahwa $r_1 + r_2 > r$.
4. Diketahui p adalah bilangan prima sehingga persamaan $7p = 8x^2 - 1$ dan $p^2 = 2y^2 - 1$ mempunyai solusi x dan y berupa bilangan bulat. Tentukan semua nilai p yang memenuhi.
5. Diketahui himpunan H mempunyai lima anggota dari $\{0, 1, 2, 3, \cdots, 9\}$. Buktikan ada dua himpunan bagian dari H, yang tidak kosong dan saling asing, yang jika semua anggotanya dijumlahkan hasilnya sama.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2009

TINGKAT PROVINSI

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2009

BAGIAN PERTAMA

1. Banyaknya macam adalah (1, 1, 6), (1, 2, 5), (1, 3, 4), (2, 2, 4), (2, 3, 3) beserta permutasi yang berturut-turut ada sebanyak 3, 6, 6, 3 dan 3.

   $\therefore$ Banyaknya macam hasil lemparan = 3 + 6 + 6 + 3 + 3 = **21**.

2. $x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 176x + 2009 = 0$

   $(x^2 - x)^2 + (2x - 44)^2 + 73 = 0$

   Karena bilangan kuadrat tidak mungkin negatif maka tidak ada x real yang memenuhi.

   $\therefore$ Banyaknya bilangan real x yang memenuhi adalah **0**.

3. $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 3$

   Karena a, b dan c positif maka dengan ketaksamaan AM-GM didapat

   $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} = 3$

   Tanda kesamaan terjadi jika a = b = c.

   Karena $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = 3$ maka haruslah a = b = c yang kontradiksi dengan a < b < c.

   $\therefore$ Banyaknya bilangan positif a yang memenuhi adalah **0**.

4. $S = \left\{ n \in N \middle| \frac{n^{2009}+2}{n+1} \in N \right\}$

   $\frac{n^{2009}+2}{n+1} = \frac{n^{2009}+1}{n+1} = \frac{1}{n+1} \in N$

   Karena $n + 1 \mid n^{2009} + 1$ maka haruslah $n + 1 \mid 1$

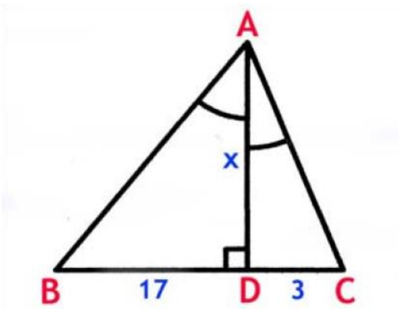
   Jadi $n + 1 \leq 1$, tetapi $n \in N$ sehingga tidak ada $n \in N$ yang memenuhi.

   Semua himpunan bagian dari S hanya ada satu yaitu { }.

   $\therefore$ Banyaknya himpunan bagian dari S adalah **1**.

5. Misalkan garis tinggi dari A memotong sisi BC di D dan AD = x.

   Tanpa mengurangi keumuman misalkan CD = 3 dan DB = 17.



   $\tan\angle CAB = \tan(\angle CAD + \angle DAB) = \frac{\tan\angle CAD + \tan\angle DAB}{1 - \tan\angle CAD \cdot \tan\angle DAB}$

$\frac{22}{7} = \frac{\frac{3}{x}+\frac{17}{x}}{1-\frac{3}{x}\cdot\frac{17}{x}}$ yang ekivalen dengan

$11x^2 - 561 = 70x$

$(x - 11)(11x + 51) = 0$

Karena x > 0 maka x = AD = 11

Luas $\triangle$ABC = ½ · AD · BC = ½ · 11 · (3 + 17)

∴ Luas $\triangle$ABC adalah **110**.

6. $f(x) = \frac{9x^2 \sin^2 x + 4}{x \sin x}$

   Untuk 0 < x < π maka sin x > 0

   Dengan AM-GM didapat

   $f(x) = \frac{9x^2 \sin^2 x + 4}{x \sin x} = 9x \sin x + \frac{4}{x \sin x} \geq 2\sqrt{9x \sin x \cdot \frac{4}{x \sin x}} = 12$

   Tanda kesamaan terjadi jika $9x\sin x = \frac{4}{x \sin x}$ atau $x \sin x = \frac{2}{3}$

   ∴ Nilai minimum dari $f(x) = \frac{9x^2 \sin^2 x + 4}{x \sin x}$ adalah **12**.

7. Misalkan garis tinggi ketiga = t.

   Misalkan juga 6, 10 dan t adalah garis tinggi-garis tinggi yang berturut-turut sepadan dengan sisisisi a, b dan c.

   Dengan rumus luas segitiga ABC didapat hubungan

   6a = 10b = tc

   Dengan ketaksamaan segitiga didapat

   a < b + c

   $1 < \frac{b}{a} + \frac{c}{a}$

   $1 < \frac{3}{5} + \frac{6}{t}$

   t < 15.

   Jika t = 14 maka 6a = 10b = 14c

   $a : b : c = \frac{1}{6} : \frac{1}{10} : \frac{1}{14} = 35 : 21 : 15$

   Karena a = 35k < b + c = 36k untuk suatu nilai real k maka t = 14 memenuhi.

   ∴ Panjang maksimum garis tinggi ketiga adalah **14.**

8. $f(x+1) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)}$ dan f(2) = 2

   $f(3) = \frac{1+2}{1-2} = -3$

   $f(4) = \frac{1-3}{1+3} = -\frac{1}{2}$

   $f(5) = \frac{1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$

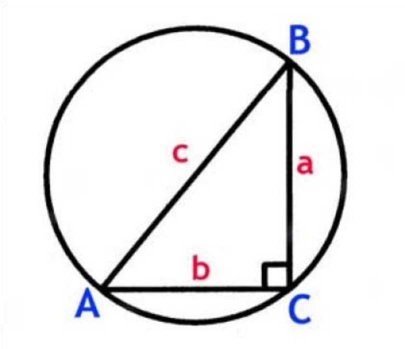
$f(6) = \frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 2$

Sehingga nilai f(n) untuk n bulat ≥ 2 akan periodik dengan kala ulang 4.

Karena 2009 = 4(502) + 1 maka nilai f(2009) = f(5)

∴ Nilai fungsi f(2009) adalah $\frac{1}{3}$.

9.



$\frac{r(a+b+c)}{R^2} = \sqrt{3}$

Luas △ABC = $\frac{1}{2}r(a+b+c) = \frac{1}{2}ab = \frac{abc}{4R}$

Alternatif 1 :

Dengan mensubtitusikan bahwa c = 2R, a = c sin A dan b = c cos A maka

$4\sin A \cos A = \sqrt{3}$

$\sin 2A = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

Karena a < b < c maka A < B < C.

Jadi, A = 30°, B = 60° dan C = 90°.

$$\frac{r}{a+b+c} = \frac{r(a+b+c)}{(a+b+c)^2} = \frac{ab}{(a+b+c)^2} = \frac{c\sin 30^o \cdot c\cos 30^o}{(c\sin 30^o + c\cos 30^o + c)^2} = \frac{\sqrt{3}}{\left(1+\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2}$$

$\therefore \frac{r}{a+b+c} = \frac{2\sqrt{3}-3}{6}$

Alternatif 2 :

Karena R = 2c maka $4ab = c^2\sqrt{3}$

$a^2 + b^2 = c^2$

$3a^2 + 3b^2 = 4ab\sqrt{3}$

$\left(a - b\sqrt{3}\right)\left(3a - b\sqrt{3}\right) = 0$

Karena a < b maka

$b = a\sqrt{3}$ dan $c = 2a$

$r = \frac{ab}{a+b+c} = \frac{a^2\sqrt{3}}{a+a\sqrt{3}+2a} = \frac{a\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}$

$\frac{r}{a+b+c} = \frac{a\sqrt{3}}{(3+\sqrt{3})(a+a\sqrt{3}+2a)} = \frac{\sqrt{3}}{(3+\sqrt{3})^2}$

$\frac{r}{a+b+c} = \frac{2\sqrt{3}-3}{6}$

10. tan x + tan y = 25

    cot x + cot y = 30

    $\frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\tan y} = 30$

    $\frac{\tan x + \tan y}{\tan x \cdot \tan y} = 30$

    tan x · tan y = $\frac{5}{6}$

    $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1-\tan x \cdot \tan y} = \frac{25}{1-\frac{5}{6}}$

    ∴ tan (x + y) = **150**.

11. Nilai maksimal k sehingga $5^k | 100!$ adalah $\left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{5^2} \right\rfloor$ = 24.

    ∴ Bagian kanan 100! terdapat digit 0 berturut-turut sebanyak **24**.

12. Alternatif 1 :

    Akan ada dua kasus

    1) Ada tepat sepasang sepatu yang berpasangan dan dua lainnya dipilih dari 3 pasang sepatu tersisa sehinga keduanya tidak berpasangan.
       Sepasang sepatu dipilih dari kemungkinan 4 pasangan. Banyaknya cara memilih ada 4. Banyaknya cara memilih dua sepatu dari tiga pasang sepatu sehingga keduanya tidak berpasangan adalah ${}_3C_2 \cdot 2 \cdot 2 = 12$.
       Banyaknya cara memilih sehingga tepat sepasang sepatu yang berpasangan dan 2 lainnya dipilih dari 3 pasang sepatu tersisa sehinga keduanya tidak berpasangan = 4 · 12 = 48.
    2) Ada tepat dua pasang sepatu berpasangan yang dipilih dari kemungkinan empat pasang sepatu.
       Banyaknya cara memilih adalah ${}_4C_2 = 6$.

    ∴ Peluang kejadian = $\frac{48+6}{{}_8C_4} = \frac{27}{35}$

    Alternatif 2 :

    Komplemen dari kejadian dimaksud adalah tidak ada sepasang sepatu dari keempat sepatu tersebut yang berpasangan, sehingga masing-masing satu buah sepatu dipilih dari masingmasing empat pasang sepatu tersebut. Banyaknya cara adalah 2 · 2 · 2 · 2 = 16.

    Peluang kejadian = $1 - \frac{16}{{}_8C_4}$

    ∴ Peluang kejadian = $\frac{27}{35}$.

13. $\frac{k}{m} + \frac{m}{4n} = \frac{1}{6}$ dengan k, m dan n adalah tiga bilangan bulat positif.

    $3m^2 = 2n(m - 6k)$

Karena ruas kiri positif maka haruslah $m > 6k > 6$.

Ruas kanan pasti genap sehingga m harus genap.

Karena m genap dan $m > 6$ maka $m \geq 8$.

Jika $m = 8$ maka

$48 = 4n - 3kn$

$48 = n(4 - 3k)$

$n = 48$ dan $k = 1$ adalah salah satu pasangan (n, k) yang memenuhi.

$\therefore$ Bilangan m terkecil yang memenuhi adalah **8**.

14. $(2p - 1)^3 + (3p)^2 = 6^p$ untuk suatu bilangan prima p.

Jika $p = 2$ maka $3^3 + 6^2 \neq 6^2$ sehingga $p = 2$ tidak memenuhi.

Jika $p = 3$ maka $5^3 + 9^2 \neq 6^3$ sehingga $p = 3$ tidak memenuhi.

Karena $p \neq 2, 3$ dan p prima maka p dapat dinyatakan $p = 6k + 1$ atau $6k + 5$ dengan k bulat tak negatif.

- Jika $p = 6k + 1$

  Persamaan semula akan ekivalen dengan

  $(12k + 1)^3 + 9(6k + 1)^2 = 6^{6k+1}$

  $(12k)^3 + 3(12k)^2 + 3(12k)^2 + 1 + 9(6k + 1)^2 = 6^{6k+1}$

  Ruas kiri dibagi 9 bersisa 1 sedangkan ruas kanan habis dibagi 9.

  Maka tidak ada nilai k asli yang memenuhi.

- Jika $p = 6k + 5$

  Persamaan semula akan ekivalen dengan

  $(12k + 9)^3 + 9(6k + 5)^2 = 6^{6k-1}$

  $3^3(4k + 3)^3 + 324k^2 - 540k + 180 = 6^{6k+5}$

  Karena $180 \equiv 9 \pmod{27}$ maka ruas kiri dibagi 27 bersisa 9 sedangkan 27 membagi ruas kanan.

  Maka tidak ada nilai k asli yang memenuhi.

Jadi, tidak ada bilangan prima p yang memenuhi.

$\therefore$ Banyaknya bilangan prima p yang memenuhi adalah **0**.

15. Misalkan $k = \cos x_1 \sin x_2 + \cos x_2 \sin x_3 + \cdots + \cos x_{2009} \sin x_1$ maka

$2k = 2 \cos x_1 \sin x_2 + 2 \cos x_2 \sin x_3 + \cdots + 2 \cos x_{2009} \sin x_1$

Mengingat bahwa $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ maka

$2009 + 2k = \cos^2x_1 + 2\cos x_1\sin x_2 + (\sin^2x_2 + \cos^2x_2) + 2\cos x_2\sin x_3 + (\sin^2x_3 + \cos^2x_3) + \cdots + 2\cos x_{2009}\sin x_1 + \sin^2x_1$

$2009 + 2k = (\cos^2x_1 + 2\cos x_1\sin x_2 + \sin^2x_2) + (\cos^2x_2 + 2\cos x_2\sin x_3 + \sin^2x_3) + \cdots + (\cos^2x_{2009} + 2\cos x_{2009}\sin x_1 + \sin^2x_1)$

$2009 + 2k = (\cos x_1 + \sin x_2)^2 + (\cos x_2 + \sin x_1)^2 + \cdots + (\cos x_{2009} + \sin x_1)^2 + (\cos x_1 + \sin x_{2009})^2$

Karena bilangan kuadrat tidak mungkin negatif maka

$2009 + 2k_{min} = 0$

$k_{\min} = -\frac{2009}{2}$

Nilai minimum didapat jika cos x_1 = −sin x_2, cos x_2 = −sin x_1, cos x_2 = −sin x_3, cos x_3 = −sin x_2, ⋯, cos x_{2009} = −sin x_1 dan cos x_{2009} = −sin x_1 yang dapat dipenuhi oleh $x_1 = x_2 = \cdots = x_{2009} = \frac{3\pi}{4}$ rad.

∴ Nilai minimum dari cos x_1 sin x_2 + cos x_2 sin x_3 + ⋯ + cos x_{2009} sin x_1 adalah $-\frac{2009}{2}$.

16. $x^3 - 8x^2 + 4x - 2 = 0$ akar-akarnya a, b dan c.

    Maka a + b + c = 8.

    Subtitusi y = 8 − 2x sehingga $x = \frac{8-y}{2}$ ke persamaan $x^3 - 8x^2 + 4x - 2 = 0$. Maka

    $\left(\frac{8-y}{2}\right)^3 - 8\left(\frac{8-y}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{8-y}{2}\right) - 2 = 0$ memiliki akar-akar 8 − 2a, 8 − 2b dan 8 − 2c

    Polinom $f(x) = x^3 + px^2 + qx + r$ memiliki akar-akar, yaitu a + b − c = 8 − 2c, a + c − b = 8 − 2b dan b + c − a = 8 − 2a.

    Karena koefisien x^3 dari f(x) sama dengan 1 maka

    Polinom $f(x) = -8\left(\frac{8-x}{2}\right)^3 + 64\left(\frac{8-x}{2}\right)^2 - 32\left(\frac{8-x}{2}\right) + 16 = 0$ juga memiliki akar-akar 8 − 2a, 8 − 2b dan 8 − 2c.

    $f(1) = -8\left(\frac{8-1}{2}\right)^3 + 64\left(\frac{8-1}{2}\right)^2 - 32\left(\frac{8-1}{2}\right) + 16 = 345$

    ∴ f(1) = **345**.

17. Tanpa mengurangi keumuman misalkan sisi-sisi segitiga adalah a, b dan 10 dengan a ≤ b ≤ 10.

    Ketaksamaan segitiga, a + b > 10

    Karena segitiga tumpul maka $a^2 + b^2 < 10^2$

    Pasangan (a, b) bilangan asli yang memenuhi kedua ketaksamaan tersebut adalah (2,9), (3,8), (3,9), (4,7), (4,8), (4,9), (5,6), (5,7), (5,8), (6,6), (6,7) dan (7,7).

    Banyaknya pasangan (a, b) bilangan asli yang memenuhi ada 12.

    ∴ Banyaknya segitiga yang memenuhi adalah **12**.

18. $2009 = 7^2 \cdot 41$ maka 7^2 dan 41 haruslah merupakan faktor dari n.

    $n_{\min} = 2^{40} \cdot 7^6 \cdot 41^6$ memenuhi banyaknya faktor positif dari n adalah (40 + 1)(6 + 1)(6 + 1) = 2009

    ∴ Faktor prima terkecil dari n adalah **2**.

19. $p(x) = x^2 - 6$

    p(p(x) = x

    $(x^2 - 6)^2 - 6 = x$

    $x^4 - 12x^2 - x + 30 = 0$

    $(x + 2)(x - 3)(x^2 + x - 5) = 0$

    Nilai x yang memenuhi adalah −2, 3, $\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$, $\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$

    Karena $\left|\frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right| = \frac{1+\sqrt{21}}{2} < \frac{1+\sqrt{25}}{2} = 3$ maka nilai terbesar |x| yang memenuhi adalah 3.

∴ Nilai maksimal dari $\{\lfloor x \rfloor : x \in A\}$ adalah 3.

20. Karena $q = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ maka

$q^2 = q + 1$

$q - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$q^2 n = nq + n$

Karena n bulat maka

$\lfloor q^2 n \rfloor = \lfloor nq + n \rfloor = \lfloor qn \rfloor + n$ ………………. (1)

$\lfloor q \lfloor qn \rfloor \rfloor = \lfloor (q-1)\lfloor qn \rfloor + \lfloor qn \rfloor \rfloor$

Karena $\lfloor qn \rfloor$ bulat maka

$\lfloor q \lfloor qn \rfloor \rfloor = \lfloor (q-1)\lfloor qn \rfloor \rfloor + \lfloor qn \rfloor$ ……………. (2)

$\lfloor (q-1)\lfloor qn \rfloor \rfloor \geq \lfloor (q-1)(qn-1) \rfloor = \left\lfloor \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)n - 1\right) \right\rfloor = \left\lfloor n - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \right\rfloor = n - 1$

Karena q – 1 tak bulat maka

$\lfloor (q-1)\lfloor qn \rfloor \rfloor < (q-1)\lfloor qn \rfloor < \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\left(\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)n\right) = n$

Karena n > $\lfloor (q-1)\lfloor qn \rfloor \rfloor \geq$ n – 1 maka

$\lfloor (q-1)\lfloor qn \rfloor \rfloor$ = n – 1

$\lfloor q \lfloor qn \rfloor \rfloor = \lfloor (q-1)\lfloor qn \rfloor \rfloor + \lfloor qn \rfloor$

$\lfloor q \lfloor qn \rfloor \rfloor = n - 1 + \lfloor qn \rfloor$ ………………. (3)

Kurangkan persamaan (3) dengan persamaan (1)

$\lfloor q \lfloor qn \rfloor \rfloor - \lfloor q^2 n \rfloor = (n - 1 + \lfloor qn \rfloor) - (\lfloor qn \rfloor + n)$

$\lfloor q \lfloor qn \rfloor \rfloor - \lfloor q^2 n \rfloor = -1$

Maka, Nilai $\lfloor q \lfloor qn \rfloor \rfloor - \lfloor q^2 n \rfloor$ untuk sebarang $n \in N$ adalah -1.

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2009

BAGIAN KEDUA

1. Jelas bahwa semut harus melangkah ke depan lebih dari 3 kali.
   Jika semut melangkah ke depan lebih dari 5 kali maka semut tersebut harus mundur sekurangkurangnya 8 langkah sehingga total langkah lebih dari 20. Jadi, hanya ada 2 kasus :
   - Semut tersebut maju 3 x 4 langkah dan mundur 2 langkah, total langkah 14.

   Banyaknya cara sama saja dengan banyaknya susunan 333311

   Banyaknya cara = $\frac{6!}{4!\cdot 2!}$ = 15 cara.

   Cara lainnya sama dengan menempatkan 4 angka tiga ke 4 dari 6 tempat. Banyaknya cara = ${}_6C_4$ = 15 cara.
   - Semut tersebut maju 3 x 5 langkah dan mundur 5 langkah, total langkah 20.

   Banyaknya cara sama saja dengan banyaknya susunan 3333311111

   Banyaknya cara = $\frac{10!}{5!\cdot 5!}$ = 252 cara.

   Cara lainnya sama dengan menempatkan 5 angka tiga ke 5 dari 10 tempat. Banyaknya cara = ${}_{10}C_5$ = 252 cara.

   ∴ Banyaknya cara semut tersebut melangkah agar mencapai makanan adalah 15 + 252 = **267**

2. $x = 6 + 2009\sqrt{n}$

   $\frac{x^{2009}-x}{x^3-x} = \frac{a}{b}$ dengan a dan b bilangan bulat dan b ≠ 0.

   Karena $(p_1 + q_1\sqrt{n})(p_2 + q_2\sqrt{n}) = (p_1p_2 + q_1q_2n) + (p_1q_2 + p_2q_1)\sqrt{n}$ yang juga berbentuk $p_i + q_i\sqrt{n}$ untuk suatu bilangan asli p_i dan q_i dengan i adalah bilangan asli maka x^i juga akan berbentuk $p_i + q_i\sqrt{n}$ untuk suatu bilangan asli i.

   Karena x ≠ 0 maka $\frac{x^{2009}-x}{x^3-x} = \frac{a}{b} = \frac{x^{2008}-1}{x^2-1}$

   $\frac{p_{2008}+q_{2008}\sqrt{n}-1}{p_2+q_2\sqrt{n}-1} = \frac{a}{b}$

   $b \cdot p_{2008} - a \cdot p_2 + a - b = (a \cdot q_2 - b \cdot q_{2008})\sqrt{n}$

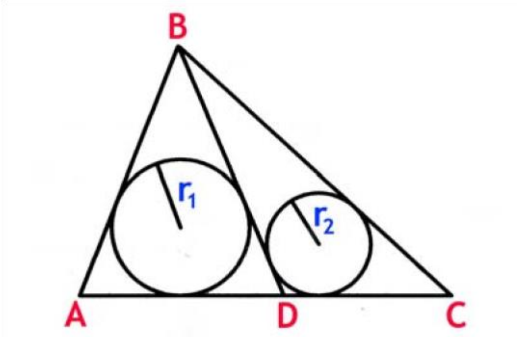
   Karena a, b, p_2, p_{2008}, q_2 dam q_{2008} adalah bilangan bulat maka n haruslah merupakan kuadrat dari suatu bilangan rasional.

   $n = \left(\frac{k}{m}\right)^2$ dengan k, m bilangan asli dan FPB(k, m) = 1

   Karena n bilangan asli maka haruslah m = 1 sehingga n merupakan kuadrat dari suatu bilangan asli.

$\therefore$ **Terbukti bahwa n merupakan kuadrat dari suatu bilangan asli.**

3.



Misalkan [ABC] menyatakan luas $\triangle$ABC, maka [ABC] = [ABD] + [BCD]

$$\frac{1}{2}r(AB + BC + AC) = \frac{1}{2}r_1(AB + BD + AD) + \frac{1}{2}r_2(BC + BD + DC)$$

Pada $\triangle$ABD dan $\triangle$BCD berturut-turut berlaku BD < AD + AB dan BD < BC + DC sehingga

$r(AB + BC + AC) = r_1(AB + BD + AD) + r_2(BC + BD + DC) < r_1(AB + BC + DC + AD) + r_2(BC + AD + AB + DC)$

Karena AD + DC = AC maka

$r(AB + BC + AC) < r_1(AB + BC + AC) + r_2(BC + AC + AB)$

$r < r_1 + r_2$

$\therefore$ **Terbukti bahwa $r_1 + r_2 > r$**

4. $7p = 8x^2 - 1$ .... (1)

$p^2 = 2y^2 - 1$ .... (2)

Jika (x, y) = (x_1, y_1) memenuhi persamaan maka ($-x_1$, $-y_1$) pasti memenuhi sehingga tanpa mengurangi keumuman dapat dimisalkan x, y ≥ 0.

$p^2 - y^2 = y^2 - 1$.

Karena y = 0 dan y = 1 tidak memenuhi persamaan maka $y^2 > 1$ sehingga p > y .... (3)

Jika p = 2 maka 15 = $8x^2$ yang tidak akan terpenuhi untuk x bilangan bulat.

Jika p = 3 maka 22 = $8x^2$ yang tidak akan terpenuhi untuk x bilangan bulat.

Jika p = 5 maka 36 = $8x^2$ yang tidak akan terpenuhi untuk x bilangan bulat.

Jika p = 7 maka 50 = $8x^2$ yang tidak akan terpenuhi untuk x bilangan bulat.

Jadi, p > 7.

Kurangkan persamaan (2) dengan (1) didapat

$p(p - 7) = 2(y + 2x)(y - 2x)$

Karena $p > 7$ maka $y > 2x$ sehingga $p > y > 2x$ .... (4)

Karena $p \neq 2$ maka $p \mid (y + 2x)(y - 2x)$

Karena $p > y \geq y - 2x$ dan p bilangan prima maka $p \mid y + 2x$

Karena $p \leq y + 2x < p + p = 2p$ maka hanya terpenuhi jika $p = y + 2x$

Maka $p^2 = 2(p - 2x)^2 - 1$ sehingga $p^2 - 8xp + 8x^2 - 1 = 0$

Subtitusikan persamaan (1) sehingga $p^2 - 8xp + 7p = 0$

Karena $p \neq 0$ maka $p = 8x - 7$ .... (5)

Subtitusikan persamaan (5) ke persamaan (1)

$7(8x - 7) = 8x^2 - 1$

$(x - 6)(x - 1) = 0$

- Jika $x = 1$ dan sesuai persamaan (5) maka $p = 1$ (tidak memenuhi bahwa p bilangan prima)
- Jika $x = 6$ maka $p = 41$ dan $y = 29$ yang memenuhi bahwa p bilangan prima dan y bulat

$\therefore$ Semua nilai p yang memenuhi adalah $\mathbf{p = 41}$.

5. Misalkan $A \subset H$ dan $B \subset H$ yang memenuhi $A \cap B = \{\ \}$ serta A dan B keduanya bukan himpunan kosong.

   $H = \{0, 1, 2, 4, 8\}$ merupakan *counter example* dari soal.

   Bagaimana pun disusun $A \subset H$ dan $B \subset H$ serta $A \cap B = \{\ \}$ tidak akan didapat jika semua anggota A dijumlahkan hasilnya akan sama dengan jumlah semua anggota B.

   $\therefore$ Tidak dapat dibuktikan ada dua himpunan bagian dari H, yang tidak kosong dan saling asing, yang jika semua anggotanya dijumlahkan hasilnya sama.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2009

TINGKAT NASIONAL

HARI PERTAMA

WAKTU : 4 JAM

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Nasional Tahun 2009

1. Tentukan banyaknya bilangan $n \in \{1, 2, 3, \cdots, 2009\}$ sedemikian sehingga

$$4n^6 + n^3 + 5$$

habis dibagi 7.

2. Misalkan untuk setiap bilangan real x didefinisikan $\lfloor x \rfloor$ sebagai bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan x. Diberikan $a_1, a_2, a_3, \cdots$ suatu barisan bilangan asli yang memenuhi $a_1 > 1$ dan

$$\left\lfloor \frac{a_1+1}{a_2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a_2+1}{a_3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a_3+1}{a_4} \right\rfloor = \cdots$$

Buktikan bahwa

$$\left\lfloor \frac{a_n+1}{a_{n+1}} \right\rfloor \leq 1$$

untuk setiap bilangan asli n.

3. Pada segitiga ABC, titik-titik D, E dan F berturut-turut terletak pada segmen BC, CA dan AB. Nyatakan P sebagai titik perpotongan AD dan EF. Tunjukkan bahwa

$$\frac{AB}{AF} xDC + \frac{AC}{AE} xDB = \frac{AD}{AP} xBC$$

4. Di suatu pulau terdapat 7 kota dan ada jaringan kereta api yang melalui kota-kota tersebut. Setiap segmen rel menghubungkan tepat 2 kota, dan diketahui bahwa setiap kota memiliki paling sedikit 3 segmen ke kota lain. Buktikan bahwa terdapat rute perjalanan kereta api yang mengunjungi 4 kota yang berbeda masing-masing sekali dan kembali ke kota asalnya. (Contoh : rute A − B − C − D − A)

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2009

TINGKAT NASIONAL

HARI KEDUA

WAKTU : 4 JAM

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Nasional Tahun 2009

5. Di dalam suatu laci terdapat paling banyak 2009 bola yang terdiri dari bola putih dan biru yang tercampur secara acak. Jika dua bola diambil secara acak tanpa pengembalian, maka diketahui probabilitas bahwa terambil keduanya bola warna putih atau keduanya bola warna biru adalah $\frac{1}{2}$. Berapa banyak maksimum bola putih yang mungkin berada dalam laci sedemikian sehingga pernyataan tentang probabilitas tersebut tetap terpenuhi ?
6. Tentukan nilai terkecil yang mungkin dari fungsi

$$f(x) = x^{2008} - 2x^{2007} + 3x^{2006} - 4x^{2005} + 5x^{2004} + \cdots - 2006x^3 + 2007x^2 - 2008x + 2009$$

untuk sebarang bilangan real x.
7. Suatu pasangan bilangan bulat (m, n) dikatakan *baik* bila

$$m \mid n^2 + n \text{ dan } n \mid m^2 + m$$

Diberikan sebarang dua bilangan asli a, b > 1 yang relatif prima, buktikan bahwa terdapat pasangan baik (m, n) dengan $a \mid m$ dan $b \mid n$ tetapi a tidak membagi n dan b tidak membagi m.
8. Diberikan segitiga ABC lancip. Lingkaran dalam segitiga ABC menyinggung BC, CA, dan AB berturut-turut di D, E, dan F. Garis bagi sudut A memotong DE dan DF berturut-turut di K dan L.
Misalkan AA_1 adalah garis tinggi dan M titik tengah BC.
   a. Buktikan bahwa BK dan CL tegak lurus garis bagi sudut BAC
   b. Tunjukkan bahwa A_1KML adalah segiempat talibusur

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2009

TINGKAT NASIONAL

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Nasional Tahun 2009

1. $4n^6 + n^3 + 5$
   - Jika $n \equiv 0 \pmod 7$ maka $4n^6 + n^3 + 5 \equiv 4(0)^6 + (0)^3 + 5 \pmod 7 \equiv 5 \pmod 7$
   - Jika $n \equiv 1 \pmod 7$ maka $4n^6 + n^3 + 5 \equiv 4(1)^6 + (1)^3 + 5 \pmod 7 \equiv 3 \pmod 7$
   - Jika $n \equiv 2 \pmod 7$ maka $4n^6 + n^3 + 5 \equiv 4(2)^6 + (2)^3 + 5 \pmod 7 \equiv 3 \pmod 7$
   - Jika $n \equiv 3 \pmod 7$ maka $4n^6 + n^3 + 5 \equiv 4(3)^6 + (3)^3 + 5 \pmod 7 \equiv 1 \pmod 7$
   - Jika $n \equiv -3 \pmod 7$ maka $4n^6 + n^3 + 5 \equiv 4(-3)^6 + (-3)^3 + 5 \pmod 7 \equiv 3 \pmod 7$
   - Jika $n \equiv -2 \pmod 7$ maka $4n^6 + n^3 + 5 \equiv 4(-2)^6 + (-2)^3 + 5 \pmod 7 \equiv 1 \pmod 7$
   - Jika $n \equiv -1 \pmod 7$ maka $4n^6 + n^3 + 5 \equiv 4(-1)^6 + (-1)^3 + 5 \pmod 7 \equiv 1 \pmod 7$

   Maka tidak ada nilai n asli yang akan menyebabkan $4n^6 + n^3 + 5$ habis dibagi 7.

   ∴ Banyaknya bilangan n yang memenuhi ada **0**.

2. Misalkan $\left\lfloor \frac{a_1+1}{a_2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a_2+1}{a_3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a_3+1}{a_4} \right\rfloor = \cdots = p$ untuk suatu bilangan bulat tak negatif p.

   Misalkan juga terdapat $a_k = 1$ untuk suatu bilangan asli k. Maka berdasarkan pengertian fungsi tangga maka

   $\left\lfloor \frac{a_{k-1}+1}{a_k} \right\rfloor = a_{k-1} + 1 = p \geq 2$ sebab a_{k-1} merupakan bilangan asli.

   $\left\lfloor \frac{a_k+1}{a_{k+1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2}{a_{k+1}} \right\rfloor = p \leq 2$ sebab a_{k+1} merupakan bilangan asli.

   Akibatnya haruslah $a_{k-1} = a_{k+1} = a_k = 1$. Jadi, haruslah $a_1 = 1$. Kontradiksi.

   Jadi, $a_n \neq 1$ untuk setiap bilangan asli n.

   Berdasarkan pengertian fungsi tangga maka

   $\left\lfloor \frac{a_{m-1}+1}{a_m} \right\rfloor \geq p$ untuk suatu bilangan asli m > 1 sehingga $\frac{a_{m-1}}{a_m} \geq p - \frac{1}{a_m}$. Dengan cara yang sama didapat $\frac{a_{m-2}}{a_{m-1}} \geq p - \frac{1}{a_{m-1}}$. Demikian seterusnya.

   Misalkan k < m untuk suatu bilangan asli k. Maka

   $\frac{a_k}{a_{k+1}} \cdot \frac{a_{k+1}}{a_{k+2}} \cdots \frac{a_{m-1}}{a_m} = \frac{a_k}{a_m} \geq \left(p - \frac{1}{a_{k+1}}\right)\left(p - \frac{1}{a_{k+1}}\right) \cdots \left(p - \frac{1}{a_m}\right)$.

   Jika $p \geq 2$ maka $\frac{a_k}{a_m} > 1$ sehingga $a_k > a_m$ untuk setiap bilangan asli k, m dan k < m.

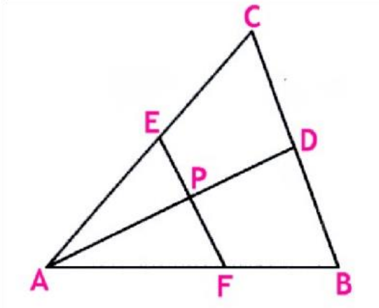
   Jadi, jika $p \geq 2$ maka $a_1, a_2, a_3, \cdots$ merupakan barisan turun.

   Karena a_1 memiliki suatu nilai tertentu maka akan terdapat $a_n < 1$ untuk suatu bilangan asli n. Kontradiksi karena a_n merupakan bilangan asli. Jadi, haruslah $p \leq 1$.

   2, 3, 2, 3, 2, ⋯ adalah contoh barisan untuk p = 1 sedangkan 2, 4, 6, ⋯ adalah contoh barisan untuk p = 0.

   ∴ **Terbukti bahwa** $\left\lfloor \frac{a_n+1}{a_{n+1}} \right\rfloor \leq 1$.

3.



Alternatif 1 :

Misalkan [XYZ] menyatakan luas segitiga XYZ.

$\triangle$ACD dan $\triangle$ABC memiliki tinggi yang sama sehingga luas dapat dinyatakan sebagai perbandingan alas.

Maka $\frac{[ADC]}{[ABC]} = \frac{DC}{BC}$ .... (1).

$\triangle$ABD dan $\triangle$ABC juga memiliki tinggi yang sama sehingga $\frac{[ABD]}{[ABC]} = \frac{DB}{BC}$ .... (2).

Misalkan $\angle$DAC = α dan $\angle$BAD = β.

$\frac{[ADC]}{[APE]} = \frac{\frac{1}{2} AC \cdot AD \cdot \sin\alpha}{\frac{1}{2} \cdot AP \cdot AE \cdot \sin\alpha} = \frac{AC \cdot AD}{AP \cdot AE}$ .... (3)

$\frac{[ABD]}{[AFP]} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AD \cdot AB \cdot \sin\beta}{\frac{1}{2} \cdot AP \cdot AF \cdot \sin\beta} = \frac{AD \cdot AB}{AP \cdot AF}$ .... (4)

$\frac{AB}{AF} \cdot DC + \frac{AC}{AE} \cdot DB = \frac{AB}{AF} \cdot \frac{[ADC]}{[ABC]} \cdot BC + \frac{AC}{AE} \cdot \frac{[ABD]}{[ABC]} \cdot BC = \frac{AB}{AF} \cdot \frac{AD.AC}{AP.AE} \cdot \frac{[APE]}{[ABC]} BC + \frac{AC}{AE} \cdot \frac{AD.AB}{AP.AF} \cdot \frac{[AFP]}{[ABC]} \cdot BC$

Karena [AFE] = [APE] + [AFP] maka

$\frac{AB}{AF} \cdot$ DC + $\frac{AC}{AE} \cdot$ DB = $\frac{AB}{AF} \cdot \frac{AD.AC}{AP.AE} \cdot \frac{[AFE]}{[ABC]}$ BC

Karena $\frac{[AFE]}{[ABC]} = \frac{AF.AE}{AB.AC}$ maka

$\frac{AB}{AF} \cdot$ DC + $\frac{AC}{AE} \cdot$ DB = $\frac{AD}{AP} \cdot$ BC

Maka, $\frac{AB}{AF} \cdot$ DC + $\frac{AC}{AE} \cdot$ DB = $\frac{AD}{AP} \cdot$ BC (terbukti)

Alternatif 2 :

Tanpa mengurangi keumuman misalkan koordinat A(0, 0), B(a, 0) dan C(b, c) serta absis titik D, E dan F berturut-turut d, e dan f, maka koordinat F(f, 0).

Persamaan garis AC adalah y = $\frac{c}{b}$x sehingga koordinat E(e, $\frac{ce}{b}$).

Persamaan garis EF adalah $\frac{y-0}{\frac{ce}{b} - 0} = \frac{x-f}{e-f}$ yang setara dengan y = $\frac{cex-cef}{be-bf}$

Persamaan garis BC adalah $\frac{y-0}{c-0} = \frac{x-a}{b-a}$ yang setara dengan y = $-$c$\left(\frac{x-a}{a-b}\right)$.

Maka koordinat titik D(d, $c\left(\frac{a-d}{a-b}\right)$).

Persamaan garis AD adalah y = $\left(\frac{ac-cd}{ad-bd}\right)$x.

Titik P adalah perpotongan antara garis EF dan AD maka

$\frac{cex_p - cef}{be-bf} = \left(\frac{ac-cd}{ad-bd}\right)x_p$

$adex_P - bdex_P - adef + bdef = abex_P - bdex_P - abfx_P + bdfx_P$

$x_P = \frac{def(a-b)}{ade+abf-bdf-abe}$

Karena A, F dan B berada pada satu garis lurus maka $\frac{AB}{AF} = \frac{x_B - x_A}{x_F - x_A} = \frac{a}{f}$ ································ (1)

Karena A, E dan C berada pada satu garis lurus maka $\frac{AC}{AE} = \frac{x_C - x_A}{x_E - x_A} = \frac{b}{e}$ ································ (2)

Karena C, D dan B berada pada satu garis lurus maka $\frac{DC}{BC} = \frac{x_D - x_C}{x_B - x_C} = \frac{d-b}{a-b}$ ································ (3)

Karena C, D dan B berada pada satu garis lurus maka $\frac{DB}{BC} = \frac{x_B - x_D}{x_B - x_C} = \frac{a-d}{a-b}$ ································ (4)

Karena A, D dan P berada pada satu garis lurus maka $\frac{AD}{AP} = \frac{x_D - x_A}{x_P - x_A} = \frac{ade+abf-bdf-abe}{ef(a-b)}$ ··············· (5)

$\frac{AB}{AF} \cdot \frac{DC}{BC} + \frac{AC}{AE} \cdot \frac{DB}{BC} = \frac{a}{f} \cdot \frac{(d-b)}{(a-b)} + \frac{b}{e} \cdot \frac{(a-d)}{(a-b)} = \frac{ade+abf-bdf-abe}{ef(a-b)}$ ··························· (6)

Dari persamaan (5) dan (6) didapat

$\frac{AB}{AF} \cdot \frac{DC}{BC} + \frac{AC}{AE} \cdot \frac{DB}{BC} = \frac{AD}{AP}$

Maka, $\frac{AB}{AF} \cdot$ **DC** + $\frac{AC}{AE} \cdot$ **DB** = $\frac{AD}{AP} \cdot$ **BC** (terbukti)

4. Sebuah segmen rel menghubungkan dua kota. Maka jumlah total 'kota' yang muncul dari seluruh segmen haruslah genap. Jika masing-masing kota tepat terhubung dengan tiga kota lainnya maka banyaknya kota yang muncul adalah 3 x 7 = 21 yang ganjil. Maka akan ada sekurang-kurangnya 11 segmen dan ada satu kota yang terhubung dengan sekurang-kurangnya 4 kota.

   Tanpa mengurangi keumuman misalkan kota yang terhubung dengan sekurang-kurangnya 4 kota tersebut adalah kota A yang terhubung dengan kota B, C, D dan E. Karena sebuah kota terhubung dengan sekurang-kurangnya 3 kota lain maka kota F dan G masing-masing terhubung dengan sedikitnya salah satu dari B, C, D dan E. Akan ada 2 kasus :

   - Kota F atau G terhubung dengan sekurang-kurangnya 2 di antara B, C, D dan E misalkan B dan C, maka bukti selesai sebab akan terdapat rute A – B – F/G – C – A.
   - Kota F dan G masing-masing terhubung dengan salah satu di antara B, C, D dan E.
     Kota F dan G terhubung dengan salah satu di antara B, C, D dan E. Selain itu kota F juga harus terhubung dengan kota A dan G serta kota G juga harus terhubung dengan A.
     Tanpa mengurangi keumuman misalkan kota F terhubung dengan kota B.
     Maka akan terdapat rute A – B – F – G – A.

   ∴ **Terbukti bahwa terdapat rute perjalanan kereta api yang mengunjungi 4 kota yang berbeda masing-masing sekali dan kembali ke kota asalnya.**

5. $\frac{{}_xC_2 + {}_yC_2}{{}_{x+y}C_2} = \frac{1}{2}$

   $\frac{x(x-1)+y(y-1)}{(x+y)(x+y-1)} = \frac{1}{2}$

   $2x^2 - 2x + 2y^2 - 2y = x^2 + y^2 - x - y + 2xy$

   $(x - y)^2 = x + y \le 2009$

$x - y \le 44$ $x + y = (x - y)^2 \le 44^2 = 1936$

$2x \le 44 + 1936$

$x \le 990$

Jika $x = 990$ maka $y = 1936 - 990 = 946$.

Peluang = $\frac{{}_{990}C_2 + {}_{946}C_2}{{}_{1936}C_2} = \frac{990 \cdot 989 + 946 \cdot 945}{1936 \cdot 1935} = \frac{1}{2}$

∴ Jadi, x terbesar adalah **990**.

6. $f(x) = x^{2008} - 2x^{2007} + 3x^{2006} - 4x^{2005} + 5x^{2004} + \cdots - 2006x^3 + 2007x^2 - 2008x + 2009$

   $f(x) = x^{2006}(x - 1)^2 + 2x^{2004}(x - 1)^2 + 3x^{2002}(x - 1)^2 + \cdots + 1004(x - 1)^2 + 1005$

   Karena bilangan kuadrat tidak mungkin negatif maka f(x) akan minimal saat $x = 1$ f(x) minimal = 1005

   ∴ Jadi, nilai terkecil dari f(x) adalah **1005**.

7. Karena FPB(a, b) = 1 maka pasti ada pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi $ax + by = -1$.

   Misalkan $m = ax$ dan $n = by$. Jelas bahwa m dan n keduanya bilangan bulat.

   $n^2 + n = by(by + 1) = by(-ax) = -mn$ yang berarti habis dibagi m.

   $m^2 + m = ax(ax + 1) = ax(-by) = -mn$ yang berarti habis dibagi n.

   Jadi $m | n^2 + n$ dan $n | m^2 + m$

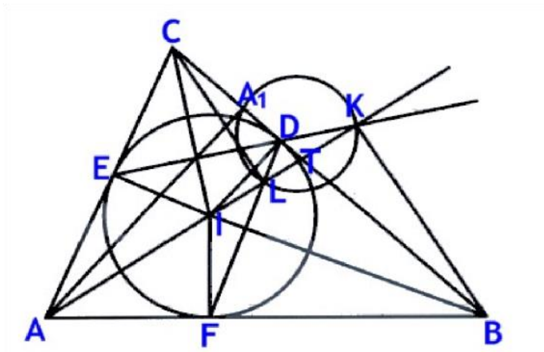
   Selain itu, dari $m = ax$ dan $n = by$ akan didapat $a | m$ dan $b | n$.

   Jika $a | n$ maka $a | y$. Dari $ax + by = -1$ akan didapat bahwa $a | 1$ sehingga $a = 1$ (kontradiksi).

   Jadi, a tidak membagi n. Dengan cara yang sama akan didapat bahwa b tidak membagi m.

   ∴ **Terbukti bahwa terdapat pasangan baik (m, n) dengan $a|m$ dan $b|n$ tetapi a tidak membagi n dan b tidak membagi m.**

8.



   a) $\angle LIC = 180^o - \angle AIC = 180^o - (180^o - \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}(180^o - (A + B)) = 90^o B$ .... (1)

   Karena $\triangle BDF$ sama kaki maka $\angle BDF = 90^o - \frac{1}{2}B$ .... (2)

   $\angle CDL = 180^o - \angle BDF = 180^o - (90^o - \frac{1}{2}B) = 90^o + \frac{1}{2}B$ .... (3)

   Karena $\angle LIC + \angle CDL = 180^o$ maka CDLI adalah segiempat talibusur.

   Karena CI adalah talibusur suatu lingkaran sedangkan titik D dan L terletak pada lingkaran tersebut maka $\angle CLI = \angle CDI = 90^o$.

   ∴ **Jadi, CL tegak lurus AK yang merupakan garis bagi sudut BAC** (terbukti).

$\angle$AEK = 180º − $\angle$CEK = 180º − (90º − $\frac{1}{2}$ (180º − (A + B)) = 180º − $\frac{1}{2}$(A + B)

$\angle$DKI = 180º − $\angle$AEK − $\angle$CAK = 180º − (180º − $\frac{1}{2}$ (A + B)) − $\frac{1}{2}$ A = $\frac{1}{2}$ B

Karena $\angle$DKI = $\angle$DBI maka titik-titik D, K, B dan I adalah segiempat talibusur.

Karena BI adalah talibusur suatu lingkaran sedangkan titik D dan K terletak pada lingkaran tersebut maka $\angle$BKI = $\angle$BDI = 90º.

∴ **Jadi, BK tegak lurus AK yang merupakan garis bagi sudut BAC** (terbukti).

b) Misalkan garis BC dan KL berpotongan di titik T.

Karena $\angle$CLT = $\angle$BKT = 90º dan $\angle$BTK = $\angle$CTL maka $\triangle$CLT dan $\triangle$BKT sebangun $\frac{BK}{CL} = \frac{BT}{CT} = \frac{TK}{LT}$

$\frac{c\sin\frac{1}{2}A}{b\sin\frac{1}{2}A} = \frac{a-CT}{CT} = \frac{TK}{AK-AL-TK}$

$\frac{c}{b} = \frac{a-CT}{CT} = \frac{TK}{c\cos\frac{1}{2}A-b\cos\frac{1}{2}A-TK}$ .... (3)

Dari persamaan (3) didapat

c · CT = ab − b · CT

CT = $\frac{ab}{b+c}$ .... (4)

Juga didapat

c(c − b) cos $\frac{1}{2}$ A – c · TK = b · TK

TK = $\frac{c(c-b)\cos\frac{1}{2}A}{b+c}$

LT = $\frac{b}{c}$ · TK .... (5)

Misalkan lingkaran luar $\triangle A_1LK$ memotong garis BC di titik N.

Karena $\angle A_1LT$ = $\angle$KNT dan $\angle$A1TL = $\angle$KTN maka $\triangle$KTN sebangun dengan $\triangle A_1TL$. Jadi,

A_1T · TN = LT · TK

(CT − CA_1) · TN = $\frac{b}{c} \cdot TK^2$

$\left(\frac{ab}{b+c} - b\cos C\right) \cdot TN = \frac{b}{c} \cdot \left(\frac{c^2(c-b)^2}{2(b+c)^2}(\cos C + 1)\right)$

Dengan menggunakan cos C = $\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ maka didapat

$TN = \frac{a(c-b)}{2(b+c)}$

CN = CT + TN = $\frac{ab}{b+c} + \frac{a(c-b)}{2(b+c)} = \frac{a}{2}$

Maka, N adalah pertengahan BC. Jadi, N = M.

Jadi, titik A_1, L, K dan M terletak pada satu lingkaran.

∴ **Terbukti bahwa A_1, L, M dan K siklik**.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2010

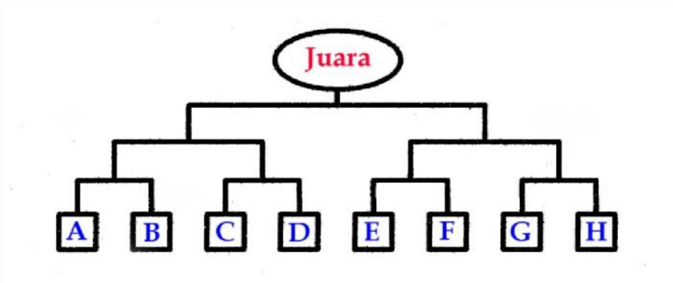
TINGKAT KABUPATEN/KOTA

WAKTU : 180 MENIT

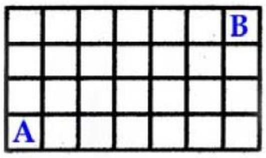
WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Kabupaten/Kota Tahun 2010

Soal :

1. Diketahui bahwa ada tepat 1 bilangan asli n sehingga $n^2 + n + 2010$ merupakan kuadrat sempurna. Bilangan asli n tersebut adalah ·······
2. Bilangan bulat yang memenuhi pertidaksamaan $x^4 \le 8x^2 - 16$ sebanyak ·····
3. Pasangan bilangan asli (x, y) yang memenuhi $2x + 5y = 2010$ sebanyak ······
4. Diberikan segitiga ABC, AB = AC. Jika titik P diantara A dan B sedemikian rupa sehingga AP = PC = CB, maka besarnya sudut A adalah ······
5. Nilai n terkecil sehingga bilangan
$$\underbrace{20102010\ldots2010}_{n\text{ buah }2010}$$
habis dibagi 99 adalah ·····
6. Perempat final Liga Champion 2010 diikuti 8 team A, B, C, D, E, F, G dan H yang bertemu seperti tampak dalam undian berikut


Setiap team mempunyai peluang $\frac{1}{2}$ untuk melaju ke babak berikutnya. Peluang kejadian A bertemu G di final dan pada akhirnya A juara adalah ······
7. Polinom $P(x) = x^3 - x^2 + x - 2$ mempunyai tiga pembuat nol yaitu a, b, dan c. Nilai dari $a^3 + b^3 + c^3$ adalah ········
8. Jika a dan b bilangan bulat sehingga $\sqrt{2010 + 2\sqrt{2009}}$ merupakan solusi kuadrat $x^2 + ax + b = 0$ maka nilai a + b adalah ·····
9. Banyaknya himpunan X yang memenuhi
$$\{1, 2, 3, \cdots, 1000\} \subseteq X \subseteq \{1, 2, 3, \cdots, 2010\}$$
adalah ····
10. Diketahui grid berukuran 4 x 8. Jika langkah yang dimungkinkan Kanan, Kiri, Atas, dan Bawah. Cara menuju B dari A dalam 8 langkah atau kurang ada sebanyak ··· (A adalah titik pada ujung kanan atas pada kotak paling kiri bawah, sedangkan B adalah titik pada ujung kiri bawah pada kotak paling kanan atas)



11. Diberikan segitiga ABC; AC : CB = 3 : 4. Garis bagi luar sudut C memotong perpanjangan BA di P (A terletak antara P dan B). Perbandingan PA : AB adalah ·····
12. Misalkan S menyatakan himpunan semua faktor positif dari 2010^2. Sebuah bilangan diambil secara acak dari S. Peluang bilangan yang terambil habis dibagi 2010 adalah ·····
13. Diketahui p adalah bilangan prima sehingga terdapat pasangan bilangan bulat positif (x, y) yang memenuhi $x^2 + xy = 2y^2 + 30p$. Banyaknya pasangan bilangan bulat positif (x, y) yang memenuhi ada sebanyak ······
14. Pada sebuah persegi panjang berukuran 25 x 20 akan dibuat bujursangkar sehingga menutupi seluruh bagian persegi panjang tersebut. Berapa banyak bujursangkar yang mungkin dapat dibuat ?
15. AB, BC dan CA memiliki panjang 7, 8, 9 berturut-turut. Jika D merupakan titik tinggi dari B, tentukan panjang AD.
16. Jika $-5x + 2000$ merupakan sisa pembagian suku banyak P(x) oleh $x^2 - x - 2$, maka sisa pembagian P(x) oleh x + 2 adalah ·····
17. Diketahui n adalah bilangan asli. Jika himpunan penyelesaian dari
$$\sqrt[n]{x^{x^2}} \le x^{\sqrt[n]{x^2}}$$
adalah $\{x \mid 0 < x \le \sqrt[5]{216}\}$, maka n = ······
18. Misalkan persegi 4 x 4 akan diberi warna hitam dan putih pada tiap kotaknya. Cara pewarnaan sedemikian sehingga warna hitam hanya diberikan pada 3 kotak dan sisanya warna putih sebanyak ······ (Pewarnaan dianggap sama jika didapat dari hasil rotasi yang sama terhadap persegi 4 x 4)
19. Nilai x yang memenuhi $0 \le x \le \pi$ dan
$$\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2^{2010}}\right)} = 2^{2010}\sqrt{2}\cos\left(\tfrac{x}{2}\right)\cos\left(\tfrac{x}{4}\right)\cdots\cos\left(\tfrac{x}{2^{2010}}\right)$$
adalah ····
20. Diketahui segitiga ABC siku-siku di A, dan pada masing-masing sisi dibuat setengah lingkaran ke arah keluar. Jika luas setengah lingkaran pada sisi AB dan AC adalah 396 dan 1100, berturutturut, maka luas setengah lingkaran pada sisi BC adalah ?

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2010

TINGKAT KABUPATEN/KOTA

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Kabupaten/Kota Tahun 2010

1. Misalkan $n^2 + n + 2010 = k^2$ untuk suatu bilangan asli k.

   $n^2 + n + 2010 - k^2 = 0$ yang merupakan persamaan kuadrat dalam n.

   Karena n bilangan bulat maka diskriminan persamaan tersebut harus merupakan bilangan kuadrat sempurna.

   $1^2 - 4(1)(2010 - k^2) = m^2$ untuk suatu bilangan asli m.

   $8039 = 4k^2 - m^2 = (2k + m)(2k - m)$

   Karena 8039 merupakan bilangan prima maka

   $2k + m = 8039$ dan $2k - m = 1$

   Maka $4k = 8040$ sehingga $k = 2010$ dan $m = 4019$

   Jadi $n^2 + n + 2010 = 2010^2$

   $(n - 2009)(n + 2010) = 0$

   ∴ Jadi, bilangan asli n yang memenuhi adalah n = **2009**.
2. $x^4 \le 8x^2 - 16$

   $(x^2 - 4)^2 \le 0$

   Karena bilangan kuadrat tidak mungkin negatif maka penyelesaian ketaksamaan tersebut adalah

   $x^2 - 4 = 0$

   Bilangan bulat x yang memenuhi adalah $x = 2$ atau $x = -2$.

   ∴ Jadi, bilangan bulat x yang memenuhi ada sebanyak **2**.
3. $2x + 5y = 2010$ untuk pasangan bilangan asli (x, y)

   Karena 5y dan 2010 habis dibagi 5 maka x habis dibagi 5 sehingga $x = 5a$ dengan $a \in N$.

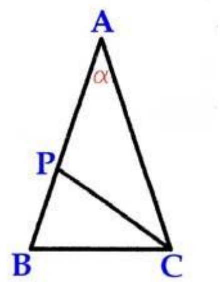
   Karena 2x dan 2010 habis dibagi 2 maka y habis dibagi 2 sehingga $y = 2b$ dengan $b \in N$.

   $10a + 10b = 2010$

   $a + b = 201$

   Karena $a, b \in N$ maka ada 200 pasangan (a, b) yang memenuhi sehingga ada 200 pasangan (x, y) yang memenuhi.

   ∴ Jadi, banyaknya pasangan bilangan asli (x, y) yang memenuhi ada sebanyak **200**.
4. Misalkan besarnya sudut A = α



Karena AP = PC maka ∠ACP = α sehingga ∠BPC = 2α.

Karena PC = CB maka ∠CBP = 2α sehingga ∠PCB = $180^\circ - 4\alpha$

Karena AB = AC maka ∠CBP = ∠ACB = ∠ACP + ∠PCB

$2\alpha = (\alpha) + (180^\circ - 4\alpha)$

$\alpha = 36^\circ$

∴ Jadi, besarnya sudut A adalah $\mathbf{36^\circ}$.

5. Misalkan M = $\underbrace{20102010 \ldots 2010}_{n \text{ buah } 2010}$ habis dibagi 99.

   Karena M habis dibagi 99 maka M habis dibagi 9 dan 11.

   Jumlah angka-angka M = 3n yang harus habis dibagi 9 sebab M habis dibagi 9.

   Selisih jumlah angka pada posisi genap dan posisi ganjil dari M sama dengan 3n yang harus habis dibagi 11 sebab M habis dibagi 11.

   Jadi, 3n habis dibagi 9 dan 11.

   Nilai terkecil n yang memenuhi adalah 33.

   ∴ Jadi, nilai terkecil n yang memenuhi adalah **33**.

6. Hanya ada 5 pertandingan yang berpengaruh sehingga tercapai hasil A bertemu G di final dan A menjadi juara yaitu A mengalahkan B, A mengalahkan pemenang C atau D, G mengalahkan H, G mengalahkan E atau F dan A mengalahkan G.

   Pada masing-masing pertandingan, peluang salah satu tim tertentu memenangkan pertandingan adalah $\frac{1}{2}$. Maka peluang A mengalahkan G di final adalah $\left(\frac{1}{2}\right)^5$.

   ∴ Jadi, peluang A mengalahkan G di final adalah $\frac{1}{32}$.

7. Polinom $P(x) = x^3 - x^2 + x - 2$ mempunyai tiga pembuat nol yaitu a, b dan c. Maka

   $a + b + c = 1$

   $ab + ac + bc = 1$

   $abc = 2$

   Alternatif 1 :

   $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc$

   $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(ab + ac + bc)(a + b + c) - 3abc$

   $1^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(1)(1) - 3(2)$

   $a^3 + b^3 + c^3 = 4$

   Alternatif 2 :

   Karena a, b, dan c adalah akar-akar persamaan $x^3 - x^2 + x - 2 = 0$ maka

   $a^3 - a^2 + a - 2 = 0$

   $b^3 - b^2 + b - 2 = 0$

   $c^3 - c^2 + c - 2 = 0$

   Jumlahkan ketiga persamaan didapat

   $a^3 + b^3 + c^3 - (a^2 + b^2 + c^2) + (a + b + c) - 6 = 0$

   $a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc) - (a + b + c) + 6$

$a^3 + b^3 + c^3 = 1^2 - 2(1) - 1 + 6$ $a^3 + b^3 + c^3 = 4$

∴ Jadi, nilai $a^3 + b^3 + c^3 =$ **4.**

8. $\sqrt{2010 + 2\sqrt{2009}} = \sqrt{2009} + 1$

Alternatif 1 :

$\sqrt{2009} + 1$ merupakan solusi persamaan $x^2 + ax + b = 0$, maka

$(\sqrt{2009} + 1)^2 + a(\sqrt{2009} + 1) + b = 0$

$2010 + 2\sqrt{2009} + a\sqrt{2009} + a + b = 0$

Karena a dan b bilangan bulat maka

$2\sqrt{2009} + a\sqrt{2009} = 0$ dan $2010 + a + b = 0$

Didapat $a = -2$ dan $b = -2008$

Maka $a + b = -2010$

Alternatif 2 :

$x^2 + ax + b = 0$

$x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$

Maka $\frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2} = \sqrt{2009} + 1$

$-a + \sqrt{a^2 - 4b} = 2\sqrt{2009} + 2$

Karena a dan b bilangan bulat maka $-a = 2$ sehingga $a = -2$

$a^2 - 4b = 4 \cdot 2009$

$1 - b = 2009$ sehingga $b = -2008$

Maka $a + b = -2 - 2008 = -2010$.

∴ Jadi, $a + b =$ **−2010**.

9. $\{1, 2, 3, \cdots, 1000\} \subseteq X \subseteq \{1, 2, 3, \cdots, 2010\}$

Jika H memiliki k elemen maka banyaknya himpunan bagian dari H adalah 2^k.

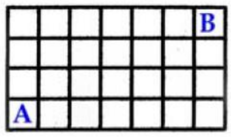
Elemen $1, 2, 3, \cdots, 1000$ haruslah merupakan elemen dari X. Persoalannya sama saja dengan

$X \subseteq \{1001, 1002, 1003, \cdots, 2010\}$

Banyaknya himpunan bagian dari X tersebut adalah 2^{1010}.

∴ Jadi, banyaknya himpunan X yang memenuhi adalah $\mathbf{2^{1010}}$.

10. Jalan terpendek dari A ke B adalah jika jalannya hanya Kanan dan Atas saja. Ukuran grid 4 x 7.



Banyaknya langkah terpendek adalah 7 sebab banyaknya langkah ke Kanan ada 5 dan ke Atas ada 2. Tidak ada jalan dengan banyaknya langkah tepat 8 sebab jika berjalan ke Kiri atau ke Bawah sekali, maka banyaknya langkah terpendek yang diperlukan adalah 9.

Jadi cukup dihitung banyaknya jalan dengan banyaknya langkah tepat 7.

Alternatif 1 :

Misalkan langkah ke Kanan diberi tanda 1 dan langkah ke Atas diberi tanda 2. Maka persoalannya sama dengan banyaknya susunan angka-angka 1111122, yaitu melangkah ke Kanan sebanyak 5 kali dan melangkah ke Atas sebanyak 2 kali.

Banyaknya susunan bilangan 1111122 sama dengan $\frac{7!}{5!\cdot 2!} = 21$.

Maka banyaknya cara melangkah dari A ke B sama dengan **21**.

Alternatif 2 :

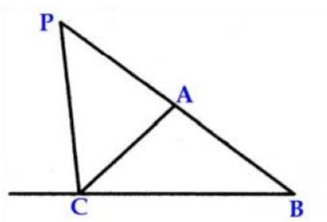
Banyaknya langkah ada 7. Dua di antaranya adalah ke Atas dan 5 ke Kanan. Maka persoalan ini adalah sama dengan menempatkan 5 obyek identik pada 7 tempat berbeda.

Maka banyaknya cara melangkah dari A ke B sama dengan ${}_7C_2$ = **21**.

∴ Jadi, banyaknya cara melangkah dari A ke B sama dengan **21**.

Catatan : Ada perbedaan antara kata-kata pada soal dan gambar pada soal. Berdasarkan katakata pada soal maka ukuran gridnya adalah 4 x 8 sedangkan pada gambar ukuran gridnya adalah 4 x 7. Kunci jawaban dari pusat mengacu pada gambar. Jika yang diacu adalah kata-kata pada soal maka jawabannya adalah ${}_8C_2 = 28$.

11.



PC adalah garis bagi △ABC sehingga berlaku

$\frac{CB}{AC} = \frac{PB}{PA}$

$\frac{4}{3} = \frac{PB}{PA}$

Maka dapat dimisalkan PB = 4k dan PA = 3k sehingga AB = k

Maka PA : AB = 3k : k = 3 : 1

∴ Jadi, perbandingan PA : AB adalah **3 : 1.**

12. $2010^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 67^2$.

$2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$

Faktor-faktor positif dari 2010^2 akan berbentuk $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 67^d$ dengan $0 \le a, b, c, d \le 2$ dengan a, b, c, d bilangan bulat.

Banyaknya faktor positif $2010^2 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

Agar faktor tersebut merupakan kelipatan 2010 maka $1 \le a \le 2$, $1 \le b \le 2$, $1 \le c \le 2$, $1 \le d \le 2$. Banyaknya faktor positif 2010^2 yang merupakan kelipatan $2010 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

∴ Jadi, peluang bilangan yang terambil habis dibagi 2010 adalah $\frac{16}{81}$

13. $x^2 + xy = 2y^2 + 30p$

$(x - y)(x + 2y) = 30p$

Jika x dan y keduanya tidak memiliki sisa yang sama jika dibagi 3 maka $x - y$ dan $x + 2y$ keduanya tidak ada yang habis dibagi 3. Padahal 30p habis dibagi 3. Jadi, x dan y haruslah keduanya memiliki sisa yang sama jika dibagi 3.

Akibatnya $x - y$ dan $x + 2y$ masing-masing habis dibagi 3 sehingga 30p harus habis dibagi 9.

Karena 30 habis dibagi 3 tetapi tidak habis dibagi 9 maka p harus habis dibagi 3. Karena p adalah bilangan prima maka $p = 3$.

$(x - y)(x + 2y) = 90$

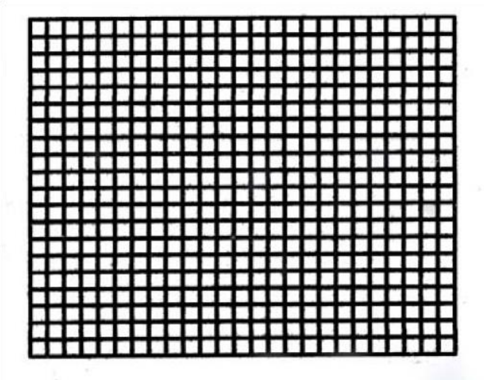
Karena $x + 2y \geq x - y$ maka akan ada 2 kasus.

- $x + 2y = 30$ dan $x - y = 3$
  Didapat $x = 12$ dan $y = 9$
- $x + 2y = 15$ dan $x - y = 6$
  Didapat $x = 9$ dan $y = 3$

Maka pasangan bilangan bulat positif (x, y) yang memenuhi adalah (12, 9) dan (9, 3).

$\therefore$ Jadi, banyaknya pasangan bilangan bulat positif (x, y) yang memenuhi ada sebanyak **2.**

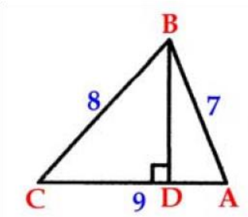
14. Perhatikan gambar.



Banyaknya persegi dengan ukuran 1 x 1 ada sebanyak 25 x 20 = 500
Banyaknya persegi dengan ukuran 2 x 2 ada sebanyak 24 x 19 = 456
Banyaknya persegi dengan ukuran 3 x 3 ada sebanyak 23 x 18 = 414
$\vdots$
Banyaknya persegi dengan ukuran 20 x 20 ada sebanyak 6 x 1 = 6
Banyaknya semua persegi yang ada = $500 + 456 + 414 + \cdots + 6 = 3920$.

$\therefore$ Jadi, banyaknya semua persegi yang ada = **3920**.

15. Perhatikan gambar.



Alternatif 1 :

s = $\frac{1}{2}$(a + b + c) = 12

Dengan rumus Heron didapat

[ABC] = $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 12\sqrt{5}$

$\frac{1}{2}$ · AC · BD = $12\sqrt{5}$

9 · BD = $24\sqrt{5}$ sehingga BD = $\frac{8}{3}\sqrt{5}$

$AD^2 = AB^2 - BD^2 = 49 - \frac{320}{9} = \frac{121}{9}$

AD = $\frac{11}{3}$

Alternatif 2 :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$8^2 = 9^2 + 7^2 - 2 \cdot 9 \cdot 7 \cos A$

cos A = $\frac{11}{21}$

AD = AB cos A = 7 · $\frac{11}{21}$

AD = $\frac{11}{3}$

∴ Jadi, panjang AD = $\frac{11}{3}$

16. P(x) = Q(x) · (x + 2)(x − 1) − 5x + 2000

    P(−2) = 0 − 5(−2) + 2000 = 2010

    P(−2) menyatakan sisa jika P(x) dibagi x + 2.

    ∴ Jadi, sisa jika P(x) dibagi x + 2 adalah **2010**.

    Catatan : Soal aslinya adalah P(x) dibagi $x^2 - x - 2$ bersisa −5x + 2000, tetapi Penulis berkeyakinan seharusnya adalah P(x) dibagi $x^2 + x - 2$ bersisa −5x + 2000.

17. Penyelesaian $\sqrt[n]{x^{x^2}} \le x^{\sqrt[n]{x^2}}$ dipenuhi oleh {x|0 < x ≤ $\sqrt[5]{216}$ } untuk suatu bilangan asli n.

    $x^{\frac{x^2}{n}} \le x^{x^{\frac{2}{n}}}$

    - Jika x ≥ 1 maka

      $\frac{x^2}{n} \le x^{\frac{2}{n}}$

      $x \le n^{\frac{n}{2n-2}}$

    - Jika 0 < x < 1 maka

      $\frac{x^2}{n} \ge x^{\frac{2}{n}}$

      x ≥ $n^{\frac{n}{2n-2}}$

      Karena n bilangan asli maka $n^{\frac{n}{2n-2}}$ ≥ 1.

    - Jika x < 0 maka karena $\frac{x}{n}^2$ dan $x^{\frac{2}{n}}$ tidak dapat dipastikan merupakan bilangan rasional maka tidak ada definisi jika x < 0.

    Maka penyelesaian ketaksamaan tersebut adalah 1 ≤ x ≤ $n^{\frac{n}{2n-2}}$

Karena penyelesaian ketaksamaan tersebut adalah 0 < x $\sqrt[5]{216} = 6^{\frac{3}{5}}$ maka

n = 6^k dan $\frac{n}{2n-2} = \frac{3}{5k}$ untuk suatu bilangan asli k.

$6^k \cdot 5k = 6 \cdot 6^k - 6$

$6^{1-k} = 6 - 5k$

Jika k > 1 maka ruas kiri merupakan pecahan sedangkan ruas kanan merupakan bilangan bulat sehingga tidak akan tercapai kesamaan.

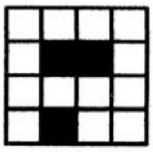
Jika k = 1 maka 1 = 6 − 5(1) yang memenuhi persamaan.

Jadi, n = 6^1 = 6

∴ Jadi, nilai bilangan asli n yang memenuhi adalah **n = 6**.

Catatan : Terbukti bahwa dalam batas 0 < x < 1 tidak memenuhi ketaksamaan. Maka pada soal, himpunan penyelesaian ketaksamaan tersebut seharusnya $\{x | 1 \le x \le \sqrt[5]{216}\}$

18. Perhatikan gambar. Rotasi yang dimaksud adalah 90°, 180° dan 270° sehingga jika sebuah petak berwarna hitam dirotasi akan timbul 3 petak lain yang berbeda dengan petak semula. Jadi, jika 3 petak berwarna hitam dirotasikan maka tidak akan ada hasilnya yang menempati ketiga petak semula.



Persoalan ini sama saja dengan banyaknya memilih 3 petak dari 16 petak yang ada = ${}_{16}C_3$ lalu hasilnya dapat dibagi ke dalam ${}_{16}C_4$: 4 kelompok dengan masing-masing kelompok merupakan rotasi dari petak-petak lainnya.

Maka banyaknya cara pewarnaan = $\frac{{}_{16}C_3}{4}$ = 140.

∴ Jadi, banyaknya cara pewarnaan = **140**.

19. sin α cos $\alpha = \frac{1}{s} \sin 2\alpha$

$$\frac{1}{\sin\left(\frac{x}{2^{2010}}\right)} = 2^{2010}\sqrt{2}\cos\left(\tfrac{x}{2}\right)\cos\left(\tfrac{x}{4}\right)\cdots\cos\left(\tfrac{x}{2^{2010}}\right)$$

$$1 = 2^{2010}\sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{4}\right)\cdots\cos\left(\frac{x}{2^{2010}}\right)\sin\left(\frac{x}{2^{2010}}\right)$$

$$1 = 2^{2009}\sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{4}\right)\cdots\sin\left(\frac{x}{2^{2009}}\right)$$

$$1 = 2^{2008}\sqrt{2} \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{4}\right)\cdots\sin\left(\frac{x}{2^{2008}}\right)$$

Sehingga didapat

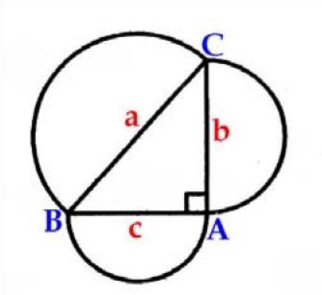
1 = $\sqrt{2}$ sin x

sin x = sin $\frac{\pi}{4}$

Maka x = $\frac{\pi}{4}$ atau x = $\frac{3\pi}{4}$

∴ Jadi, nilai x yang memenuhi adalah **x = $\frac{\pi}{4}$ atau x = $\frac{3\pi}{4}$**

20. Perhatikan gambar.



Luas setengah lingkaran AB = $\frac{1}{8}\pi c^2$ = 396.

Luas setengah lingkaran AC = $\frac{1}{8}\pi b^2$ = 1100.

Luas setengah lingkaran BC = $\frac{1}{8}\pi a^2 = \frac{1}{8}\pi(b^2 + c^2)$ = 1100 + 396 = 1496.

∴ Jadi, luas setengah lingkaran pada sisi BC sama dengan **1496**.

Catatan : Kunci dari pusat terhadap persoalan ini adalah 704 yang menurut Penulis, kesalahannya ada pada segitiga ABC siku-siku di A yang mungkin seharusnya di B atau C.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2010

TINGKAT PROVINSI

WAKTU : 210 MENIT

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2010

BAGIAN PERTAMA

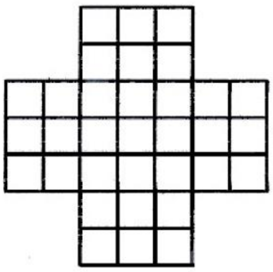
1. Nilai
$$\sum_{j=0}^{n}\left(\binom{n}{j}\left(\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}8^i\right)\right)=\cdots$$
2. Pada segitiga ABC dimisalkan a, b, dan c berturut-turut merupakan panjang sisi BC, CA, dan AB. Jika.
$$\frac{2a}{\tan A}=\frac{b}{\tan B}$$
Maka nilai $\frac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\cos^2 A+\cos^2 B}$ adalah ⋯⋯
3. Diberikan polinomial $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ dengan a, b, c, dan d konstanta. Jika P(1) = 10, P(2) = 20, dan P(3) = 30, maka nilai
$$\frac{P(12)+P(-8)}{10}=\cdots$$
4. Misalkan S = {1, 2, 3, 4, 5}. Banyaknya fungsi $f : S \to S$ yang memenuhi $f(f(x)) = x$ untuk setiap $x \in S$ adalah ⋯⋯⋯
5. Jika a, b, dan c menyatakan panjang sisi-sisi suatu segitiga yang memenuhi $(a + b + c)(a + b - c) = 3ab$, maka besar sudut yang menghadapi sisi dengan panjang c adalah ⋯⋯⋯
6. Bilangan enam digit $\overline{abcdef}$ dengan $a > b > c \geq d > e > f$ ada sebanyak ⋯⋯⋯
7. Bilangan prima p sehingga $p^2 + 7^3$ merupakan bilangan kubik sebanyak ⋯⋯
8. Diberikan segitiga ABC siku-siku di C, AC = 3, dan BC = 4. Segitiga ABD siku-siku di A, AD = 12 dan titik-titik C dan D letaknya berlawanan terhadap sisi AB. Garis sejajar AC melalui D memotong perpanjangan CB di E. Jika
$$\frac{DE}{DB}=\frac{m}{n}$$
dengan m dan n bilangan bulat positif yang relatif prima, maka m + n = ⋯⋯
9. Pada suatu lingkaran terdapat 12 titik yang berbeda. Dengan menggunakan 12 titik tersebut akan dibuat 6 tali busur yang tidak berpotongan. Banyaknya cara ada sebanyak ⋯⋯
10. Banyaknya anggota himpunan
$$S = \{\gcd(n^3 + 1, n^2 + 3n + 9) \mid n \in \mathbb{Z}\}$$
adalah ⋯⋯

11. Persamaan kuadrat $x^2 - px - 2p = 0$ mempunyai dua akar real α dan β. Jika $\alpha^3 + \beta^3 = 16$, maka hasil tambah semua nilai p yang memenuhi adalah ⋯⋯
12. Pada suatu bidang terdapat n titik yang berkoordinat pasangan bilangan bulat. Nilai n terkecil agar terdapat dua titik yang titik tengahnya juga berkoordinat pasangan bilangan bulat adalah …
13. Untuk sebarang bilangan real x didefinisikan $\lfloor x \rfloor$ sebagai bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan dengan x. Bilangan asli n sehingga persamaan $x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor + \frac{1}{x}\lfloor x \rfloor = \frac{n}{n+1}$ mempunyai tepat 2010 solusi real positif adalah ⋯⋯
14. Dua lingkaran (tidak sama besar) bersinggungan di luar. Titik A dan A_1 terletak pada lingkaran kecil; sedangkan B dan B_1 pada lingkaran besar. Garis PAB dan PA_1B_1, merupakan garis singgung persekutuan dari kedua lingkaran tersebut. Jika PA = AB = 4, maka luas lingkaran kecil adalah ⋯⋯
15. Dua puluh tujuh siswa pada suatu kelas akan dibuat menjadi enam kelompok diskusi yang masing-masing terdiri dari empat atau lima siswa. Banyaknya cara adalah ⋯⋯
16. Seseorang menulis surat berantai kepada 6 orang. Penerima surat ini diperintahkan untuk mengirim surat kepada 6 orang lainnya. Semua penerima surat membaca isi surat lalu beberapa orang melaksanakan perintah yang tertulis dalam surat, sisanya tidak melanjutkan surat berantai ini. Jika terdapat 366 orang yang tidak melanjutkan surat berantai ini, maka banyaknya orang yang berada dalam sistem surat berantai ini adalah ⋯⋯
17. Jumlah suku konstan dari $\left(x^5 - \frac{2}{x^3}\right)^8$ adalah ⋯⋯
18. Banyak bilangan bulat positif n < 100, sehingga persamaan
$$\frac{3xy-1}{x+y} = n$$
mempunyai solusi pasangan bilangan bulat (x, y) adalah ⋯⋯
19. Diketahui x, y, dan z adalah bilangan-bilangan real yang memenuhi sistem persamaan
$$x + y + Z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$$
$$xyz = 1$$
Nilai terkecil $|x + y + z|$ adalah ⋯⋯
20. Segitiga ABC memiliki panjang sisi BC = 5, AC = 12, dan AB = 13. Titik D pada AB dan titik E pada AC. Jika DE membagi segitiga ABC menjadi dua bagian dengan luas yang sama, maka panjang minimum DE adalah ⋯⋯

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2010

BAGIAN KEDUA

1. Diberikan segitiga ABC. Andaikan P dan P_1 titik-titik pada BC, Q pada CA, dan R pada AB, sedemikian rupa sehingga
$$\frac{AR}{RB} = \frac{BP}{PC} = \frac{CQ}{QA} = \frac{CP_1}{P_1B}$$
Misalkan G titik berat segitiga ABC dan K = $AP_1 \cap RQ$. Buktikan, bahwa titik-titik P, G, dan K kolinier (terletak pada satu garis)
2. Diketahui k adalah bilangan bulat positif terbesar, sehingga dapat ditemukan bilangan bulat positif n, bilangan prima (tidak harus berbeda) $q_1, q_2, q_3, \cdots, q_k$, dan bilangan prima berbeda $p_1, p_2, p_3, \cdots, p_k$ yang memenuhi
$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_k} = \frac{7 + nq_1q_2\cdots q_k}{2010}$$
Tentukan banyaknya n yang memenuhi.
3. Tentukan nilai k dan d sehingga tidak ada pasangan bilang real (x, y), yang memenuhi sistem persamaan
$$x^3 + y^3 = 2$$
$$y = kx + d$$
4. Diketahui n adalah bilangan asli kelipatan 2010. Tunjukan, bahwa persamaan
$$x + 2y + 3z = 2n$$
mempunyai tepat $1 + \frac{n}{2} + \frac{n^2}{12}$ pasangan solusi (x, y, z) dengan x, y, dan z merupakan bilangan bulat tak negatif.
5. Diketahui suatu papan catur seperti pada gambar. Dapatkah suatu biji catur kuda berangkat dari suatu petak melewati setiap petak yang lain hanya satu kali dan kembali ke tempat semula ? Jelaskan jawan anda !



Penjelasan : Langkah catur kuda berbentuk L, yaitu dari kotak asal :
(a) 2(dua) kotak ke kanan/kiri dan 1(satu) kotak ke depan/belakang; atau
(b) 2(dua) kotak ke depan/belakang dan 1 (satu) kotak ke kanan/kiri.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2010

TINGKAT PROVINSI

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika Tingkat Provinsi Tahun 2010

BAGIAN PERTAMA

1. $(x+1)^n = \binom{n}{0}x^0 + \binom{n}{1}x^1 + \binom{n}{2}x^2 + \cdots \binom{n}{n}x^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i$. Maka

   $\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}8^i = (8+1)^j = 9^j$

   $\sum_{j=0}^{n}\left(\binom{n}{j}\left(\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}8^i\right)\right) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}9^j = (9+1)^n = 10^n$

   $\sum_{j=0}^{n}\left(\binom{n}{j}\left(\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}8^i\right)\right) = 10^n$

   $\therefore$ Jadi, $\sum_{j=0}^{n}\left(\binom{n}{j}\left(\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}8^i\right)\right) = 10^n$.

2. $\frac{2a}{\tan A} = \frac{b}{\tan B}$ .... (1)

   Dalil sinus

   $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ .... (2)

   Bandingkan persamaan (1) dengan (2) didapat

   2 cos A = cos B

   4 $\cos^2$A = $\cos^2$B ················ (3)

   $\frac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\cos^2 A+\cos^2 B} = \frac{1-\cos^2 A-1+\cos^2 B}{\cos^2 A+\cos^2 B} = \frac{4\cos^2 A-\cos^2 A}{\cos^2 A+4\cos^2 A}$

   $\frac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\cos^2 A+\cos^2 B} = \frac{3}{5}$

   $\therefore$ Nilai $\frac{\sin^2 A-\sin^2 B}{\cos^2 A+\cos^2 B}$ adalah $\frac{3}{5}$

3. P(x) = $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$

   P(1) = 10, P(2) = 20, P(3) = 30

   Misalkan Q(x) = P(x) − 10x

   Karena P(1) = 10, P(2) = 20, P(3) = 30 maka Q(1) = Q(2) = Q(3) = 0

   Q(x) = P(x) − 10x = $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 10x + d$ yang juga merupakan polinomial dengan derajat 4 serta 1, 2, dan 3 merupakan akar-akar Q(x) = 0

   Jadi, Q(x) = (x − 1)(x − 2)(x − 3)(x − k)

   P(x) = Q(x) + 10x

   P(12) = (12 − 1)(12 − 2)(12 − 3)(12 − k) + 120 = 990(12 − k) + 120

   P(−8) = (−8 − 1)(−8 − 2)(−8 − 3)(−8 − k) − 80 = 990(8 + k) − 80

   P(12) + P(−8) = (990(12 − k) + 120) + (990(8 + k) − 80) = 990 · 20 + 40

   $\frac{p(12)+P(-8)}{10}$ = 99 · 20 + 4 = 1984

$\therefore \frac{P(12)+P(-8)}{10}$ = **1984.**

4. Ada 2 hal berkenan dengan pemetaan S → S yang memenuhi f(f(x)) = x, yaitu
   - Hal 1, pemetaan f(y) = y untuk y ∈ {1, 2, 3, 4, 5} akan menyebabkan f(f(y)) = y
   - Hal 2, terdapat sepasang pemetaan f(a) = b dan f(b) = a untuk a, b ∈ {1, 2, 3, 4, 5} yang akan menyebabkan f(f(a)) = a dan f(f(b)) = b.

   Pada hal 2 dibutuhkan sepasang pemetaan sehingga hal tersebut akan menyebabkan 3 kasus :

   a. Kasus 1, tidak ada pemetaan pada hal 2 dan terdapat 5 pemetaan pada hal 1
      Banyaknya fungsi yang memenuhi = ${}_5C_0 \cdot {}_5C_5 = 1$
      Contoh fungsi yang memenuhi : f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3, f(4) = 4, f(5) = 5.

   b. Kasus 2, ada sepasang pemetaan pada hal 2 dan terdapat 3 pemetaan pada hal 1
      Banyaknya fungsi yang memenuhi = ${}_5C_2 \cdot {}_3C_3 = 10$
      Contoh fungsi yang memenuhi : f(1) = 2, f(2) = 1, f(3) = 3, f(4) = 4, f(5) = 5.

   c. Kasus 3, ada 2 pasang pemetaan pada hal 2 dan terdapat 1 pemetaan pada hal 1
      Banyaknya fungsi yang memenuhi = ${}_5C_2 \cdot {}_3C_2 \cdot {}_1C_1 = 10 \cdot 3 \cdot 1 = 30$.
      Perhitungan di atas memperhitungkan x_1 dan x_2 dipilih pada pemilihan pertama dan x_3 dan x_4 dipilih pada pemilihan kedua dihitung berbeda jika x_3 dan x_4 dipilih pada pemilihan pertama dan x_1 dan x_2 dipilih pada pemilihan kedua. Padahal kedua hal tersebut sama. Maka perhitungan tersebut harus dibagi 2.
      Banyaknya fungsi yang memenuhi = $\frac{1}{2} \cdot {}_5C_2 \cdot {}_3C_2 \cdot {}_1C_1 = 15$.
      Contoh fungsi yang memenuhi : f(1) = 2, f(2) = 1, f(3) = 4, f(4) = 3, f(5) = 5.

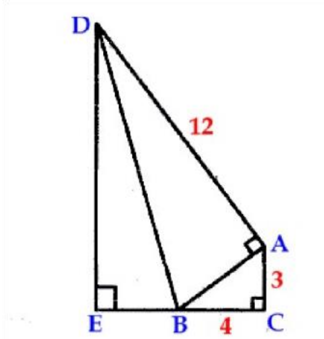
   Total banyaknya fungsi yang memenuhi = 1 + 10 + 15 = 26.
   ∴ Banyaknya fungsi yang memenuhi ada **26**.

5. (a + b + c)(a + b − c) = 3ab
   $(a + b)^2 - c^2 = 3ab$
   $a^2 + b^2 - c^2 = ab$
   2ab cos C = ab
   cos C = $\frac{1}{2}$
   C = 60^o
   ∴ Besar sudut yang menghadap sisi dengan panjang c adalah **60^o**.

6. Karena a > b > c ≥ d > e > f maka ada 2 kasus
   - Jika a > b > c > d > e > f
     Banyaknya bilangan yang memenuhi sama dengan banyaknya cara memilih 6 angka dari 10 angka berbeda, yaitu ${}_{10}C_6 = 210$
   - Jika a > b > c = d > e > f
     Banyaknya bilangan yang memenuhi sama dengan banyaknya cara memilih 5 angka dari 10 angka berbeda, yaitu ${}_{10}C_5 = 252$

   Maka banyaknya bilangan abcdef yang memenuhi a > b > c ≥ d > e > f = 210 + 252 = 462.
   ∴ Banyaknya bilangan enam angka yang memenuhi tersebut sama dengan **462**.

7. Misalkan $p^2 + 7^3 = k^3$ dengan k suatu bilangan asli.
   $p^2 = (k - 7)(k^2 + 7k + 49)$
   Karena p bilangan prima dan jelas bahwa $k - 7 < k^2 + 7k + 49$ maka kesamaan tersebut hanya terjadi jika $k - 7 = 1$ dan $k^2 + 7k + 49 = p^2$ sehingga didapat $k = 8$
   $k^2 + 7k + 49 = 8^2 + 7(8) + 49 = 169 = p^2$ sehingga $p = 13$
   Jadi, nilai p bilangan asli yang memenuhi adalah $p = 13$
   ∴ Maka banyaknya bilangan prima p yang memenuhi ada **1**.
8. Jelas bahwa AB = 5 sehingga BD = 13. Karena DE sejajar AC maka DE juga tegak lurus CE.



$\frac{DE}{DB}$ = sin ∠DBD = sin (180° − (∠DBA + ∠ABC)) = sin (∠DBA + ∠ABC)
$\frac{DE}{DB}$ = sin ∠DBA cos ∠ABC + cos ∠DBA sin ∠ABC
$\frac{DE}{DB} = \frac{12}{13} \cdot \frac{4}{5} + \frac{5}{13} \cdot \frac{3}{5} = \frac{63}{63} = \frac{m}{n}$
Maka m = 63 dan n = 65
∴ Jadi, m + n = **128**.

9. Jika dua titik pada lingkaran dihubungkan maka lingkaran akan terbagi menjadi dua daerah. Misalkan sebelah kanan dan kiri. Agar tidak ada tali busur yang memotong tali busur tersebut maka banyaknya titik pada lingkaran di sebelah kiri dan kanan tali busur tersebut haruslah genap.
   Jika terdapat 2 titik maka banyaknya talibusur yang memenuhi ada 1.
   - Jika jumlah titik ada 2 pasang
     Perhatikan salah satu titik. Banyaknya cara menghubungkan dengan titik-titik lain ada 2 kasus, yaitu sebelah kiri ada 0 pasang dan sebelah kanan ada 1 pasang atau sebaliknya. Banyaknya cara ada 1 + 1 = 2
   - Jika jumlah titik ada 3 pasang
     Perhatikan salah satu titik. Banyaknya cara menghubungkan dengan titik-titik lain ada 3 kasus, yaitu sebelah kiri ada 0 pasang dan sebelah kanan ada 2 pasang, sebelah kiri ada 1 pasang sebelah kanan ada 1 pasang atau sebelah kiri ada 2 pasang dan sebelah kanan ada 0 pasang. Banyaknya cara = 1 · 2 + 1 · 1 + 2 · 1 = 5 cara.
   - Jika jumlah titik ada 4 pasang
     Perhatikan salah satu titik. Banyaknya cara menghubungkan dengan titik-titik lain ada 4 kasus, yaitu sebelah kiri ada 0 pasang dan sebelah kanan ada 3 pasang, sebelah kiri ada 1 pasang sebelah kanan

ada 2 pasang, sebelah kiri ada 2 pasang sebelah kanan ada 1 pasang atau sebelah kiri ada 3 pasang dan sebelah kanan ada 0 pasang. Banyaknya cara = $1 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 14$ cara.

- Jika jumlah titik ada 5 pasang
  Dengan cara yang sama banyaknya cara = $1 \cdot 14 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 14 \cdot 1 = 42$ cara.
- Jika jumlah titik ada 6 pasang
  Banyaknya cara = $1 \cdot 42 + 1 \cdot 14 + 2 \cdot 5 + 5 \cdot 2 + 14 \cdot 1 + 42 \cdot 1 = 132$ cara.

$\therefore$ Banyaknya cara ada sebanyak **132**.

10. S = {FPB($n^3 + 1$, $n^2 + 3n + 9$) | $n \in Z$}.
    Misalkan d = FPB($n^3 + 1$, $n^2 + 3n + 9$).
    Karena $n^3 + 1$ dan $n^2 + 3n + 9$ tidak mungkin keduanya genap untuk n bilangan bulat maka d tidak mungkin genap.
    Maka $d \mid (n^3 + 1)$ dan $d \mid (n^2 + 3n + 9)$
    $d \mid (n(n^2 + 3n + 9) - (n^3 + 1)) = 3n^2 + 9n - 1$
    Karena $d \mid (n^2 + 3n + 9)$ dan $d \mid (3n^2 + 9n - 1)$ maka $d \mid (3(n^2 + 3n + 9) - (3n^2 + 9n - 1)) = 28$
    Karena $d \mid 28$ dan d tidak mungkin genap maka nilai d yang mungkin adalah 1 atau 7.
    Jika n = 1 maka FPB($n^3 + 1$, $n^2 + 3n + 9$) = FPB(2, 13) = 1
    Jika n = 5 maka FPB($n^3 + 1$, $n^2 + 3n + 9$) = FPB(126, 49) = 7
    Jadi, FPB($n^3 + 1$, $n^2 + 3n + 9$) = 1 atau 7 untuk semua nilai n bilangan bulat.
    $\therefore$ Banyaknya anggota dari himpunan S yang memenuhi adalah **2**.
11. $x^2 - px - 2p = 0$ akar-akarnya real α dan β
    Syarat akar-akar real adalah
    $p^2 - 4(1)(-2p) \ge 0$
    $p(p + 8p) \ge 0$
    Maka syarat agar α dan β real adalah $p \le -8$ atau $p \ge 0$
    $\alpha^3 + \beta^3 = 16$
    $(\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 16$
    $p^3 - 3\,(-2p)(p) = 16$
    $p^3 + 6p^2 - 16 = 0$
    $(p + 2)(p^2 + 4p - 8) = 0$
    $p = -2$ tidak memenuhi syarat $p \le -8$ atau $p \ge 0$.
    Jika $p^2 + 4p - 8 = 0$ maka
    $$p_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1(-8))}}{2(1)} = -2 \pm 2\sqrt{3}$$
    Yang memenuhi syarat hanya $p = -2 + 2\sqrt{3}$
    $\therefore$ Jumlah semua nilai p yang memenuhi sama dengan $\mathbf{-2 + 2\sqrt{3}}$.
12. Misal koordinat titik A(x_1, y_1) dan B(x_2, y_2) dengan titik tengah A dan B adalah X_{12}.
    Maka koordinat X_{12} adalah (½($x_1 + x_2$), ½($y_2 + y_2$)).
    Jika X_{12} memiliki koordinat bilangan bulat maka haruslah $x_1 + x_2$ dan $y_1 + y_2$ genap.

Syarat itu terjadi haruslah x_1 dan x_2 memiliki paritas yang sama dan y_1 dan y_2 juga memiliki paritas yang sama.

Kemungkinan jenis koordinat (dalam bahasa lain disebut paritas) suatu titik letis pada bidang hanya ada 4 kemungkinan yaitu (genap, genap), (genap, ganjil), (ganjil, ganjil) dan (ganjil, genap).

Agar dapat dipastikan bahwa ada anggota X yang memiliki koordinat bilangan bulat maka sesuai *Pigeon Hole Principle* (PHP) maka haruslah terdapat sekurang-kurangnya 5 buah titik letis.

∴ Nilai n terkecil yang memenuhi adalah **5**.

13. $x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor + \frac{1}{x}\lfloor x\rfloor = \frac{n}{n+1}$

Jika x bulat maka ruas kiri ≥ 1 sedangkan ruas kanan < 1. Maka tidak mungkin x bulat.

- Jika 0 < x < 1

  $\lfloor x\rfloor = 0$ sehingga

  $x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor = \frac{n}{n+1}$ ································ (1)

  Karena $\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$, n dan n + 1 bulat maka x merupakan bilangan rasional.

  Misalkan $x = \frac{1}{m}$ dengan m adalah bilangan rasional dengan m > 1 sebab 0 < x < 1.

  Dan misalkan juga m = p + s dengan p bilangan asli dan 0 < s < 1.

  Maka persamaan semula menjadi.

  $\frac{p}{p+s} = \frac{n}{n+1}$

  pn + p = pn + ns

  $s = \frac{p}{n}$

  Karena 0 < s < 1 maka nilai p asli yang memenuhi ada sebanyak n − 1 kemungkinan. Jadi, ada n − 1 kemungkinan nilai x yang memenuhi.

- Jika x > 1

  $\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor = 0$ sehingga

  $\frac{1}{x}\lfloor x\rfloor = \frac{n}{n+1}$

  Karena $\lfloor x\rfloor$, n dan n + 1 bulat maka x merupakan bilangan pecahan.

  Misalkan $x = \lfloor x\rfloor + r$ dengan 0 < r < 1.

  $\frac{1}{\lfloor x\rfloor + r}\lfloor x\rfloor = \frac{n}{n+1}$

  $n\lfloor x\rfloor + \lfloor x\rfloor = n\lfloor x\rfloor + nr$

  $r = \frac{\lfloor x\rfloor}{n}$

  Karena 0 < r < 1 maka nilai $\lfloor x\rfloor$ asli yang memenuhi ada sebanyak n − 1 kemungkinan.

  $x = \lfloor x\rfloor + \frac{\lfloor x\rfloor}{n}$

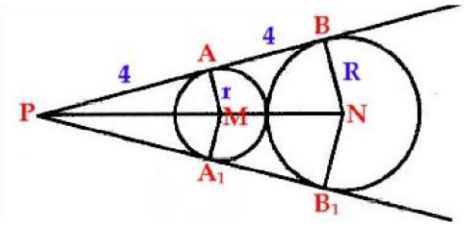
  Jadi, ada n − 1 kemungkinan nilai x yang memenuhi.

Agar didapat ada sebanyak 2010 bilangan real positif x yang memenuhi maka 2(n − 1) = 2010

n = 1006

∴ Jadi, nilai n yang memenuhi adalah n = **1006**.

14. Misalkan jari-jari lingkaran = r dan jari-jari lingkaran besar = R. Titik M dan N berturut turur menyatakan pusat lingkaran kecil dan besar.



Berdasarkan kesebangunan segitiga didapat

$\frac{r}{4} = \frac{R}{8}$ sehingga R = 2r ························ (1)

$MN^2 = 4^2 + (NB - MA)^2$

$(R + r)^2 = 4^2 + (R - r)^2$

$4Rr = 16$

$2r^2 = 4$

$\pi r^2 = 2\pi$

∴ Luas lingkaran kecil = $\mathbf{2}\pi$.

15. Misalkan kelompok 1 – 3 terdiri dari 5 orang dan kelompok 4 – 6 terdiri dari 4 orang.

Banyaknya cara memilih dari 27 orang untuk masuk ke kelompok 1 = ${}_{27}C_5$.

Banyaknya cara memilih dari 22 orang untuk masuk ke kelompok 2 = ${}_{22}C_5$.

Banyaknya cara memilih dari 17 orang untuk masuk ke kelompok 3 = ${}_{17}C_5$.

Banyaknya cara memilih dari 12 orang untuk masuk ke kelompok 4 = ${}_{12}C_4$.

Banyaknya cara memilih dari 8 orang untuk masuk ke kelompok 5 = ${}_{8}C_4$.

Banyaknya cara memilih dari 4 orang untuk masuk ke kelompok 6 = ${}_{4}C_4$.

Jadi, banyaknya cara memilih 27 orang untuk masuk ke kelompok 1-6 = ${}_{27}C_5 \cdot {}_{22}C_5 \cdot {}_{17}C_5 \cdot {}_{12}C_4 \cdot {}_{8}C_4 \cdot {}_{4}C_4$.

Tetapi perhitungan di atas memperhitungkan hal sebagai berikut : misalkan x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 masuk ke kelompok 1; x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10} masuk ke kelompok 2 dan 17 orang lain terbagi dalam kelompok lain. Kasus ini dianggap berbeda jika x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 masuk ke kelompok 2; x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10} masuk ke kelompok 1 dan 17 orang lain terbagi dalam kelompok lain yang sama dengan kasus 1. Padahal kedua kasus tersebut sebenarnya adalah sama. Maka ada perhitungan ganda dari perhitungkan sebelumnya. Jadi, perhitungkan sebelumnya harus dibagi dengan 3! · 3!.

Jadi, banyaknya cara memilih 27 orang untuk dibagi dalam kelompokkelompok yang terdiri dari 4 atau 5 orang adalah $\frac{{}_{27}C_5 \cdot {}_{22}C_5 \cdot {}_{17}C_5 \cdot {}_{12}C_4 \cdot {}_{8}C_4 \cdot {}_{4}C_4}{3! \cdot 3!} = \frac{27!}{(3!)^2 \cdot (4!)^3 \cdot (5!)^3}$.

∴ Banyaknya cara adalah $\frac{27!}{(3!)^2 \cdot (4!)^3 \cdot (5!)^3}$.

16. Misalkan dari 6 penerima surat pertama sebanyak $(6 - k_1)$ meneruskan surat tersebut.

Dari $(6^2 - 6k_1)$ penerima surat ke-2 sebanyak $(6^2 - 6k_1 - k_2)$ meneruskan surat tersebut.

Dari $(6^3 - 6^2k_1 - 6k_2)$ penerima surat ke-3 sebanyak $(6^3 - 6^2k_1 - 6k_2 - k_3)$ meneruskan surat.

dan seterusnya hingga

Dari $(6^n - 6^{n-1}k_1 - \cdots - 6k_{n-1})$ penerima surat ke-n semuanya **tidak** meneruskan surat tersebut.

$k_1 + k_2 + k_3 + \cdots + (6^n - 6^{n-1}k_1 - \cdots - 6k_{n-1}) = 366$

$6^n - (6^{n-1} - 1)k_1 - (6^{n-2} - 1)k_2 - \cdots - (6 - 1)k_{n-1} = 366$ .... (1)

Misalkan jumlah orang yang berada dalam sistem sama dengan p.

$p = 1 + 6 + (6^2 - 6k_1) + (6^3 - 6^2k_1 - 6k_2) + \cdots + (6^n - 6^{n-1}k_1 - \cdots - 6k_{n-1})$

$p = (1 + 6 + 6^2 + \cdots + 6^n) - (6 + 6^2 + \cdots + 6^{n-1})k_1 - (6 + 6^2 + \cdots + 6^{n-2})k_2 - \cdots - (6^2 + 6)k_{n-2} - 6k_{n-1}$

$p = 1 + \frac{6(6^n-1)}{6-1} - \frac{6(6^{n-1}-1)}{6-1}k_1 - \frac{6(6^{n-2}-1)}{6-1}k_2 - \cdots - \frac{6(6^2-1)}{6-1}k_{n-2} - \frac{6(6-1)}{6-1}k_{n-1}$

$p = 1 + \frac{6}{5}(6^n - 1 - (6^{n-1} - 1)k_1 - (6^{n-2} - 1)k_2 - \cdots - (6 - 1)k_{n-1})$

Subtitusikan persamaan (1) didapat

$p = 1 + \frac{6}{5}(366 - 1)$

$p = 439$

∴ Banyaknya orang yang berada dalam sistem surat berantai tersebut sama dengan **439**.

17. $\left(x^5 - \frac{2}{x^3}\right)^8 = {}_8C_0(x^5)^8\left(-\frac{2}{x^3}\right)^0 + \cdots + {}_8C_r(x^5)^r\left(-\frac{2}{x^3}\right)^{8-r} + \cdots$

Agar didapat konstanta maka $5r - 3(8 - r) = 0$

$r = 3$

Nilai konstanta tersebut adalah ${}_8C_3(x^5)^3\left(-\frac{2}{x^3}\right)^5 = 56 \cdot (-2)^5 = -1792$

Jadi, nilai kontanta tersebut sama dengan -1792

Jika yang ditanyakan adalah jumlah koefisien maka jumlah koefisien akan didapat jika x = 1.

Jumlah koefisien = $(1 - 2)^8 = 1$.

∴ Konstanta tersebut sama dengan **−1792** dan jumlah koefisien sama dengan **1**.

18. $\frac{3xy-1}{x+y} = n$ ekivalen dengan

$(3x - n)(3y - n) = n^2 + 3$

- Jika n = 3k untuk k bilangan bulat

  3x − n dan 3y − n keduanya habis dibagi 3 sehingga ruas kiri habis dibagi 9 sedangkan ruas kanan dibagi 9 bersisa 3. Jadi, tidak ada nilai n = 3k yang memenuhi.
- Jika n =3k + 2 untuk k bilangan bulat

  $n^2 + 3 = (3k + 2)^2 + 3 = 3(3k^2 + 4k + 2) + 1$

  Maka 1 dan $3(3k^2 + 4k + 2) + 1$ merupakan faktor dari $n^2 + 3$

  Jika $3x - n = 1$ dan $3y - n = 3(3k^2 + 4k + 2) + 1$ dengan $n = 3k + 2$ maka akan didapat pasangan bulat bulat (x, y) yang memenuhi.

  Jadi, untuk setiap n = 3k + 2 akan didapat pasangan bulat (x, y) yang memenuhi.
- Jika n = 3k + 1 untuk k bilangan bulat $n^2 + 3 = (3k + 1)^2 + 3 = 3(3k^2 + 2k + 1) + 1$

  Maka −1 dan $-3(3k^2 + 2k + 1) - 1$ merupakan faktor dari $n^2 + 3$.

  Jika $3x - n = -1$ dan $3y - n = -3(3k^2 + 2k + 1) - 1$ untuk $n \equiv 1 \pmod 3$

  Karena $-1 \equiv -3(3k^2 + 2k + 1) - 1 \equiv 2 \pmod 3$ maka akan didapat pasangan bulat (x, y) yang memenuhi.

  Jadi, untuk setiap n = 3k + 2 akan didapat pasangan (x, y) yang memenuhi.

Maka bentuk $n \equiv 0 \pmod 3$ saja yang membuat tidak ada pasangan (x, y) bulat yang memenuhi.

$\therefore$ Maka banyaknya bilangan bulat positif n < 100 yang memenuhi ada sebanyak **66**.

19. $x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ dan xyz = 1

Mengingat xyz = 1 maka $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{xy+xz+yz}{xyz}$ = xy + xz + yz

Jadi, $x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ = xy + xz + yz

$(x + y + z)^2 = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2$

$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + 2\left(\frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz}\right)$

$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + 2(x + y + z)$

Karena x + y + z = xy + xz + yz maka

$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$

Karena x^2, y^2 dan z^2 tidak mungkin negatif maka sesuai ketaksamaan AM-HM maka

$\frac{x^2+y^2+z^2}{3} \ge \frac{3}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}}$

$(x^2 + y^2 + z^2) = \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}\right) \ge 9$

Karena $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2}$ dan $x^2 + y^2 + z^2 \ge 0$ maka

$x^2 + y^2 + z^2 \ge 3$

$(x + y + z)^2 - 2(xy + xz + yz) - 3 \ge 0$

$(x + y + z)^2 - 2(x + y + z) - 3 \ge 0$

$(x + y + z + 1)(x + y + z - 3) \ge 0$

$x + y + z \ge 3$ atau $x + y + z \le -1$

$|x + y + z| \ge 3$ atau $|x + y + z| \ge 1$

Jika nilai $|x + y + z| = 1$ maka salah satu yang memenuhi adalah $x + y + z = -1$

Karena $x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ = xy + xz + yz maka xy + xz + yz = −1 dan karena xyz = 1 maka x, y dan z merupakan akar-akar persamaan $p^3 + p^2 - p - 1 = 0$

$(p - 1)(p + 1)^2 = 0$

Maka (x, y, z) = (1, −1, −1) dan permutasinya memenuhi kesamaan awal pada soal.

$\therefore$ Nilai minimal $|x + y + z|$ = **1**.

20. Mungkin maksud soal tersebut adalah panjang DE minimum.

Misalkan panjang AD = x dan panjang AE = y

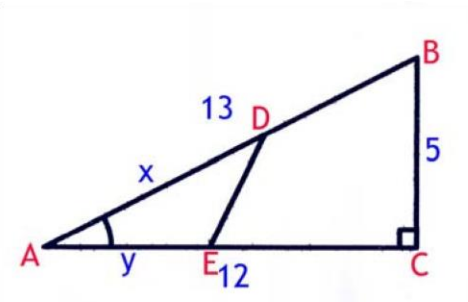
Luas $\triangle$ABC = $\frac{1}{2}$(5)(12) = 30 dan sin A = $\frac{5}{13}$ serta cos A = $\frac{12}{13}$

Luas $\triangle$ADE = $\frac{1}{2}$xy sin A = 15. Maka xy = 78.

Sesuai dalil cosinus pada $\triangle$ADE maka :

$DE^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos A = x^2 + y^2 - 144$

$DE^2 = (x - y)^2 + 2xy - 144$



$DE^2 = (x - y)^2 + 12$

DE^2 akan minimum sama dengan 12 jika $x = y = \sqrt{78}$

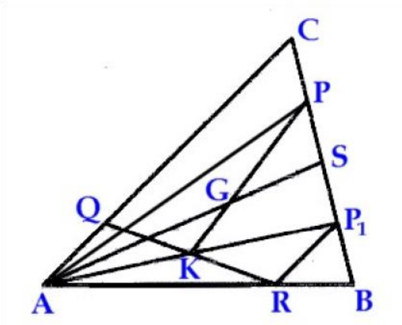
$\therefore\ DE_{minimum} = 2\sqrt{3}$

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2010

BAGIAN KEDUA

1. Misalkan $\frac{AR}{RB} = \frac{BP}{PC} = \frac{CQ}{QA} = \frac{CP_1}{P_1B}$ = k

   Alternatif 1 :



Akan didapat $\frac{BP_1}{BC} = \frac{BR}{BA} = \frac{1}{k+1}$

Karena $\angle P_1BR = \angle CBA$ maka ΔABC sebangun dengan ΔRBP_1.

Jadi, RP_1 akan sejajar dengan AC.

$RP_1 = \frac{1}{k+1} AC = AQ$

Karena RP_1 sejajar dengan AQ dan $\angle AKQ = RKP_1$ serta $RP_1 = AQ$ maka ΔRP_1K kongruen dengan ΔAQK dengan $AK = KP_1$.

Misal perpanjangan garis berat AG memotong sisi BC di S.

Jelas bahwa S adalah pertengahan sisi BC dan juga sisi PP_1.

Maka AG juga garis berat $\triangle APP_1$ dengan titik G juga titik berat $\triangle APP_1$ sebab perbandingan AG dengan GS tetap 2 : 1.

Karena K adalah pertengahan sisi AP_1 maka PK adalah juga garis berat $\triangle APP_1$.

Karena PK adalah garis berat $\triangle APP_1$ maka PK juga akan melalui titik G.

Jadi, titik P, K dan G akan berada pada satu garis lurus (kolinier).

$\therefore$ **Terbukti bahwa titik-titik P, G dan K kolinier (terletak pada satu garis)**.

Alternatif 2 :

Tanpa mengurangi keumuman misalkan koordinat A(0, 0) dan B(k + 1, 0) serta C(b, c).

Koordinat P$\left(b + \frac{k+1-b}{k+1}, c + \frac{0-c}{k+1}\right) = $ P$\left(\frac{kb+k+1}{k+1}, \frac{kc}{k+1}\right)$

Koordinat P$\left(k + 1 + \frac{b-k-1}{k+1}, \frac{c}{k+1}\right) = P_1\left(\frac{k^2+k+b}{k+1}, \frac{c}{k+1}\right)$

Koordinat Q$\left(\frac{b}{k+1}, \frac{c}{k+1}\right)$

Koordinat R(k, 0)

Koordinat G$\left(\frac{k+1+b}{3}, \frac{c}{3}\right)$

Persamaan garis AP_1.

y = $\frac{c}{k^2+k+b}x$ ······················ (1)

Persamaan garis QR

$\frac{y-0}{\frac{c}{k+1}-0} = \frac{x-k}{\frac{b}{k+1}-k}$

y = $\frac{c}{b-k^2-k}$(x − k) ··········· (2)

Perpotongan garis AP_1 dan QR di titik K(x_K, y_K)

$\frac{c}{k^2+k+b}x_k = \frac{c}{b-k^2-k}(x_k - k)$

$(b - k^2 - k)x_K = (k^2 + k + b)(x_K - k)$

$2k(k + 1)x_K = k(k^2 + k + b)$

$x_k = \frac{k^2+k+b}{2(k+1)}$ dan $y_k = \frac{c}{k^2+k+b}\left(\frac{k^2+k+b}{2(k+1)}\right) = \frac{c}{2(k+1)}$

Maka koordinat K$\left(\frac{k^2+k+b}{2(k+1)}, \frac{c}{2(k+1)}\right)$

Kemiringan garis KG = m_{KG} = $\frac{\frac{c}{2(k+1)}-\frac{c}{3}}{\frac{k^2+k+b}{2(k+1)}-\frac{k+1+b}{3}} = \frac{c-2kc}{k^2-k+b-2kb-2}$

Kemiringan garis GP = m_{GP} = $\frac{\frac{c}{3}-\frac{kc}{k+1}}{\frac{k+1+b}{3}-\frac{kb+k+1}{k+1}} = \frac{c-2kc}{k^2-k+b-2kb-2}$

Karena $m_{GP} = m_{KG}$ maka ketiga garis P, G dan K berada pada satu garis lurus.

∴ **Terbukti bahwa titik-titik P, G dan K kolinier (terletak pada satu garis)**.

2. $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_k} = \frac{7+nq_1q_2\cdots q_k}{2010}$

   $2010\,(p_2p_3\cdots p_k + p_1p_3\cdots p_k + \cdots + p_1p_2\cdots p_{k-1}) = p_1p_2\cdots p_k\,(7 + nq_1q_2\cdots q_k)$

   p_i tidak membagi $(p_2p_3\cdots p_k + p_1p_3\cdots p_k + \cdots + p_1p_2\cdots p_{k-1})$ sebab ada tepat satu bagian dari $(p_2p_3\cdots p_k + p_1p_3\cdots p_k + \cdots + p_1p_2\cdots p_{k-1})$ yang tidak mengandung p_i.

   Jadi, haruslah p_i membagi 2010 = 2 · 3 · 5 · 67

   Karena p_i untuk i = 1, 2, ···, k semuanya berbeda maka k = 4.

   $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} + \frac{1}{p_4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{67} = \frac{2107}{2010}$ maka

   $7 + nq_1q_2q_3q_4 = 2107$

   $nq_1q_2q_3q_4 = 2100 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 3 \cdot 7$ yang merupakan perkalian 6 bilangan prima.

   Karena q_1, q_2, q_3 dan q_4 adalah 4 bilangan prima yang boleh sama maka n merupakan perkalian dua faktor prima dari 2100.

   Nilai n yang mungkin adalah 2 · 2, 2 · 3, 2 · 5, 2 · 7, 3 · 5, 3 · 7, 5 · 5 dan 5 · 7.

   ∴ Banyaknya n yang memenuhi ada **8.**

3. $x^3 + y^3 = 2$

   y = kx + d

   $x^3 + (kx + d)^3 = 2$

   $(1 + k^3)x^3 + (3dk^2)x^2 + (3d^2k)x + d^3 - 2 = 0$

Karena polinomial berderajat ganjil akan memiliki sedikitnya satu akar real maka polinomial di atas harus diubah menjadi polinomial berderajat genap.

Jadi, k = -1 maka

$3dx^2 - 3d^2x + d^3 - 2 = 0$

Agar tidak ada nilai x real yangmemenuhi maka

$(3d^2)^2 - 4(3d)(d^3 - 2) < 0$ 3

$d^4 - 4d^4 + 8d < 0$

$d(d - 2)(d^2 + 2d + 4) > 0$

$d^2 + 2d + 4$ definit positif sehingga $d(d - 2) > 0$

Nilai d yang memenuhi adalah $d < 0$ atau $d > 2$

∴ Nilai k yang memenuhi adalah **k = −1** dan nilai **d < 0 atau d > 2.**

4. $x + 2y + 3z = n$ dengan $2010|n$.

   $x + 2y = n - 3z$

   Karena $x + 2y \geq 0$ maka $0 \leq z \leq \frac{n}{3}$

   - Jika z genap maka z = 2k dengan k bilangan bulat tak negatif

     Maka $n - 3z = n - 6k$ yang merupakan bilangan genap.

     Karena $0 \leq 2k \leq \frac{n}{3}$ maka $0 \leq k \leq \frac{n}{6}$

     $x + 2y = n - 6k$ yang merupakan bilangan genap sehingga x genap. Misalkan x = 2m

     $m + y = \frac{n-6k}{2}$ untuk m bilangan bulat tak negatif.

     Banyaknya pasangan (m, y) bulat tak negatif yang memenuhi = $\frac{n-6k}{2} + 1$ untuk setiap nilai k.

     Maka banyaknya pasangan (x, y) bulat tak negatif yang memenuhi = $\frac{n-6k}{2} + 1$.

     Misalkan banyaknya pasangan (x, y) bulat tak negatif yang memenuhi = t_1

     $t_1 = \sum_{k=0}^{\frac{n}{6}} \left(\frac{n-6k}{2} + 1\right) = \sum_{k=0}^{\frac{n}{6}} \left(\frac{n}{2} + 1 - 3k\right)$ yang merupakan deret aritmatika dengan beda -3, banyaknya suku $\frac{n}{6} + 1$, suku pertama $\frac{n}{2} + 1$ dan suku terakhir 1.

     $t_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{6} + 1\right)\left(\left(\frac{n}{2} + 1\right) + 1\right) = \frac{n^2}{24} + \frac{5n}{12} + 1$

   - Jika z ganjil maka z = 2k + 1 dengan k bilangan bulat tak negatif

     Maka $n - 3z = n - 6k - 3$ yang merupakan bilangan ganjil.

     Karena $1 \leq 2k + 1 \leq \frac{n}{3} - 1 < \frac{n}{3}$ sebab $\frac{n}{3}$ genap.

     $0 \leq k \leq \frac{n}{6} - 1$

     $x + 2y = n - 6k - 3$ yang merupakan bilangan ganjil sehingga x ganjil. Misalkan x = 2m + 1 m + y = $\frac{n-6k}{2} - 2$ dengan m bilangan bulat tak negatif

     Banyaknya pasangan (m, y) bulat tak negatif yang memenuhi = $\frac{n-6k}{2} - 1$ untuk setiap nilai k.

     Maka banyaknya pasangan (x, y) bulat tak negatif yang memenuhi = $\frac{n-6k}{2} - 1$.

     Misalkan banyaknya pasangan (x, y) bulat tak negatif yang memenuhi = t_2

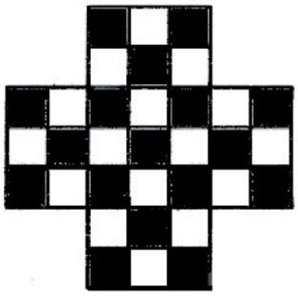
$t_2 = \sum_{k=0}^{\frac{n}{6}-1}\left(\frac{n-6k}{2} - 1\right) = \sum_{k=0}^{\frac{n}{6}-1}\left(\frac{n}{2} - 1 - 3k\right)$ yang merupakan deret aritmatika dengan beda -3, banyaknya suku $\frac{n}{6}$, suku pertama $\frac{n}{2} - 1$ dan suku terakhir 2.

$t_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{n}{6}\right)\left(\left(\frac{n}{2} - 1\right) + 2\right) = \frac{n^2}{24} + \frac{n}{12}$

Jadi, banyaknya tripel (x, y, z) yang memenuhi = $t_1 + t_2$ = $\left(\frac{n^2}{24} + \frac{5n}{12} + 1\right) + \left(\frac{n^2}{24} + \frac{n}{12}\right) = \frac{n^2}{12} + \frac{n}{2} + 1$

∴ Terbukti banyaknya tripel (x, y, z) bilangan bulat tak negatif yang memenuhi = $\frac{n^2}{12} + \frac{n}{2} + 1$

5. Warnai petak-petak tersebut seperti pada papan catur.



Pada gambar di atas akan didapat jumlah petak warna hitam dan putih berselisih satu.
Langkah kuda dari petak putih ke petak hitam atau sebaliknya.
Karena kuda tersebut harus kembali ke petaknya semula maka petak terakhir sebelum kembali ke petak semula haruslah berbeda warna dengan petak semula tersebut.
Jadi, haruslah jumlah petak warna hitam sama dengan jumlah petak warna putih.
Tetapi ternyata jumlah petak warna hitam dan putih berselisih satu. Kontradiksi. Maka biji catur kuda tidak dapat kembali ke petaknya semula.
∴ Biji catur kuda tidak dapat kembali ke petaknya semula.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2010

TINGKAT NASIONAL

HARI PERTAMA

WAKTU : 4 JAM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Nasional Tahun 2010

1. Misalkan a, b, c tiga bilangan asli berbeda. Buktikan bahwa barisan

$$a + b + c,\ ab + ac + bc,\ 3abc$$

   tidak mungkin membentuk suatu barisan geometri (ukur) maupun aritmatika (hitung).

2. Diberikan segitiga lancip ABC dengan AC > BC dan titik pusat lingkaran luar O. Garis tinggi segitiga ABC dari C memotong AB dan lingkaran luar segitiga ABC lagi berturut-turut di titik D dan E. Garis melalui O sejajar AB memotong garis AC di titik F. Buktikan bahwa garis CO, garis melalui F tegak lurus AC, dan garis melalui E sejajar DO bertemu di satu titik.

3. Suatu kompetisi matematika diikuti oleh 120 peserta dari beberapa kontingen. Pada acara penutupan, setiap peserta memberikan 1 souvenir pada setiap peserta dari kontingen yang sama dan 1 souvenir pada salah seorang peserta dari tiap kontingen lainnya. Di akhir acara, diketahui terdapat 3840 souvenir yang dipertukarkan. Berapa banyak kontingen maksimal sehingga kondisi di atas dapat terpenuhi ?

4. Diketahui bahwa m dan n adalah bilangan-bilangan asli dengan sifat

$$(mn) \mid (m^{2010} + n^{2010} + n).$$

   Buktikan bahwa terdapat bilangan asli k sehingga $n = k^{2010}$.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2010

TINGKAT NASIONAL

HARI KEDUA

WAKTU : 4 JAM

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Nasional Tahun 2010

5. Sebanyak m orang anak laki-laki dan n orang anak perempuan ($m > n$) duduk mengelilingi meja bundar diawasi oleh seorang guru, dan mereka melakukan sebuah permainan sebagai berikut. Mula-mula sang guru menunjuk seorang anak laki-laki untuk memulai permainan. Anak laki-laki tersebut meletakkan sekeping uang logam di atas meja. Kemudian bergiliran searah jarum jam, setiap anak melakukan gilirannya masing-masing. Jika anak tersebut laki-laki, ia menambahkan sekeping uang logam ke tumpukan di atas meja, dan jika anak tersebut perempuan, ia mengambil sekeping uang logam dari tumpukan tersebut. Jika tumpukan di atas meja habis, maka permainan berakhir saat itu juga. Perhatikan bahwa tergantung siapa yang ditunjuk oleh sang guru untuk memulai langkah pertama, maka permainan tersebut bisa cepat berakhir, atau bisa saja berlangsung paling sedikit 1 putaran penuh. Jika sang guru menginginkan agar permainan tersebut berlangsung paling sedikit 1 putaran penuh, ada berapa pilihan anak lakilaki yang dapat beliau tunjuk untuk memulai ?
6. Cari semua bilangan asli $n > 1$ demikian sehingga

$$\tau(n) + \phi(n) = n + 1$$

   Dalam hal ini, $\tau(n)$ menyatakan banyaknya bilangan asli yang habis membagi n dan $\phi(n)$ menyatakan banyaknya bilangan asli yang kurang dari n dan relatif prima terhadap n.
7. Misalkan a dan b bilangan real positif. Diberikan polinom $F(x) = x^2 + ax + b$ dan $G(x) = x^2 + bx + a$ sehingga semua akar dari polinom $F(G(x))$ dan $G(F(x))$ adalah bilangan real. Buktikan bahwa a dan b lebih dari 6.
8. Diberikan segitiga lancip ABC dengan titik pusat lingkaran luar O dan titik tinggi H. Misalkan K sebarang titik di dalam segitiga ABC yang tidak sama dengan O maupun H. Titik L dan M terletak di luar segitiga ABC sedemikian sehingga AKCL dan AKBM jajaran genjang. Terakhir, misalkan BL dan CM berpotongan di titik N dan misalkan juga J adalah titik tengah HK. Buktikan bahwa KONJ jajaran genjang.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2010

TINGKAT NASIONAL

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Nasional Tahun 2010

1. Alternatif 1 :

Akan dibuktikan dengan kontradiksi.

a. Andaikan a + b + c, ab + ac + bc, 3abc membentuk barisan geometri (ukur) maka berlaku

$(ab + ac + bc)^2 = 3abc(a + b + c)$

$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2abc(a + b + c) = 3abc(a + b + c)$

$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = abc(a + b + c)$ ·························· (1)

Menurut ketaksamaan AM-GM didapat

$a^2b^2 + a^2c^2 \geq 2a^2bc$

$a^2b^2 + b^2c^2 \geq 2ab^2c$

$a^2c^2 + b^2c^2 \geq 2abc^2$

Tanda kesamaan hanya terjadi jika a = b = c.

Jumlahkan ketiga ketaksamaan di atas didapat

$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \geq abc(a + b + c)$

Berdasarkan persamaan (1) akan didapat bahwa a = b = c. Kontradiksi sebab a, b dan c berbeda.

b. Andaikan a + b + c, ab + ac + bc, 3abc membentuk barisan aritmatika (hitung) maka berlaku

2(ab + ac + bc) = 3abc + a + b + c yang ekivalen dengan

$a = \frac{2bc-b-c}{3bc-2b-2c+1}$

Karena $a \geq 1$ maka $2bc - b - c \geq 3bc - 2b - 2c + 1$

$bc - b - c + 1 \leq 0$

$(b - 1)(c - 1) \leq 0$

Karena $b \geq 1$ dan $c \geq 1$ maka ketaksamaan tersebut hanya terpenuhi jika $(b - 1)(c - 1) = 0$.

Dengan cara yang sama didapat $(a - 1)(b - 1) = 0$ dan $(a - 1)(c - 1) = 0$

Maka sedikitnya dua di antara a, b atau c sama dengan 1. Kontradiksi bahwa a, b dan c ketiganya berbeda.

Alternatif 2 :

Akan dibuktikan dengan pembuktian langsung.

a. Sesuai ketaksamaan AM-GM didapat

$a^2b^2 + a^2c^2 > 2a^2bc$

$a^2b^2 + b^2c^2 > 2ab^2c$

$a^2c^2 + b^2c^2 > 2abc^2$

Tanda kesamaan tidak mungkin terjadi sebab a, b dan c semuanya berbeda.

Jumlahkan ketiga persamaan tersebut didapat

$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 > abc(a + b + c)$

$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + 2abc(a + b + c) > 3abc(a + b + c)$

$(ab + ac + bc)^2 > 3abc(a + b + c)$

$\frac{ab+ac+bc}{a+b+c} > \frac{3abc}{ab+ac+bc}$

Karena $\frac{ab+ac+bc}{a+b+c} \neq \frac{3abc}{ab+ac+bc}$ maka a + b + c, ab + ac + bc, 3abc tidak mungkin membentuk barisan geometri (ukur).

b. 3abc + (a + b + c) − 2(ab + ac + bc)= a(b − 1)(c − 1) + b(a − 1)(c − 1) + c(a − 1)(b − 1) ≥ 0 sebab a, b dan c ketiga bilangan asli.

Karena a(b − 1)(c − 1) ≥ 0, b(a − 1)(c − 1) ≥ 0 dan c(a − 1)(b − 1) ≥ 0 maka persamaan a(b − 1)(c − 1) + b(a − 1)(c − 1) + c(a − 1)(b − 1) = 0 hanya akan terpenuhi jika sedikitnya dua di antara a, b dan c sama dengan 1. Kontradiksi bahwa a, b dan c ketiganya berbeda.

Jadi, 3abc + (a + b + c) − 2(ab + ac + bc) > 0

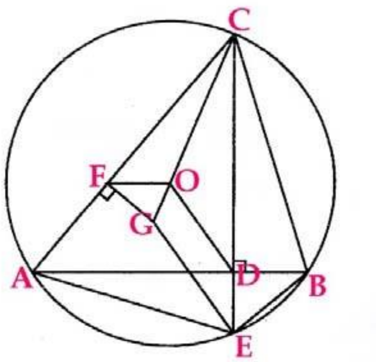
Karena 3abc + (a + b + c) − 2(ab + ac + bc) ≠ 0 maka

(ab + ac + bc) − (a + b + c) ≠ 3abc − (ab + ac + bc)

Karena (ab + ac + bc) − (a + b + c) ≠ 3abc − (ab + ac + bc) maka a + b + c, ab + ac + bc, 3abc tidak mungkin membentuk barisan aritmatika (hitung).

∴ Terbukti bahwa a + b + c, ab + ac + bc, 3abc tidak mungkin membentuk baarisan geometri (ukur) maupun aritmatika (hitung).

2. Alternatif 1 :



Misalkan garis CO dan garis yang tegak lurus AC dan melalui F berpotongan di titik G. Persoalan akan ekivalen dengan membuktikan bahwa garis GE sejajar OD.

Karena O pusat lingkaran luar ΔABC maka ∠AOC = 2∠ABC.

Karena ΔAOC sama kaki maka ∠OCA = 90° − B.

Karena FO sejajar AB maka ∠CFO = A

Maka ∠COF = 180° − ∠OCA − ∠CFO = 90° + B − A

Sesuai dengan aturan sinus pada ΔOCF maka

$\frac{CF}{\sin \angle COF} = \frac{CO}{\sin \angle CFO}$

CF = $\frac{CO\cos(B-A)}{\sin A}$

CG = CF cosec ∠OCA

$\frac{CG}{CO} = \frac{\cos(B-A)}{\sin A \sin B}$ ……………………. (1)

Perhatikan talibusur AE. Karena menghadap talibusur yang sama maka ∠ACE = ∠ABE

Karena CE tegak lurus AB maka ∠ACE = 90° − A = ∠ABE

∠CBE = ∠CBA + ∠ABE = B + (90° − A) = 90° + B − A

Perhatikan talibusur BC. Karena menghadap talibusur yang sama maka ∠BEC = ∠CAB = A Sesuai dengan aturan sinus pada ΔBCE dan mengingat CD = BC sin B maka

$\frac{CE}{\sin \angle CBE} = \frac{BC}{\sin \angle BEC} = \frac{CD}{\sin B \sin \angle BEC}$

$\frac{CE}{CD} = \frac{\cos(B-A)}{\sin A \sin B}$ .... (2)

Berdasarkan (1) dan (2) didapat

$\frac{CG}{CO} = \frac{CE}{CD}$

Karena ∠DCO = ∠ECO serta $\frac{CG}{CO} = \frac{CE}{CD}$ maka ΔCDO sebangun dengan ΔCEG.

Jadi, GE sejajar OD

Maka terbukti bahwa garis CO, garis melalui F tegak lurus AC, dan garis melalui E sejajar DO bertemu di satu titik, yaitu titik G.

∴ **Terbukti bahwa garis CO, garis melalui F tegak lurus AC, dan garis melalui E sejajar DO bertemu di satu titik**.

Alternatif 2 :

Misalkan garis CO dan garis sejajar Do dan melalui E berpotongan di titik G. Persoalan ekivalen dengan membuktikan bahwa FG tegak lurus AC.

Tanpa mengurangi keumuman misalkan koordinat A(0, 0), B(a, 0) dan C(b, c).

Karena AC > BC maka b > $\frac{1}{2}$ a.

Karena AB adalah talibusur yang sejajar sumbu X maka $x_O = \frac{1}{2}(a + 0) = \frac{1}{2}a$

Persamaan umum lingkaran $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

Karena lingkaran melalui (0,0) maka C = 0

Karena $x_O = \frac{1}{2}a$ maka A = −a.

Lingkaran melalui titik (b, c) maka

$b^2 + c^2 - a(b) + B(c) = 0$

$B = \frac{ab-b^2-c^2}{c}$

Jadi, $y_O = \frac{b^2+c^2-ab}{2c}$

Jadi, koordinat $O(\frac{1}{2}a, \frac{b^2+c^2-ab}{2c})$

Koordinat D(b, 0)

Karena OC = OE maka Ordinat O adalah pertengahan ordinat C dan E.

$2y_O = y_E + y_C$

$2\left(\frac{b^2+c^2-ab}{2c}\right) = y_E + c$

$y_E = \frac{b^2-ab}{c}$

Karena x_E = b maka koordinat E(b, $\frac{b^2-ab}{c}$)

Persamaan garis AC adalah y = $\frac{c}{b}$x

Garis FO sejajar AB yang berarti sejajar sumbu X maka y_F = y_O = $\frac{b^2+c^2-ab}{2c}$

Maka x_F = $\left(\frac{b^2+c^2-ab}{2c}\right)\left(\frac{b}{c}\right) = \frac{b(b^2+c^2-ab)}{2c^2}$

Koordinat F$\left(\frac{b\left(b^2+c^2-ab\right)}{2c^2}, \frac{b^2+c^2-ab}{2c}\right)$

Karena gradient AC = $\frac{c}{b}$ maka gradient FG = $-\frac{b}{c}$

Persamaan garis FG : y $-\ \frac{b^2+c^2-ab}{2c} = -\frac{b}{c}(x - \frac{b^2+c^2-ab}{2c^2})$

Persamaan garis CO : $\frac{y-c}{x-b} = \frac{\frac{b^2+c^2-ab}{2c}-c}{\frac{1}{2}a-b} = \frac{b^2-ab-c^2}{c(a-2b)}$

y = (x − b)($\frac{b^2-ab-c^2}{c(a-2b)}$) + c

Gradien garis DO, m_{DO} = $\frac{\frac{b^2+c^2-ab}{2c}-0}{\frac{1}{2}a-b} = \frac{b^2+c^2-ab}{c(a-2b)}$

Garis DO sejajar EG. Persamaan garis EG adalah

y − $\frac{b^2-ab}{c}$ = $\frac{b^2+c^2-ab}{c(a-2b)}$ (x − b)

Garis CO berpotongan dengan EG di G. Maka

(x_G − b)($\frac{b^2-ab-c^2}{c(a-2b)}$) + c = $\frac{b^2+c^2-ab}{c(a-2b)}$ (x_G − b) + $\frac{b^2-ab}{c}$

(x_G – b)$\left(\frac{b^2-ab-c^2-b^2-c^2+ab}{c(a-2b)}\right) = \frac{b^2-c^2-ab}{c}$

(x_G − b) = $\frac{(b^2-c^2-ab)(2b-a)}{2c^2}$

x_G = $\frac{2b^3-ab^2-2bc^2+ac^2-2ab^2+a^2b+2bc^2}{2c^2}$

x_G = $\frac{2b^3-3ab^2+ac^2+a^2b}{2c^2}$

y_G = (x_G − b)($\frac{b^2-ab-c^2}{c(a-2b)}$) + C

$$y_G = \left(\frac{2b^3-3ab^2+ac^2+a^2b-2bc^2}{2c^2}\right)\left(\frac{b^2-ab-c^2}{c(a-2b)}\right) + \frac{2c^4(a-2b)}{2c^3(a-2b)}$$

$$y_G = \frac{2b^5-2ab^4-2b^3c^2-3ab^4+3a^2b^3+3ab^2c^2+ab^2c^2-a^2bc^2-ac^4+a^2b^3-a^3b^2-a^2bc^2-2b^3c^2+2ab^2c^2+2bc^4}{2c^3(a-2b)} + \frac{2ac^4-4bc^4}{2c^3(a-2b)}$$

$$y_G = \frac{2b^5-5ab^4-4b^3c^2+4a^2b^3+6ab^2c^2-2a^2bc^2+ac^4-a^3b^2-2bc^4}{2c^3(a-2b)}$$

$$\Delta y_{FG} = y_G - y_F = \frac{2b^5-5ab^4-4b^3c^2+4a^2b^3+6ab^2c^2-2a^2bc^2+ac^4-a^3b^2-2bc^4}{2c^3(a-2b)} - \frac{b^2+c^2-ab}{2c}$$

$$\Delta y_{FG} = \frac{2b^5-5ab^4-2b^3c^2+4a^2b^3+3ab^2c^2-a^2bc^2-a^3b^2}{2c^3(a-2b)}$$

$$\Delta x_{FG} = x_G - x_F = \frac{2b^3-3ab^2+ac^2+a^2b}{2c^2} - \frac{b(b^2+c^2-ab)}{2c^2}$$

$$\Delta x_{FG} = \frac{b^3-2ab^2+ac^2+a^2b-bc^2}{2c^2}$$

$$m_{FG} = \frac{\Delta y_{FG}}{\Delta x_{FG}} = \frac{2b^5-5ab^4-2b^3c^2+4a^2b^3+3ab^2c^2-a^2bc^2-a^3b^2}{c(b^3-2ab^2+ac^2+a^2b-bc^2)(a-2b)} = \frac{b(2b-a)(b^3-2ab^2+ac^2+a^2b-bc^2)}{c(a-2b)(b^3-2ab^2+ac^2+a^2b-bc^2)}$$

$$m_{FG} = -\frac{b}{c}$$

$$m_{FG} \cdot m_{AC} = \left(-\frac{b}{c}\right) \cdot \left(\frac{c}{b}\right) = -1$$

Karena $m_{FG} \cdot m_{AC} = -1$ maka FG tegak lurus AC.

$\therefore$ **Terbukti bahwa garis CO, garis melalui F tegak lurus AC, dan garis melalui E sejajar DO bertemu di satu titik**.

3. Misalkan x_i adalah banyaknya peserta dari kontingen i dan banyaknya kontingen sama dengan n.

   $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = 120$

   Banyaknya souvenir pada masing-masing kontingen sama dengan $x_i(x_i - 1)$

   Masing-masing peserta akan memberikan souvenir sebanyak $n - 1$ ke salah seorang peserta dari tiap kontingen lainnya.

   Maka banyaknya souvenir seluruhnya = $x_1(x_1 - 1) + x_2(x_2 - 1) + \cdots + x_n(x_n - 1) + 120(n - 1) = 3840$.

   $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n) + 120n = 3960$

   $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - 120 + 120n = 3960$

   $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 4080 - 120n$

   Berdasarkan ketaksamaan AM-QM maka

   $$\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}{n}} \geq \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$$

   $$\sqrt{\frac{4080-120n}{n}} \geq \frac{120}{n}$$

   $4080 - 120n \geq \frac{120^2}{n}$

   $n^2 - 34n + 120 \leq 0$

   $(n - 30)(n - 4) \leq 0$

   $4 \leq n \leq 30$

Jika $n = 30$ serta masing-masing kontingen terdiri dari 4 peserta maka banyaknya souvenir yang dipertukarkan sama dengan $30 \cdot 4(4 - 1) + 120(30 - 1) = 3840$ yang memenuhi.

$\therefore$ Banyaknya kontingen maksimal sehingga kondisi tersebut memenuhi sama dengan **30**.

4. $(mn) \mid (m^{2010} + n^{2010} + n)$
   - Jika FPB$(m, n) = 1$
     Karena $n \mid (m^{2010} + n^{2010} + n)$ maka $n \mid m^{2010}$.
     Karena FPB$(m, n) = 1$ maka haruslah $n = 1 = 1^{2010}$ yang memenuhi.
   - Jika FPB$(m, n) = d$ dengan $d > 1$
     Misalkan $m = dx$ dan $n = dy$ dengan FPB$(x, y) = 1$
     Maka persoalan akan menjadi $(d^2xy) \mid (d^{2010}x^{2010} + d^{2010}y^{2010} + dy)$
     Karena $d^2 \mid (d^{2010}x^{2010} + d^{2010}y^{2010})$ maka $d^2 \mid dy$ yang berarti $y = d^pz$ untuk suatu bilangan asli p dan z serta d tidak membagi z.
     Jadi, $n = dy = d^{p+1}z$
     Persoalan semula akan menjadi $(d^{p+2}xz) \mid (d^{2010}x^{2010} + d^{2010(p+1)}z^{2010} + d^{p+1}z)$
     Karena $d^{p+1} \mid (d^{2010(p+1)}z^{2010} + d^{p+1}z)$ maka $d^{p+1} \mid d^{2010}x^{2010}$ sehingga $d^{p+1} \mid d^{2010}$
     Jadi, $p \leq 2009$ ·························· (1)
     Dari $(d^{p+2}xz) \mid (d^{2010}x^{2010} + d^{2010(p+1)}z^{2010} + d^{p+1}z)$ akan didapat $d^{p+2} \mid (d^{2010}x^{2010} + d^{p+1}z)$
     Karena d tidak membagi z maka d^{p+2} tidak membagi $d^{p+1}z$ yang berakibat d^{p+2} tidak membagi $d^{2010}x^{2010}$.
     Karena d^{p+2} tidak membagi $d^{2010}x^{2010}$ maka $d^{p+2} > d^{2010}$
     Jadi, $p > 2008$ ······· (2)
     Berdasarkan (1) dan (2) didapat bahwa $p = 2009$ $n = d^{2010}z$
     Persoalan semula ekivalen dengan $(d^{2011}xz) \mid (d^{2010}x^{2010} + d^{2010 \cdot 2010}z^{2010} + d^{2010}z)$
     Maka $d^{2010}z \mid d^{2010}x^{2010}$ sehingga $z \mid x^{2010}$.
     Karena x dan z relatif prima maka $z = 1$ Jadi, $n = d^{2010}$

   $\therefore$ **Terbukti bahwa terdapat bilangan asli k sehingga $n = k^{2010}$.**

5. Misalkan dalam putaran tersebut ada seorang anak laki-laki yang diikuti oleh seorang anak perempuan. Jika kedua anak tersebut dikeluarkan dari permainan maka permainan yang ada akan menghasilkan hal yang sama dengan sebelumnya sebab uang logam yang diberikannya anak laki-laki ke atas meja akan diambil oleh anak perempuan di sebelahnya. Karena $m > n$ maka hal tersebut pasti ada. Jika hal ini dilakukan terus menerus maka akan tersisa $m - n$ anak laki-laki.

   $\therefore$ Jadi, banyaknya pilihan yang bisa dilakukan ada sebanyak **$m - n$**.

6. $\tau(n) + \phi(n) = n + 1$

   $\tau(n)$ menyatakan banyaknya bilangan asli yang habis membagi n dan $\phi(n)$ menyatakan banyaknya bilangan asli yang kurang dari n dan relatif prima terhadap n.

   Misalkan A dalah himpunan semua bilangan asli yang habis membagi n dan B adalah himpunan semua bilangan asli yang kurang dari n dan relatif prima terhadap n serta C adalah himpunan semua bilangan asli kurang dari n yang tidak membagi n tetapi tidak relatif prima dengan n. Semua bilangan asli > 1 kurang dari atau sama dengan n akan masuk hanya ke dalam satu satu dari A, B atau C.

$A \cap B = \{1\}$

Karena irisan A dan B hanya ada 1 bilangan, maka persoalan tersebut sama saja dengan menentukan semua bilangan asli sehingga semua bilangan asli kurang dari atau sama dengan n hanya masuk ke dalam himpunan A atau B saja.

- Jika n bilangan prima

  Pembagi n hanya ada 2 yaitu 1 dan n sehingga $\tau(n) = 2$.

  Semua bilangan asli kurang dari n akan relatif prima dengan n sehingga $\phi(n) = n - 1$. $\tau(n) + \phi(n) = 2 + (n - 1) = n + 1$

  Jadi, semua bilangan prima akan memenuhi hal tersebut.
- Jika n bukan bilangan prima

  Lemma :

  Jika terdapat sebuah bilangan prima p > 2 yang membagi n maka n tidak akan memenuhi hal tersebut.

  Bukti : Bilangan $\frac{2n}{p}$ merupakan bilangan asli yang kurang dari n namun tidak membagi n serta FPB($\frac{2n}{p}$,n) = $\frac{n}{p} > 1$ sehingga $\frac{2n}{p}$ bukan elemen A maupun B. Terbukti.

  Jadi, $n = 2^k$ untuk suatu bilangan asli k tertentu.

  Jika k > 2 maka sedikitnya terdapat sebuah bilangan, yaitu 6 < n yang memenuhi 6 tidak membagi n serta FPB(n, 6) = 2 > 1.

  Jadi, nilai k yang mungkin agar memenuhi persoalan tersebut adalah k = 2.

  Jika $n = 2^2 = 4$ maka $\tau(4) + \phi(4) = 3 + 2 = 4 + 1$ yang memenuhi.

  Jadi, n bukan bilangan prima yang memenuhi hanya n = 4.

∴ Jadi, semua bilangan asli n yang memenuhi adalah **n bilangan prima atau n = 4**.

7. $F(x) = x^2 + ax + b$ dan $G(x) = x^2 + bx + a$

   Misalkan m dan n adalah kedua akar F(x) = 0 dengan m < n.

   $n = \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$

   Jika G(x) = n yang berarti F(G(x)) = 0 pada saat itu, maka haruslah dipenuhi nilai x pada saat itu haruslah juga bilangan real.

   $G(x) = n = x^2 + bx + a$

   $x^2 + bx + a - n = 0$

   Agar nilai x yang memenuhi adalah bilangan real maka

   $b^2 - 4(a - n) \geq 0$

   $b^2 - 4(a - \frac{-a+\sqrt{a^2-4b}}{2}) \geq 0$

   $b^2 - 6a \geq 2\sqrt{a^2 - 4b} \geq 0$ sebab akar dari suatu bilangan tidak mungkin negatif.

   Jadi, $b^2 \geq 6a$

   Misalkan p dan q adalah kedua akar G(x) = 0 dengan p < q.

q = $\frac{-b+\sqrt{b^2-4a}}{2}$

Jika F(x) = q yang berarti G(F(x)) = 0 pada saat itu, maka haruslah dipenuhi nilai x pada saat itu haruslah juga bilangan real.

$F(x) = q = x^2 + ax + b$

$x^2 + ax + b - q = 0$

Agar nilai x yang memenuhi adalah bilangan real maka

$a^2 - 4(b - q) \geq 0$

$a^2 - 4(b - \frac{-b+\sqrt{b^2-4a}}{2}) \geq 0$

$a^2 - 6b \geq 2\sqrt{b^2 - 4a} \geq 0$ sebab akar dari suatu bilangan tidak mungkin negatif.

Jadi, $a^2 \geq 6b$ sehingga didapat $a^4 \geq 36b^2$

Karena $b^2 \geq 6a$ maka

$a^4 \geq 36b^2 \geq 216a$

$a^3 \geq 216$

$a \geq 6$

Karena $b^2 \geq 6a$ maka $b^2 \geq 36$ sehingga $b \geq 6$.

Jika a = 6 dan karena $a^2 \geq 6b$ maka $b \leq 6$ sehingga haruslah b = 6.

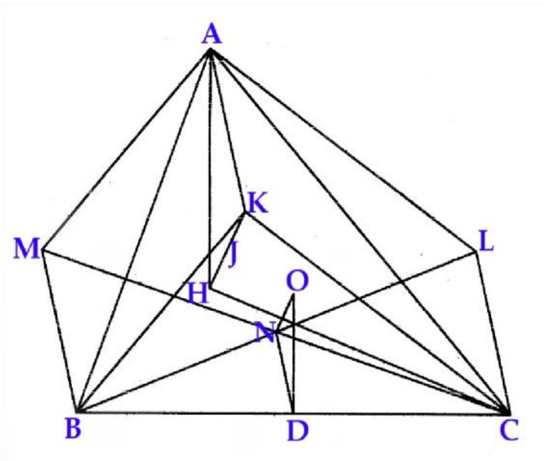
Tetapi untuk a = b = 6 tidak memenuhi $a^2 - 6b \geq 2\sqrt{b^2 - 4a}$.

Dengan cara yang sama juga didapat fakta bahwa $b \neq 6$.

Jadi, a > 6 dan b > 6.

∴ **Terbukti bahwa a dan b lebih dari 6.**

8. Alternatif 1 :



Karena AKCL dan AKBM keduanya jajaran genjang maka MB = AK = LC serta MB ∥ AK ∥ LC.

Jadi, MBCL pun jajaran genjang. Maka kedua diagonalnya akan berpotongan di tengah.

Jadi, N adalah titik tengah BL.

Misalkan D adalah titik tengah BC maka ND akan sejajar LC. Jadi, ND ∥ MB ∥ AK ∥ LC.

Karena N adalah prtengahan BL dan D pertengahan BC maka ND = $\frac{1}{2}$ LC. Jadi, ND = $\frac{1}{2}$ AK.

Karena O adalah pusat lingkaran luar dan D pertengahan BC maka OD ⊥ BC. Garis tinggi AH juga tegak lurus BC. Jadi, OD ∥ AH.

Karena OD = R cos A sedangkan AH = $\frac{b\cos A}{\sin B}$ = 2R cos A maka OD = $\frac{1}{2}$ AH.

Karena ND ∥ AK dan OD ∥ AH maka ∠HAK = ∠ODN.

Karena ND = $\frac{1}{2}$ AK dan OD = $\frac{1}{2}$ AH serta ∠ODN = ∠HAK maka ΔDNO dan ΔAHK sebangun.

Jadi, NO = $\frac{1}{2}$ HK dan NO ∥ HK.

Karena J pertengahan HK maka NO = JK serta NO ∥ JK. Akibatnya OK = ND dan OK ∥ NJ.

Jadi, KJON adalah jajaran genjang.

∴ **Terbukti bahwa KJON adalah jajaran genjang.**

Alternatif 2 :

Misalkan koordinat B(0 ,0) C(a, 0) dan A(b, c)

Jelas bahwa absis H adalah b.

Kemiringan garis AC adalah $m_{AC} = \frac{c}{b-a}$

Persamaan garis yang tegak lurus AC dan melalui B adalah y = $\frac{a-b}{c}$x.

Titik H terletak pada garis tersebut maka

$y_H = \frac{(a-b)b}{c}$

Jadi, koordinat H(b, $\frac{(a-b)b}{c}$)

Jelas bahwa absis O adalah $\frac{1}{2}$ a.

Karena B(0, 0) maka persamaan lingkaran yang melalui titik A, B dan C adalah

$x^2 + y^2 + Ax + By = 0$

Karena absis pust lingkaran sama dengan $\frac{1}{2}$ a maka

$x^2 + y^2 - ax + By = 0$

Lingkaran melalui titik (b, c) maka

$b^2 + c^2 - a(b) + B(c) = 0$

$B = \frac{ab-b^2-c^2}{c}$

Jadi, $y_O = \frac{b^2+c^2-ab}{2c}$

Koordinat O(($\frac{1}{2}$a, $\frac{b^2+c^2-ab}{2c}$)

Misalkan koordinat K(p, q)

Misalkan koordinat M(x_M, y_M) dan L(x_L, y_L)

Karena BMAK jajaran genjang maka ruas BM sejajar dan sama panjang dengan KA. Jadi, proyeksi ruas BM dan KA terhadap sumbu X dan Y akan sama.

Jadi, $x_M - 0 = b - p$ dan $y_M - 0 = c - q$.

Maka koordinat M(b − p, c − q).

Dengan cara yang sama karena KALC jajaran genjang maka

$x_L - a = b - p$ dan $y_L - 0 = c - q$

Maka koordinat L(a + b − p, c − q)

Karena BMAK dan KALC keduanya jajaran genjang maka BM sejajar dan sama panjang dengan KA serta KA sejajar dan sama panjang dengan CL. Jadi, BM sejajar dan sama panjang dengan CL.

Akibatnya, BMLC juga jajaran genjang. Maka diagonal CM dan BL akan berpotongan di tengah. Jadi, N adalah pertengahan BL.

Koordinat N$(\frac{a+b-p}{2}, \frac{c-q}{2})$

J adalah pertengahan H dan K maka koordinat J$(\frac{b+p}{2}, \frac{ab-b^2+cq}{2c})$

$m_{JK} = \frac{2cq-ab+b^2-cq}{2c} \cdot \frac{2}{2p-b-p} = \frac{cq-ab+b^2}{c(p-b)}$

$m_{NO} = \frac{b^2+c^2-ab-c^2+cq}{2c} \cdot \frac{2}{a-a-b+p} = \frac{cq-ab+b^2}{c(p-b)}$

$m_{OK} = \frac{2cq-b^2-c^2+ab}{2c} \cdot \frac{2}{2p-a} = \frac{2cq-b^2-c^2+ab}{c(2p-a)}$

$m_{NJ} = \frac{ab-b^2+cq-c^2+cq}{2c} \cdot \frac{2}{b+p-a-b+p} = \frac{2cq-b^2-c^2+ab}{c(2p-a)}$

Karena $m_{JK} = m_{NO}$ dan $m_{OK} = m_{NJ}$ maka KONJ adalah jajaran genjang.

∴ **Terbukti bahwa KJON adalah jajaran genjang.**

(Catatan : Jika pembuktikan menggunakan vektor maka cukup dibuktikan bahwa $\overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{ON}$ karena vektor mengandung besar dan arah sedangkan gradien garis hanya mengandung kemiringan (arah) saja tanpa panjang (besar) dari suatu garis.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2011

TINGKAT KABUPATEN/KOTA

BIDANG MATEMATIKA

WAKTU : 180 MENIT

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Kabupaten/Kota Tahun 2011

1. Ada berapa faktor positif $2^7 3^5 5^3 7^2$ yang merupakan kelipatan 10?

2. Bilangan asli terkecil lebih dari 2011 yang bersisa 1 jika dibagi 2,3,4,5,6,7,8,9,10 adalah …

3. Bilangan bulat positif terkecil a sehingga $2a + 4a + 6a + \ldots + 200a$ merupakan kuadrat sempurna adalah …

4. Untuk bilangan asli n, $p(n)$ dan $s(n)$ berturut-turut menyatakan hasil kali dan jumlah angka pembentuk n. Jika n bilangan dua angka dan $n + p(n) + s(n) = 69$, maka n adalah …

5. Jumlah digit dari $(111.111.111)^2$ adalah …

6. Dua buah dadu dilempar bersamaan. Sisi dadu pertama diberi angka 1,2,2,3,3, dan 4. Sisi dadu kedua diberi angka 1,3,4,5,6, dan 8. Peluang agar jumlah kedua sisi atas sama dengan 5,7, atau 9 adalah …

7. Keliling suatu segitiga adalah 5 dan jumlah kuadrat sisi-sisinya adalah 17. Jika jari-jari lingkaran luar segitiga itu adalah 2, maka jumlah ketiga tinggi segitiga itu adalah …

8. Jika bilangan m dibagi 5 memberikan sisa 3, dan bilangan n dibagi 5 memberikan sisa 2. Maka bilangan mn bila dibagi 5 akan memberikan sisa …

9. Nilai dari $\frac{(2^{2010})^2-(2^{2008})^2}{(2^{2011})^2-(2^{2009})^2}$ adalah …

10. Diketahui sebuah bulan dengan jumlah hari 31 memiliki jumlah hari Selasa dan Kamis yang sama banyaknya. Maka hari yang mungkin sebagai hari awal pada bulan tersebut adalah …

11. Diberikan segitiga ABC, melalui AB sebagai diameter dibuat lingkaran. Lingkaran tersebut memotong AC dan BC berturut-turut di titik D dan E.

    Jika $AD = \frac{1}{3}AC$; $BE = \frac{1}{4}BC$ dan $AB = 30$, maka luas segitiga ABC adalah …

12. Jika $n = 2011^2 + 2^{2011}$ maka digit satuan dari n^2 adalah …

13. Tentukan nilai dari $3x^2y^2$ jika x dan y adalah bilangan bulat yang memenuhi persamaan $y^2 + 3x^2y^2 = 30x^2 + 517$.

14. Setiap sekolah di kota A mengirimkan masing-masing 3 murid untuk mengikuti lomba matematika. Setiap peserta memperoleh nilai yang berbeda. Nilai Ali merupakan median dari nilai semua peserta dan merupakan nilai tertinggi dari teman satu sekolahnya yaitu Budi dan Charli. Jika Budi merperoleh peringkat 37 dan Charli peringkat 64 maka banyaknya sekolah dikota A adalah …

15. Misalkan f suatu fungsi yang memenuhi $f(xy) = \frac{f(x)}{y}$ untuk semua bilangan real positiif x dan y. Jika $f(100) = 3$ maka $f(10)$ adalah …

16. Koefisien x^4 dari perjalanan $(1 + 2x + 3x^2)^{10}$ adalah …

17. Diketahui segi empat konveks $ABCD$. Titik-titik P, Q, R dan S berturut-turut pada sisi AB, BC, CD dan DA. Tentukan nilai dari k sedemikian sehingga $\frac{AP}{PB} = \frac{BQ}{CQ} = \frac{CR}{RD} = \frac{DS}{SA} = k <$ 1 dan luas dari $PQRS$ = 52 dari luas $ABCD$.

18. Sekelompok orang akan berjabat tangan. Setiap orang hanya dapat melakukan jabat tangan sekali. Tidak boleh melakukan jabat tangan dengan dirinya sendiri. Jika dalam sekelompok orang terjadi 190 jabat tangan, maka banyaknya orang dalam kelompok tersebut adalah …

19. Diketahui segitiga ABC, titik D dan E berturut-tuurut pada sisi AB dan AC, dengan panjang $AD = \frac{1}{2}BD$ dan $AE = \frac{1}{2}CE$. Garis BE dan CD berpotongan dititik F. Diketahui luas segitiga ABC adalah 90 cm^2. Luas segiempat $ADFE$ adalah …

20. Ani mempunyai sangat banyak dadu dengan ukuran 3 x 3 x 3 cm^3. Jika ia memasukkan dadu-dadu tersebut ke dalam sebuah kardus dengan ukuran 50 x 40 x 35 cm^3 maka berapa banyak dadu yang bisa masuk ke dalam kardus tersebut?

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2011

TINGKAT KABUPATEN/KOTA

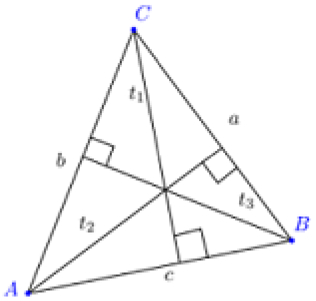
SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Kabupaten/Kota Tahun 2011

1. **Jawaban : 378**
   Karena $2^7 3^5 5^3 7^2 = 2^6 3^5 5^2 7^2 \cdot 10$, maka banyaknya faktor positif $2^7 3^5 5^3 7^2$ yang merupakan kelipatan 10 sama dengan banyaknya faktor positif $2^6 3^5 5^2 7^2$, yaitu ada 7 x 6 x 3 x 3 = 378.
2. **Jawaban : 2521**
   Bilangan bersisa 1 jika dibagi 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 berbentuk KPK (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10) · n + 1 = 2520n + 1 dengan $n \in \mathbb{Z}$
   Karena yang diminta bilangan asli terkecil lebih dari 2011 maka pilih n = 1. Sehingga diperoleh bilangan asli terkecil lebih dari 2011 yang bersisa 1 jika dibagi 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 adalah 2521.
3. **Jawaban : 101**
   Perhatikan,
   $$\begin{aligned} 2a + 4a + 6a + \cdots + 200a &= 2a(1 + 2 + 3 + \cdots + 100) \\ &= 2a\left(\frac{100(1+100)}{2}\right) \\ &= 101 \cdot 100 \cdot a \end{aligned}$$
   Jadi, nilai a haruslah 101.
4. **Jawaban : 52**
   Misal n = 10a + b dengan 1 a 6 dan 0 b 9. Maka persamaan pada soal dapat kita tulis menjadi
   $$\begin{aligned} n + p(n) + s(n) = 69 &\Leftrightarrow 10a + b + ab + a + b = 69 \\ &\Leftrightarrow 11a + 2b + ab = 69 \\ &\Leftrightarrow (a + 2)(b + 11) = 91 = 7 \cdot 13 \end{aligned}$$
   Sehingga kemungkinan pasangan nilai (a + 2, b + 11) adalah (1, 91) dan (7, 13) tetapi nilai yang mungkin yaitu a + 2 = 7 dan b + 11 = 13 maka diperoleh a = 5 dan b = 2. Oleh karena itu, bilangan n yang dimaksud adalah 52.
5. **Jawaban : 81**
   Karena $(111.111.111)^2 = 12345678987654321$, maka jumlah digit - digit dari $(111.111.111)^2$ adalah
   $$2(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) - 9 = 2 \cdot 45 - 9 = 81$$
6. **Jawaban :** $\frac{\mathbf{14}}{\mathbf{36}}$
   - Jumlah sisi atas sama dengan 5. Pasangan yang mungkin adalah (1, 4),(2, 3),(2, 3) dan (4, 1)
   - Jumlah sisi atas sama dengan 7. Pasangan yang mungkin adalah (1, 6),(2, 5),(2, 5),(3, 4),(3, 4) dan (4, 3)
   - Jumlah sisi atas sama dengan 9. Pasangan yang mungkin adalah (1, 8),(3, 6),(3, 6) dan (4, 5)

   Jadi, peluang agar jumlah kedua sisi atas sama dengan 5, 7, atau 9 adalah $\frac{\mathbf{14}}{\mathbf{36}}$
7. **Jawaban : 1**
   Perhatikan gambar dibawah ini!



Misalkan sisi - sisi segitiga tersebut adalah a, b, c maka diperoleh

$$a+b+c \ = 5$$

dan

$$a^2+b^2+c^2 = 17$$

selain itu kita punya identitas

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac)$$

$25 = (a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ac) = 17+2(ab+bc+ac) \Leftrightarrow ab+bc+ac = 4$

Misalkan pula *R* jari - jari lingkaran luar dari segitiga ABC maka diketahui *R* = 2. Dari aturan sinus diperoleh

$$\frac{a}{\sin A}+\frac{b}{\sin B}+\frac{c}{\sin C} = 2R = 4$$

Oleh karena itu, jika t_1, t_2, t_3 berturut - turut adalah garis tinggi yang ditarik dari titik *C, A, B* maka didapatkan

$$\begin{aligned} t_1+t_2+t_3 \quad &= b\sin A + c\sin B + a\sin C \\ &= b\cdot\tfrac{a}{4}+c\cdot\tfrac{b}{4}+a\cdot\tfrac{c}{4} \\ &= \tfrac{1}{4}(ab+bc+ac) \\ &= \tfrac{1}{4}\cdot 4 = 1 \end{aligned}$$

8. **Jawaban : 1**

   Dari soal kita ketahui,

   $$m \equiv 3 \pmod 5$$

   dan

   $$n \equiv 2 \pmod 5$$

   sehingga

   $$mn \equiv 3\cdot 2 \equiv 6 \equiv 1 \pmod 5$$

   Jadi, *mn* memberikan sisa 1 jika dibagi 5.

9. **Jawaban : $\frac{1}{4}$**

   Perhatikan :

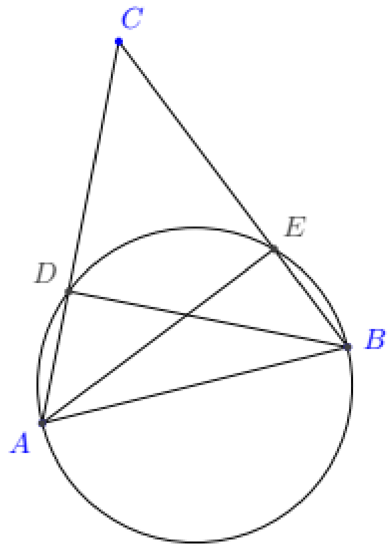
   $$\begin{aligned} \frac{(2^{2010})^2-(2^{2008})^2}{(2^{2011})^2-(2^{2009})^2} &= \frac{(2^{2010})^2-(2^{2008})^2}{2^2((2^{2010})^2-(2^{2008})^2)} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

10. **Jawaban : Selasa, Jumat dan Sabtu**

Perhatikan bahwa nama - nama hari berulang setiap 7 hari. Hal ini berarti 28 hari terakhir dari bulan yang dimaksud memiliki jumlah hari Selasa dan Kamis yang sama. Sehingga kita hanya perlu memperhatikan 3 hari pertama dalam bulan tersebut. Agar pada bulan tersebut jumlah hari Selasa dan Kamis sama, maka haruslah pada 3 hari pertama, hari Selasa dan Kamis muncul kedua- duanya atau keduanya tidak muncul sama sekali. Jadi, kemungkinan hari pertama bulan tersebut adalah Selasa, Jumat, dan Sabtu.

11. **Jawaban : 540**

Perhatikan sketsa gambar di bawah ini:



Perlu diperhatikan bahwa ∠ADB = ∠CDB = ∠AEB = ∠AEC = 90◦. Misal, AD = x dan BE = y maka AC = 3x, CD = 2x, BC = 4y dan CE = 3y. Dengan teorema Phytagoras pada segitiga ABD dan segitiga BCD diperoleh

$$30^2 - x^2 = (4y)^2 - (2x)^2 \Leftrightarrow 900 - x^2 = 16y^2 - 4x^2$$
$$\Leftrightarrow 900 = 16y^2 - 3x^2$$

Demikian pula dengan teorema Phytagoras pada segitiga ABE dan segitiga ACE diperoleh

$$30^2 - y^2 = (3x)^2 - (3y)^2 \Leftrightarrow 900 - y^2 = 9x^2 - 9y^2$$
$$\Leftrightarrow 900 = 9x^2 - 8y^2$$

dengan menggabungkan kedua persamaan di atas didapat,

$$16y^2 - 3x^2 = 9x^2 - 8y^2 \Leftrightarrow 24y^2 = 12x^2 \Leftrightarrow x^2 = 2y^2$$

sehingga kita peroleh

$$900 = 16y^2 - 3x^2 = 16y^2 - 6y^2 = 10y^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{90}$$

Oleh karena itu,

$$AE^2 = 900 - y^2 = 900 - 90 = 810 \Leftrightarrow AE = \sqrt{810}$$

Jadi,

Luas Segitiga ABC $= \frac{1}{2}$ BC · AE

$= \frac{1}{2} \cdot 4y \cdot \sqrt{810}$

$= 2 \cdot \sqrt{90}\sqrt{810}$

$= 2 \cdot 3\sqrt{10} \cdot 9\sqrt{10} = 540$

12. **Jawaban : 1**
Perhatikan bahwa digit satuan dari 2011_2 adalah 1. Selain itu digit satuan dari 2^{2011} adalah 8. Sehingga digit satuan dari n adalah 9, yang berakibat digit satuan dari n^2 adalah 1.
13. **Jawaban : 588**
$$y^2 + 3x^2y^2 = 30x^2 + 517 \Leftrightarrow y^2(1 + 3x^2) = 10(3x^2 + 1) + 507$$
$$\Leftrightarrow y^2(1 + 3x^2) - 10(3x^2 + 1) = 507$$
$$\Leftrightarrow (3x^2 + 1)(y^2 - 10) = 507 = 3 \cdot 13^2$$
Terlihat bahwa $(3x^2 + 1)$ dan $(y^2 – 10)$ adalah faktor dari 507. Tetapi karena $(3x^2 + 1)$ positif maka $(y^2 – 10)$ juga positif, sehingga $(y^2 – 10)$ adalah faktor positif dari 507. Padahal kita tahu faktor positif dari 507 adalah 1, 3, 13, 39, 169, dan 507. Selain itu, y adalah bilangan bulat maka y^2 merupakan kuadrat sempurna. Jadi, nilai (y^2-10) yang mungkin adalah $(y^2 – 10) = 39 \Leftrightarrow y^2 = 49$ yang berakibat $(3x^2 + 1) = 13 \Leftrightarrow 3x^2 = 12$. Oleh karena itu, $3x^2y^2 = 12 \cdot 49 = 588$.
14. **Jawaban : 23**
Misalkan banyak peserta lomba adalah n, dan misalkan pula peringkat Ali adalah x dengan $n,x \in \mathbb{Z}^+$ dan n kelipatan 3. Karena nilai Ali adalah median maka n dan x pasti ganjil. Selain itu, x < 37 dan x > 31 sebab jika x ≤ 31 maka n ≤ 61 yang jelas tidak mungkin sebab Charli peringkat 64. Oleh karena itu, ada dua kemungkinan nilai x :
    - Jika x = 33 maka n = 65 yang jelas tidak mungkin sebab 65 bukan kelipatan 3.
    - Jika x = 35 maka n = 69

    Jadi, banyaknya peserta lomba ada 69 yang berarti banyak sekolah di kota A adalah 23.
15. **Jawaban : 30**
$$3 = f(100) + \frac{f(10)}{10}$$
sehingga $f(10) = 30$
16. Jawaban : 8085
Dengan Binom Newton diperoleh
$$(1 + 2x + 3x^2)^{10} = \sum_{i=0}^{10} \binom{10}{i} (1 + 2x)^{10-i} \cdot (3x^2)^i$$
sehingga x^4 diperoleh ketika i = 0, 1, 2
    - Jika $i = 0$ diperoleh
    $$(1 + 2x)^{10} = \sum_{j=0}^{10} \binom{10}{j} (2x)^j$$
    suku x^4 diperoleh ketika $j = 4$ yaitu
    $$\binom{10}{4} (2x)^4 = 3360x^4$$
    - Jika $i = 1$ diperoleh

$$\binom{10}{1}(1+2x)^9 \cdot 3x^2 = 30x^2 \sum_{j=0}^{9} \binom{9}{j} (2x)^j$$

suku x^4 diperoleh ketika $j = 2$ yaitu

$$30x^2 \binom{9}{2} (2x)^2 4320x^4$$

- Jika $i = 2$ diperoleh

$$\binom{10}{2}(1+2x)^8 \cdot (3x^2)^2 = 405x^4 \sum_{j=0}^{8} \binom{8}{j} (2x)^j$$

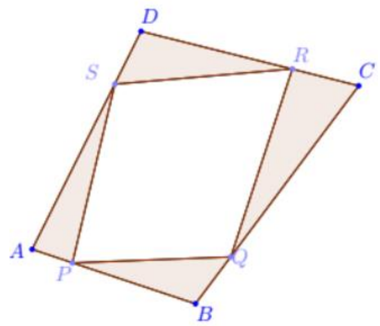
suku x^4 diperoleh ketika $j = 0$ yaitu

$$405x^4 \binom{8}{0} (2x)^0 = 405x^4$$

Jadi, koefisien x^4 adalah 3360 + 4320 + 405 = 8085

17. Jawaban : $\frac{2}{3}$

Perhatikan gambar dibawah ini!



Misalkan, notasi [ABC] menyatakan luas bidang ABC, maka:

$$[APS] = \frac{1}{k+1}[ABS] = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{k}{k+1}[ABD]$$

$$= \frac{k}{(k+1)^2}[ABD]$$

$$[QCR] = \frac{1}{k+1}[QCD] = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{k}{k+1}[BCD]$$

$$= \frac{k}{(k+1)^2}[BCD]$$

$$[BQP] = \frac{1}{k+1}[BAC] = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{k}{k+1}[ABC]$$

$$= \frac{k}{(k+1)^2}[ABC]$$

$$[SDR] = \frac{1}{k+1}[ADR] = \frac{1}{k+1} \cdot \frac{k}{k+1}[ADC]$$

$$= \frac{k}{(k+1)^2}[ADC]$$

Jumlahkan keempat persamaan di atas.

$$\frac{k}{(k+1)^2}([ABD]+[BCD]+[ABC]+[ADC])=[APS]+[QCR]+[BQP]+[SDR]$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{(k+1)^2}([ABCD]+[ABCD])=\frac{48}{100}[ABCD]$$

$$\Leftrightarrow \frac{2k}{(k+1)^2}=\frac{12}{25}$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{k^2+2k+1}=\frac{6}{25}$$

$$\Leftrightarrow 6k^2+12k+6=25k$$

$$\Leftrightarrow 6k^2-13k+6=0$$

$$\Leftrightarrow (3k-2)(2k-3)=0$$

Karena k < 1 maka diperoleh k = $\frac{2}{3}$

18. **Jawaban : 20**

Misal, banyak orang dalam kelompok tersebut adalah n maka banyaknya jabat tangan yang terjadi adalah $\binom{n}{2}$. Karena diketahui terjadi 190 jabat tangan, maka

$$\binom{n}{2}=190 \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{2}=190$$

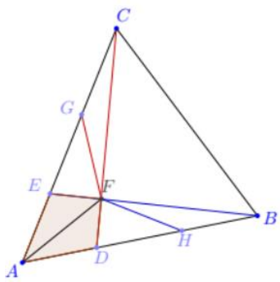
$$\Leftrightarrow n^2-n-380=0$$

$$\Leftrightarrow (n-20)(n+19)=0$$

Jadi, diperoleh nilai n = 20.

19. **Jawaban : 15**

Perhatikan gambar di bawah ini!



Perlu diketahui bahwa jika dua segitiga memiliki tinggi yang sama maka perbandingan luasnya sama dengan perbandingan alas kedua segitiga tersebut. Dari sini kita dapat,

$$[ACD]=\frac{1}{3}[ABC]=\frac{1}{3}\cdot 90=30\text{ cm}^2$$

dan

$$[ABE]=\frac{1}{3}[ABC]=\frac{1}{3}\cdot 90=30\text{ cm}^2$$

Misalkan pula, titik *G* dan *H* berturut - turut terletak di pertengahan *CE* dan *BD* maka *AE* = *EG* = *GC* dan *AD* = *DH* = *HB*. Oleh karena itu, diperoleh [AEF] = [EFG] = [GFC] dan [AFD] = [DFH] = [HFB]. Sehingga kita peroleh,

$$[ABE] + [ACD] = 30 + 30$$

$$\Leftrightarrow [AEF] + [AFD] + [DFH] + [HFB] + [AFD] + [AEF] + [EFG] + [GFC] = 60$$

$$\Leftrightarrow 4[AEF] + 4[AFD] = 60$$

$$\Leftrightarrow [AEF] + [AFD] = 15$$

$$\Leftrightarrow [ADFE] = 15$$

Jadi, luas segiempat ADFE adalah 15 cm^2.

20. **Jawaban : 2288**

Banyak dadu yang bisa masuk ke kardus yaitu,

$$\left\lceil\frac{50}{3}\right\rceil \cdot \left\lceil\frac{40}{3}\right\rceil \cdot \left\lceil\frac{35}{3}\right\rceil = 16 \cdot 13 \cdot 11 = 2288$$

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2011

TINGKAT PROVINSI

BIDANG MATEMATIKA

WAKTU : 210 MENIT

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2011

1. Diberikan segitiga sama kaki ABC dengan $AB = AC$. Misalkan garis bagi sudut ABC memotong AC di titik D sehingga $BC = BD + AD$. Besar sudut CAB adalah …

2. Jika n bilangan asli dan $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{n}$ merupakan bilangan bulat, maka pembagi positif dari n sebanyak …

3. Jika $a \geq b > 1$, maka nilai terbesar yang mungkin untuk ${}^{a}\log\left(\frac{a}{b}\right) + {}^{b}\log\left(\frac{b}{a}\right)$ adalah …

4. Diketahui segi empat $ABCD$. Semua titik A, B, C dan D akan diberi nomor 1, 2, 3, 4, 5 atau 6 sehingga setiap dua titik yang terletak dalam satu sisi empat nomornya berbeda. Banyaknya cara pemberian nomor dengan cara tersebut ada sebanyak …

5. Diberikan fungsi f dengan $f(x) = \sqrt{ax^2+x}$. Semua nilai a yang mungkin sehingga domain dan daerah hasil f sama adalah …

6. Banyaknya kemungkinan bilangan asli berbeda a, b, c dan d yang kurang dari 10 dan memenuhi persamaan $a + b = c + d$ ada sebanyak …

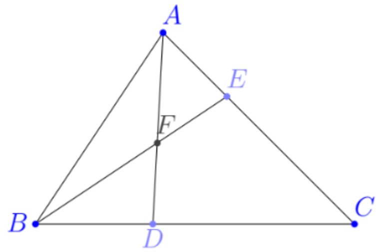
7. Jika kedua akar persamaan $x^2 - 2013x + k = 0$ adalah bilangan prima, maka nilai k yang mungkin adalah …

8. Jika
$$\left(1-\tan^2\frac{x}{2^{2011}}\right)\left(1-\tan^2\frac{x}{2^{2010}}\right)\dots\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right) = 2^{2011}\sqrt{3}\tan\frac{x}{2^{2011}}$$
maka $\sin 2x$ adalah …

9. Pada ruang Cartesius kita ingin bergerak dari titik (2, 0, 11) ke titik (20, 1, 1) selalu pada koordinat (x, y, z) dengan paling sedikit dua dari x, y dan z adalah bilangan bulat, dan lintasan terpendek. Cara bergerak yang dimaksud sebanyak …

10. Misalkan x, y dan z adalah bilangan real positif dengan sifat $xyz = 1$. Nilai terkecil dari
$$(x + 2y)(y + 2z)(xz + 1)$$
tercapai saat $x + y + z$ bernilai …

11. Pada gambar di bawah ini, panjang $AE = x$, $EC = y$ dan $DC = 2BD$. Perbandingan panjang BF dan FE dinyatakan dalam x dan y adalah …



12. Banyaknya bilangan tiga digit yang semua digit – digitnya berbeda dan digit terakhir merupakan hasil penjumlahan dari dua digit yang lainnya adalah …

13. Diberikan barisan bilangan rasional $\{a_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ yang didefinisikan dengan $a_1 = 2$ dan

$$a_{n+1} = \frac{a_{n-1}}{a_{n+1}}, n \in \mathbb{N}$$

Nilai a_{2011} adalah …

14. Misalkan Γ lingkaran luar segitiga ABC. Talibusur AD adalah garis bagi $\angle BAC$ yang memotong BC di titik L. Talibusur DK tegak lurus pada AC dan memotongnya di titik M. Jika $\frac{BL}{BC} = \frac{1}{2}$, maka perbandingan $\frac{AM}{MC}$ = …

15. Dua dadu memiliki angka 1 sampai 6 yang dapat dilepas dari dadu. Kedua belas angka tersebut dilepas dari dadu dan dimasukkan ke dalam suatu kantong. Secara acak diambil satu angka dan dipasangkan ke salah satu dari kedua dadu tersebut. Setelah semua angka terpasangkan, kedua dadu dilemparkan secara bersamaan. Peluang munculnya angka tujuh sebagai jumlah dari angka pada bagian atas kedua dadu tersebut adalah …

16. Banyaknya bilangan asli n sehingga setiap titik dengan koordinat bilangan asli yang terletak pada garis $x + y = n$ mempunyai jarak suatu bilangan prima terhadap titik pusat (0,0) adalah …

17. Bilangan asli n yang memenuhi $(-2004)^n - 1900^n + 25^n - 121^n$ habis dibagi 2000 adalah …

18. Sepuluh orang siswa duduk dalam suatu baris. Semua siswa bangkit dan duduk kembali pada baris tersebut dengan aturan setiap siswa dapat duduk kembali pada kursi yang sama atau pada kursi yang berada di sebelah kursi lamanya. Banyaknya cara semua siswa tersebut duduk kembali pada baris tadi ada sebanyak …

19. Bilangan asli terbesar $n \leq 123456$ sehingga terdapat bilangan asli x dengan sifat jumlah semua digit dari x^2 sama dengan n adalah …

20. Misalkan ABC suatu segitiga dan P titik di dalam segitiga. Misalkan D, E, F berturut – turut titik di sisi – sisi BC, CA, AB sedemikian sehingga PD tegak lurus BC, PE tegak lurus CA, dan PF tegak lurus AB. Jika segitiga DEF sama sisi dan $\angle APB = 70^\circ$, maka $\angle ACB$ = …

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2011

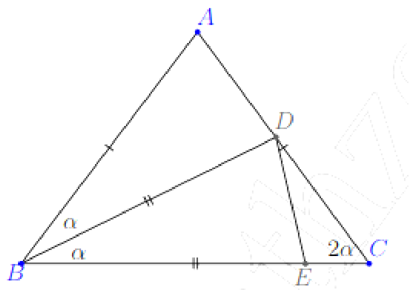
TINGKAT PROVINSI

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2011

1. **Penyelesaian:**
Perhatikan gambar berikut!



Karena AD garis bagi $\angle ABC$ diperoleh

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{CD}\Leftrightarrow\frac{BC}{CD}=\frac{AB}{AD}$$

Selain itu karena $BC = BD + AD$ dan $BD = BE$ maka $AD = CE$. Ingat juga bahwa $AB = AC$ sehingga diperoleh $AB \cdot CE = AC \cdot AD$ yang equivalen dengan

$$\frac{AB}{AD}=\frac{AC}{CE}$$

Sehingga

$$\frac{BC}{CD}=\frac{AC}{CE}$$

Dengan kata lain ΔCED sebangun dengan ΔABC. Jadi, ΔCED sama kaki dengan $CE = DE$. Karena $\angle CDE = \angle DCE = 2\alpha$ maka $\angle CED = 180^o - 4\alpha$. Perhatikan pula pada ΔBDE, besar $\angle BED = \frac{180^o-\alpha}{2}$. Karena $\angle BED + \angle CED = 180^o$, maka diperoleh

$$\frac{180^\circ-\alpha}{2}+180^\circ-4\alpha=180^\circ$$
$$\frac{180^\circ-\alpha}{2}=4\alpha$$
$$8\alpha=180-\alpha$$
$$\alpha=20^\circ$$

Jadi, $\angle CAB = \angle CED = 180^o - 4\alpha = 100^o$.

2. **Penyelesaian:**
Misalkan, $N = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{n}$ maka diperoleh

$$N=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{n}=\frac{31}{30}-\frac{1}{n}=1+\frac{1}{30}-\frac{1}{n}$$

Karena $0 < \frac{1}{n} \le 1$ maka $-\frac{29}{30} \le \frac{1}{30}-\frac{1}{n} < \frac{1}{30}$ sehingga agar N bulat haruslah $\frac{1}{30}-\frac{1}{n} = 0$. Dengan kata lain, $n = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Sehingga banyak pembagi positif dari n adalah $(1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 2.2.2 = 8$.

Jadi, ada 8 faktor positif dari n.

3. **Penyelesaian:**

Dengan memanfaatkan sifat-sifat fungsi logaritma diperoleh,

${}^{a}\log\left(\frac{a}{b}\right) + {}^{b}\log\left(\frac{b}{a}\right) = {}^{a}\log a - {}^{a}\log b + {}^{b}\log b - {}^{b}\log a$

$= 2 - \left({}^{a}\log b - {}^{b}\log a\right)$

$= 2 - \left({}^{a}\log b + \frac{1}{{}^{a}\log b}\right)$

Karena $\forall x \in \mathbb{R}^+$ berlaku $x + \frac{1}{x} \geq 2$ maka berakibat

$${}^{a}\log\left(\frac{a}{b}\right) + {}^{b}\log\left(\frac{b}{a}\right) = 2 - \left({}^{a}\log b + \frac{1}{{}^{a}\log b}\right) \leq 2 - 2 = 0$$

Jadi, nilai maksimum dari ${}^{a}\log\left(\frac{a}{b}\right) + {}^{b}\log\left(\frac{b}{a}\right)$ adalah 0 yaitu diperoleh saat $a = b$.

4. **Penyelesaian:**

	A	B	C	D
$A = C$	6	1	5	5
$A \neq C$	6	5	4	4

Sehingga total = 6 × 1 × 5 × 5 + 6 × 5 × 4 × 4 = 150 + 480 = 630

Jadi, ada 630 cara.

5. **Penyelesaian:**

Langkah 1: Menentukan Domain dan Range

Domain (daerah asal) dari fungsi $f(x) = \sqrt{ax^2 + x}$ adalah himpunan semua nilai x yang membuat ekspresi di dalam akar tidak negatif, yaitu $ax^2 + x \geq 0$.

Range (daerah hasil) dari fungsi akar kuadrat, secara umum, adalah [0, ∞). Namun, jika domainnya terbatas pada suatu interval tertutup, maka range-nya juga bisa terbatas.

Langkah 2: Memeriksa kasus a = 0

Jika $a = 0$, fungsi menjadi $f(x) = \sqrt{x}$.

Domainnya ditentukan oleh $x \geq 0$, yaitu [0, ∞).

Range-nya adalah [0, ∞).

Karena domain dan range-nya sama, maka a = 0 adalah salah satu solusi.

Langkah 3: Memeriksa kasus $a > 0$

Jika $a > 0$, maka $ax^2 + x \geq 0 \Longrightarrow x(ax + 1) \geq 0$.

Akar-akarnya adalah $x = 0$ dan $x = -1/a$. Karena $a > 0$, maka $-1/a < 0$.

Parabola $ax^2 + x$ terbuka ke atas, sehingga $ax^2 + x \geq 0$ jika $x \leq -1/a$ atau $x \geq 0$.

Domainnya adalah $(-\infty, -1/a] \cup [0, \infty)$.

Range-nya adalah $[0, \infty)$ karena nilai minimum dari $ax^2 + x$ adalah negatif dan nilai-nilai lainnya tak terbatas ke atas.

Domain ini tidak sama dengan range, sehingga tidak ada solusi untuk $a > 0$.

Langkah 4: Memeriksa kasus $a < 0$
Jika $a < 0$, maka $ax^2 + x \geq 0 \Longrightarrow x(ax + 1) \geq 0$.
Akar-akarnya adalah $x = 0$ dan $x = -1/a$. Karena $a < 0$, maka $-1/a > 0$.
Parabola $ax^2 + x$ terbuka ke bawah. Ketidaksetaraan $x(ax + 1) \geq 0$ berlaku untuk nilai x di antara akar-akarnya.
Domainnya adalah $[0, -1/a]$.
Sekarang kita perlu menentukan range fungsi pada domain ini.
Nilai maksimum dari $ax^2 + x$ terjadi di sumbu simetri $x = -1/(2a)$. Nilai ini berada dalam domain $[0, -1/a]$.
Nilai maksimumnya adalah
$a(-1/(2a))^2 + (-1/(2a)) = a/(4a^2) - 1/(2a) = 1/(4a) - 2/(4a) = -1/(4a)$.
Nilai minimumnya adalah 0 (terjadi di $x = 0$ dan $x = -1/a$.
Jadi, range dari $ax^2 + x$ pada domainnya adalah $[0, -1/(4a)]$.
Range dari $f(x) = \sqrt{ax^2 + x}$ adalah $[0, \sqrt{-1/(4a)}]$.

Agar domain dan range sama, maka:
$[0, -1/a] = [0, \sqrt{-1/(4a)}]$
Ini berarti:
$-1/a = \sqrt{-1/(4a)}$
Kuadratkan kedua sisi:
$(-1/a)^2 = -1/(4a)$
$1/a^2 = -1/(4a)$
$4a = -a^2$
$a^2 + 4a = 0$
$a(a + 4) = 0$
$a = 0$ atau $a = -4$
Karena kita berada dalam kasus $a < 0$, maka solusi yang memenuhi adalah $a = -4$.
Jadi, Nilai-nilai a yang mungkin adalah 0 dan -4.

6. **Penyelesaian:**
Dalam soal ini saya menganggap susunan 1 + 4 = 2 + 3, 1 + 4 = 3 + 2, 4 + 1 = 2 + 3, 4 + 1 = 3 + 2, 2 + 3 = 1 + 4, 2 + 3 = 4 + 1, 3 + 2 = 1 + 4, 3 + 2 = 4 + 1 sebagai 8 susunan yang berbeda.
Misalkan $a + b = k$ dengan $a < b$ maka diperoleh $3 \leq k \leq 17$. Kita cek semua kemungkinan untuk nilai k. (Dikuli).
$k = 3$, diperoleh solusi (a, b) yaitu (1, 2).
Banyaknya penyelesaian dari $a + b = c + d$ yaitu 0 (sebab keempat bilangan harus berbeda)
$k = 4$, diperoleh solusi (a, b) yaitu (1, 3).
Banyaknya penyelesaian dari $a + b = c + d$ yaitu 0 (sebab keempat bilangan harus berbeda)
$k = 5$, diperoleh solusi (a, b) yaitu (1, 4), (2, 3)
Banyaknya penyelesaian dari $a + b = c + d$ yaitu $\binom{2}{2} \cdot 8 = 8$

$k = 6$, diperoleh solusi (a, b) yaitu (2, 4), (1, 5).
Banyaknya penyelesaian dari $a + b = c + d$ yaitu $\binom{2}{2} \cdot 8 = 8$
$k = 7$, diperoleh solusi (a, b) yaitu (1, 6), (2, 5), (3, 4)
Banyaknya penyelesaian dari $a + b = c + d$ yaitu $\binom{3}{2} \cdot 8 = 24$
$k = 8$, diperoleh solusi (a, b) yaitu (1, 7), (2, 6), (3, 5).
Banyaknya penyelesaian dari $a + b = c + d$ yaitu $\binom{3}{2} \cdot 8 = 24$
$k = 9$, diperoleh solusi (a, b) yaitu (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5).
Banyaknya penyelesaian dari $a + b = c + d$ yaitu $\binom{4}{2} \cdot 8 = 48$
$k = 10$, diperoleh solusi (a, b) yaitu (1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6).
Banyaknya penyelesaian dari $a + b = c + d$ yaitu $\binom{4}{2} \cdot 8 = 48$
$k = 11$, diperoleh solusi (a, b) yaitu (2, 9), (3, 8), (4, 7), (5, 6).
Banyaknya penyelesaian dari $a + b = c + d$ yaitu $\binom{4}{2} \cdot 8 = 48$
$k = 12$, diperoleh solusi (a, b) yaitu (3, 9), (4, 8), (5, 7).
Banyaknya penyelesaian dari $a + b = c + d$ yaitu $\binom{3}{2} \cdot 8 = 24$
$k = 13$, diperoleh solusi (a, b) yaitu (4, 9), (5, 8), (6, 7).
Banyaknya penyelesaian dari $a + b = c + d$ yaitu $\binom{3}{2} \cdot 8 = 24$
$k = 14$, diperoleh solusi (a, b) yaitu (5, 9), (6, 8)
Banyaknya penyelesaian dari $a + b = c + d$ yaitu $\binom{2}{2} \cdot 8 = 8$
$k = 15$, diperoleh solusi (a, b) yaitu (6, 9), (7, 8).
Banyaknya penyelesaian dari $a + b = c + d$ yaitu $\binom{2}{2} \cdot 8 = 8$
$k = 16$, diperoleh solusi (a, b) yaitu (7, 9).
Banyaknya penyelesaian dari $a + b = c + d$ yaitu 0 (sebab keempat bilangan harus berbeda)
$k = 17$, diperoleh solusi (a, b) yaitu (8, 9).
Banyaknya penyelesaian dari $a + b = c + d$ yaitu 0 (sebab keempat bilangan harus berbeda)

Jadi, total ada 8 + 8 + 24 + 24 + 48 + 48 + 48 + 24 + 24 + 8 + 8 = 272 penyelesaian.

7. **Penyelesaian:**
Misalkan kedua akar persamaan tersebut adalah a dan b dan $a < b$. Kita peroleh
$$a + b = 2013 \quad \text{dan} \quad ab = k$$
Karena $a + b$ ganjil maka salah satu dari a atau b adalah ganjil dan satunya genap. Tetapi karena a, b prima berakibat $a = 2$ sehingga $b = 2011$. Oleh karena itu, $k = ab = 2 \cdot 2011 = 4022$.

8. **Penyelesaian:**
Dari identitas
$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$
Diperoleh
$$\rightarrow 1 - \tan^2 x = \frac{2 \tan x}{\tan 2x}$$
Sehingga

$$\left(1-\tan^2\frac{x}{2^{2011}}\right)\left(1-\tan^2\frac{x}{2^{2010}}\right)\cdots\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right)=2^{2011}\sqrt{3}\tan\frac{x}{2^{2011}}$$
$$\frac{2\cdot\tan\frac{x}{2^{2011}}}{\tan\frac{x}{2^{2010}}}\cdot\frac{2\cdot\tan\frac{x}{2^{2010}}}{\tan\frac{x}{2^{2009}}}\cdot\cdots\cdot\frac{2\cdot\tan\frac{x}{2}}{\tan x}=2^{2011}\sqrt{3}\tan\frac{x}{2^{2011}}$$
$$\frac{2^{2011}\cdot\tan\frac{x}{2^{2011}}}{\tan x}=2^{2011}\sqrt{3}\tan\frac{x}{2^{2011}}$$
$$\tan x=\frac{1}{3}\sqrt{3}$$

Oleh karena itu, $\sin x=\frac{1}{2}$ dan $\cos x=\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Sehingga $\sin 2x=2\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

9. **Penyelesaian:**
   Jika salah satu bukan bilangan bulat, maka ada tak hingga cara, sehingga ketiganya harus bulat.
   Untuk x, y, z semuanya bulat, maka
   Searah $x \to$ 2 ke 20 $\to$ ada 18 langkah
   Searah $y \to$ 0 ke 1 $\to$ ada 1 langkah
   Searah $z \to$ 11 ke 1 $\to$ ada 10 langkah +
   29 angkah
   Jadi, banyak cara = $\frac{29!}{18!\times1!\times10!}=380.570.190$ cara.
10. **Penyelesaian:**
   Dengan AM-GM diperoleh
   $$x+2y\geq 2\sqrt{2xy}$$
   $$y+2z\geq 2\sqrt{2yz}$$
   $$xz+1\geq 2\sqrt{xz}$$
   sehingga
   $$(x+2y)(y+2z)(xz+1)\geq 16\sqrt{x^2y^2z^2}=16xyz=16$$
   Oleh karena itu nilai terkecil dari $(x+2y)(y+2z)(xz+1)$ adalah 16 yaitu saat $x=2, y=1$ dan $z=\frac{1}{2}$
   sehingga diperoleh $x+y+z=3\frac{1}{2}$.
11. **Penyelesaian:**
   Menelaus : E, F, B :
   $\frac{EF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CA}{AE}=1$
   $$\frac{EF}{FB}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{x+y}{x}=1$$
   $$\Leftrightarrow\frac{EF}{FB}=\frac{2x}{x+y}\Rightarrow\frac{FB}{FE}=\frac{x+y}{2x}$$
12. **Penyelesaian:**
   Misal : $n=\overline{abc}$ $\quad a\neq b\neq c,\;\; a\neq 0,$
   $a+b=c\cdots\cdots(i)$
   $c=3\to(a,b)=\{(1,2),(2,1)\}\to 2$
   $c=4\to(a,b)=\{(1,3),(3,1)\}\to 2$

$$c = 5 \to (a,b) = \{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)\} \to 4$$
$$\vdots$$
$$c = 9 \to (a,b) = \{(1,8),(2,7),(3,6),(4,5),(5,4),(6,3),(7,2),(8,1)\} \to 8$$

Sehingga total = 2 + 2 + 4 + 4 + 6 + 6 + 8 = 32.

13. **Penyelesaian:**

Kita memiliki

$$a_2 = \frac{a_1 - 1}{a_1 + 1}$$

$$a_3 = \frac{a_2 - 1}{a_2 + 1} = \frac{\frac{a_1 - 1}{a_1 + 1} - 1}{\frac{a_1 - 1}{a_1 + 1} + 1} = \frac{-1}{a_1}$$

$$a_4 = \frac{a_3 - 1}{a_3 + 1} = \frac{\frac{-1}{a_1} - 1}{\frac{-1}{a_1} + 1} = -\frac{a_1 + 1}{a_1 - 1}$$

$$a_5 = \frac{a_4 - 1}{a_4 + 1} = \frac{-\frac{a_1 + 1}{a_1 - 1} - 1}{-\frac{a_1 + 1}{a_1 - 1} - 1} = a_1$$

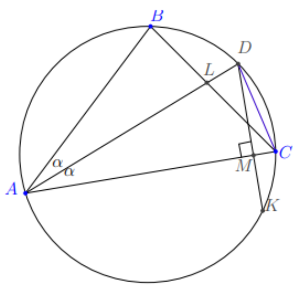
$$\Rightarrow a_n = \begin{cases} \frac{a_1 - 1}{a_1 + 1} = \frac{1}{3} \text{ if } n = 4k + 2m \, (m = 2t + 1; m, k, t \in \mathbb{N}^*) \\ -\frac{1}{a_1} = -\frac{1}{2} \text{ if } n = 4k + 2m + 1 \, (m = 2t + 1; m, k, t \in \mathbb{N}^*) \\ -\frac{a_1 + 1}{a_1 - 1} = -3 \text{ if } n = 4k \, (k \in \mathbb{N}^*) \\ a_1 = 2 \text{ if } n = 4k + 1 \, (k \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$$

Maka,

$$a_{2011} = a_{4 \times 502 + 2 + 1} = -\frac{1}{2}$$

14. **Penyelesaian:**

Perhatikan gambar berikut.



Karena AD adalah garis bagi $\angle BAC$ maka $\frac{AB}{AC} = \frac{BL}{LC} = \frac{1}{2}$. Misalkan Panjang $AB = x$ maka $AC = 2x$.
Perhatikan bahwa $\Delta CDL \sim \Delta ACD$ maka diperoleh

$$\frac{DC}{AD} = \frac{DL}{DC} \Leftrightarrow DC^2 = AD \cdot DL$$

Selain itu, $\Delta ABL \sim \Delta ACD$ sehingga diperoleh

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AL}{AC} \Leftrightarrow AD \cdot AL = AB \cdot AC = 2x^2$$

Karena ΔAMD dan ΔCMD keduanya adalah segitiga siku-siku, dengan dalil phytagoras kita peroleh

$$\begin{aligned} AD^2 - AM^2 = DC^2 - MC^2 &\Leftrightarrow AD^2 - DC^2 = AM^2 - MC^2 \\ &\Leftrightarrow AD^2 - AD \cdot AL = (AM + MC)(AM - MC) \\ &\Leftrightarrow AD(AD - AL) = 2x(AM - MC) \\ &\Leftrightarrow AD \cdot DL = 2x(AM - MC) \\ &\Leftrightarrow 2x^2 = 2x(AM - MC) \\ &\Leftrightarrow AM - MC = x \end{aligned}$$

Karena $AM - MC = x$ dam $AM + MC = 2x$ maka didapat $2AM = 3x$ dan $2MC = x$ sehingga

$$\frac{AM}{MC} = \frac{2AM}{2MC} = \frac{3x}{x} = 3$$

15. **Penyelesaian:**

Ada 12 nomor, dipilih 6 nomor untuk salah satu dadu, dan sisa otomatis untuk dadu lainnya.
Ada $C_6^{12} = 924$ cara pendistribusian.
Misal, Dadu I berisi → 1, 2, 3, 4, 5, 6
Dadu II berisi → $1^1, 2^1, 3^1, 4^1, 5^1, 6^1$
Jumlah 7 → $(1, 6^1), (6, 1^1), (2, 5^1), (5, 2^1), (3, 4^1), (4, 3^1)$ dengan masing-masing memiliki peluang yang sama.
WLOG, kita hitung peluang untuk $(1, 6^1), (6, 1^1)$.
Bagi kasus berdasarkan distribusi $1, 1^1, 6, 6^1$ yang menghasilkan jumlah 7.
Kasus I: Dadu I memiliki salah satu dari $1, 1^1, 6, 6^1$
Banyak cara distribusi $= C_1^4 \times C_5^8 = 224$ cara
Peluang jumlah 7 → $= \frac{2}{36}$
$P(k_1) = \frac{2}{36} \times \frac{224}{924} = \frac{4}{297}$

Kasus II: Dadu I memiliki dua dari $1, 1^1, 6, 6^1$

- Untuk keduanya → $(1, 6), (1, 6^1), (1^1, 6), (1^1, 6^1)$
  Distribusi = $4 \times C_4^8 = 280$ cara
  Peluang jumlah 7 → $\frac{2}{36}$
  $P(sk_2) = \frac{280}{924} \cdot \frac{2}{36} = \frac{5}{297}$
- Untuk keduanya $(1, 1^1), (6, 6^1)$
  Distribusi = $2 \times C_4^8 = 140$ cara

Peluang jumlah 7 → $\frac{4}{36}$

$P(sk_2) = \frac{140}{924} \cdot \frac{4}{36} = \frac{5}{297}$

Sehingga $P(k_{II}) = \frac{5}{297} + \frac{5}{297} = \frac{10}{297}$

Kasus III: Dadu I memuat tiga dari $1, 1^1, 6, 6^1$

Distribusi = $C_3^4 \times C_3^8 = 224$

Peluang jumlah 7 → $\frac{2}{36}$

$P(k_{III}) = \frac{2}{36} \cdot \frac{224}{924} = \frac{4}{297}$

Maka, $P(total) = \frac{4}{297} + \frac{10}{297} + \frac{4}{297} = \frac{18}{297}$

Analog untuk $2, 2^1, 5, 5^1$ dan $3, 3^1, 4\ , 4^1$

$P(total) = 3 \times \left(\frac{18}{297}\right) = \frac{54}{297}$.

16. **Penyelesaian:**

Jika $n = 1$ maka diperoleh persamaan garis $x + y = 1$ yang jelas tidak memiliki koordinat berupa bilangan asli. Oleh karena itu haruslah $n \geq 2$. Perhatikan bahwa titik $(1, n-1)$ merupakan koordinat bilangan asli yang terletak pada garis $x + y = n$ sehingga diperoleh

$$1^2 + (n-1)^2 = p^2$$

Dengan p adalah bilangan prima.

Lebih jauh diperoleh $1 = p^2 - (n-1)^2$. Padahal kita ketahui bahwa dua bilangan kuadrat yang berselisih 1 hanya 0^2 dan 1^2 yang keduanya, baik 0 ataupun 1 bukan bilangan prima. Jadi, tidak ada bilangan asli n yang memenuhi kondisi pada soal.

17. **Penyelesaian:**

Ingat kembali bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Dan jika a, b adalah bilangan bulat, dapat kita katakan $a^n - b^n$ habis dibagi $(a-b)$. Selanjutnya perhatikan, $-2004 - 1900 = -3904$ sehingga $(-2004)^n - 1900^n$ habis dibagi -3904 tetapi karena $-3904 = -244 \cdot 16$ berakibat $(-2004)^n - 1900^n$ habis dibagi 16. Demikian dengan cara yang sama diperoleh $25^n - 121^n$ habis dibagi 16 karena 25 – 121 = $-96 = -6 \cdot 16$. Oleh karena itu, $(-2004)^n - 1900^n + 25^n - 121^n$ habis dibagi 16. Selain itu, $(-2004)^n - 121^n$ habis dibagi 125 karena $-2004 - 121 = -2125 = -17 \cdot 125$ serta $25^n - 1900^n$ juga habis dibagi 125 sebab 25 – 1900 = $-1875 = -15 \cdot 125$. Jadi, sekali lagi diperoleh $(-2004)^n - 1900^n + 25^n - 121^n$ habis dibagi 125. Akan tetapi, karena 16 dan 125 keduanya saling prima berakibat $(-2004)^n - 1900^n + 25^n - 121^n$ habis dibagi $16 \cdot 125 = 2000$ untuk setiap bilangan asli n.

18. **Penyelesaian:**

Misalkan susunan duduk semula adalah 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Selanjutnya kita bagi menjadi dua kelompok yaitu kelompok I = 1, 2, 3, 4, 5 dan kelompok II = 6, 7, 8, 9, 10. Banyaknya cara kelompok I duduk kembali pada kursinya ada 8 cara yaitu 12345, 21345, 12435, 21435, 12354, 21354, 13245, 13254. Demikian pula banyaknya cara kelompok II duduk kembali pada kursi ada 8 cara (kedua kelompok pada dasarnya sama hanya beda nomor saja tetapi karakteristiknya sama). Jadi, jika kelompok I dan kelompok II saling lepas maka banyaknya cara kedua kelompok tersebut duduk kembali pada kursinya ada $8 \times 8 = 64$ cara.

Perhatikan jika kelompok I dan II tidak saling lepas. Dalam hal ini satu-satunya terjadi overlapping jika dan hanya jika siswa yang duduk pada posisi 5 dan 6 saling bergantian. Oleh karena itu diperoleh kelompok I yang baru yaitu 1, 2, 3, 4, 6 dan kelompok II yang baru yaitu 5, 7, 8, 9, 10. Selanjutnya mudah dilihat bahwa banyaknya cara kelompok I yang baru duduk kembali pada kursinya ada 5 cara yaitu 12346, 21346, 12436, 21436, 13246. Demikian pula banyaknya cara kelompok II yang baru duduk kembali pada kursinya juga ada 5 cara. Sehingga jika kelompok I dan kelompok II tidak saling lepas maka banyaknya cara kedua kelompok tersebut duduk kembali pada kursinya ada $5 \times 5 = 25$ cara.

Jadi, total banyaknya cara semua siswa tersebut duduk kembali pada baris tadi ada sebanyak 64 + 25 = 89 cara.

19. **Penyelesaian:**

Perhatikan bahwa $S(N) \equiv N$ mod 9, dimana $S(N)$ adalah jumlah semua digit dari N. Tetapi ingat pula bahwa untuk sebarang N kita peroleh $N^2 \equiv 0, 1, 4, 7$ mod 9.

Berdasarkan dua fakta ini, kita peroleh

$$\begin{aligned} n &\equiv x^2 \quad \text{mod } 9 \\ &\equiv 0, 1, 4, 7 \quad \text{mod } 9 \end{aligned}$$

Karena 123456 ≡ 3 mod 9, 123455 ≡ 2 mod 9 dan 123454 ≡ 1 mod 9 maka $n \leq 123454$.

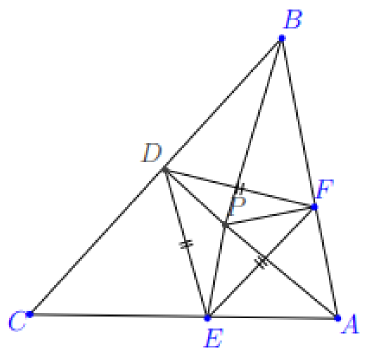
Tetapi kita juga punya,

$$\begin{aligned} \Bigg(\underbrace{9999999\cdots9}_{9\text{ sebanyak }13716}8\Bigg)^2 &= \left(10^{13717} - 2\right)^2 \\ &= 10^{27434} - 4 \cdot 10^{13717} + 4 \\ &= \underbrace{9999999\cdots9}_{9\text{ sebanyak }13716}6\underbrace{0000000\cdots0}_{0\text{ sebanyak }13716}4 \end{aligned}$$

Dan jumlah digit dari $\underbrace{9999999 \ldots 9}_{9\text{ sebanyak }13716}6\underbrace{0000000 \ldots 0}_{0\text{ sebanyak }13717}4$ adalah $9 \cdot 13716 + 6 + 4 = 123454$. Jadi, nilai n terbesar adalah $n = 123454$ dengan nilai x yang bersesuaian adalah $x = \underbrace{9999999 \ldots 9}_{9\text{ sebanyak }13716}8$.

20. **Penyelesaian:**

Perhatikan gambar berikut!



Pada ΔABP berlaku

$$\begin{aligned}\angle FAP + \angle FPB &= 180^o - \angle APB \\ &= 180^o - 70^o \\ &= 110^o\end{aligned}$$

Perhatikan pula, $\angle AEP = \angle AFP = \angle BFP = \angle BDP = 90^o$. Dengan demikian segiempat $AEPF$ dan segiempat $BDPF$ keduanya adalah segiempat talibusur. Sehingga diperoleh

$$\angle DBP = \angle DFP \quad \text{dan} \quad \angle EAP = \angle EFP$$

Ingat pula, $\angle DFP + \angle EFP = 60^o$. Oleh karena itu, diperoleh

$$\begin{aligned}\angle ACB &= 180^\circ - (\angle CAB + \angle CBA) \\ &= 180^\circ - (\angle EAP + \angle FAP + \angle DBP + \angle FBP) \\ &= 180^\circ - (\angle EFP + \angle DFP + 110^\circ) \\ &= 180^\circ - (60^\circ + 110^\circ) \\ &= 10^\circ\end{aligned}$$

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2011

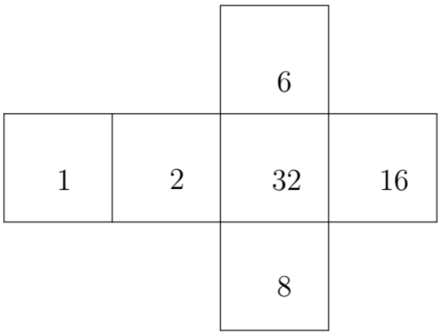
TINGKAT NASIONAL

HARI PERTAMA & HARI KEDUA

WAKTU : 8 JAM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Nasional Tahun 2011

1. Perhatikan gambar dibawah ini



   Gambar di atas adalah gambar jaring – jaring dadu berbentuk kubus dengan panjang rusuk satu satuan. Misalkan n bilangan asli dan $2n$ dadu tersebut disusun membentuk balok berukuran 1 x 2 x n satuan dan diletakkan di lantai (ada enam cara peletakan). Misalkan S adalah jumlah bilangan yang terlihat pada balok tersebut (bagian bawah balok tidak terlihat). Tentukan n terkecil sedemikian sehingga terdapat penyusunan dadu – dadu membentuk balok dan peletakan dilantai yang memenuhi $S > 2011$.

2. Diberikan barisan bilangan $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{2010}$ yang memenuhi $a_0 = 1$ dan 2011 membagi $a_{k-1}a_k - k$ untuk $k = 1, 2, 3, \cdots, 2010$. Buktikan bahwa 2011 juga membagi $a_{2010} + 1$.

3. Misalkan a, b dan c adalah bilangan – bilangan real positif dengan sifat $abc = 1$. Jika diketahui bahwa $a^{2011} + b^{2011} + c^{2011} < \frac{1}{a^{2011}} + \frac{1}{b^{2011}} + \frac{1}{c^{2011}}$. Buktikan bahwa,

$$a + b + c < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

4. Diberikan segitiga sebarang ABC dan misalkan lingkaran dalam segitiga ABC menyinggung sisi BC, CA dan AB berturut – turut di titik D, E dan F. Misalkan K dan L berturut – turut titik pada sisi CA dan AB sehingga $\angle EDK = \angle ADE$ dan $\angle FDL = \angle ADF$. Buktikan bahwa lingkaran luar segitiga AKL menyinggung lingkaran dalam segitiga ABC.

5. Untuk suatu bilangan n yang dinyatakan dalam basis sepuluh, $f(n)$ didefinisikan sebagai jumlah dari semua bilangan yang diperoleh melalui mencoreti digit-digit yang mungkin dari n. Sebagai contoh untuk $n = 1234$, $f(n) = 1234 + 123 + 124 + 134 + 234 + 12 + 13 + 14 + 23 + 24 + 34 + 1 + 2 + 3 + 4 = 1979$. Sebab jika kita mencoret 0 digit kita memperoleh 1234, jika kita mencoret 1 digit kita memperoleh 123, 124, 134, 234, jika kita mencoret 2 digit kita memperoleh 12, 13, 14, 23, 24, 34, jika kita mencoret 3 digit kita memperoleh 1, 2, 3, 4 dan jika kita mencoret 4 digit kita memperoleh 0 yang tidak mempengaruhi jumlah

$f(n)$.
Jika n adalah bilangan yang terdiri dari 2011 digit, buktikan bahwa $f(n) - n$ habis dibagi 9.

6. Untuk setiap bilangan asli n, didefnisikan S_n sebagai banyaknya permutasi (a_1, a_2, a_3, …, a_n) dari (1, 2, 3, …, n) sedemikian sehingga

$$\frac{a_1}{1} + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n}$$

merupakan bilangan asli. Buktikan bahwa $S_{2n} \geq n$ untuk setiap bilangan asli n.

7. Diberikan sebarang segitiga lancip ABC. Misalkan l_a garis yang melalui A dan tegak lurus AB, l_b garis yang melalui B dan tegak lurus BC, l_c garis yang melalui C dan tegak lurus CA. Misalkan garis l_b dan l_c berpotongan di titik D, garis l_c dan l_a berpotongan di titik E dan terakhir garis l_a dan l_b berpotongan di titik F.

   Buktikan bahwa luas segitiga DEF paling sedikit tiga kali luas segitiga ABC.

8. Di sebuah pulau terdapat sepuluh kota, dimana kota – kota tersebut dihubungkan dengan ruas – ruas jalan. Ada 2 kota yang terhubung, ada juga yang tidak. Suatu rute yang dimulai dari suatu kota mengunjungi tepat 8 dari 9 kota lainnya masing – masing sekali dan kembali ke kota awal dinamakan rute wisata. Tentukan banyak ruas jalan minimal yang perlu untuk dibuat sehingga apabila diberikan sebarang kota di pulau tersebut, ada rute wisata yang tidak melewati kota tersebut.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2011

TINGKAT NASIONAL

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Nasional Tahun 2011

1. Penyelesaian :

1. Memahami Jaring-jaring Dadu:
   Jaring-jaring dadu menunjukkan angka-angka pada setiap sisi kubus. Ketika dilipat menjadi kubus, angka-angka pada sisi yang berlawanan akan berpasangan. Dari gambar, kita bisa melihat pasangan sisi berlawanan:
   - 1 berlawanan dengan 32
   - 2 berlawanan dengan 16
   - 6 berlawanan dengan 8
2. Menghitung Jumlah Angka pada Dadu:
   Jumlah total angka pada satu dadu adalah 1 + 2 + 6 + 8 + 16 + 32 = 65.
3. Menentukan Jumlah Angka yang Terlihat (S):
   Jumlah angka yang terlihat pada dadu tersebut adalah 65 – y.
4. Mencari n Terkecil:
   Ini berarti kita harus memilih sisi dengan nilai terbesar sebagai sisi bawah. Sisi terbesar pada dadu adalah 32. Jika 32 adalah sisi bawah, maka 1 adalah sisi yang berlawanan dan akan menjadi sisi atas.
   Jika 32 adalah sisi bawah, maka jumlah yang terlihat pada satu dadu adalah 65 – 32 = 33.
   Jadi, S = 2n x 33 = 66n.
   Kita ingin S > 2011, jadi 66n > 2011.
   $n > \frac{2011}{66}$
   n > 30.469
   Karena n adalah bilangan asli, maka n terkecil yang memenuhi adalah 31.

2. Penyelesaian :

Ganti 2011 dengan bilangan prima p ≡ 3 (mod 4). Kemudian dengan teleskopik kita peroleh

$$a_{p-1} \equiv \frac{\prod_{k=1}^{(p-1)/2} 2k}{\prod_{k=1}^{(p-1)/2}(2k-1)} = \frac{\left(\prod_{k=1}^{(p-1)/2} 2k\right)^2}{(p-1)!} \pmod p$$

Namun, (p – 1)! ≡ -1 (mod p) berdasarkan teorema Wilson. Selain itu, 2k ≡ -(p – 2k) (mod p), jadi

$$\left(\prod_{k=1}^{(p-1)/2} 2k\right)^2 \equiv (-1)^{(p-1)/2}(p-1)! \equiv -(-1) = 1 \pmod p$$

lagi dengan teorema Wilson. Oleh karena itu

$a_{p-1} \equiv -1 \pmod p$, yaitu $p \mid a_{p-1} + 1$.

Untuk p ≡ 1 (mod 4) kita akan memperoleh $p \mid a_{p-1} - 1$ dengan metode yang sama.

3. Penyelesaian :

Dari kondisi yang diberikan, kita memiliki

$$(a^{2011}-1)(b^{2011}-1)(c^{2011}-1)<0$$

yang dapat ditulis ulang menjadi

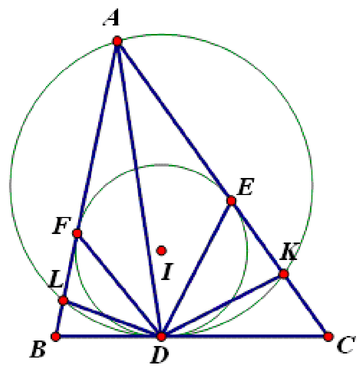
$$(a-1)(a^{2010}+a^{2009}+\ldots+a+1)(b-1)(b^{2010}+b^{2009}+\ldots+b+1)(c-1)(c^{2010}+c^{2009}+\ldots+c+1)<0$$

dan ini berlaku jika dan hanya jika

$$(a-1)(b-1)(c-1)<0.$$

4. Penyelesaian :

Misalkan ∠A = 2α, ∠B = 2β, ∠C = 2γ, ∠DAK = θ. Kita memiliki ∠CDE = $\alpha+\beta$, ∠ADC = $2\alpha + 2\beta - \theta$, jadi ∠ADE = $\alpha + \beta - \theta$, dengan alasan yang sama ∠ADF = $\alpha + \gamma - (2\alpha - \theta) = \gamma + \theta - \alpha$, jadi ∠LDK + ∠LAK = $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180^\circ$, D pada lingkaran luar △AKL. Karena ∠CDK = ∠ADC - 2∠ADK = θ = ∠DAK, maka lingkaran luar △AKL bersinggungan dengan CD. Dengan demikian, lingkaran luar △AKL bersinggungan dengan lingkaran dalam △ABC di D.



5. Penyelesaian :

Misalkan p = $\overline{a_1a_2\ldots a_{q(10)}}$. Maka, rumus f(p) – p = $\sum_{k=1}^{q}(2^{k-1}11^{q-k}-10^{q-k})a_k$ dapat diperoleh dengan mudah. Jadi,

$$f(p) \equiv \sum_{k=1}^{q}(2^{k-1}2^{q-k}-1)a_k = \sum_{k=1}^{q}(2^{q-1}-1)a_k \pmod 9$$

Untuk 6 | q – 1 kita memiliki $2^{q-1} - 1 \equiv 0 \pmod 9$ dengan persamaan Fermat, dan karena 6 | 2011 – 1 = 2010 tesis ini terbukti.

Solusi ekuivalen dapat menggunakan fakta bahwa S(N) ≡ N (mod 9), dengan S(N) adalah jumlah digit dari N, sehingga perhitungannya menjadi lebih sederhana, karena kita hanya perlu memperhatikan jumlah digit dari angka-angka yang diperoleh. Faktanya, hal itu hanya memanfaatkan fakta bahwa $10^m \equiv 1$ (mod 9) lebih awal (sehingga 11 digantikan oleh 2 dalam perhitungan).

6. Penyelesaian :

Untuk 1 ≤ k < 2k ≤ n, kita memiliki $\frac{4k}{k}+\frac{k}{2k}+\frac{2k}{4k}=5 \in \mathbb{N}$.

Untuk $1 \leq k < \ell \leq n$, $\ell \neq 2k$, kita memiliki $\frac{k}{2k} + \frac{2k}{k} + \frac{\ell}{2\ell} + \frac{2\ell}{\ell} = 5 \in \mathbb{N}$.

Jadi, untuk setiap $1 \leq k < n$, kita memiliki $n - k$ permutasi yang berbeda (gunakan salah satu permutasi di atas, dengan elemen lainnya tetap), berbeda dari permutasi identitas (yang jelas memenuhi), dan berbeda berpasangan untuk nilai k yang berbeda. Oleh karena itu jumlah total permutasi tersebut setidaknya $1 + \sum_{k=1}^{n-1}(n-k) = 1 + \frac{n(n-1)}{2} \geq n$.

7. Penyelesaian :

Pertama, ∠CAB komplementer dengan ∠CAE yang komplementer dengan ∠DEF, dan seterusnya, sehingga △ABC ~ △EFD. Jadi, pernyataan yang ingin kita buktikan ekuivalen dengan pembuktian bahwa $EF/AB \geq \sqrt{3}$.

Di bawah ini, kita akan merujuk sudut-sudut △ABC dengan huruf titik sudutnya (huruf kapital), sisi-sisinya (huruf kecil) dengan titik sudut di hadapannya (huruf kapital), dan jari-jari lingkaran △ABC dengan R, seperti biasa.

Kita punya $AE = AB \cdot \frac{AC}{AB} \cdot \frac{AE}{AC} = AB \cdot \frac{\sin B}{\sin C} \cdot \frac{1}{\sin A}$ dan $AF = AB \cdot \frac{\cos B}{\sin B}$

Menjumlahkan $EF = AB \cdot \left(\frac{\sin B}{\sin A \sin C} + \frac{\cos B}{\sin B}\right) = AB \cdot \frac{\sin^2 B + \cos B \sin A \sin C}{\sin A \sin B \sin C}$

jadi kita harus membuktikan bahwa

$$\frac{\sin^2 B + \cos B \sin A \sin C}{\sin A \sin B \sin C} \geq \sqrt{3}$$

Kalikan pembilang dan penyebutnya dengan $8R^2$.

Berdasarkan Hukum Sinus, $2R \sin B = b$ dan seterusnya, pembilangnya menjadi $2((2R \sin B)^2 + \cos B\,(2R \sin A)(2R \sin C)) = 2b^2 + 2ac \cos B$. Masukkan Hukum Kosinus $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ untuk melihat bahwa ini sama dengan $a^2 + b^2 + c^2$.

Penyebutnya menjadi $2ab \sin C = 4S$, dengan S adalah luas △ABC

Jadi, pecahannya sama dengan $\frac{a^2+b^2+c^2}{4S}$. Namun, $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}S$ (pertidaksamaan Weitzenbock), sehingga pecahannya setidaknya $\sqrt{3}$ sesuai yang diinginkan. Kesetaraan berlaku jika△ABC sama sisi.

8. Penyelesaian :

Minimumnya adalah 15 jalan. Sebagai contoh, beri label lima kota A_1 ke A_5 dan lima kota B_1 ke B_5, lalu hubungkan

(A_i dan A_{i+1}), (B_i dan B_{i+1}), dan (A_i dan B_i) untuk i = 1 ke 5, dengan mengambil indeks modulo 5.

Rute yang tidak melewati A_0 adalah $B_0B_1A_1A_2B_2B_3A_3A_4B_4B_0$, dan dari simetri konstruksinya, jelas bahwa ada rute untuk setiap kota.

Untuk membuktikan bahwa 15 jalan diperlukan, perhatikan bahwa 14 jalan atau kurang berarti 28 hubungan insidensi atau kurang, sehingga metode pigeonhole memberi kita sebuah kota (misalnya, X) dengan hanya dua jalan (menuju, misalnya, Y dan Z). Tetapi, rute apa pun yang melewati X juga harus melewati Y dan Z, jadi tidak akan ada rute yang melewati Y, suatu kontradiksi

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2012

TINGKAT KABUPATEN/KOTA

BIDANG MATEMATIKA

WAKTU : 180 MENIT

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Kabupaten/Kota Tahun 2012

1. Banyaknya bilangan bulat n yang memenuhi
$$(n-1)(n-3)(n-2013) = n(n+2)(n+4)(n+2012)$$
adalah …
2. Banyaknya pasangan bilangan asli berbeda yang selisih kuadratnya 2012 adalah …
3. Bilangan terbesar x kurang dari 1000 sehingga tepat dua bilangan asli n sehingga $\frac{n^2+x}{n+1}$ merupakan bilangan asli adalah …
4. Diketahui suatu kelas terdiri dari 15 siswa. Semua siswa tersebut akan dikelompokkan menjadi 4 kelompok yang terdiri dari 4,4,4 dan 3 siswa. Ada berapa cara pengelompokkan tersebut?
5. Diberikan segitiga siku-siku ABC, dengan AB sebagi sisi miringnya. Jika keliling dan luasnya berturut-turut 624 dan 6864. Panjang sisi miring segitiga tersebut adalah …
6. Banyaknya tripel bilangan bulat (x, y, z) yang memenuhi
$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = x^3 + y^3 + z^3$$
adalah …
7. Diberikan suatu lingkaran dengan diameter AB = 30. Melalui A dan B berturut-turut ditarik tali busur AD dan BE berpotongan di titik C. Jika AC = 3AD dan BC = 4BE, maka luas segitiga ABC adalah …
8. Misalkan a, b, c, d dan e adalah bilangan-bilangan bulat sehingga $2^a3^b4^c5^d6^e$ juga merupakan bilangan bulat. Jika diketahui bahwa nilai mutlak dari a, b, c, d dan e tidak lebih dari 2012 maka nilai terkecil yang mungkin dari $a + b + c + d + e$ adalah …
9. Jika $\left(\sqrt{2012} + \sqrt{2011}\right)^2 = n + r$ dengan n merupakan bilangan asli dan $0 \le r < 1$, maka r = …
10. Tentukan semua nilai b sehingga untuk semua x paling tidak salah satu dari $f(x) = x^2 + 2012x + b$ atau $g(x) = x^2 - 2012x + b$ positif.
11. Jumlah semua bilangan bulat x sehingga $2_{\log}$ $(x^2 - 4x - 1)$ merupakan bilangan bulat adalah …
12. Ada berapa faktor positif dari $2^7 3^5 5^3 7^2$ yang merupakan kelipatan 6?
13. Suatu set soal terdiri dari 10 soal pilihan B atau S dan 15 soal pilihan ganda dengan 4 pilihan. Seorang siswa menjawab semua soal dengan menebak jawaban secara acak. Tentukan Probabilitas ia menjawab dengan benar hanya 2 soal?
14. Diberikan segitiga ABC dengan keliling 3, dan jumlah kuadrat sisi-sisinya sama dengan 5. Jika jari-jari lingkaran luarnya sama dengan 1, maka jumlah ketiga garis tinggi dari segitiga ABC tersebut adalah …
15. Jika hasil kali tiga bilangan ganjil berurutan sama dengan 7 kali jumlah ketiga bilangan itu, maka jumlah kuadrat ketika bilangan itu adalah …
16. Diketahui ΔABC sama kaki dengan panjang AB = AC = 3, BC = 2, titik D pada sisi AC dengan panjang AD = 1. Tentukan luas ΔABD.
17. Suatu dadu ditos enam kali. Tentukan Probabilitas jumlah mata yang muncul 27.

18. Diberikan segitiga ABC dengan sisi-sisi : $AB = x + 1$, $BC = 4x - 2$ dan $A = 7 - x$. Tentukan nilai dari x sehingga segitiga ABC merupakan segitiga sama kaki.
19. Misalkan terdapat 5 kartu dimana setiap kartu diberi nomor yang berbeda yaitu 2, 3, 4, 5, 6. Kartu-kartu tersebut kemudian dijajarkan dari kiri ke kanan secara acak sehingga berbentuk barisan. Berapa probabilitas bahwa banyaknya kartu yang dijajarkan dari kiri ke kanan dan ditempatkan pada tempat ke-i akan lebih besar atau sama dengan i untuk setiap i dengan $1 \le i \le 5$.
20. n lingkaran digambar pada sebuah bidang datar demikian sehingga terdapat enam titik dimana keenam titik tersebut terdapat pada paling sedikit tiga lingkaran. Berapa n terkecil yang memenuhi kondisi tersebut?

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2012

TINGKAT KABUPATEN/KOTA

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Kabupaten/Kota Tahun 2012

1. **Jawaban : 0 (Tidak ada)**
   Jika n genap maka ruas kanan genap tetapi ruas kiri ganjil. Sedangkan jika n ganjil maka ruas kanan ganjil tetapi ruas kiri genap. Jadi, tidak ada nilai n yang memenuhi.
2. **Jawaban : 1**
   Misal kedua bilangan tersebut adalah a dan b maka $a^2 - b^2 = 2012 \Leftrightarrow (a+b)(a-b) = 2012$. Oleh karena itu, $(a+b)$ dan $(a-b)$ adalah faktor positif dari 2012. Karena faktor positif dari 2012 adalah 1, 2, 4, 503, 1006 dan 2012. Selain itu, karena $(a+b)$ dan $(a-b)$ paritasnya sama maka nilai yang mungkin adalah $a + b = 1006$ dan $a - b = 2$. Sehingga diperoleh, $a = 504$ dan $b = 502$.
3. **Jawaban : 960**
   Perhatikan,
   $$\frac{n^2+x}{n+1} = n - 1 + \frac{x+1}{n+1}$$
   maka agar $\frac{n^2+x}{n+1}$ bulat, haruslah $n+1$ faktor dari $x+1$. Oleh karena itu, supaya hanya ada tepat dua nilai n maka $x+1$ harus memiliki tepat 3 faktor. Dengan kata lain $x+1$ adalah kuadrat suatu bilangan prima. Jadi, diperoleh $x + 1 = 31^2 = 961$ sehingga $x = 960$.
4. **Jawaban : $\frac{\binom{15}{4}\binom{11}{4}\binom{7}{4}}{3!}$**
   Misal kelompok yang terbentuk adalah A, B, C dan D dengan A, B dan C terdiri dari 4 anggota dan D terdiri dari 3 anggota. Maka :
   - Banyaknya cara menyusun A ada $\binom{15}{4}$
   - Banyaknya cara menyusun B ada $\binom{11}{4}$
   - Banyaknya cara menyusun C ada $\binom{7}{4}$

   Untuk kelompok D tinggal sisanya saja, jadi tidak perlu repot menghitung. Tetapi yang perlu diingat adalah dengan cara ini setiap kasus dihitung sebanyak 3! = 6 kali.
   Jadi, jawabannya adalah $\frac{\binom{15}{4}\binom{11}{4}\binom{7}{4}}{3!}$
5. **Jawaban : 290**
   Dari keterangan soal diperoleh,
   $$a + b + c = 624 \Leftrightarrow a + b = 624 - c$$
   dan
   $$\frac{ab}{2} = 6864$$
   Dengan rumus phytagoras diperoleh
   $$c^2 = a^2 + b^2$$

$$= (a+b)^2 - 2ab$$
$$= (624-c)^2 - 4 \cdot 6864$$
$$= c^2 - 2 \cdot 624c + 624^2 - 4 \cdot 6864$$

maka diperoleh $c = 290$

6. **Jawaban : Tak hingga**

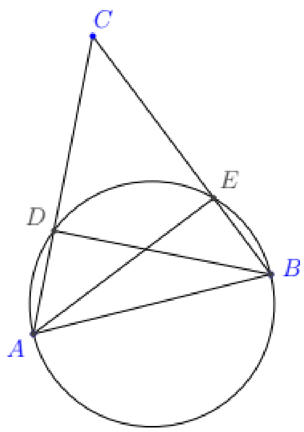
Jika $x = k, y = 1-k$ dan $z = 0$ dengan $k \in \mathbb{Z}$ maka diperoleh,

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = k^2 + (1-k)^2 - k(1-k)$$
$$= k^2 + 1 - 2k + k^2 - k + k^2$$
$$= 3k^2 - 3k + 1$$
$$= k^3 + 1 + 3k^2 - 3k - k^3$$
$$= k^3 + (1-k)^3$$
$$= x^3 + y^3 + z^3$$

ini berarti $(k, 1-k, 0)$ adalah penyelesaian dari $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = x^3 + y^3 + z^3$. Oleh karena itu, $(k, 1-k, 0)$ dengan $k \in \mathbb{Z}$ dan semua permutasinya adalah penyelesaian dari $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = x^3 + y^3 + z^3$ yang tentu saja jumlahnya ada takhingga.

7. **Jawaban : 540**

Perhatikan sketsa gambar di bawah ini!



Perlu diperhatikan bahwa *∠ADB = ∠CDB = ∠AEB = ∠AEC = 90°*. Misal, *AD = x* dan *BE = y* maka *AC = 3x, CD = 2x, BC = 4y* dan *CE = 3y*. Dengan teorema Phytagoras pada segitiga *ABD* dan segitiga *BCD* diperoleh

$$30^2 - x^2 = (4y)^2 - (2x)^2 \Leftrightarrow 900 - x^2 = 16y^2 - 4x^2$$
$$\Leftrightarrow 900 = 16y^2 - 3x^2$$

Demikian pula dengan teorema Phytagoras pada segitiga *ABE* dan segitiga *ACE* diperoleh

$$30^2 - y^2 = (3x)^2 - (3y)^2 \Leftrightarrow 900 - y^2 = 9x^2 - 9y^2$$
$$\Leftrightarrow 900 = 9x^2 - 8y^2$$

dengan menggabungkan kedua persamaan di atas didapat,

$$16y^2 - 3x^2 = 9x^2 - 8y^2 \Leftrightarrow 24y^2 = 12x^2 \Leftrightarrow x^2 = 2y^2$$

sehingga kita peroleh

$$900 = 16y^2 - 3x^2 = 16y^2 - 6y^2 = 10y^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{90}$$

Oleh karena itu,

$$AE^2 = 900 - y^2 = 900 - 90 = 810 \Leftrightarrow AE = \sqrt{810}$$

Jadi,

Luas segitiga $ABC \ = \frac{1}{2} BC \cdot AE$

$$= \frac{1}{2} \cdot 4y \cdot \sqrt{810}$$
$$= 2 \cdot \sqrt{90}\sqrt{810}$$
$$= 2 \cdot 3\sqrt{10} \cdot 9\sqrt{10} = 540$$

8. **Jawaban : -2012**

   Perhatikan,
   $$2^a 3^b 4^c 5^d 6^e = 2^a 3^b 2^{2c} 5^d (2 \cdot 3)^e = 2^{a+2c+e} 3^{b+e} 5^d$$
   Agar $a + b + c + d + e$ minimal, maka haruslah $a + 2c + e = 0, b + e = 0$ dan $d = 0$. Karena nilai minimum b yang mungkin adalah -2012 maka agar $a + b + c + d + e$ minimum pilih $a = -2012$ dan $c = 0$. Sehingga $a + b + c + d + e = a = -2012$.

9. **Jawaban : $(\sqrt{\mathbf{2012}} + \sqrt{\mathbf{2011}})^2 - \mathbf{8045}$**
   $$(\sqrt{2012} + \sqrt{2011})^2 = 2012 + 2011 + 2\sqrt{2012 \cdot 2011}$$
   Perhatikan bahwa $2011 < \sqrt{2012 \cdot 2011} < 2012$ sehingga $\sqrt{2012 \cdot 2011} = 2011 + k$.

   Akan ditunjukkan bahwa $k < \frac{1}{2}$. Andaikan $k \geq \frac{1}{2}$ maka berakibat
   $$2012 \cdot 2011 = (2011 + k)^2$$
   $$\geq (2011 + \frac{1}{2})^2$$
   $$= 2011^2 + 2011 + \frac{1}{4}$$
   $$> 2011 \cdot 2012$$
   yang jelas salah. Oleh karena itu, terbukti $k < \frac{1}{2}$ sehingga $0 \leq 2k < 1$.
   $$(\sqrt{2012} + \sqrt{2011})^2 = 2012 + 2011 + 2\sqrt{2012 \cdot 2011}$$
   $$= 4023 + 4022 + 2k$$
   $$= 8045 + r$$
   sehingga $r = (\sqrt{2012} + \sqrt{2011})^2 - 8045$

10. **Jawaban : $\boldsymbol{b > 0}$**

    Jumlahkan kedua fungsi, diperoleh
    $$f(x) + g(x) = 2x^2 + 2b$$
    sehingga untuk sebarang nilai x jika $b > 0$ maka $f(x) + g(x)$ selalu bernilai positif. Ini berarti paling tidak salah satu dari $f(x)$ atau $g(x)$ bernilai positif. Selanjutnya tinggal dibuktikan, untuk $b \leq 0$ terdapat $x = t$ sehingga $f(t) \leq 0$ dan $g(t) \leq 0$. Untuk itu pilih $t = 0$ sehingga
    $$f(t) = f(0) = b \leq 0 \text{ dan } g(t) = g(0) = b \leq 0$$
    Jadi, terbukti nilai b yang memenuhi adalah $b > 0$.

11. **Jawaban : 4**

    Agar ${}^2log\,(x^2 - 4x - 1)$ bernilai bulat maka $x^2 - 4x - 1 = 2^n$ untuk suatu bilangan bulat n. Karena $x^2 - 4x - 1$ bernilai bulat maka $n \geq 0$. Perhatikan juga,
    $$x^2 - 4x - 1 = 2^n \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 - 1 = 2^n + 4$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 2^n + 5$$

tetapi karena $(x-2)^2 = 0{,}1$ atau 4 mod 8 dan untuk $n \geq 3, 2^n + 5 \equiv 5$ mod 8 maka $n \leq 2$. Jadi, nilai yang memenuhi $n = 0{,}1{,}2$. Mudah dicek hanya nilai $n = 2$ yang memenuhi dengan memperoleh persamaan kuadrat $x^2 - 4x - 5 = 0$. Jadi, $x_1 + x_2 = 4$.

12. **Jawaban : 420**

Karena $2^7 3^5 5^3 7^2 = 2^6 3^4 5^3 7^2 \cdot 6$, maka banyaknya faktor positif $2^7 3^5 5^3 7^2$ yang merupakan kelipatan 6 sama dengan banyaknya faktor positif dari $2^6 3^4 5^3 7^2$ yaitu ada $(6+1) \times (4+1) \times (3+1) \times (2+1) = 420$.

13. **Jawaban :**

Jika 2 soal benar tersebut berasal dari soal tipe B atau S maka peluangnya adalah

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{15}$$

Jika 2 soal benar tersebut berasal dari soal tipe pilihan ganda maka peluangnya adalah

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{13} \binom{15}{2}$$

Jika 1 soal benar tersebut berasal dari soal tipe B atau S dan 1 soal benar berasal dari pilihan ganda maka peluangnya adalah

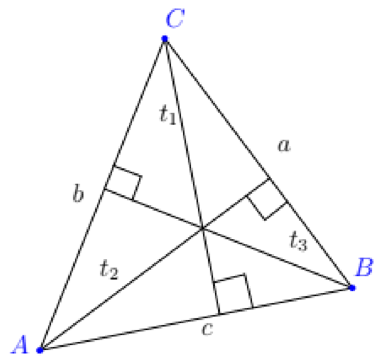
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \binom{10}{1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{14} \binom{15}{1}$$

Jadi, secara keseluruhan peluang menjawab tepat 2 soal benar adalah

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \binom{10}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{15} + \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{13} \binom{15}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \binom{10}{1} \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{14} \binom{15}{1}$$

14. **Jawaban : 1**

Perhatikan gambar dibawah ini!



Misalkan sisi-sisi segitiga tersebut adalah *a, b, c* maka diperoleh

$$a + b + c = 3$$

dan

$$a^2 + b^2 + c^2 = 5$$

selain itu kita punya identitas

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac)$$

sehingga diperoleh

$$9 = (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ac) = 5 + 2(ab+bc+ac) \Leftrightarrow ab + bc + ac = 2$$

Misalkan pula *R* jari-jari lingkaran luar dari segitiga *ABC* maka diketahui *R* = 1.

Dari aturan sinus diperoleh

$$\frac{a}{Sin\ A}+\frac{b}{Sin\ B}+\frac{c}{Sin\ C}=2R=2$$

Oleh karena itu, jika t_1, t_2, t_3 berturut-turut adalah garis tinggi yang ditarik dari titik *C, A, B* maka didapatkan

$$\begin{aligned} t_1+t_2+t_3 &= b\ Sin\ A+c\ Sin\ B+a\ Sin\ C \\ &= b\cdot\frac{a}{2}+c\cdot\frac{b}{2}+a\cdot\frac{c}{2} \\ &= \frac{1}{2}(ab+bc+ac) \\ &= \frac{1}{2}\cdot 2=1 \end{aligned}$$

15. **Jawaban : 83**

Misal tiga bilangan tersebut adalah $t-2, t+2$ dengan t bilangan ganjil. Sehingga diperoleh,

$$(t-2)t(t+2)=7\cdot 3t \Leftrightarrow t^2-25=0$$

Jika $t=5$ maka tiga bilangan tersebut adalah 3, 5, 7 sehingga $3^2+5^2+7^2=83$

Jika $t=-5$ maka tiga bilangan tersebut adalah -7, -5, -3 sehingga $(-3)^2+(-5)^2+(-7)^2=83$.

16. **Jawaban :** $\mathbf{\frac{2\sqrt{2}}{3}}$

Dengan Heron formula diperoleh,

Luas $\triangle\ ABC=\sqrt{4\cdot 1\cdot 1\cdot 2}=2\sqrt{2}$

Selain itu, kita punya

$$\frac{Luas\ \triangle\ ABD}{Luas\ \triangle\ ABC}=\frac{AD}{AC}=\frac{1}{3}$$

sehingga diperoleh,

$$\text{Luas}\ \triangle\ ABD=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

17. **Jawaban :** $\mathbf{\frac{1666}{6^6}}$

Untuk mencari banyak kemungkinan jumlah mata dadu yang muncul berjumlah 27 equivalen dengan mencari banyaknya penyelesaian dari persamaan $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=27$ dimana x_i bilangan bulat dan 1 ≤ x_i ≤ 6 untuk setiap i = 1, 2, 3, 4, 5, 6. Yang setara dengan mencari koefisien x^{27} dari $(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^6$.

Perhatikan,

$$\begin{aligned} x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6 &= x(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5) \\ &= x\left(1+x+x^2+x^3(1+x+x^2)\right) \\ &= x(1+x+x^2)(1+x^3) \end{aligned}$$

sehingga

$$(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)^6=x^6(1+x^3)^6(1+x+x^2)^6$$

Dengan Binom Newton didapat,

$$(1+x^3)^6=\sum_{i=0}^{6} x^{3i}$$

dan

$$(1+x+x^2)^6 = \sum_{i=0}^{6} (x^2)^{6-i}(x+1)^i$$

$$= \sum_{i=0}^{6} x^{12-2i}\left(\sum_{j=0}^{i} x^j\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{6}\sum_{j=0}^{i} x^{12-2i+j}$$

Oleh karena itu didapat

- Koefisien x^9 dari $(x^3+1)^6$ adalah 20
- Koefisien x^{12} dari $(x^3+1)^6$ adalah 15
- Koefisien x^{15} dari $(x^3+1)^6$ adalah 6
- Koefisien x^{18} dari $(x^3+1)^6$ adalah 1

selain itu diperoleh juga,

- Koefisien x^{12} dari $(x^2+x+1)^6$ adalah 1
- Koefisien x^9 dari $(x^2+x+1)^6$ adalah 50
- Koefisien x^6 dari $(x^2+x+1)^6$ adalah 141
- Koefisien x^6 dari $(x^2+x+1)^6$ adalah 50

Jadi, koefisien x^{27} dari $x^6(1+x^3)^6(1+x+x^2)^6$ adalah

$$(20\times 1)+(15\times 50)+(6\times 141)+(1\times 50)=1666$$

Jadi, peluang diperoleh jumlah mata yang muncul sama dengan 27 adalah $\frac{1666}{6^6}$

18. **Jawaban :** $\mathbf{\frac{9}{5}}$

Karena $x+1, 4x-2$ dan $7-x$ membentuk sisi-sisi segitiga maka berlaku,

$$(x+1)+(4x-2)>7-x \text{ sehingga } x>\frac{4}{3}$$

$$(x+1)+(7-x)>4x-2 \text{ sehingga } x>\frac{5}{2}$$

$$(7-x)+(4x-2)>x+1 \text{ sehingga } x>-2$$

Oleh karena itu,

- Jika $x+1=4x-2$ diperoleh $x=1$ yang jelas tidak mungkin sebab $\frac{4}{3}<x<\frac{5}{2}$
- Jika $x+1=7-x$ diperoleh $x=3$ yang jelas tidak mungkin sebab $\frac{4}{3}<x<\frac{5}{2}$
- Jika $7-x=4x-2$ diperoleh $x=\frac{9}{5}$

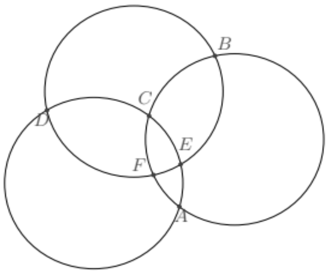
19. **Jawaban :** $\mathbf{\frac{2}{15}}$

Susunan yang paling sederhana adalah 2, 3, 4, 5, 6

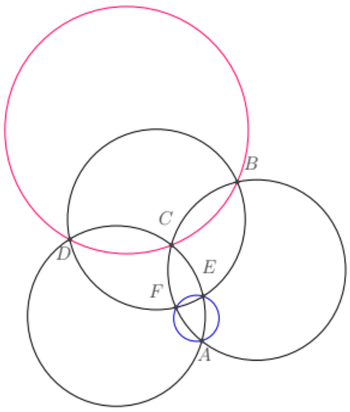
Untuk memenuhi kondisi pada soal maka masing - masing angka 2, 3, 4, dan 5 hanya bisa digeser ke kanan satu langkah saja. Cara ini ada sebanyak 2^4 = 16. Sedangkan untuk kemungkinan angka digeser ke kiri tidak perlu kita perhatikan, sebab jika kita menggeser angka ke kiri maka pasti ada angka yang harus digeser ke kanan sehingga sudah masuk perhitungan yang pertama di atas. Oleh karena itu, besar probabilitas adalah $\frac{16}{5!} = \frac{2}{15}$.

20. **Jawaban : 5**

Jika kita menggambar 3 lingkaran pada didang datar maka maksimal akan terbentuk 6 titik potong, seperti gambar berikut.



Karena melalui sebarang 3 titik yang tidak segaris dapat dibentuk sebuah lingkaran yang melalui ketiga titik tersebut, maka dengan membuat dua lingkaran yang masing - masing melalui 3 titik *A, B, C, D, E, F* akan terbentuk 5 lingkaran dimana terdapat 6 titik yang masing - masing terdapat pada 3 lingkaran, sesuai apa yang diminta.



SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2012

TINGKAT PROVINSI

BIDANG MATEMATIKA

WAKTU : 210 MENIT

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2012

1. Misalkan O dan I berturut-turut menyatakan titik pusat lingkaran luar dan titik pusat lingkaran dalam pada segitiga dengan panjang sisi 3, 4 dan 5. Panjang dari OI adalah ……
2. Misalkan x, y dan z adalah bilangan-bilangan prima yang memenuhi persamaan $34x - 51y = 2012z$. Nilai dari $x + y + z$ adalah…
3. Diketahui empat dadu setimbang dan berbeda, yang masing-masing berbentuk sisi delapan beraturan bermata 1, 2, 3, …, 8. Empat dadu tersebut ditos (dilempar) bersama-sama satu kali. Probabilitas kejadian ada dua dadu dengan mata yang muncul sama sebesar …
4. Fungsi bernilai real f dan g masing-masing memiliki persamaan
$$f(x) = \sqrt{\lfloor x \rfloor} - a \text{ dan } g(x) = \sqrt{x^2} - \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{a}}$$
dengan a bilangan bulat positif. Diketahui $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x. Jika domain $g\ o\ f$ adalah $x|3\frac{1}{2} \leq x < 4$, maka banyaknya a yang memenuhi sebanyak …..
5. Diberikan bilangan prima $p > 2$. Jika S adalah himpunan semua bilangan asli n yang menyebabkan $n^2 + pn$ merupakan kuadrat dari suatu bilangan bulat, maka S = …..
6. Untuk sebarang bilangan real x didefinisikan $\{x\}$ sebagai bilangan bulat yang terdekat dengan x, sebagai contoh {1,9} = 2, {0,501} = 1, dan sebagainya. Jika n adalah suatu bilangan bulat positif kelipatan 2012, maka banyak bilangan bulat positif k yang memenuhi $\sqrt[3]{k} = n$ adalah …..
7. Banyak bilangan bilangan asli $n < 100$ yang mempunyai kelipatan yang berbentuk
123456789123456789…123456789
adalah …..
8. Diberikan jajar genjang $ABCD$. Titik M pada AB sedemikian rupa sehingga $\frac{AM}{AB}$ = 0,017, dan titik N pada AD sehingga $\frac{AN}{AD} = \frac{17}{2009}$. Misalkan $AC \cap MN = P$, maka $\frac{AC}{AP}$ =
9. Dalam sebuah pertemuan, 5 pasang suami istri akan didudukkan pada sebuah meja bundar. Berapa banyak cara untuk mengatur posisi duduk 5 pasang suami istri tersebut sedemikian sehingga tepat 3 suami duduk disamping istrinya?
10. Jika p, q dan r akar-akar dari persamaan $x^3 - x^2 + x - 2 = 0$, maka $p^3 + q^3 + r^3$ = …..
11. Jika m dan n bilangan bulat positif yang memenuhi persamaan
$$m^2 + n^5 = 252,$$
maka $m + n$ = …..
12. Pada ΔABC, titik D terletak pada garis BC. Panjang $BC = 3$, besar sudut $\angle ABC = 30\circ$, dan $\angle ADC = 45\circ$. Panjang AC = …..
13. Lima siswa, A, B, C, D, E berada pada satu kelompok dalam lomba lari estafet. Jika A tidak bisa berlari pertama dan D tidak bisa berlari terakhir, maka banyaknya susunan yang mungkin adalah …..
14. Diketahui H adalah himpunan semua bilangan asli kurang dari 2012 yang faktor primanya tidak lebih dari 3: Selanjutnya didefnisikan himpunan
$$S = \frac{1}{n}|n \in H.$$
Jika x merupakan hasil penjumlahan dari semua anggota S dan $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x, maka $\lfloor x \rfloor$ = …..

15. Diberikan dua lingkaran R_1 dan R_2 yang berpotongan di dua titik yaitu A dan B dengan AB = 10. Ruas garis yang menghubungkan titik pusat kedua lingkaran memotong lingkaran R_1 dan R_2 masing-masing di P dan Q. Jika PQ = 3 dan jari-jari lingkaran R_1 adalah 13, maka jari-jari lingkaran $R2$ adalah .....
16. Banyaknya pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{xy^2}=34$$
adalah ......
17. Untuk bilangan real positif x dan y dengan $xy = \frac{1}{3}$ nilai minimum dari $\frac{1}{9x^6}\ + 1/4y^6$ adalah .....
18. Banyaknya pasangan bilangan bulat positif (a, b) yang memenuhi $4^a + 4a^2 + 4 = b^2$ adalah ......
19. Diberikan segitiga ABC, dengan panjang AB sama dengan dua kali panjang AC. Misalkan D dan E berturut-turut pada segmen AB dan BC, sehingga $\angle BAE = \angle ACD$. Jika $F = AE \cap CD$ dan CEF merupakan segitiga sama sisi, maka besar sudut dari segitiga ABC adalah ......
20. Banyaknya bilangan bulat positif n yang memenuhi $n \leq 2012$ dan merupakan bilangan kuadrat sempurna atau kubik atau pangkat 4 atau pangkat 5 atau ... atau pangkat 10, ada sebanyak ......
21. Tentukan semua pasangan bilangan bulat tak negatif (a, b, x, y) yang memenuhi sistem persamaan
$$\begin{cases} a+b & : xy \\ x+y & : ab \end{cases}$$
22. Cari semua pasangan bilangan real (x, y, z) yang memenuhi sistem persamaan.
$$\begin{cases} x = 1+\sqrt{y-z^2} \\ y = 1+\sqrt{z-x^2} \\ z = 1+\sqrt{x-y^2} \end{cases}$$
23. Seorang laki-laki memiliki 6 teman. Pada suatu malam di suatu restoran, dia bertemu dengan masing-masing mereka 11 kali, setiap 2 dari mereka 6 kali, setiap 3 dari mereka 4 kali, setiap 4 dari mereka 3 kali, setiap 5 dari mereka 3 kali, dan semua mereka 10 kali. Dia makan diluar 9 kali tanpa bertemu mereka. Berapa kali dia makan di restoran tersebut secara keseluruhan?
24. Diketahui segitiga lancip ABC. Titik H menyatakan titik kaki dari garis tinggi yang ditarik dari A. Buktikan bahwa $AB + AC \geq BC \cos \angle BAC + 2AH \sin \angle BAC$
25. Diketahui $p_0 = 1$ dan p_i bilangan prima ke-i, untuk $i = 1, 2, \ldots$; yaitu $p_1 = 2$, $p_2 = 3$. ... Bilangan prima pi dikatakan sederhana jika
$$p_i^{(n^2)} > p_{i-1}(n!)^4$$
untuk semua bilangan bulat positif n. Tentukan semua bilangan prima yang sederhana!

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2012

TINGKAT PROVINSI

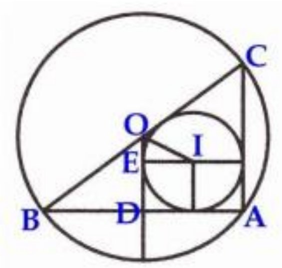
SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika Tingkat Provinsi Tahun 2012

1. Jawaban : $\frac{1}{2}\sqrt{5}$

   Tanpa mengurangi keumuman misalkan AC = 3 ; AB = 4 ; BC = 5.
   Misalkan juga R adalah jari-jari lingkaran luar dan r adalah jari-jari lingkaran dalam ΔABC.
   Karena ΔABC siku-siku di A maka BC adalah diameter lingkaran luar ΔABC. Jadi, O adalah pertengahan BC.



   Misalkan D adalah titik pada AB sehingga OD⊥AB dan E pada OD sehingga IE⊥OD.
   $\frac{1}{2}r(a+b+c) = [ABC] = 6$
   r = 1
   Karena O adalah pertengahan BC maka D adalah pertengahan AB sehingga AD = 2. Jadi, E adalah titik singgung garis OD terhadap lingkaran dalam. Maka IE = 2.
   OE = OD – ED = $\frac{1}{2}$AC – r = $\frac{1}{2}$
   $OI^2 = OE^2 + IE^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (1)^2$
   OI = $\frac{1}{2}\sqrt{5}$
   Jadi, Panjang OI = $\frac{1}{2}\sqrt{5}$

2. Jawaban : 1028

   34x - 51y = 2012z dengan x, y, z adalah bilangan prima.
   Karena 34 dan 2012 habis dibagi 2 maka y habis dibagi 2. Karena y prima maka y = 2.
   Karena 34 dan 51 habis dibagi 17 maka z habis dibagi 17. Karena z prima maka z = 17.
   34x - 51(2) = 2012(17)
   x = 1009 yang memenuhi bahwa x adalah bilangan prima.
   x + y + z = 1009 + 2 + 17 = 1028
   ∴ Jadi, nilai dari x + y + z adalah 1028.

3. Jawaban : $\frac{151}{256}$

   Banyaknya kejadian semua angka dadu berbeda = 8 x 7 x 6 x 5.
   Peluang ada angka yang sama = $1 - \frac{8\times7\times6\times5}{8^4} = \frac{151}{256}$
   ∴ Jadi, peluang ada angka yang sama = $\frac{151}{256}$

4. Jawaban : 3

   $f(x)\sqrt{\lfloor x \rfloor - a}$ dan $g(x) = \sqrt{x^2 - \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{a}}}$ dengan a adalah bilangan bulat positif.

   $(g \circ f)(x) = \sqrt{\lfloor x \rfloor - a - \frac{\sqrt{2\lfloor x \rfloor - 2a}}{\sqrt{a}}}$

   Karena $3\frac{1}{2} \leq x < 4$ maka $\lfloor x \rfloor = 3$

   Untuk $3\frac{1}{2} \leq x < 4$ maka $f(x) = \sqrt{3 - a}$ sehingga

   $(g \circ f)(x) = \sqrt{3 - a - \frac{\sqrt{6-2a}}{\sqrt{a}}}$

   Syarat yang harus dipenuhi adalah

   $a \leq 3$ .... (1) dan

   $3 - a - \frac{\sqrt{6-2a}}{\sqrt{a}} \geq 0$

   $a(3a - a)^2 \geq 6 - 2a$ .... (2)

   Jika a = 1 maka $1 \cdot (3 - 1)^2 = 4$ dan 6 - 2(1) = 4

   Jika a = 2 maka $2 \cdot (3 - 2)^2 = 2$ dan 6 - 2(2) = 2

   Jika a = 3 maka $3 \cdot (3 - 3)^2 = 0$ dan 6 - 2(3) = 0

   Maka nilai a bulat positif yang memenuhi adalah a = 1 atau a = 2 atau a = 3.

   ∴ Banyaknya nilai a yang memenuhi ada 3.

5. Jawaban :

   Karena $n^2 + pn$ bilangan kuadrat sempurna maka $4n^2 + 4pn$ juga merupakan kuadrat sempurna. $4n^2 + 4pn = m^2$ dengan n, m ∈ N dan p adalah bilangan prima.

   $(2n + p)^2 - p^2 = m^2$

   $p^2 = (2n + p + m)(2n + p - m)$

   Maka ada 2 kasus :

   - Jika 2n + p + m = p dan 2n + p - m = p

     Maka didapat 2n + p = 0 dan 2n - p = 0

     Didapat n = 0 yang tidak memenuhi syarat bahwa n ∈ N.
   - Jika $2n + p + m = p^2$ dan 2n + p - m = 1

     Jumlahkan kedua persamaan didapat

     $4n + 2p = p^2 + 1$

     $4n = (p - 1)^2$

     n = $\frac{(p-1)}{4}$

     Karena p adalah bilangan prima ganjil maka akan didapat n ∈ N.

   ∴ Jadi, S = {n | n = $\frac{(p-1)^2}{4}$} dengan p bilangan prima > 2.

6. Jawaban :

   $\{\sqrt[3]{k}\} = n = 2012m$ dengan m ∈ N

   $n - \frac{1}{2} < \sqrt[3]{k} < n + \frac{1}{2}$

   $n^3 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{4}n - \frac{1}{8} < k < n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{4}n + \frac{1}{8}$

Karena n habis dibagi 2012 maka $\frac{3}{2}n^2$ dan $\frac{3}{4}n$ keduanya bilangan asli. Jadi,

$n^3 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{4}n \le k \le n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{4}n$

Maka banyaknya nilai k yang memenuhi ada

$\left(n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{4}n\right) - \left(n^3 - \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{4}n\right) + 1 = 3n^2 + 1$

∴ Jadi, banyaknya nilai k yang memenuhi ada $3n^2 + 1$.

7. Jawaban : 40

Jelas bahwa 123456789123456789...123456789 tidak habis dibagi 2 atau 5.

Karena banyaknya bilangan ada tak terhingga maka sesuai Pigeon Hole Principle (PHP) pasti ada 2 bilangan di antaranya yang memiliki sisa yang sama jika dibagi suatu bilangan tertentu.

Misalkan m = 123456789123456789...123456789 adalah bilangan yang terdiri dari 9a angka sedangkan n = 123456789123456789...123456789 adalah bilangan terdiri dari 9b angka yang keduanya memiliki sisa yang sama jika dibagi p dengan p < 100 dan p tidak habis dibagi 2 atau 5.

m - n = 123456789...000000000... yang habis dibagi p.

m - n adalah bilangan 9a angka yang terdiri dari 9(a - b) angka berbentuk 123456789... dan dikuti angka 0 sebanyak 9b angka.

Karena m - n habis dibagi p sedangkan p tidak habis dibagi 2 atau 5 maka bilangan 123456789... yang terdiri dari 9(a - b) angka akan habis dibagi p < 100.

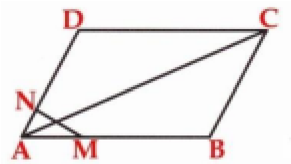
Jadi, 123456789123456789...123456789 akan habis dibagi oleh semua n < 100 dengan n tidak habis dibagi 2 atau 5.

Banyaknya bilangan yang habis dibagi 2 atau 5 $= \left\lfloor\frac{99}{2}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{99}{5}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{99}{10}\right\rfloor = 59.$

Banyaknya bilangan yang tidak habis dibagi 2 atau 5 = 99 - 59 = 40.

∴ Jadi, banyaknya bilangan asli n < 100 yang memenuhi ada 40.

8. Jawaban : 177



Tanpa mengurangi keumuman misalkan koordinat A(0, 0), B(a, 0) dan D(b, c).

Maka koordinat C(b + a, c). Koordinat $M\left(\frac{17}{1000}a, 0\right)$ dan $N\left(\frac{17}{2009}b, \frac{17}{2009}c\right)$.

Persamaan garis AC adalah $y = \frac{c}{b+a}x$

Persamaan garis MN adalah y − 0 = $\frac{\frac{17}{2009}c-0}{\frac{17}{2009}b-\frac{17}{1000}a}\left(x - \frac{17}{1000}a\right)$

Perpotongan garis AC dan MN adalah titik P

$\frac{c}{b+a}x_P = \frac{1000c}{1000b-2009a}\left(x_P - \frac{17}{1000}a\right)$

$\frac{1}{b+a}x_P = \frac{1000}{1000b-2009a}x_P - \frac{17}{1000b-2009a}a$

$\frac{17a}{1000b-2009a} = \frac{1000}{1000b-2009a}x_P - \frac{1}{b+a}x_P = x_P\left(\frac{3009a}{(b+a)(1000b-2009a)}\right)$

$x_p = \frac{b+a}{177}$ sehingga $y_p = \frac{c}{b+a} x_p = \frac{c}{177}$. Jadi, koordinat $P\left(\frac{b+a}{177}, \frac{c}{177}\right)$

Maka $\frac{AC}{AP} = \frac{x_C - x_A}{x_P - x_A} = \frac{y_C - y_A}{y_P - y_A} = 177$

Jadi, $\frac{AC}{AP} = 177$

9. Jawaban : 26880

Misalkan A, B, C dan D adalah 4 orang dalam arah searah jarum jam yang tidak duduk dekat pasangannya dan x_A, x_B, x_C dan x_D adalah banyaknya kursi yang berada antara A dan B, antara B dan C, antara C dan D dan antara D dan A. Jelas bahwa x_A, x_B, x_C dan x_D semuanya genap.

Ada 4 kasus :

- Kasus 1, $x_A = 0$, $x_B = 0$, $x_C = 0$ dan $x_D = 6$.
  A, B, C dan D akan berdekatan. Agar di antara mereka tidak ada sepasang suami isteri maka mereka harus duduk berselang seling.
  Banyaknya cara memilih A ada 10. Banyaknya cara memilih B hanya 8 sebab B tidak boleh pasangan A. Cara memilih C dan D hanya ada satu cara memilihnya sebab merekapasangannya A dan B.
  Banyaknya cara menyusun 3 pasang lainnya adalah 3! x 2 x 2 x 2 = 48. Banyaknya susunan = 10 x 8 x 1 x 1 x 48 = 3840.
- Kasus 2, $x_A = 0$, $x_B = 2$, $x_C = 2$ dan $x_D = 2$.
  A dan B akan berdekatan sehingga tidak mungkin pasangan suami isteri. Banyaknya cara memilih A dan B adalah 10 x 8. C adalah pasangan A atau B sehingga banyaknya cara memilih C dan D adalah 2 x 1.
  Banyaknya cara menyusun 3 pasang lainnya adalah 3! x 2 x 2 x 2 = 48. Banyaknya susunan = 10 x 8 x 2 x 1 x 48 = 7680.
- Kasus 3, $x_A = 0$, $x_B = 0$, $x_C = 2$ dan $x_D = 4$.
  A, B dan C akan berdekatan sehingga B bukan pasangan A atau C. Banyaknya cara memilih A ada 10 dan B ada 8. Banyaknya cara memilih C dan D hanya ada 1.
  Banyaknya cara menyusun 3 pasang lainnya adalah 3! X 2 x 2 x 2 = 48. Banyaknya susunan = 10 x 8 x 1 x 1 x 48 = 3840.
- Kasus 4, $x_A = 0$, $x_B = 2$, $x_C = 0$ dan $x_D = 4$.
  A dan B akan berdekatan sehingga tidak mungkin pasangan suami isteri. Banyaknya cara memilih A dan B adalah 10 x 8. C adalah pasangan A atau B sehingga banyaknya cara memilih C dan D adalah 2 x 1.
  Banyaknya cara menyusun 3 pasang lainnya adalah 3! x 2 x 2 x 2 = 48. Banyaknya susunan = 10 x 8 x 2 x 1 x 48 = 7680
- Kasus 5, $x_A = 0$, $x_B = 0$, $x_C = 4$ dan $x_D = 2$.
  A, B dan C akan berdekatan sehingga B bukan pasangan A atau C. Banyaknya cara memilih A ada 10 dan B ada 8. Banyaknya cara memilih C dan D hanya ada 1.
  Banyaknya cara menyusun 3 pasang lainnya adalah 3! x 2 x 2 x 2 = 48. Banyaknya susunan = 10 x 8 x 1 x 1 x 48 = 3840.

Banyaknya cara menyusun secara keseluruhan = 10 x 8 x 7 x 1 x 48 = 26880.

∴ Jadi, banyaknya cara menyusun secara keseluruhan = 26880.

10. Jawaban : 4

$x^3 - x^2 + x - 2 = 0$ akar - akarnya p, q dan r.

$p + q + r = 1$

$pq + pr + qr = 1$

$pqr = 2$

Alternatif:

$(p + q + r)^3 = p^3 + q^3 + r^3 + 3p^2q + 3p^2r + 3pq^2 + 3pr^2 + 3q^2r + 3qr^2 + 6pqr$

$(p + q + r)^3 = p^3 + q^3 + r^3 + 3(pq + pr + qr)(p + q + r) - 3pqr$

$1^3 = p^3 + q^3 + r^3 + 3(1)(1) - 3(2)$ $p^3 + q^3 + r^3 = 4$

∴ Jadi, $p^3 + q^3 + r^3 = 4$.

11. Jawaban : 6

$m^2 + n^5 = 252$ dengan m, n ∈ N

$n^5 \leq 252$ sehingga $n \leq 3$

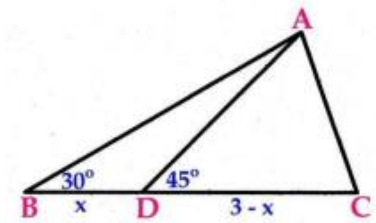
- Jika n = 1 maka $m^2 = 251$. Tidak ada m ∈ N yang memenuhi.
- Jika n = 2 maka $m^2 = 220$. Tidak ada m ∈ N yang memenuhi.
- Jika n = 3 maka $m^2 = 9$. Nilai m ∈ N yang memenuhi hanya m = 3.

Maka pasangan (m, n) yang memenuhi adalah (3, 3).

∴ Jadi, m + n = 6.

12. Jawaban :

Misalkan panjang BD = x. Karena ∠ADC = 45° maka ∠ADB = 135° sehingga ∠BAD = 15°.



$$\frac{AD}{\sin 30^o} = \frac{BD}{\sin 15^o}$$

$AD = 2x \cos 15^o$.

Pada ΔACD berlaku

$AC^2 = AD^2 + DC^2 - 2 \cdot AD \cdot DC \cos 45^o$

$AC^2 = (2x \cos 15^o)^2 + (3 - x)^2 - 2(2x \cos 15^o)(3 - x) \cos 45^o$

Maka nilai AC bergantung dengan x.

∴ Jadi, belum dapat ditentukan panjang AC.

13. Jawaban : 78

Ada 2 kasus :

- Jika D sebagai pelari pertama

  Banyaknya cara memilih pelari ke-2 ada 4, pelari ke-3 ada 3, pelari ke-4 ada 2 dan pelari ke5 ada 1.

  Banyaknya cara = 4 x 3 x 2 x 1 = 24

- Jika D bukan sebagai pelari pertama Banyaknya cara memilih pelari ke-1 ada 3.
  Banyaknya cara memilih pelari ke-5 ada 3.
  Banyaknya cara memilih pelari ke-2 ada 3 dan pelari ke-3 ada 2 dan pelari ke-4 ada 1.
  Banyaknya cara = 3 x 3 x 2 x 1 x 3 = 54

Banyaknya cara menyusun pelari = 24 + 54 = 78.

∴ Jadi, banyaknya cara menyusun pelari = 78.

14. Jawaban : 2

$H = \{2^0 \cdot 3^0, 2^0 \cdot 3^1, 2^0 \cdot 3^2, 2^0 \cdot 3^3, \cdots, 2^{10} \cdot 3^0)$

Alternatif:

$3^6 = 729$ dan $3^7 = 2187$

$2^{10} = 1024$ dan $2^{11} = 2048$.

$x = \frac{2^{10} \cdot 3^6 \cdot 2^{10} \cdot 3^5 + 2^{10} \cdot 3^4 + \cdots + 2^0 \cdot 3^6}{2^{10} \cdot 3^6} = \frac{p}{q}$ dengan $q = 2^{10} \cdot 3^6$

$p = 3^6 \cdot (2^{10} + 2^9 + \cdots + 1) + 3^5 \cdot (2^{10} + 2^5 + \cdots + 2^1) + 3^4 \cdot (2^{10} + 2^5 + \cdots + 2^3) + 3^3 \cdot (2^{10} + 2^5 + \cdots + 2^4) + 3^2 \cdot (2^{10} + 2^9 + \cdots + 2^6) + 3^1 \cdot (2^{10} + 2^{10} + \cdots + 2^7) + 3^0 \cdot (2^{10} + 2^9)$

$p = 3^6 \cdot (2^{11} - 1) + 3^5 \cdot 2^1 \cdot (2^{10} - 1) + 3^4 \cdot 2^3 \cdot (2^8 - 1) + 3^3 \cdot 2^4 \cdot (2^7 - 1) + 3^2 \cdot 2^6 \cdot (2^5 - 1) + 3^1 \cdot 2^7 \cdot (2^4 - 1) + 3^0 \cdot 2^9 \cdot (2^2 - 1)$

p = 1492263 + 497178 + 165240 + 54862 + 17856 + 5760 + 1536 = 2.234.697.

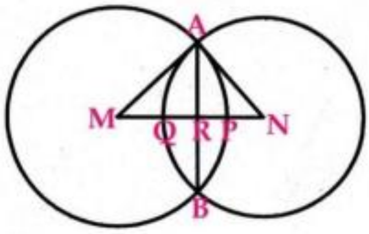
$q = 2^{10} \cdot 3^6 = 746.496$

$2 < \frac{p}{q} < 3$

∴ Jadi, $\lfloor x \rfloor = 2$.

15. Jawaban :

Misalkan M dan N bertuurt-turut adalah pusat lingkaran Γ_1 dan Γ_2. Misalkan juga MN berpotongan dengan AB di R. Jelas bahwa R adalah pertengahan AB. Jadi, AR = RB = 5.



Jelas bahwa garis melalui kedua pusat lingkaran akan memotong tegak lurus talibusur persekutuan. Jadi, AR ⊥ MR dan AR ⊥ RN.

Karena MA = 13 dan AR = 5 maka MR = 12. Jadi, RP = 1 dan QR = PQ - RP = 3 - 1 = 2.

Misalkan jari-jari Γ_2 = r.

$AN^2 = AR^2 + RN^2$

$r^2 = 5^2 + (r - 2)^2$

4r = 29

∴ Jadi jari-jari lingkaran $\Gamma^2 = \frac{29}{4}$

16. Jawaban : 1

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{xy^2}=\frac{3}{4}$ dengan $x, y \in Z$

Jelas bahwa $x, y \neq 0$.

- Jika x < 0 maka

  $\frac{1}{x}-\frac{1}{xy^2} \leq 0$

  $\frac{1}{y} \geq \frac{3}{4}$

  Nilay y yang memenuhi hanya $y = 1$

  Tetapi untuk $y = 1$ maka $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{xy^2} = 1 \neq \frac{3}{4}$

- Jika x > 0
  - Jika $y < 0$

    $\frac{3}{4}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{xy^2} < \frac{1}{x}$

    Nilai x yang memenuhi hanya x = 1

    $\frac{1}{y}-\frac{1}{y^2}=-\frac{1}{4}$

    $4y-4=-y^2$

    $(y+2)^2=8$

    Tidak ada y bulat yang memenuhi.
  - Jika y > 0
    - Jika $x \leq y$

      $\frac{3}{4}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{xy^2} < \frac{1}{x}+\frac{1}{y} \leq \frac{2}{x}$

      $x \leq 2$

      Jika x = 1 maka tidak ada y yang memenuhi.

      Jika x = 2 maka $\frac{1}{y}-\frac{1}{2xy^2}=\frac{1}{4}$

      $4y-2=y^2$

      $(y-2)^2=2$

      Tidak ada y bulat yang memenuhi.
    - Jika $y \leq x$

      $\frac{3}{4}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{xy^2} < \frac{1}{x}+\frac{1}{y} \leq \frac{2}{y}$

      $y \leq 2$

      Jika y = 1 maka tidak ada x bulat yang memenuhi.

      Jika y = 2 maka $\frac{1}{4}=\frac{3}{4x}$ yang dipenuhi oleh x = 3.

      Pasangan $(x, y) = (3, 2)$ memenuhi persamaan.

Banyaknya pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi ada 1.

∴ Jadi, banyaknya pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi ada 1.

17. Jawaban : 9

    $xy=\frac{1}{3}$

    Berdasarkan ketaksamaan AM-GM maka

$\frac{1}{9x^6} + \frac{1}{4y^6} \geq 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{9x^6}\right)\left(\frac{1}{4y^6}\right)} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{xy}\right)^3 = \frac{1}{3} \cdot 3^3 = 9$

∴ Jadi,nilai minimal dari $\frac{1}{9x^6} + \frac{1}{4y^6}$ adalah 9.

18. Jawaban : 2

$4^a + 4a^2 + 4 = b^2$

Alternatif:

Lemma :

Akan dibuktikan dengan induksi matematika bahwa $4^n > 4n^2$ untuk n ∈ N dan n > 2.

Bukti :

Jika n = 3 maka $64 = 4^3 > 4 \cdot (3)^2 = 36$

Andaikan benar untuk n = k maka diangap benar $4^k > 4k^2$

$4^{k+1} = 4 \cdot 4^k > 16k^2 = 4k^2 + (k - 2) \cdot 8k + 16k + 4k^2$

Karena k > 2 maka $4^{k+1} = 4 \cdot 4^k > 16k^2 = 4k^2 + (k - 2) \cdot 8k + 16k + 4k^2 > 4k^2 + 8k + 4 = 4(k + 1)^2$

Maka terbukti bahwa jika $4^k > 4k^2$ maka $4^{k+1} > 4(k + 1)^2$ untuk k > 2. Jadi, terbukti bahwa $4^n > 4n^2$ untuk n ∈ N dan n > 2

$4^a + 4a^2 + 4 = b^2$.

Karena ruas kiri habis dibagi 4 maka b genap. Misalkan b = 2m maka

$4^{a-1} + a^2 + 1 = m^2$

Jika a ganjil maka ruas kiri dibagi 4 akan bersisa 2 atau 3 yang tidak memenuhi syarat.

Misalkan a = 2n maka

$4^{2n-1} + 4n^2 + 1 = m^2$

Berdasarkan lemma untuk n > 2 maka

$(2^{2n-1})^2 = 4^{2n-1} < 4^{2n-1} + 4n^2 + 1 < 4^{2n-1} + 4^n + 1 = (2^{2n-1})^2 + 2 \cdot 2^{2n-1} + 1 = (2^{2n-1} + 1)^2$

$(2^{2n-1})^2 < 4^{2n-1} + 4n^2 + 1 < (2^{2n-1} + 1)^2$

$(2^{2n-1})^2 < m^2 < (2^{2n-1} + 1)^2$

Jadi, untuk n > 2 maka m^2 terletak di antara 2 bilangan kuadrat berurutan. Maka tidak ada n yang memenuhi.

Jika n = 1 maka $4^{2n-1} + 4n^2 + 1 = 9 = 3^2$.

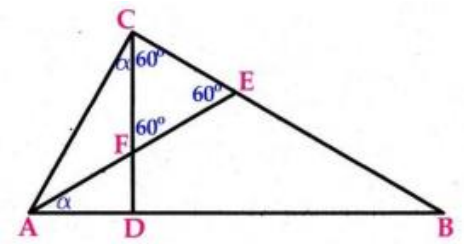
Jika n = 2 maka $4^{2n-1} + 4n^2 + 1 = 81 = 9^2$.

Maka pasangan bilangan bulat positif (a, b) yang memenuhi adalah (2, 6), (4, 18).

∴ Jadi, banyaknya pasangan bilangan bulat positif (a, b) yang memenuhi ada 2.

19. Jawaban : 30

Misalkan ∠BAE = ∠ACD = α. Misalkan juga panjang AC = x sehingga panjang AB = 2x.



Karena ∠CFE = 60° maka ∠AFC = 120°.

Karena ∠AFC = 120^o dan ∠ACF = α maka ∠CAF = 60^o - α sehingga ∠BAC = 60^o. Karena ∠BAC = 60^o dan ∠ACB = 60^o + α maka ∠ABC = 60^o - α.

Berdasarkan dalil sinus pada ΔABC maka

$$\frac{AB}{\sin(60^o+\alpha)} = \frac{AC}{\sin(60^o-\alpha)}$$

Karena AB = 2AC maka

2 sin (60^o - α) = sin (60^o + α)

$2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\alpha - 2 \cdot \frac{1}{2}\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha$

$\frac{1}{2}\sqrt{3}\cos\alpha = \frac{3}{2}\sin\alpha$

$\cot\alpha = \sqrt{3}$

α = 30^o

∠ABC = 60^o −α = 30^o.

∴ Jadi, besar ∠ABC = 30^o.

20. Jawaban : 56

Bilangan pangkat 2, pangkat 4, pangkat 6, pangkat 8 dan pangkat 10 semuanya merupakan bilangan pangkat 2. Bilangan pangkat 9 juga merupakan bilangan pangkat 3. Jadi, persoalan setara dengan mencarai banyaknya bilangan pangkat 2 atau pangkat 3 atau pangkat 5 atau pangkat 7. Misalkan A, B, C dan D berturut-turut adalah himpunan semua anggota bilangan bulat positif n ≤ 2012 yang merupakan pangkat 2, pangkat 3, pangkat 5 dan pangkat 7.

Karena 44^2 = 1936 dan 45^2 = 2025 maka banyaknya anggota himpunan A = |A|= 44.

Karena 12^3 = 1728 dan 13^3 = 2197 maka banyaknya anggota himpunan B = |B|= 12.

Karena 4^5 = 1024 dan 5^5 = 3125 maka banyaknya anggota himpunan C = |C| = 4.

Karena 2^7 = 128 dan 3^7 = 2187 maka banyaknya anggota himpunan D = |D| = 2.

A∩B adalah himpunan semua anggota bilangan bulat positif n ≤ 2012 yang merupakan pangkat 2 dan juga pangkat 3 yang berarti merupakan himpunan pangkat 6.

Karena 3^6 = 729 dan 4^6 = 4096 maka banyaknya anggota himpunan A∩B = |A∩B| = 3.

Dengan cara yang sama didapat

|A∩C| = 2 ; |A∩D| = 1 ; |B∩C| = 1 ; |B∩D| = 1 ; |C∩D| = 1.

|A∩B∩C| = 1 ; |A∩B∩D| = 1 ; |A∩C∩D| = 1 ; |B∩C∩D| = 1.

|A∩B∩C∩D| = 1

|A∩B∩C∩D| = |A| + |B| + |C| + |D| - |A∩B| - |A∩C| - |A∩D| - |B∩C| - |B∩D| - |C∩D| + |A∩B∩C| + |A∩B∩D| + |A∩C∩D| + |B∩C∩D| - |A∩B∩C∩D|.

|A∩B∩C∩D| = 44 + 12 + 4 + 2 - 3 - 2 - 1 - 1 - 1 - 1 + 1 + 1 + 1 + 1 - 1 = 56

∴ Jadi, banyaknya bilangan yang memenuhi ada 56.

21. Jawaban :

a, b, x, y bilangan bulat tak negatif.

a + b = xy

x + y = ab

Jika salah satu di antara a, b, x dan y sama dengan 0, tanpa mengurangi keumuman misalkan saja a = 0 maka x + y = 0 sehingga x = y = 0 dan membuat b = 0.

Jadi, jika salah satu di antara a, b, x atau y sama dengan 0 maka yang lain akan sama dengan 0.
Andaikan bahwa tidak ada satupun di antara a, b, x atau y sama dengan 0.
Karena a dan b simetris maka dapat diandaikan $a \le b$.
Karena a bilangan bulat lebih dari 0 maka $x + y = ab \ge b$
$2x + 2y \ge 2b$
Karena $a \le b$ maka $xy = a + b \le 2b$
$2x + 2y \ge 2b \ge a + b = xy$
Jadi, didapat $2x + 2y \ge xy$
$(x - 2)(y - 2) \le 4$
Karena x dan y simetris maka tanpa mengurangi keumuman dapat dimisallkan $x \le y$.
Maka $x \le 4$.

- Jika $x = 1$
  $a + b = y$ dan $1 + y = ab$
  $1 + a + b = ab$
  $(a - 1)(b - 1) = 2$
  Didapat $a = 2$ dan $b = 3$ sehingga $y = 5$
- Jika $x = 2$
  $a + b = 2y$ dan $2 + y = ab$
  $4 + a + b = 2ab$
  $(2a - 1)(2b - 1) = 9$
  Didapat $a = 1$ dan $b = 5$ sehingga $y = 3$ atau $a = 2$ dan $b = 2$ sehingga $y = 2$
- Jika $x = 3$
  $a + b = 3y$ dan $3 + y = ab$
  $9 + a + b = 3ab$
  $(3a - 1)(3b - 1) = 28$
  Didapat $a = 1$ dan $b = 5$ sehingga $y = 2$
- Jika $x = 4$
  Maka $y = 4$
  $a + b = 16$ dan $8 = ab$
  Tidak ada a dan b bulat yang memenuhi.

∴ Semua tupel (a,b,x,y) yang memenuhi adalah (0,0,0,0), (1,5,2,3), (1,5,3,2), (2,2,2,2), (2,3,1,5), (2,3,5,1), (3,2,1,5), (3,2,5,1), (5,1,2,3), (5,1,3,2).

22. Jawaban :

$x = 1 + \sqrt{y - z^2}$
$y = 1 + \sqrt{z - x^2}$
$z = 1 + \sqrt{x - y^2}$

Karena akar suatu bilangan tidak mungkin negative maka $x, y, z \ge 1$.
Alternatif:
Karena $x, y, z \ge 1$ maka $x^2 \ge x$; $y^2 \ge y$ dan $z^2 \ge z$
Karena x real maka $y \ge z^2 \ge z \ge x^2 \ge x \ge y^2$

Karena y ≥ y^2 dan y^2 ≥ y maka haruslah y = y^2 yang dipenuhi oleh y = 1.

Dengan cara yang sama didapat x = z = 1.

∴ Jadi, tripel bilangan real (x,y,z) yang memenuhi x = y = z = 1.

23. Jawaban : 28

Misalkan kawan laki-laki tersebut adalah A, B, C, D, E dan F,

|AUBUCUDUEUF| = 11 · $_6C_1$ - 6 · $_6C_2$ + 4 · $_6C_3$ - 3 · $_6C_4$ + 3 · $_6C_5$ - 10 · $_6C_6$

|S| - 9 = 66 - 90 + 80 - 45 + 18 - 10 = 19

|S| = 28

Maka laki-laki tersebut pergi ke restoran sebanyak 28 kali.

Catatan : Penulis berkeyakinan bahwa maksud soal adalah seperti tersebut di atas. Bertemu dengan tepat tiga di antaranya berarti juga bertemu dengan 2 di antaranya. Persyaratan yang dipenuhi haruslah banyaknya pertemuan dengan semuanya paling banyak harus sama dengan pertemuan dengan lima di antaranya. Ternyata bertemu dengan semuanya sebanyak 10 kali lebih banyak dari bertemu dengan setiap lima di antaranya,yaitu 3 kali.

Jika tidak, maka soal harus diartikan bertemu dengan setiap lima di antaranya tidak berarti juga bertemu dengan empat di antaranya.

|AUBUCUDUEUF| = 11 · $_6C_1$ - 6 · $_6C_2$ + 4 · $_6C_3$ - 3 · $_6C_4$ + 3 · $_6C_5$ - 10 · $_6C_6$

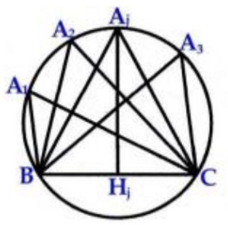
|S| - 9 = 66 + 90 + 80 + 45 + 18 + 10 = 309

|S| = 318.

∴ Jadi, laki-laki tersebut makan di restoran sebanyak 28 kali.

24. Jawaban :

Andaikan A_i dengan i = 1, 2, 3, ... adalah kumpulan titik-titik sehingga ∠BA_iC = α maka kumpulan titik-titik tersebut akan membentuk suatu lingkaran.



Misalkan H_i pada BC sehingga A_iH_i tegak lurus BC.

Jelas bahwa A_iH_i akan maksimum jika H_i merupakan pertengahan BC.

Misalkan A_iH_i maksimum = y. Saat A_iH_i = y maka AB = AC.

Misalkan saja saat ini AB = AC = x.

$y^2 = x^2 - a^2$

$$\cos A = \frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2\cdot AB\cdot AC} = \frac{2x^2-a^2}{2x^2}$$

$$\sin A = 2\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A = \frac{ay}{x^2}$$

$$AB + AC - BC\cos A - 2y\sin A = \frac{4x^3 - 2ax^2 + a^3 - 4ay^2}{2x^2} = \frac{4x^3 - 2ax^2 + a^3 - 4ax^2 + a^3}{2x^2}$$

$$AB + AC - BC\cos A - 2y\sin A = \frac{4x(x-a)^2 + 2a(x-a)^2}{2x^2} = \frac{2(x-a)^2(2x+a)}{2x^2}$$

Karena bilangan kuadrat tidak mungkin negatif maka

AB + AC − BC cos A − 2y sin A ≥ 0 sehingga

BC cos A + 2y sin A ≤ 2x = AB + AC

Maka didapat BC cos ∠BAC + 2AH sin ∠BAC ≤ BC cos ∠BAC +2y sin ∠BAC ≤ 2x = AB + AC

∴ Jadi, terbukti bahwa AB + AC ≥ BC cos ∠BAC + 2AH sin ∠BAC

25. Jawaban :

Lemma 1 :

Akan dibuktikan dengan induksi matematika bahwa $3^{2n+1} > (n + 1)^4$ untuk n ∈ N dan n > 1.

Bukti :

- Jika n = 2 maka $443 = 3^{2(2)+1} > (2 + 1)^4 = 81$
- Andaikan bentuk untuk n = k. Maka $3^{2k+1} > (k + 1)^4$ dianggap benar untuk k ∈ N dan k > 1.
- $3^{2(k+1)+1} = 3^2 \cdot 3^{2k+1} > 9(k + 1)^4 = 9k^4 + 36k^3 + 54k^2 + 36k + 9 = k^4 + 36k^3 + 54k^2 + 36k + 8k^2 + 9$

  $3^{2(k+1)+1} = 3^2 \cdot 3^{2k+1} > 9(k + 1)^4 = k^4 + 36k^3 + 54k^2 + 36k + 8k^2 + 9 > k^4 + 8k^3 + 24k^2 + 32k + 16$

  $3^{2(k+1)+1} = 3^2 \cdot 3^{2k+1} > k^4 + 8k^3 + 24k^2 + 32k + 16 = (k + 2)^4$

Jadi, terbukti bahwa $3^{2n+1} > (n + 1)^4$ untuk n ∈ N dan n > 1

Lemma 2 :

Akan dibuktikan dengan induksi matematika bahwa $(n!)^4 < 3^{n^2-1}$ untuk n ∈ N dan n > 1.

Bukti :

- Jika n = 2 maka $16 = (2!)^4 < 3^{2^2-1} = 27$
- Andaikan benar untuk n = k. Maka $(k!)^4 < 3^{k^2-1}$ dianggap benar untuk k ∈ N dan k > 1.
- Sesuai lemma 1 maka

  $((k + 1)!)^4 = (k + 1)^4(k!)^4 < 3^{2k+1} \cdot 3^{k^2-1} = 3^{(k+1)^2-1}$

Jadi, terbukti bahwa $(n!)^4 < 3^{n^2-1}$ untuk n ∈ N dan n > 1

- Jika i = 1

  $P_i = 2$ dan untuk n = 2 maka $p_i^{(n^2)} = P_{i-1} \cdot (n!)^4$

  Jadi, untuk i = 1 sehingga Pi = 2 tidak termasuk bilangan prima sederhana.
- Jika i > 1

  $P_i \geq 3$
  - Jika n = 1

    $p_i^{(n^2)} = P_i > P_{i-1} = P_{i-1} \cdot (n!)^4$

    Jadi, untuk n = 1 maka $p_i^{(n^2)} > P_{i-1} \cdot (n!)^4$
  - Jika n > 1

    Sesuai lemma 2 dan mengingat bahwa $P_i > P_{i-1}$ didapat

    $(n!)^4 < 3^{n^2-1} \leq p_i^{(n^2-1)} < \frac{p_i}{p_{i-1}} p_i^{(n^2-1)}$

    $p_{i-1}(n!)^4 < p_i^{(n^2)}$

Terbukti bahwa $p_i^{(n^2)} > p_{i-1} \cdot (n!)^4$ untuk i > 1 dan n ∈ N.

∴ Jadi, semua bilangan prima sederhana adalah Pi dengan i ∈ N dan i ≠ 1.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2012

TINGKAT NASIONAL

HARI PERTAMA & HARI KEDUA

WAKTU : 8 JAM

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Nasional Tahun 2012

1. Buktikan bahwa untuk sebarang bilangan asli a dan b, bilangan
$$n = FPB\,(a, b) + KPK\,(a, b) - a - b$$
adalah bilangan bulat genap tak negatif.

2. Diberikan bilangan asli n dan bilangan-bilangan real positif $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

   Buktikan bahwa
$$(1 + a_1)^2(1 + a_2)^3 \cdots (1 + a_n)^{n+1} \geq (n + 1)^{n+1} a_1 a_2 a_n$$
dan tentukan kapan kesamaan berlaku.

3. Diberikan segitiga lancip ABC dengan $AB > AC$ dan memiliki titik pusat lingkaran luar O. Garis BO dan CO memotong garis bagi $\angle BAC$ berturut-turut di titik P dan Q. Selanjutnya, garis BQ dan CP berpotongan di titik R. Buktikan bahwa garis AR tegak lurus terhadap garis BC.

4. Diberikan 2012 titik berbeda $A_1, A_2, \ldots, A_{2012}$ di bidang Cartesius. Untuk sebarang permutasi $B_1, B_2, \ldots, B_{2012}$ dari $A_1, A_2, \ldots, A_{2012}$, didefinisikan bayangan dari titik P terhadap permutasi tersebut sebagai berikut.

   Titik P dirotasikan 180° dengan pusat B_1 menghasilkan titik P_1,

   titik P_1 dirotasikan 180° dengan pusat B_2 menghasilkan titik $P_2, \cdots$,

   titik P_{2011} dirotasikan 180° dengan pusat B_{2012} menghasilkan titik P_{2012}.

   Selanjutnya, titik P_{2012} dikatakan sebagai bayangan dari titik P terhadap permutasi $B_1, B_2, \ldots, B_{2012}$. Misalkan N adalah banyak bayangan titik P yang berbeda terhadap semua permutasi dari $A_1, A_2, \ldots, A_{2012}$. Tentukanlah nilai terbesar yang mungkin bagi N.

5. Diberikan bilangan asli m dan n. Misalkan P dan Q adalah dua kumpulan $m \times n$ bilangan 0 dan 1 yang disusun dalam m baris dan n kolom. Contoh salah satu kumpulan itu untuk $m = 3$ dan $n = 4$ adalah
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
   Misalkan kedua kumpulan tersebut memenuhi empat sifat berikut.

   (i) Pada setiap baris di P, bilangan dari kiri ke kanan tidak pernah naik (boleh sama atau turun),
   (ii) Pada setiap kolom di Q, bilangan dari atas ke bawah tidak pernah naik (boleh sama atau turun),
   (iii) Jumlah bilangan pada sebarang baris di P sama dengan jumlah bilangan pada baris yang sama di Q,

dan
(iv) Jumlah bilangan pada sebarang kolom di P sama dengan jumlah bilangan pada kolom yang sama di Q.

Tunjukkanlah bahwa bilangan pada baris ke-i kolom ke-j di P sama dengan bilangan pada baris ke-i kolom ke-j di Q untuk setiap i = 1, 2, ..., m dan j = 1, 2, ..., n.

6. Misalkan R+ menyatakan himpunan semua bilangan real positif. Tunjukkan bahwa tidak ada fungsi f : $R^+ \longrightarrow R^+$ yang memenuhi

$$f\,(x+y) = f(x) + f(y) + \frac{1}{2012}$$

untuk setiap bilangan real positif x dan y.

7. Misalkan n bilangan asli. Buktikan bahwa persamaan

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{n}$$

memiliki solusi pasangan bilangan asli (x, y) jika dan hanya jika n habis dibagi oleh suatu bilangan kuadrat yang lebih besar daripada 1.

8. Diberikan sebarang segitiga ABC dan garis bagi $\angle BAC$ memotong sisi BC dan lingkaran luar segitiga ABC berturut-turut di D dan E. Misalkan M dan N berturut-turut titik tengah BD dan CE. Lingkaran luar segitiga ABD memotong AN di titik Q. Lingkaran yang melalui A dan menyinggung BC di D memotong garis AM dan sisi AC berturut-turut di titik P dan R. Tunjukkan bahwa empat titik B, P, Q, R terletak pada satu garis.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2012

TINGKAT NASIONAL

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Nasional Tahun 2012

1. Penyelesaian :

Bukti:

Misalkan d = FPB(a, b) dan k = KPK(a, b). Maka, kita dapat menulis a = dx dan b = dy untuk beberapa bilangan bulat x dan y yang relatif prima (yaitu, FPB(x, y) = 1).

Sifat FPB dan KPK:

- d ⋅ k = a ⋅ b
- k = $\frac{ab}{d}$

Substitusikan d dan k ke dalam n:

- n = d + k - a – b
- n = d + $\frac{ab}{d}$ - dx – dy
- n = d + $\frac{dx \cdot dy}{d}$ - dx – dy
- n = d + dxy - dx – dy
- n = d(1 + xy - x - y)
- n = d(1 - x - y + xy)
- n = d(1 - x)(1 - y)

Analisis n:

- Karena x dan y adalah bilangan bulat, maka (1 - x) dan (1 - y) juga bilangan bulat.
- n = d(1 - x)(1 - y) adalah bilangan bulat karena d, (1 - x), dan (1 - y) adalah bilangan bulat.

Paritas n:

- Perhatikan bahwa a dan b memiliki paritas yang sama dengan dx dan dy.
- Jika a dan b keduanya genap, maka d genap dan x serta y keduanya ganjil. Maka, (1 – x) dan (1 – y) genap, sehingga n genap.
- Jika a dan b keduanya ganjil, maka d ganjil dan x serta y keduanya ganjil. Maka, (1 – x) dan (1 – y) genap, sehingga n genap.
- Jika a dan b memiliki paritas yang berbeda, maka d ganjil dan salah satu dari x atau y genap. Maka, salah satu dari (1 – x) atau (1 – y) ganjil dan yang lain genap, sehingga n genap.

Non-negatifitas n:

- Karena d = FPB(a, b), maka d ≤ a dan d ≤ b.
- k = KPK(a, b) ≥ a dan k ≥ b.
- n = d + k - a - b = (k - a) + (d - b) ≥ 0 karena k ≥ a dan d ≤ b tidak mungkin terjadi secara bersamaan kecuali jika d = b dan k = a, atau a = b = d = k.

Jadi, n adalah bilangan bulat genap tak negatif.

Selain itu, metode brute force sederhana dapat digunakan:

Misalkan $l = [a, b], g = (a, b)$.

Bagian 1: n genap.
Kasus 1: a, b ganjil.
Maka l, g keduanya ganjil. Jadi $l + g - a - b \equiv 1 + 1 - 1 - 1 \equiv 0 \bmod 2$.
Kasus 2: Salah satu dari a, b ganjil, dan yang lainnya genap.
Maka l genap dan g ganjil. Jadi $l + g - a - b \equiv 0 + 1 - 1 - 0 \equiv 0 \bmod 2$.
Kasus 3: a, b genap.
Maka l, g keduanya genap. Jadi $l + g - a - b \equiv 0 + 0 - 0 - 0 \equiv 0 \bmod 2$.
Bagian 2: n non-negatif.
Perhatikan bahwa $g \leq a, b \leq l$ dan $gl = ab$. Jadi,
$an = al + ag - a^2 - ab$
$= -(gl - ag - al + a^2)$
$= -(g - a)(l - a)$
$= (a - g)(l - a)$
Karena $a - g \geq 0, l - a \geq 0$, maka $an \geq 0$. Karena $a \geq 0$, maka $n \geq 0$.
Jadi, kita sudah selesai.

2. **Penyesuaian :**

Bukti:

- Gunakan ketaksamaan AM-GM pada setiap factor di ruas kiri.
- Untuk factor $(1 + a_k)^{k+1}$, kita bisa menulisnya sebagai $(1 + a_k) \cdot (1 + a_k) \cdot \ldots \cdot (1 + a_k)$ sebanyak $(k + 1)$ kali.
- Terapkan AM-GM untuk $k + 1$ suku: $1, a_k, a_k, \ldots, a_k$ (sebanyak k kali a_k).
- Rata-rata aritmatika: $\frac{1+k \cdot a_k}{k+1}$
- Rata-rata geometric:
  $\sqrt[k+1]{1 \cdot (a_k)^k} = \sqrt[k+1]{(a_k)^k}$
- Menurut AM-GM, $\frac{1+k \cdot a_k}{k+1} \geq \sqrt[k+1]{(a_k)^k}$
- Maka, $(1 + a_k)^{k+1} \geq ((k + 1)\sqrt[k+1]{(a_k)^k}\,)^{k+1} = (k + 1)^{k+1}(a_k)^k$
- Namun, ketaksamaan yang diminta adalah $(1 + a_k)^{k+1} \geq (k + 1)^{k+1}a_k$. Ini bisa dibuktikan dengan menerapkan AM-GM pada k suku 1 dan satu suku a_k (atau sebaliknya) yang diulang-ulang.
- Pendekatan yang lebih umum dan tepat adalah menggunakan ketaksamaan weighted AM-GM atau Jansen's inequality pada fungsi konveks $f(x) = \ln(x)$.
- Alternatifnya, gunakan ketaksamaan Bernoulli yang diperumum: Jika $x > -1$ dan n adalah bilangan asli, maka $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.
- Untuk $(1 + a_k)^{k+1}$, kita bisa menggunakan ketaksamaan yang lebih spesifik atau menggunakan induksi matematika.

Kondisi kesamaan:

- Kesamaan dalam ketaksamaan AM-GM berlaku jika dan hanya jika semua suku yang terlibat sama.
- Dalam konteks ini, kesamaan $(1 + a_k)^{k+1} = (k + 1)^{k+1}a_k$ berlaku jika $1 = a_k$.

- Oleh karena itu, kesamaan pada ketaksamaan keseluruhan $(1+a_1)^2(1+a_2)^3 \dots (1+a_n)^{n+1} \geq (n+1)^{n+1}a_1a_2 \dots a_n$ akan berlaku jika $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$.

3. Penyelesaian :

Bukti:
Kita akan menggunakan sifat-sifat lingkaran luar dan garis bagi sudut dalam segitiga.
Langkah 1: Menentukan hubungan sudut
- ∠BAC = 2α
- ∠ABC = 2β
- ∠ACB = 2γ

Karena ∠BAC = 2α, maka garis bagi sudut ∠BAC membagi sudut menjadi dua sudut yang sama besar, yaitu α.

Langkah 2: Menentukan posisi titik P dan Q
- Titik P adalah perpotongan antara garis BO dan garis bagi ∠BAC.
- Titik Q adalah perpotongan antara garis CO dan garis bagi ∠BAC.

Langkah 3: Menentukan hubungan sudut di titik P dan Q
- ∠ABP = β
- ∠ACP = γ
- ∠BAP = α
- ∠CAQ = α

Langkah 4: Menentukan posisi titik R
- Titik R adalah perpotongan antara garis BQ dan CP.

Langkah 5: Membuktikan AR tegak lurus BC
- Kita akan menggunakan sifat garis bagi sudut dan sifat lingkaran luar.
- Perhatikan bahwa ∠BOC = 2 · ∠BAC = 4α karena ∠BOC adalah sudut pusat yang menghadap busur BC.
- ∠BPC = 180° - ∠PBC - ∠PCB = 180° - β - γ = 180° - (90° - α) = 90° + α.
- Dengan cara yang sama, ∠BQC = 90° + α.

Langkah 6: Menentukan hubungan sudut di titik R
- Perhatikan segiempat BQCR. Karena ∠BQC = ∠BPC = 90° + α, maka segiempat BQCR adalah segiempat siklik.
- ∠BRC = 180° - ∠BQC = 180° - (90° + α) = 90° - α.

Langkah 7: Membuktikan AR tegak lurus BC
- Perhatikan segitiga ABR dan ACR.

- $\angle BAR = \alpha$ dan $\angle CAR = \alpha$
- $\angle ABR = \beta$ dan $\angle ACR = \gamma$.
- Kita perlu menunjukkan bahwa $\angle ARB = 90^o + \beta$ dan $\angle ARC = 90^o + \gamma$.
- Karena $\angle BRC = 90^o - \alpha$, maka $\angle ARB = 180^o - \angle BRC - \angle BAR = 180^o - (90^o - \alpha) - \alpha = 90^o$.
- Dengan demikian, AR tegak lurus BC.

Jadi, garis AR tegak lurus terhadap garis BC.

4. Penyelesaian :

Anggap titik-titik tersebut sebagai bilangan kompleks pada bidang datar, dilambangkan dengan huruf kecil a_i, b_i, p_i, p. Dari relasi $p_{i+1} = 2b_{i+1} - p_i$ di mana $p_0 = p$, kita peroleh $p_{2012} = 2(b_{2012} - b_{2011} + \ldots + b_2 - b_1) + p$. Selanjutnya, kita tentukan jumlah maksimum nilai yang mungkin dari penjumlahan bergantian $b_{2012} - b_{2011} + \ldots + b_2 - b_1 = S - 2(b_{2011} + b_{2009} + \ldots + b_1)$, di mana $S = b_1 + b_2 + \ldots + b_{2012}$. Karena hanya ada $\binom{2012}{1006}$ kemungkinan pilihan $b_1, b_3, \ldots, b_{2009}, b_{2011}$, maka $N \leq \binom{2012}{1006}$. Batas atas tersebut dapat dicapai dengan menetapkan $a_k = 2^k$.

5. Penyelesaian :

Pertama, perhatikan bahwa jumlah angka 1 di setiap baris dan setiap kolom *P* dan *Q* adalah sama (sepele karena kesamaan jumlah baris/kolom). Oleh karena itu, dengan jumlah yang diberikan, kita dapat mengidentifikasi *P* dan *Q* secara unik hanya dengan mengkonstruksi setiap baris (masing-masing kolom) dari jumlah yang diberikan. Misalnya, jika kita diberi tahu bahwa jumlah baris adalah 3, 2, 0 dan jumlah kolom adalah 2, 2, 1, 0, kita memiliki contoh yang diberikan untuk *P* dan *Q*. Masih perlu dibuktikan bahwa jumlah baris (masing-masing kolom) yang diberikan membentuk barisan yang tidak meningkat.

Misalkan jumlah baris bukan barisan yang tidak meningkat. Maka terdapat suatu i sedemikian rupa sehingga jumlah angka-angka pada baris i lebih kecil daripada jumlah angka-angka pada baris $i + 1$. Misalkan jumlah angka-angka pada baris i adalah j. Maka entri *Q* pada baris i dan kolom $j + 1$ adalah 0, sedangkan pada baris $i + 1$ dan kolom $j + 1$ adalah 1. Namun, hal ini bertentangan dengan fakta bahwa kolom-kolom *Q* diurutkan dalam urutan yang tidak meningkat. Argumen serupa dapat diterapkan pada baris-baris *P*.

6. Penyelesaian :

Definisikan $g(x)$ sebagai solusi lain

Kita memiliki $g(x + y) = g(x) + g(y) > g(x)$ sehingga g meningkat secara ketat dan monoton, dari persamaan fungsional Cauchy

Kita simpulkan $g(x) = cx$, c adalah konstanta real positif apa pun; $f(x) = cx - \frac{1}{2012}$ tetapi jika kita mengambil $k > 0$ sehingga $ck < \frac{1}{2012}$

Kita memiliki kontradiksi $f(k) < 0$.

7. Penyelesaian :

Asumsikan $n = p^2 \cdot q$ dengan $p > 1$, $p, q \in N$.

Maka, kita pilih $x = (p-1)^2 \cdot q$ dan $y = q$, dan selesai.

Di sisi lain, jika persamaan yang diberikan memiliki solusi, maka untuk beberapa $x_0, y_0 \in N$, kita peroleh, $x_0 + y_0 + 2\sqrt{x_0 . y_0} = n \Longrightarrow \sqrt{x_0 y_0} = \frac{n - x_0 - y_0}{2}$. Karena RHS rasional, kita harus memperoleh $x_0 . y_0 = k^2$ untuk beberapa $k \in N$.

jika FPB$(x_0, y_0) = h$, maka $x_0 = ha$, $y_0 = hb$ di mana $(a, b) = 1$

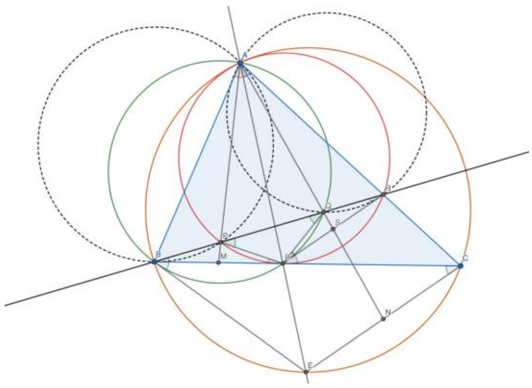
jadi, $h^2 \cdot ab = k^2$, maka ternyata ab merupakan kuadrat sempurna. Jadi, a dan b merupakan kuadrat sempurna.

8. Penyelesaian :

Kita dapat dengan mudah melihat bahwa BD bersinggungan dengan (ABP) (dari kondisi PoP yaitu $MB^2 = MD^2 = MP \cdot MA$). Sekarang saya menyatakan bahwa DR sejajar dengan CE. Lihat bahwa $\angle CDR = \angle CAE = \angle DCE$, yang membuktikan pernyataan kita. Misalkan $S = AN \cap DR$. Jelas S adalah titik tengah DR berdasarkan homotetik yang berpusat di A dan memetakan $\triangle DAR \rightarrow \triangle CAE$. Sekarang kita juga dapat melihat bahwa DR bersinggungan dengan ABD karena $\angle ADR = \angle AEC = \angle ABD$. Kondisi titik tengah di S akan memberikan kita fakta bahwa DR juga bersinggungan dengan (AQR).

Sekarang, kita tinggal melakukan pencarian sudut. Perhatikan bahwa

$\angle RQD = 180^\circ - (\angle QRD + \angle QDR) = 180^\circ - (\angle RAQ + \angle DAQ) = 180^\circ - \angle CAE = 180^\circ - \angle BAD = 180^\circ - \angle BQD \Longrightarrow \angle RQD + \angle BQD = 180^\circ \Longrightarrow$ B, Q, R kolinear. Demikian pula, $\angle DPB = 180^\circ - (\angle PBD + \angle PDB) = 180^\circ - \angle BAP + \angle DAP) = 180^\circ - \angle BAE = 180^\circ - \angle DAR = 180^\circ - \angle DPR \Longrightarrow \angle DPB + \angle DPR = 180^\circ \Longrightarrow$ B, P, R kolinear. Kesimpulannya, B, P, Q, R kolinear. Oleh karena itu, terbukti.



SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2013

TINGKAT KABUPATEN/KOTA

BIDANG MATEMATIKA

WAKTU : 180 MENIT

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Kabupaten/Kota Tahun 2013

1. Misalkan a dan b adalah bilangan asli dengan $a > b$. Jika $\sqrt{94 + 2\sqrt{2013}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$, maka nilai $a - b$ adalah …

2. Diberikan segitiga ABC dengan luas 10. Titik D, E dan F berturut – turut terletak pada sisi – sisi AB, BC dan CA dengan AD = 2, DB = 3. Jika segitiga ABE dan segiempat $DBFE$ mempunyai luas yang sama, maka luasnya sama dengan …

3. Misalkan p dan q bilangan prima. Jika diketahui persamaan $x^{2014} - px^{2013} + q = 0$ mempunyai akar – akar bilangan bulat, maka nilai $p + q$ adalah …

4. Jika fungsi f didefinisikan oleh $f(x) = \frac{kx}{2x+3}, x \neq -\frac{3}{2}$, k konstanta memenuhi $f(x) = x$ untuk setiap bilangan real x, kecuali $x = -32$ maka nilai k adalah …

5. Koefisien x^{2013} pada ekspansi

$$(1+x)^{4026} + x(1+x)^{4025} + x^2(1+x)^{4024} + \cdots + x^{2013}(1+x)^{2013}$$

adalah …

6. Jika $\frac{2}{x} - \frac{2}{y} = 1$ dan $y - x = 2$, maka $(x + y)^2 = \ldots$

7. Suatu dadu ditos enam kali. Banyak cara memperoleh jumlah mata yang muncul 28 dengan tepat satu dadu muncul angka 6 adalah …

8. Misalkan P adalah titik interior dalam daerah segitiga ABC sehingga besar $\angle PAB = 10^\circ$, $\angle PBA = 20^\circ$, $\angle PCA = 30^\circ$, $\angle PAC = 40^\circ$. Besar $\angle ABC = \ldots$

9. Sepuluh kartu ditulis dengan angka satu sampai sepuluh (setiap kartu hanya terdapat satu angka dan tidak ada dua kartu yang memiliki angka yang sama). Kartu – kartu tersebut dimasukkan kedalam kotak dan diambil satu secara acak. Kemudian sebuah dadu dilempar. Probabilitas dari hasil kali angka pada kartu dan angka pada dadu menghasilkan bilangan kuadrat adalah …

10. Enam orang siswa akan duduk pada tiga meja bundar, dimana setiap meja akan diduduki oleh minimal satu siswa. Banyaknya cara untuk melakukan hal tersebut adalah …

11. Suatu partikel bergerak pada bidang Cartesius dari titik (0, 0). Setiap langkah bergerak satu-satuan searah sumbu X positif dengan probabilitas 0, 6 atau searah sumbu Y positif dengan probabilitas 0, 4. Setelah sepuluh langkah, probabilitas partikel tersebut sampai pada titik (6,4) dengan melalui titik (3,4) adalah …

12. Diberikan segitiga ABC, dengan panjang sisi AB = 30. Melalui AB sebagai diameter, dibuat sebuah lingkaran, yang memotong sisi AC dan sisi BC berturut – turut di D dan E. Jika $AD = \frac{1}{3}AC$ dan $BE = \frac{1}{4}BC$, maka luas segitiga ABC sama dengan ...

13. Banyaknya nilai α dengan $0^o < \alpha < 90^o$ yang memenuhi persamaan

$$(1 + cos\ \alpha)(1 + cos\ 2\alpha)(1 + cos\ 4\alpha) = \frac{1}{8}$$

adalah ...

14. Diberikan segitiga lancip ABC dengan O sebagai pusat lingkaran luarnya. Misalkan M dan N berturut–turut pertengahan OA dan BC. Jika $\angle ABC = 4\angle OMN$ dan $\angle ACB = 6\angle OMN$, maka besarnya $\angle OMN$ sama dengan ...

15. Tentukan semua bilangan tiga digit yang memenuhi syarat bahwa bilangan tersebut sama dengan penjumlahan dari faktorial setiap digitnya.

16. Diberikan himpunan

$$S = \left\{x \in Z \middle| \frac{x^2 - 2x + 7}{2x - 1} \in Z\right\}$$

Banyaknya himpunan bagian dari S adalah ...

17. Untuk $x > 0$, $y > 0$ didefinisikan $f(x, y)$ adalah nilai terkecil diantara $x, \frac{y}{2} + \frac{2}{x}, \frac{1}{y}$. Nilai terbesar yang mungkin dicapai oleh $f(x, y)$ adalah ...

18. Nilai k terkecil sehingga jika sembarang k bilangan dipilih dari {1, 2, ..., 30}, selalu dapat ditemukan 2 bilangan yang hasil kalinya merupakan bilangan kuadrat sempurna adalah ...

19. Diketahui $x_1 x_2$ adalah dua bilangan bulat berbeda yang merupakan akar – akar dari persamaan kuadrat $x^2 + px + q + 1 = 0$. Jika p dan $p^2 + q^2$ adalah bilangan – bilangan prima, maka nilai terbesar yang mungkin dari $x_1^{2013} + x_2^{2013}$ adalah ...

20. Misalkan $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x. Tentukan semua x yang memenuhi $\lfloor x \rfloor + \lceil x \rceil = 5$.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2013

TINGKAT KABUPATEN/KOTA

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Kabupaten/Kota Tahun 2013

1. Untuk $a, b \geq 0$ berlaku

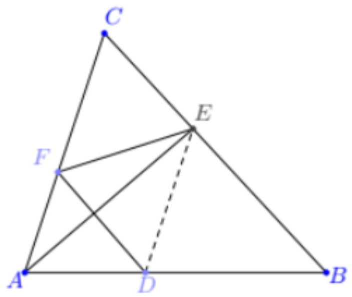
$$\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = a + b + 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} = \sqrt{(a + b) + 2\sqrt{ab}}$$

   Padahal $94 + 2\sqrt{2013} = (61 + 33) + 2\sqrt{61 \times 33}$.

   Oleh karena itu, $\sqrt{94 + 2\sqrt{2013}} = \sqrt{61} + \sqrt{33}$.

   Sehingga $a - b = 61 - 33 = 28$.

2. Perhatikan sketsa berikut ini!



   Karena Luas $\triangle$ABE = Luas DBFE berakibat Luas $\triangle$ADE = Luas $\triangle$DEF. Padahal diketahui pula bahwa DE adalah sisi persekutuan antara $\triangle$ADE dan $\triangle$DEF sehingga jarak titik A ke DE sama dengan jarak titik F ke DE. Dengan kata lain, AF sejajar DE sehingga

$$\frac{CE}{EB} = \frac{AD}{DB} = \frac{2}{3}$$

   Oleh karena itu, Luas $\triangle$ABE = $\frac{3}{5} \times 10 = 6$.

3. Misalkan salah satu akar bulat dari persamaan $x^{2014} - px^{2013} + q = 0$ adalah t. Maka diperoleh $t^{2014} - pt^{2013} + q = 0 \Leftrightarrow q = t^{2013}(p - t)$. Perhatikan juga bahwa -1 dan 0 bukan merupakan akar-akar persamaan $x^{2014} - px^{2013} + q = 0$. Sehingga dengan mengingat bahwa q adalah bilangan prima diperoleh $t = 1$. Oleh karena itu, $q = p - 1 \Leftrightarrow p - q = 1$. Dari keterangan ini dapat disimpulkan bahwa salah satu p, q harus genap. Dan karena bilangan prima genap hanya 2 maka kita peroleh $q = 2$ dan $p = 3$. Jadi, $p + q = 5$.

4. Untuk $x = 1$ diperoleh

$$f(f(1)) = 1 \Leftrightarrow f\left(\frac{k}{5}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{k^2}{2k+15} = 1$$

$$\Leftrightarrow k^2 - 2k - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow (k - 5)(k + 3) = 0$$

   Mudah di cek bahwa $k = -3$ memenuhi kondisi $f(f(x)) = x$.

5.
   - Koefisien x^{2013} dari $(1 + x)^{4026}$ adalah C_{2013}^{4026}.

- Koefisien x^{2013} dari adalah $x(1+x)^{4025}$ C_{2012}^{4025}.
- Koefisien x^{2013} dari adalah $x^2(1+x)^{4024}$ C_{2011}^{4024}.
- . . .
- . . .
- . . .
- Koefisien x^{2013} dari $x^{2012}(1+x)^{2014}$ adalah C_1^{2014}.
- Koefisien x^{2013} dari adalah $x^{2013}(1+x)^{2013}$ C_0^{2013}.

Dengan menggunakan identitas,

$$C_0^m + C_1^{m+1} + C_2^{m+2} + \ldots + C_k^{m+k} = C_k^{m+k+1}$$

diperoleh koefisien x^{2013} pada ekspansi

$$(1+x)^{4026} + x(1+x)^{4025} + x^2(1+x)^{4024} + \ldots + x^{2013}(1+x)^{2013}$$

yaitu,

$$C_0^{2013} + C_1^{2014} + \ldots + C_{2012}^{4025} + C_{2013}^{4026} = C_{2013}^{4027}$$

6. Lakukan sedikit manupulasi aljabar sebagai berikut,

$$\frac{2}{x} - \frac{2}{y} = 1 \Leftrightarrow \frac{2(y-x)}{xy} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{xy} = 1$$

$$\Leftrightarrow xy = 4$$

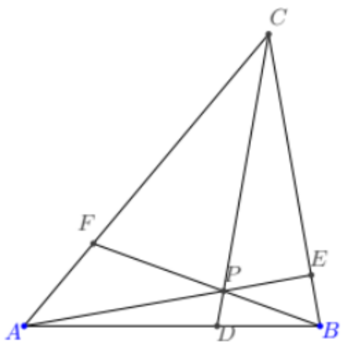
selanjutnya diperoleh,

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= x^2 + y^2 - 2xy \\ &= x^2 + y^2 - 2xy + 4xy \\ &= (y-x)^2 + 4xy \\ &= 4 + 16 \\ &= 20\end{aligned}$$

7. Tanpa mengurangi keumuman misalkan tos pertama muncul angka 6. Maka pada tos kedua sampai dengan tos keenam hanya boleh muncul angka 1, 2, 3, 4, 5 dan jumlahnya 22.
Kemungkinan yang seperti ini hanya ada tiga kasus yaitu
   - Yang muncul angka : 2, 5, 5, 5, 5 yang banyaknya cara ada $\frac{5!}{4!}$ = 5 cara
   - Yang muncul angka : 3, 4, 5, 5, 5 yang banyaknya cara ada $\frac{5!}{3!}$ = 20 cara
   - Yang muncul angka : 4, 4, 4, 5, 5 yang banyaknya cara ada $\frac{5!}{2!\times3!}$ = 10 cara

   Sehingga total ada 5 + 20 + 10 = 35 cara jika pada tos pertama muncul angka 6. Karena keenam tos memiliki peluang yang sama untuk muncul angka 6 berakibat total keseluruhan cara yang mungkin yaitu 6 x 35 = 210 cara.

8. Perpanjang CP, AP, BP sehingga memotong AB, BC, CA berturut-turut di titik D, E, F seperti gambar berikut:



Mudah diperoleh bahwa $\angle\angle APB$ = 150°, $\angle APC$ = 110° sehingga $\angle BPC$ = 100°. Misalkan $\angle PBC = x$ maka $\angle PCB$ = 80 − x.
Berdasarkan dalil sinus pada $\triangle ADP$ dan $\triangle BDP$ diperoleh

$$\frac{AD}{\sin 70^o} = \frac{DP}{\sin 10^o} \text{dan} \frac{BD}{\sin 50^o} = \frac{DP}{\sin 20^o}$$

sehingga

$$\frac{AD}{BD} = \frac{\sin 70^o \cdot \sin 20^o}{\sin 80^o \cdot \sin 10^o}$$

Dengan cara serupa diperoleh pula

$$\frac{BE}{EC} = \frac{\sin 30^o \cdot \sin(80 - x)^o}{\sin x \cdot \sin 70^o}$$

$$\frac{CF}{FA} = \frac{\sin 80^o \cdot \sin 40^o}{\sin 30^o \cdot \sin 30^o}$$

Padahal berdasarkan teorema Ceva diperoleh

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1$$

Substitusikan ketiga persamaan di atas sehingga didapat

$$\frac{\sin 20^o \cdot \sin(80 - x)^o \cdot 40^o}{\sin 10^o \cdot \sin 30^o \cdot \sin x} = 1$$

yang ekuivalen dengan

$$sin\ 20^0 \cdot sin(80 - x)^o \cdot sin\ 40^o = sin\ 10^o \cdot sin\ 30^o \cdot sin\ x$$

$$- 4 \cdot sin\ 20^0 \cdot sin(80 - x)^o \cdot sin\ 40^o =- 2 \cdot sin\ 10^o \cdot sin\ x$$

$$2(cos\ 60^o - cos\ 20^o)\ sin(80 - x)^o = cos(x + 10) - cos(x - 10)$$

$$sin(80 - x)^o - 2\ cos\ 20^o \cdot sin(80 - x)^o = cos(x + 10) - cos(x - 10)$$

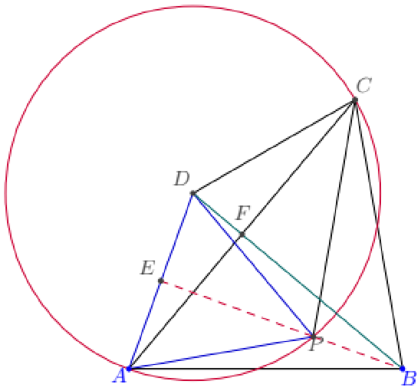
$$sin(80 - x)^o - (sin(100 - x) + sin(60 - x)) = sin(80 - x)^o - sin(100 - x)$$

$$- sin(60 - x) = 0$$

Karena x terletak pada kuadran pertama maka x = 60° Jadi, $\angle ABC$ = 20° + x = 80°.

Alternatif Penyelesaian :

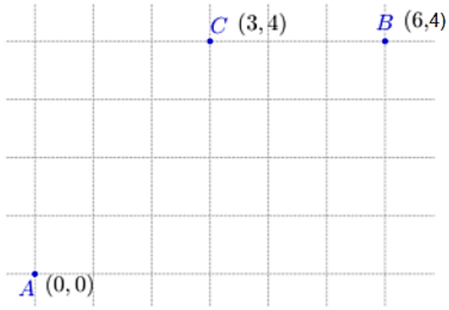
Misalkan D pusat lingkaran luar $\triangle ACP$ karena $\angle ADP$ = 2$\angle ACP$ = 60° maka $\triangle ADP$ adalah segitiga sama sisi.



∠CAD = ∠DAP − ∠CAP = 60° – 40° = 20°. Karena ∠APB = 150° maka ∠APE = 30°, sehingga ∠EPD = 30°. Oleh karena itu, ∠DPB = 150° = ∠APB. Hal ini berakibat △APB kongruen △BPD. Sehingga ∠BDP = ∠BAP = 10°. Selanjutnya kita diperoleh ∠ADF = ∠ADP + ∠BDP = 60° + 10° = 70°. Oleh karena itu, ∠AFD = 90°. Dengan kata lain, BD⊥AC dan karena △ADC adalah segitiga sama kaki dengan AD = CD maka AF = FC. Sehingga dapat disimpulkan △ABC adalah segitiga sama kaki dengan AB = BC. Jadi, ∠BAC = ∠ACB = 50° yang berarti ∠ABC = 80°.

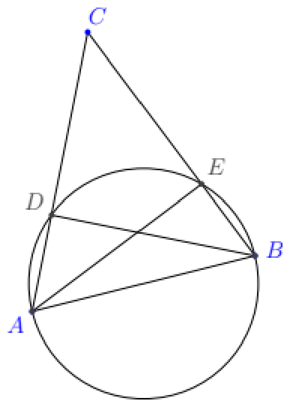
9. Misalkan a angka dari dadu dan b angka dari kartu. Pasangan (a, b) yang menghasilkan ab bilangan prima yaitu (1, 1),(1, 4),(1, 9),(2, 2),(2, 8),(3, 3),(4, 1),(4, 4),(4, 9),(5, 5),(6, 6) yang ada 11 kemungkinan. Sedangkan kemungkinan ruang sampel adalah 60. Oleh karena itu, peluang dari hasil kali angka pada kartu dan angka pada dadu menghasilkan bilangan kuadrat adalah $\frac{11}{60}$.
10. Pembagian keenam siswa pada tiga meja bundar tersebut adalah sebagai berikut :
    - Siswa diatur dalam kelompok 4, 1, 1. Untuk kasus ini kemungkinan cara duduk ada
    $$\frac{c_4^6 \times c_1^2 \times (4-1)!}{2!} = 90$$
    - Siswa diatur dalam kelompok 3, 2, 1. Untuk kasus ini kemungkinan cara duduk ada
    $$C_3^6 \times C_2^3 \times (3-1)! \times (2-1)! = 120$$
    - Siswa diatur dalam kelompok 2, 2, 2. Untuk kasus ini kemungkinan cara duduk ada
    $$\frac{C_2^6 \times C_2^4}{3!} = 15$$

    Oleh karena itu, total cara mengatur tempat duduk keenam siswa tersebut adalah 90 + 120 + 15 = 225 cara.
11.



Sebuah partikel akan bergerak dari A menuju B dengan melalui C. Dari A ke titik C banyaknya cara ada $\frac{7!}{3!\times 4!} = 35$. Sedangkan dari C ke B hanya ada satu cara. Oleh karena itu, banyak cara partikel bergerak dari A menuju B dengan melalui C ada 35 × 1 = 35 cara. Perhatikan bahwa bagaimana pun cara pertikel tersebut bergerak dari A menuju B maka dia akan selalu 6 kali bergerak searah sumbu X positif dan 4 kali bergerak searah sumbu Y positif. Jadi, besarnya peluang pertikel bergerak dari A menuju B dengan melalui C adalah $35 \times (0{,}6)^6 \times (0{,}4)^4 = \frac{81648}{5^9}$.

12. Perhatikan sketsa gambar di bawah ini!



Perlu diperhatikan bahwa ∠ADB = ∠CDB = ∠AEB = ∠AEC = 90◦. Misal, AD = x dan BE = y maka AC = 3x, CD = 2x, BC = 4y dan CE = 3y. Dengan teorema Phytagoras pada segitiga ABD dan segitiga BCD diperoleh

$$30^2 - x^2 = (4y)^2 - (2x)^2 \Leftrightarrow 900 - x^2 = 16y^2 - 4x^2$$
$$\Leftrightarrow 900 = 16y^2 - 3x^2$$

Demikian pula dengan teorema Phytagoras pada segitiga ABE dan segitiga ACE diperoleh

$$30^2 - y^2 = (3x)^2 - (3y)^2 \Leftrightarrow 900 - y^2 = 9x^2 - 9y^2$$
$$\Leftrightarrow 900 = 9x^2 - 8y^2$$

dengan menggabungkan kedua persamaan di atas didapat,

$$16y^2 - 3x^2 = 9x^2 - 8y^2 \Leftrightarrow 24y^2 = 12x^2 \Leftrightarrow x^2 = 2y^2$$

sehingga kita peroleh

$$900 = 16y^2 - 3x^2 = 16y^2 - 6y^2 = 10y^2 \Leftrightarrow y = \sqrt{90}$$

Oleh karena itu,

$$AE^2 = 900 - y^2 = 900 - 90 = 810 \Leftrightarrow AE = \sqrt{810}$$

Jadi,

Luas segitiga ABC = $\frac{1}{2}BC \cdot AE$
= $\frac{1}{2} \cdot 4y \cdot \sqrt{180}$
= $2 \cdot \sqrt{90}\sqrt{810}$
= $2 \cdot 3\sqrt{10} \cdot 9\sqrt{10} = 540$

13. Ingat identitas trigonometri $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 x)$. Selanjutnya lakukan sedikit manipulasi

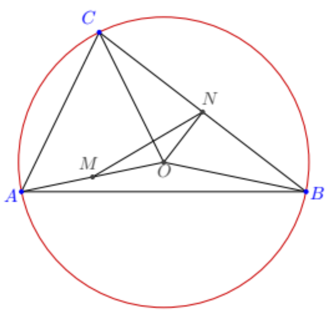
$$(1 + \cos\alpha)(1 + \cos 2\alpha)(1 + \cos 4\alpha) = \frac{1}{8}$$
$$(1 - \cos^2\alpha)(1 + \cos 2\alpha)(1 + \cos 4\alpha) = \frac{1}{8}(1 - \cos\alpha)$$
$$(1 - \cos 2\alpha)(1 + \cos 2\alpha)(1 + \cos 4\alpha) = \frac{1}{4}(1 - \cos\alpha)$$
$$(1 - \cos^2 2\alpha)(1 + \cos 4\alpha) = \frac{1}{4}(1 - \cos\alpha)$$
$$(1 - \cos 4\alpha)(1 + \cos 4\alpha) = \frac{1}{2}(1 - \cos\alpha)$$
$$1 - \cos^2 4\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos\alpha)$$
$$1 - \cos 8\alpha = 1 - \cos\alpha$$
$$\cos 8\alpha = \cos\alpha$$

Sehingga diperoleh,

- $8\alpha = \alpha + k \cdot 360^\circ \Leftrightarrow 7\alpha = k \cdot 360^\circ$.
  Diperoleh $\alpha = \frac{360^o}{7}$.
- $8\alpha = -\alpha + k \cdot 360^\circ \Leftrightarrow 9\alpha = k \cdot 360^\circ \Leftrightarrow \alpha = k \cdot 40^\circ$.

Diperoleh $\alpha = 40^\circ$ atau $\alpha = 80^\circ$.
Jadi, ada tiga nilai α yang memenuhi.

14.



Misalkan $\angle OMN = x$. $\triangle BOC$ adalah segitiga sama kaki. Karena BN = NC maka ON adalah garis tinggi sehingga $\angle CNO = 90^\circ$ dan $\angle CON = \frac{1}{2}\angle BOC = \angle BAC = 180^\circ - 10x$. Perhatikan juga bahwa $\angle AOC = 2\angle ABC = 8x$ sehingga $\angle AON = \angle AOC + \angle CON = 8x + 180^\circ - 10x = 180^\circ - 2x$. Karena $\angle OMN = x$ dan $\angle MON = \angle AON = 180^\circ - 2x$ maka berakibat $\angle ONM = x$. Dengan kata lain $\triangle OMN$ adalah segitiga samakaki dengan ON =

OM = $\frac{1}{2}$OC. Oleh karena itu, cos∠CON = 12 ⇔ ∠CON = 60◦. Jadi, diperoleh 180◦ − 10x = 60^O ⇔ x = 12◦. Maka besar ∠OMN = 12◦.

15. Misalkan bilangan tersebut adalah $\overline{abc}$. Karena $\overline{abc}$ = a! + b! + c! dan 7! = 5040 maka a, b, c ≤ 6. Jika salah satu dari a, b, c adalah 6 maka $\overline{abc}$ > 6! = 720 yang jelas tak mungkin. Jadi a, b, c ≤ 5. Oleh karena itu $\overline{abc}$ ≤ 5! + 5! + 5! = 360. Sehingga a ≤ 3. Perhatikan juga bahwa 4! + 4! + 4! = 72. Oleh karena itu paling tidak salah satu dari a, b, c sama dengan 5.
    - Jika a = 1, maka diperoleh 1! + 5! + 1! = 122, 1! + 5! + 2! = 123, 1! + 5! + 3! = 127, 1! + 5! + 4! = 145, 1! + 5! + 5! = 241. Jadi yang mungkin hanya $\overline{abc}$ = 145.
    - Jika a = 2, kedua b, c harus sama dengan 5, tetapi 2! + 5! + 5! = 242 ≠ 255. Jadi, tidak ada yang memenuhi.
    - Jika a = 3, diperoleh $\overline{abc}$ ≥ 300 akan tetapi $\overline{abc}$ ≤ 3! + 5! + 5! = 246 yang jelas tak mungkin.

    Jadi, satu - satunya bilangan tiga digit yang memenuhi adalah 145.
16. Misal $t = \frac{x^2-2x+7}{2x-1}$ maka diperoleh
$$t = \frac{1}{4}\left(\frac{4x^2 - 8x + 28}{2x - 1}\right) = \frac{1}{4}\left(2x - 3 + \frac{25}{2x - 1}\right)$$
    Agar diperoleh t bulat maka haruslah (2x − 1) membagi 25. Ada enam kasus yang mungkin
    - 2x − 1 = 1 ⇔ x = 1. Diperoleh t = $\frac{1}{4}$(−1 + 25) = 6.
    - 2x − 1 = 5 ⇔ x = 3. Diperoleh t = $\frac{1}{4}$(3 + 5) = 2.
    - 2x − 1 = 25 ⇔ x = 13. Diperoleh t = $\frac{1}{4}$(23 + 1) = 6.
    - 2x − 1 =− 1 ⇔ x = 0. Diperoleh t = $\frac{1}{4}$(−3 − 25) = −7.
    - 2x − 1 =− 5 ⇔ x = −2. Diperoleh t = $\frac{1}{4}$(−7 − 5) = −3.
    - 2x − 1 =− 25 ⇔ x = −12. Diperoleh t = $\frac{1}{4}$(− 27 − 1) = −7.

    Jadi, diperoleh S = {− 12, − 2, 0, 1, 3, 13} sehingga banyaknya himpunan bagian dari S adalah $2^6 = 24$.
17. Jika $x = \frac{1}{y} = \frac{y}{2} + \frac{2}{x}$ maka diperoleh $xy = 1$ dan
$$x = \frac{y}{2} + \frac{2}{x} \Leftrightarrow x = \frac{xy + 4}{2x}$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 = 5$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{10}}{2}$$
    Selanjutnya akan ditunjukkan nilai terbedar dari $f(x, y)$ adalah $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

    Untuk kasus x ≤ $\frac{\sqrt{10}}{2}$ atau $\frac{1}{y} \leq \frac{\sqrt{10}}{2}$ jelas bahwa $f(x, y) \leq \frac{\sqrt{10}}{2}$.

    Oleh karena itu, anggap x > $\frac{\sqrt{10}}{2}$ dan $\frac{1}{y} \leq \frac{\sqrt{10}}{2}$. Untuk kasus ini diperoleh,
$$\frac{y}{2} + \frac{2}{x} < \frac{1}{\sqrt{10}} + \frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$$
    Jadi, diperoleh $f(x, y)$ < $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

Terbukti bahwa nilai terbesar dari $f(x, y)$ adalah $\frac{\sqrt{10}}{2}$ yang dicapai ketika $x = \frac{1}{y} = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

18. Kita kelompokkan terlebih dahulu bilangan - bilangan yang jika sebarang dua bilangan diantaranya dikalikan akan menghasilkan bilangan kuadrat sempurna, yaitu sebagai berikut.

Kelompok 1	Kelompok 2	Kelompok 3	Kelompok 4	Kelompok 5	Kelompok 6
1	2	3	5	6	7
4	8	12	20	24	28
9	18	27			
16					
25					

Sedangkan himpunan 13 bilangan sisanya yaitu {10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 26, 29, 30} adalah himpunan yang hasil perkalian sebarang dua anggotanya bukan kuadrat sempurna. Berdasarkan pigeon hole principle, jika diambil 7 bilangan dari enam kelompok di atas maka pasti ada setidaknya dua bilangan yang berasal dari kelompok yang sama. Itu berarti hasil perkalian dua bilangan tersebut adalah kuadrat sempurna. Oleh karena itu, jika kita mengambil sebarang 13 + 7 = 20 bilangan pasti ada setidaknya dua bilangan yang hasil perkaliannya berupa kuadrat sempurna.

Sedangkan untuk $k \leq 19$ maka bisa dipilih bilangan dari himpunan berikut sebagai counter example, {1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 22, 23, 26, 29, 30}. Jadi, nilai terkecil dari k adalah $k = 20$.

19. Berdasarkan teorema Vieta diperoleh,

$$x_1 + x_2 = -p \text{ dan } x_1x_2 = q + 1$$

oleh karena itu,

$$(x_1 + x_2)^2 + (x_1x_2)^2 = p^2 + (q + 1)^2$$

$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + x_1^2x_2^2 = p^2 + q^2 + 2q + 1$$

$$x_1^2 + x_2^2 + 2q + 2 + x_1^2x_2^2 = p^2 + q^2 + 2q + 1$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_1^2x_2^2 + 1 = p^2 + q^2$$

$$(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1) = p^2 + q^2$$

Karena $p^2 + q^2$ adalah bilangan prima dan $x_1 \neq x_2$ maka haruslah salah satu dari x_1 atau x_2 sama dengan 0. Dan tanpa mengurangi keumuman, misalkan $x_2 = 0$ sehingga diperoleh q + l = 0 ⇔ q = −l. Oleh karena itu, $p^2 + q^2 = p^2 + 1$. Karena $p^2 + 1$ adalah bilangan prima maka haruslah p genap sehingga $p = 2$. Jadi, diperoleh $x_1 = -2$ dan $x_2 = 0$ yang berakibat $x_1^{2013} + x_2^{2013} = -2^{2013}$.

20. Jika x adalah bilangan bulat maka $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil = x$ sehingga tidak mungkin $\lfloor x \rfloor + \lceil x \rceil = 5$. Oleh karena itu x bukan bilangan bulat. Hal ini berakibat $\lceil x \rceil - \lfloor x \rfloor = 1$. Sehingga $\lfloor x \rfloor = 2$ dan $\lceil x \rceil = 3$. Jadi, $2 < x < 3$.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2013

TINGKAT PROVINSI

BIDANG MATEMATIKA

WAKTU : 210 MENIT

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2013

1. Diberikan tiga lingkaran dengan radius $r = 2$, yang saling bersinggungan. Total luas dari ketiga lingkaran tersebut berikut daerah yang dibatasinya sama dengan …

2. 2013 lampu dikontrol oleh 2013 tombol saklar yang diberi nomor 1, 2, 3, …, 2013. Menekan tombol saklar satu kali akan merubah nyala lampu (hidup atau mati). Pada awalnya semua lampu dalam keadaan mati. Pada hari pertama, semua tombol saklar ditekan satu kali. Pada hari kedua, semua tombol saklar bernomor 2 atau kelipatan 2 ditekan sekali. Dengan melakukan hal yang sama pada hari ke-n, semua tombol saklar lampu bernomor n atau kelipatan n ditekan sekali. Demikian seterusnya. Berapa banyak lampu dalam kondisi hidup setelah operasi pada hari ke 2013 dilakukan?

3. Diberikan fungsi real f dengan $f(x) = \frac{cx}{2x-3}$, $x \neq \frac{3}{2}$ dan $f(f(x)) = x$ untuk semua $x \neq \frac{3}{2}$. Nilai $f(2013)$ adalah …

4. Pasangan bilangan bulat positif (x, y) yang memenuhi
$$\frac{xy^2}{x+y}$$
bilangan prima adalah …

5. Jika $|x| + x + y = 10$ dan $x + |y| - y = 12$, maka nilai dari $x + y$ adalah …

6. Banyaknya bilangan bulat positif n yang memenuhi
$$n^2 - 660$$
merupakan bilangan kuadrat sempurna adalah …

7. Ada berapa barisan sembilan suku $a_1, a_2, \ldots, a_9$ yang masing-masing sukunya adalah 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, atau 9, dan memuat tepat satu urutan a_i, a_j dimana a_i genap dan a_j ganjil?

8. Bilangan asli n dikatakan "cantik" jika n terdiri dari 3 digit berbeda atau lebih dan digit-digit penyusunnya tersebut membentuk barisan aritmetika atau barisan geometri. Sebagai contoh 123 bilangan cantik karena 1, 2, 3 membentuk barisan aritmetika. Banyak bilangan cantik adalah …

9. Misalkan M adalah titik tengah sisi BC pada segitiga ΔABC dan $\angle CAB = 45^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$, maka $\tan\angle AMC$ adalah …

10. Diberikan bilangan prima $p > 2013$. Misalkan a dan b adalah bilangan-bilangan asli sehingga $a + b$ habis dibagi p tetapi tidak habis dibagi p^2. Jika diketahui $a^{2013} + b^{2013}$ habis dibagi p^2 maka banyak bilangan asli $n \leq 2013$ sehingga $a^{2013} + b^{2013}$ habis dibagi p^n adalah …

11. Ada enam anak TK masing-masing membawa suatu makanan. Mereka akan mengadakan kado silang, yaitu makanannya dikumpulkan dan kemudian dibagi lagi sehingga masing-masing anak menerima makanan yang bukan makanan yang dibawa semula. Banyaknya cara untuk melakukan hal tersebut adalah …

12. Grafik parabola $y = x^2 - a$ dan $x = y^2 - b$ dengan $a > 0$ dan $b > 0$, berpotongan di empat titik (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), dan (x_4, y_4). Nilai $4(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4)$ adalah …

13. Sebuah dadu dilempar 2 (dua) kali. Misalkan a dan b berturut-turut adalah angka yang muncul pada pelemparan pertama dan kedua. Besarnya peluang terdapat bilangan real x, y dan z yang memenuhi persamaan

$$x + y + z = a$$

dan

$$x^2 + y^2 + z^2 = b$$

sebesar …

14. Misalkan $\Delta_1\Delta_2\Delta_3$ adalah barisan segitiga sama sisi dengan panjang sisi Δ_1 adalah 1. Untuk $n \geq 1$, segitiga Δ_{n+1} didefinisikan dengan cara sebagai berikut: pertama didefinisikan P_n sebagai persegi yang titik-titik sudutnya terletak pada sisi-sisi Δ_n, selanjutnya didefinisikan L_n sebagai lingkaran terbesar di dalam P_n, kemudian didefinisikan Δ_{n+1}, sebagai segitiga sama sisi yang titik-titik sudutnya terletak pada keliling lingkaran. Panjang sisi dari Δ_{2013} adalah …

15. Suatu barisan $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ didefinisikan dengan $x_1 = 2$ dan $x_{n+1} = (1 + \frac{1}{n})\chi_n + \frac{2}{n}$ untuk setiap bilangan asli n. Nilai x_{2013} adalah …

16. Diberikan bujursangkar dengan panjang sisi sama dengan $2\sqrt{3}$. Didalam bujursangkar tersebut terdapat dua segitiga sama sisi dengan alas merupakan sisi-sisi bujursangkar yang berhadapan. Perpotongan kedua segitiga sama sisi membentuk rhombus. Luas rhombus sama dengan …

17. Bilangan bulat positif a dan b yang memenuhi $FPB(a,b) = 1$ dan

$$\frac{a}{b} + \frac{25b}{21a}$$

bilangan bulat ada sebanyak …

18. Diberikan segitiga ABC; $AB = 20$, $AC = 21$ dan $BC = 29$. Titik D dan E terletak pada segmen BC, sehingga $BD = 8$ dan $EC = 9$. Besarnya $\angle DAE$ sama dengan …

19. Suatu kompetisi diikuti oleh 20 peserta. Pada setiap ronde, dua peserta bertanding. Setiap peserta yang kalah dua kali dikeluarkan dari kompetisi, peserta yang terakhir berada di kompetisi adalah pemenangnya. Jika diketahui pemenang kompetisi tidak pernah kalah, banyaknya pertandingan yang dilangsungkan pada kompetisi tersebut adalah …

20. Jumlah dari semua bilangan bulat x yang memenuhi ${}^2\log(x^2 - 4x - 1)$ merupakan bilangan bulat adalah …

21. Ada dua gelas, gelas A berisi 5 bola merah, dan gelas B berisi 4 bola merah dan satu bola putih. Satu gelas dipilih secara acak dan kemudian satu bola diambil secara acak dari gelas tersebut. Hal ini dilakukan berulang kali sampai salah satu gelas kosong. Tentukan probabilitas bahwa bola putih tidak terambil.

22. Untuk sebarang bilangan real x, didefinisikan $\lfloor x \rfloor$ sebagai bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x. Tentukan banyak bilangan asli $n \leq 1.000.000$ sehingga

$$\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor < \frac{1}{2013}$$

23. Suatu bilangan asli n dikatakan "valid" jika $1^n + 2^n + 3n + \ldots + m^n$ habis dibagi $1 + 2 + 3 + \ldots + m$ untuk setiap bilangan asli m.

    a. Tunjukkan bahwa 2013 valid.
    b. Buktikan bahwa ada tak hingga banyak bilangan yang tidak valid.

24. Buktikan bahwa untuk semua bilangan real positif a, b, c dengan $a + b + c \leq 6$ berlaku

$$\frac{a+2}{a(a+4)} + \frac{b+2}{b(b+4)} + \frac{c+2}{c(c+4)} \geq 1$$

25. Diberikan segitiga ABC lancip. Garis tinggi terpanjang adalah dari titik sudut A tegak lurus pada BC, dan panjangnya sama dengan panjang median (garis berat) dari titik sudut B.
    Buktikan bahwa $\angle ABC \leq 60^\circ$.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2013

TINGKAT PROVINSI

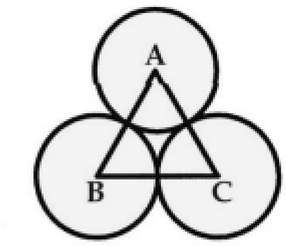
SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2013

1. Penyelesaian:

ABC adalah segitiga sama sisi dengan panjang sisi 4.



Luas daerah = $3 \cdot \frac{300}{360} \cdot \pi \cdot 2^2 + \frac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot \sin 60^O = 10\pi + 4\sqrt{3}$

∴ Jadi, luas dari ketiga lingkaran berikut daerah yang dibatasi sama dengan $10\pi + 4\sqrt{3}$.

2. Penyelesaian:

Masing-masing lampu akan ditekan sebanyak faktor positifnya.

Bilangan kuadrat sempurna akan memiliki faktor sebanyak ganjil sedangkan bilangan bukan kuadrat sempurna memiliki faktor positif sebanyak genap.

Karena kondisi lampu awalnya mati. Maka lampu akan hidup jika ditekan sebanyak ganjil. Maka banyaknya lampu yang hidup sama dengan banyaknya bilangan kuadrat sempurna ≤ 2013.

Mengingat $44^2 = 1936$ dan $45^2 = 2025$ maka bilangan kuadrat sempurna ≤ 2013 ada sebanyak 44.

∴ Jadi, banyaknya lampu dalam kondisi hidup setelah operasi pada hari ke-2013 ada 44.

3. Penyelesaian:

$$f(x) = \frac{cx}{2x-3}, \quad x \neq \frac{3}{2}$$
$$f(f(x)) = x$$
$$\frac{c\left(\frac{cx}{2x-3}\right)}{2\left(\frac{cx}{2x-3}\right) - 3} = x$$
$$c^2 = 2cx - 3(2x-3)$$
$$(c-3)(c-2x+3) = 0$$

$c = 3$ atau $c = 2x - 3$

Karena c adalah konstanta maka $c = 3$.

$$f(x) = \frac{3x}{2x-3}, \quad x \neq \frac{3}{2}$$
$$f(2013) = \frac{3(2013)}{2(2013)-3} = \frac{671}{447}$$

∴ Jadi, nilai $f(2013)$ adalah $\frac{671}{447}$.

4. Penyelesaian:

Misalkan $\frac{xy^2}{x+y} = p$ dengan p adalah bilangan prima.

$xy^2 = p(x+y)$ .... (1)

Maka $p|x$ atau $p|y$.

Jika $p|y$ maka $y = bp$ dengan $b \in$ N.

$xb^2p = x + bp$

Maka $p|x$

Jadi, didapat fakta bahwa $p|x$

Misalkan $x = ap$ dengan $a \in$ N.

$ay^2 = ap + y$

Maka $a|y$.

$y(ay-1) = ap$

Karena $a|y$ maka $(ay-1)|p$

Karena p adalah bilangan prima maka $ay - 1 = 1$ atau p.

- Jika $ay - 1 = 1$
  $ay = 2.$
  Karena $a|y$ maka $a = 1$ dan $y = 2$.
  (2)((1)(2) – 1) = (1)(p)
  p = 2
  Subtitusikan ke persamaan (1) didapat
  $x(2)^2 = 2(x+2)$
  $x = 2$
  Jadi, pasangan (x, y) yang memenuhi adalah (2, 2).
- Jika $ay - 1 = p$
  Maka $a = y$
  $p = y^2 - 1 = (y+1)(y-1)$
  Karena p adalah bilangan prima maka nilai y yang memenuhi adalah y = 2 sehingga p = 3.
  Subtitusikan ke persamaan (1) didapat
  $x(2)^2 = 3(x+2)$
  $x = 6$
  Jadi, pasangan (x, y) yang memenuhi adalah (6, 2).

∴ Jadi,pasangan (x, y) yang memenuhi adalah (2, 2) dan (6, 2).

5. Penyelesaian:

$|x| + x + y = 10$ dan $x + |y| - y = 12$

- Jika x dan y di kuadran I maka $|x| = x$ dan $|y| = y$
  $2x + y = 10$ dan $x = 12$ sehingga $y = -14$ (tidak memenuhi (x, y) di kuadran I)
- Jika x dan y di kuadran II maka $|x| = -x$ dan $|y| = y$
  $y = 10$ dan $x = 12$ (tidak memenuhi (x, y) di kuadran II)

- Jika x dan y di kuadran III maka $|x| = -x$ dan $|y| = -y$
  $y = 10$ dan $x - 2y = 12$ sehingga $x = 32$ (tidak memenuhi (x, y) di kuadran III)
- Jika x dan y di kuadran IV maka $|x| = x$ dan $|y| = -y$
  $2x + y = 10$ dan $x - 2y = 12$
  Nilai (x, y) yang memenuhi adalah $(\frac{32}{5}, -\frac{14}{5})$ (memenuhi (x, y) di kuadran IV)

$x + y = \frac{32}{5} - \frac{14}{5} = \frac{18}{5}$
∴ Jadi, $x + y = \frac{18}{5}$.

6. Penyelesaian:
$n^2 - 600 = m^2$ untuk suatu bilangan bulat positif m, n.
$(n + m)(n - m) = 660 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$
Jelas bahwa $n + m > n - m$
$n + m$ dan $n - m$ keduanya memiliki paritas yang sama. Maka keduanya merupakan bilangan genap.
Banyaknya faktor $3 \cdot 5 \cdot 11$ ada 8 maka banyaknya pasangan (n, m) yang memenuhi ada 4.
∴ Jadi, banyaknya pasangan (n, m) yang memenuhi ada 4.

7. Penyelesaian:
Barisan itu akan membentuk kelompok bilangan ganjil, diikuti kelompok bilangan genap, lalu diikuti kelompok bilangan ganjil dan diakhiri kelompok bilangan genap.
Misalkan a adalah banyaknya bilangan ganjil pada bagian paling kiri, b menyatakan banyaknya bilangan genap di sebelah kanan kelompok bilangan ganjil, c menyatakan banyaknya bilangan ganjil di sebelah kanan kelompok bilangan genap dan d menyatakan banyaknya bilangan ganjil di bagian paling kanan.
Maka $0 \leq a \leq 4$; $1 \leq b \leq 5$; $1 \leq c \leq 5$; $0 \leq d \leq 4$ serta $a + c = 4$ atau 5
Karena ada 4 bilangan ganjil dan 5 genap atau 5 bilangan ganjil dan 4 genap, maka masing-masing susunan 9 bilangan ada $4! \cdot 5! = 2880$ kemungkinan.
Untuk mencari banyaknya tupel (a, b, c, d) yang memenuhi maka dapat dibagi 2 kasus:

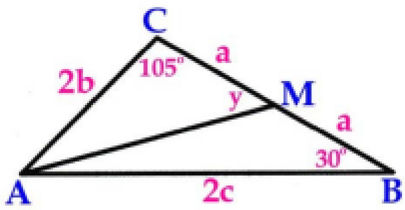
- Kasus 1, jika $a + c = 4$
  Maka $b + d = 5$
  Banyaknya cara memilih 4 bilangan ganjil = ${}_5C_4 = 5$.
  Banyaknya nilai a yang memenuhi ada 4 sebab $c \geq 1$.
  Karena $b + d = 5$ maka banyaknya nilai b yang memenuhi ada 5.
  Jadi, banyaknya tupel (a, b, c, d) yang memenuhi ada $5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 = 100$.
- Kasus 2, jika $a + c = 5$
  Maka $b + d = 4$
  Banyaknya cara memilih 4 bilangan genap = ${}_5C_4 = 5$.
  Banyaknya nilai a yang memenuhi ada 5 sebab $c \geq 1$.
  Karena $b + d = 4$ maka banyaknya nilai b yang memenuhi ada 4.
  Jadi, banyaknya tupel (a, b, c, d) yang memenuhi ada $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 = 100$.

Jadi, banyaknya tupel (a, b, c, d) yang memenuhi = 100 + 100 = 200.

Jadi, banyaknya susunan = 200 · 2880 = 576000.
∴ Jadi, banyaknya susunan 576000.

8. Penyelesaian:
Jika abc adalah bilangan cantik maka cba juga bilangan cantik.
Maka cukup dengan membuat daftar bilangan cantik dengan a < b.
Bilangan-bilangan cantik dengan a < b adalah 123, 1234, 12345, 123456, 1234567, 12345678, 123456789, 124, 1248, 135, 1357, 13579, 139, 147, 159, 234, 2345, 23456, 234567, 2345678, 23456789, 246, 2468, 248, 258, 345, 3456, 34567, 345678, 3456789, 357, 3579, 369, 456, 4567, 45678, 456789, 468, 469, 567, 5678, 56789, 579, 678, 6789, 789 yang banyaknya ada 46.
∴ Jadi, banyaknya bilangan canti ada 92.

9. Penyelesaian:
Diketahui ∠BAC = 45° dan ∠ABC = 30°. Misalkan panjang BC = 2a ; AC = 2b dan AB = 2c.



Dengan dalil sinus pada ΔABC didapat

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin 45^o}{\sin 30^o} = \sqrt{2}$$

Misalkan ∠AMC = y maka ∠CAM = 75° − y
Dengan dalil sinus pada ΔAMC didapat

$$\frac{a}{2b} = \frac{\sin(75^o - y)}{\sin y}$$

$$\sqrt{2}\sin y = 2\sin(75^o - y) = 2\sin 75^o \cos y - 2\cos 75^o \sin y$$

$$\tan y = \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{2\sin 75^o}{\sqrt{2} + 2\cos 75^o} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = 1$$

∴ Jadi, nilai dari tan $\angle AMC$ = 1.

10. Penyelesaian:
a + b = kp dengan k ∈ N dan k tidak habis dibagi p serta p adalah bilangan prima.
b = kp − a
$a^{2013} + b^{2013} = a^{2013} + (kp - a)^{2013}$
$a^{2013} + b^{2013} = (kp)^{2013} + 2013(kp)^{2012}a + {}_{2013}C_2(kp)^{2011}a^2 + \cdots$
$+ {}_{2013}C_2\,(kp)^2a^{2011} + 2013(kp)a^{2012}$
Karena $a^{2013} + b^{2013}$ habis dibagi p^2 sedangkan p > 2013 tidak membagi k maka a habis dibagi p.
Karena p | a dan p | (a + b) maka p | b.
Maka $a^{2013} + b^{2013}$ habis dibagi p^{2013}.
∴ Jadi, banyak bilangan asli n ≤ 2013 yang memenuhi ada 2013.

11. Penyelesaian:

Keenam anak TK akan dibagi dalam beberapa kelompok yang pertukaran hadiah dalam kelompok akan membentuk suatu lingkaran.

Berdasarkan pembagian maka ada 4 kasus :

- Kasus 1, keenam anak TK terbagi dalam 3 kelompok masing-masing 2 orang.
  Pada masing-masing kelompok banyaknya cara = $(2 - 1)! = 1$.
  Maka banyaknya cara seluruh = $\frac{\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{3!} \cdot (2 - 1)! \cdot (2 - 1)! \cdot (2 - 1)! = 15$.
- Kasus 2, keenam anak TK terbagi dalam 2 kelompok, 1 kelompok 2 orang dan kelompok lain 4 orang.
  Pada kelompok terdiri dari 4 orang, orang pertama akan memberikan ke orang kedua dengan 3 cara, orang kedua akan memberikan ke orang ketiga dengan 2 cara, orang ketiga akan memberikan ke orang keempat dengan 1 cara dan orang keempat akan memberikan ke orang pertama dengan 1 cara. Banyaknya cara = $(4 - 1)!$.
  Maka banyaknya cara seluruh = $\binom{6}{2} \cdot (2 - 1)! \cdot (4 - 1)! = 90$.
- Kasus 3, keenam anak TK terbagi dalam 2 kelompok masing-masing 3 orang.
  Banyaknya cara = $\frac{\binom{6}{3}\binom{3}{3}}{2!} \cdot (3 - 1)! \cdot (3 - 1)! = 40$.
- Kasus 4, keenam anak TK terbagi dalam 1 kelompok terdiri dari 6 orang.
  Banyaknya cara = $(6 - 1)! = 120$

Jadi, banyaknya cara pertukaran hadiah = $15 + 90 + 40 + 120 = 265$

∴ Jadi, banyaknya cara melakukan hal tersebut adalah 265.

12. Penyelesaian:

$y = x^2 - a$ dan $x = y^2 - b$

$x = (x^2 - a)^2 - b = x^4 - 2ax^2 + a^2 - b$

$x^4 - 2ax^2 - x + a^2 - b = 0$ memiliki akar-akar x_1, x_2, x_3 dan x_4. Maka

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$

$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x4 = 1$

$(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4) = x_1^2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4$

$(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4) = 1$

∴ Jadi, nilai $(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4)$ adalah 1.

13. Penyelesaian:

$x + y + z = a$ dan $x^2 + y^2 + z^2 = b$ dengan $1 \leq a, b \leq 6$ serta $a, b \in N$.

$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = a^2$

$xy + xz + yz = \frac{a^2 - b}{2}$

Berdasarkan ketaksamaan AM-GM didapat

$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$

$2b \geq a^2 - b$
$3b \geq a^2$

- Jika a = 1 maka nilai b yang memenuhi adalah 1, 2, 3, 4, 5, 6.
- Jika a = 2 maka nilai b yang memenuhi adalah 2, 3, 4, 5, 6.
- Jika a = 3 maka nilai b yang memenuhi adalah 3, 4, 5, 6.
- Jika a = 4 maka nilai b yang memenuhi adalah 5, 6.
- Jika a = 5 atau 6 maka tidak ada nilai b yang memenuhi.

Jadi, banyaknya pasangan (a, b) yang memenuhi ada 17.

∴ Jadi, besarnya peluang terdapat bilangan real x, y, z yang memenuhi adalah $\frac{17}{36}$.

14. Penyelesaian:

Misalkan ABC adalah segitiga sama sisi dengan panjang sisi k. DEFG adalah persegi dengan keempat titik sudutnya terletak pada sisi ABC dengan D, E terletak pada sisi AB. Lingkaran O adalah lingkaran dalam persegi DEFG. Segitiga PQR adalah segitiga sama sisi yang ketiga titik sudutnya terletak pada lingkaran O.

Misalkan panjang sisi persegi DEFG sama dengan m.
CGF adalah segitiga sama sisi maka panjang $CG = m$.
Panjang $AG = k - m$.
$DG = AG \sin 60^o$
$m = (k - m) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}$
$m = \frac{k\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$
Jari-jari lingkaran $O = R = \frac{k\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}$.
Misalkan Panjang sisi ΔPQR sama dengan p.
$[PQR] = \frac{1}{2} \cdot p^2 \cdot \sin 60^o = \frac{p^3}{4R} = \frac{p^3(4+2\sqrt{3})}{4k\sqrt{3}}$
$p = \frac{3k}{4+2\sqrt{3}}$

Maka Panjang sisi $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots$ berturut-turut adalah 1, $\frac{3}{4+2\sqrt{3}}, \left(\frac{3}{4+2\sqrt{3}}\right)^2, \ldots$ yang membentuk suatu barisan geometri dengan rasio $\frac{3}{4+2\sqrt{3}}$.

∴ Jadi, Panjang sisi dari Δ_{2013} adalah $\left(\frac{3}{4+2\sqrt{3}}\right)^{2012}$.

15. Penyelesaian:

$x_1 = 2$

$x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) x_n + \frac{2}{n}$

$x_2 = 6$

$x_3 = 10$

$x_4 = 14$

Jika diambil $x_n = 4n - 2$ maka

$x_{n+1} = 4(n+1) - 2 = 4n + 2$

$\left(1 + \frac{1}{n}\right) x_n + \frac{2}{n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)(4n - 2) + \frac{2}{n} = 4n + 2$

Maka $x_n = 4n - 2$

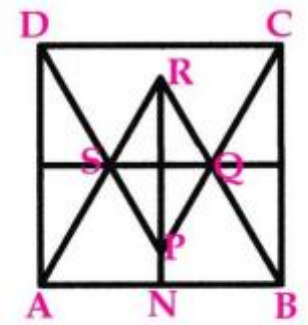
$x_{2013} = 4(2013) - 2 = 8050$

∴ Jadi, nilai x_{2013} adalah 8050

16. Penyelesaian:

Misalkan $ABCD$ adalah persegi dengan panjang $2\sqrt{3}$.

$PQRS$ adalah rhombus (belah ketupat) dimaksud dengan titik P terletak di dalam ΔARB.



RSQ juga merupakan segitiga sama sisi.

Misalkan perpotongan SQ dan PR adalah titik K dan pertengahan AB adalah N.

$RN = AN \tan 60^o = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$

$RK = RN - KN = 3 - \sqrt{3}$

$\frac{RK}{RN} = \frac{RS}{AR}$

$\frac{3-\sqrt{3}}{3} = \frac{RS}{2\sqrt{3}}$

$RS = 2\sqrt{3} - 2$

Luas rhombus $= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(2\sqrt{3} - 2\right)^2 \cdot \sin 60^o = 8\sqrt{3} - 12$

∴ Jadi, luas rhombus = $\mathbf{8\sqrt{3} - 12}$.

17. Penyelesaian:

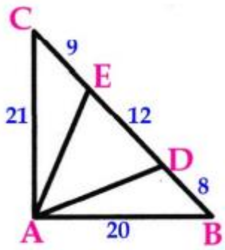
$\frac{a}{b} + \frac{25b}{21a} = k$ dengan $a, b, k \in N$ dan $FPB(a, b) = 1$.

$21a^2 + 25b^2 = 21abk$

Karena $FPB(a, b) = 1$ maka $a|25$ dan $b|21$.
Maka kemungkinan pasangan (a, b) yang mungkin memenuhi adalah (1,1), (1,3), (1,7), (1,21), (5,1), (5,3), (5,7), (5,21), (25,1), (25,3), (25,7), (25,21).
Melalui pengujian ke persamaan semula didapat fakta bahwa tidak ada pasangan (a, b) yang memenuhi.
∴ Jadi, bilangan bulat positif a dan b yang memenuhi ada sebanyak 0.

18. Penyelesaian:

Karena $20^2 + 21^2 = 29^2$ maka ΔABC siku-siku di A.



Pada ΔADB berlaku:
$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2 \cdot AB \cdot BD \cdot \cos\angle ABC$
$AD^2 = 20^2 + 8^2 - 2 \cdot 20 \cdot 8 \cdot \frac{20}{29} = \frac{7056}{29}$
Pada ΔACE berlaku:
$AE^2 = AC^2 + EC^2 - 2 \cdot AC \cdot EC \cdot \cos\angle ACB$
$AE^2 = 21^2 + 9^2 - 2 \cdot 21 \cdot 9 \cdot \frac{21}{29} = \frac{7200}{29}$
Pada ΔADE berlaku :
$DE^2 = AD^2 + AE^2 - 2 \cdot AD \cdot AE \cdot \cos\angle DAE$
$12^2 = \frac{7056}{29} + \frac{7200}{29} - 2 \cdot \sqrt{\frac{7056}{29}} \cdot \sqrt{\frac{7200}{29}} \cdot \cos\angle DAE$
$\frac{10080}{29} = \frac{10080\sqrt{2}}{29} \cdot \cos\angle DAE$
$\cos\angle DAE = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
∴ Jadi, besarnya $\angle DAE = 45^\circ$.

19. Penyelesaian:

Dalam satu pertandingan satu tim akan menang dan satu tim lagi akan kalah.
Karena jumlah tim ada 20 sedangkan tim yang juara tidak pernah kalah maka jumlah kekalahan ada $2 \times 19 = 38$.
Maka jumlah pertandingan ada 38.
∴ Jadi, banyaknya pertandingan yang dilangsungkan pada kompetisi tersebut adalah 38.

20. Penyelesaian:

${}^2\log(x^2 - 4x - 1) = m$ untuk suatu bilangan bulat m.
$(x-2)^2 - 5 = 2m$

$(x-2)^2 = 5 + 2m$

Jika $m < 0$ maka ruas kanan merupakan pecahan. Tidak ada x bulat yang memenuhi.

Jika $m = 0$ maka $(x - 2)^2 = 6$. Tidak ada x bulat yang memenuhi.

Jadi, $m > 0$.

Alternatif 1 :

- Jika m ganjil
  Angka satuan 2^m berulang dengan periode 4. Jika m atau 8 sehingga angka satuan $5 + 2^m$ adalah 7 atau 3 untuk m ganjil. Bilangan kuadrat tidak mungkin memiliki angka satuan 3 atau 7 sehingga tidak mungkin ada x bulat yang memenuhi.
- Jika m genap
  Misalkan $m = 2n$ maka
  $(x - 2)^2 - (2^n)^2 = 5$
  $(x - 2 + 2_n)\ (x - 2 - 2^n) = 5$
  Karena $x - 2 + 2^n > x - 2 - 2^n$ maka ada 2 kasus
  - Kasus 1, $x - 2 + 2^n = 5$ dan $x - 2 - 2^n = 1$
    Maka didapat $x - 2 = 3$ dan $2^n = 2$ sehingga $x = 5$ dan $m = 2n = 2$
  - Kasus 2, $x - 2 + 2^n = -1$ dan $x - 2 - 2^n = -5$
    Maka didapat $x - 2 = -3$ dan $2^n = 2$ sehingga $x = -1$ dan $m = 2n = 2$

Maka jumlah semua bilangan x yang memenuhi = 5 − 1 = 4.

∴ Jadi, jumlah semua bilangan x yang memenuhi = 4.

Alternatif 2 :

Jika $m \geq 3$ maka ruas kanan dibagi 8 akan bersisa 5. Bilangan kuadrat jika dibagi 8 akan bersisa 0, 1 atau 4. Jadi, tidak akan ada x bulat yang memenuhi. Maka $1 \leq m \leq 2$.

Jika $m = 1$ maka $(x - 2)^2 = 7$ sehingga tidak ada x bulat yang memenuhi.

Jika $m = 2$ maka $(x - 2)^2 = 9$. Nilai x yang memenuhi adalah $x = 5$ atau $x = -1$.

Maka jumlah semua bilangan x yang memenuhi = 5 − 1 = 4.

∴ Jadi, jumlah semua bilangan x yang memenuhi = 4.

21. Penyelesaian:

Akan ada 5 kasus:

- Kasus 1, jika salah satu gelas kosong setelah pengambilan ke-5.
  Peluang = $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$.
- Kasus 2, jika salah satu gelas kosong setelah pengambilan ke-6.
  Pengambilan bola ke-6 harus dari gelas A.
  Banyaknya urutan pengambilan bola dari gelas B = $\binom{5}{1} = 5$.
  Peluang terambilnya satu bola merah dari gelas B = $\frac{4}{5}$
  Peluang = $\left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \binom{5}{1} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{16}$

- Kasus 3, jika salah satu gelas kosong setelah pengambilan ke-7.
  Pengambilan bola ke-7 harus dari gelas A.
  Banyaknya urutan pengambilan 2 bola dari gelas B = $\binom{6}{2} = 15$.
  Peluang terambilnya dua bola merah dari gelas B = $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$
  Peluang $= \left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdot \binom{6}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{128}$
- Kasus 4, jika salah satu gelas kosong setelah pengambilan ke-8.
  Pengambilan bola ke-8 harus dari gelas A.
  Banyaknya urutan pengambilan 3 bola dari gelas B = $\binom{7}{3}$ = 35.
  Peluang terambilnya dua bola merah dari gelas B = $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$
  Peluang = $\left(\frac{1}{2}\right)^8 \cdot \binom{7}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{7}{128}$
- Kasus 5, jika salah satu gelas kosong setelah pengambilan ke-9.
  Pengambilan bola ke-9 harus dari gelas A.
  Banyaknya urutan pengambilan 4 bola dari gelas B = $\binom{8}{4} = 70$.
  Peluang terambilnya dua bola merah dari gelas B = $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$
  Peluang = $\left(\frac{1}{2}\right)^9 \cdot \binom{8}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{7}{256}$

Maka probabilitas bahwa bola putih tidak terambil = $\frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{9}{128} + \frac{7}{128} + \frac{7}{256} = \frac{63}{256}$

∴ Jadi, probabilitas bahwa bola putih tidak terambil = $\frac{63}{256}$.

22. Penyelesaian:

$\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor < \frac{1}{2013}$ dengan $n \in N$ dan $n \leq 1.000.000$.

Misalkan $n = k^2 + m$ untuk suatu m bulat tak negative dengan $m \leq 2k$ dan $k \in N$ serta $k \leq 1000$.

Maka $\lfloor\sqrt{n}\rfloor = k$

$\sqrt{k^2 + m} - k < \frac{1}{2013}$

$k^2 + m < \left(k + \frac{1}{2013}\right)^2 = k^2 + \frac{2k}{2013} + \left(\frac{1}{2013}\right)^2$

Mengingat bahwa jika $k \leq 1000$ maka $m < \frac{2k}{2013} + \left(\frac{1}{2013}\right)^2 < 1$ untuk semua nilai $k \in N$.

Nilai m yang memenuhi hanya $m = 0$.

Jadi, $n = k^2$ yang memenuhi $\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor = 0 < \frac{1}{2013}$ untuk semua nilai k.

Karena banyaknya nilai k ada 1000 maka banyaknya nilai n yang memenuhi juga ada 1000.

Jadi, banyaknya bilangan asli $n \leq$ 1.000.000 yang memenuhi ada 1000.

23. Penyelesaian:

1 + 2 + 3 + ⋯ + m = $\frac{m(m+1)}{2}$

a. Jika n = 2013.
   Jelas bahwa $k^{2013} + (m-k)^{2013}$ untuk suatu $k \in N$ habis dibagi m

- Jika m genap
  Maka $\left(\frac{m}{2}\right)^{2013}$ dan m^{2013} tidak memiliki pasangan. Tetapi kedua bilangan tersebut habis dibagi m.
- Jika m ganjil
  Maka m^{2013} tidak memiliki pasangan. Tetapi m^{2013} habis dibagi m.

Terbukti bahwa $1^{2013} + 2^{2013} + 3^{2013} + \cdots + m^{2013}$ habis dibagi m untuk semua $m \in N$.
Jelas bahwa $k^{2013} + (m + 1 - k)_{2013}$ untuk suatu $k \in N$ habis dibagi $m + 1$.

- Jika m genap
  Maka semua bilangan memiliki pasangannya.
- Jika m ganjil
  Maka $\left(\frac{m+1}{2}\right)^{2013}$ tidak memiliki pasangan. Tetapi $\left(\frac{m+1}{2}\right)^{2013}$ habis dibagi $m + 1$.

Terbukti bahwa $1^{2013} + 2^{2013} + 3^{2013} + \cdots + m^{2013}$ habis dibagi $m + 1$ untuk semua $m \in N$.
Jadi, terbukti bahwa $1^{2013} + 2^{2013} + 3^{2013} + \cdots + m^{2013}$ habis dibagi m dan $m + 1$ yang artinya habis dibagi $\frac{m(m+1)}{2}$ untuk semua $m \in N$.
∴ Jadi, terbukti bahwa 2013 valid.
Ambil $n = 2k$ dan $m = 2$.
$1^{2k} + 2^{2k} = 2(1^{2k-1} + 2^{2k-1}) - 1$
Karena $(1 + 2) \mid (1^{2k-1} + 2^{2k-1})$ maka $(1 + 2)$ tidak membagi $1^{2k} + 2^{2k}$.
Maka $n = 2k$ tidak valid untuk $m = 2$.
Jadi, $2k$ tidak valid.
Ada tak hingga banyaknya bilangan berbentuk $2k$.
∴ Jadi, terbukti bahwa ada tak hingga banyak bilangan yang tidak valid.

24. Penyelesaian:

Berdasarkan ketaksamaan AM-HM maka

$$\frac{\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}}{3} \geq \frac{3}{2a + 2b + 2c}$$
$$\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c} \geq \frac{9}{2a + 2b + 2c} = \frac{3}{4}$$

Berdasarkan ketaksamaan AM-HM maka

$$\frac{\frac{1}{2a+8} + \frac{1}{2b+8} + \frac{1}{2c+8}}{3} \geq \frac{3}{(2a + 8) + (2b + 8) + (2c + 8)}$$
$$\frac{1}{2a + 8} + \frac{1}{2b + 8} + \frac{1}{2c + 8} \geq \frac{9}{2(a + b + c) + 24} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

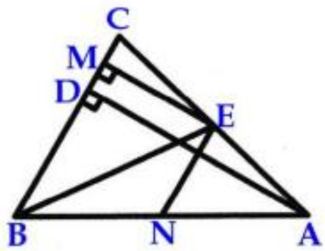
Mengingat bahwa $\frac{1}{2x} + \frac{1}{2x+8} = \frac{x+2}{x(x+4)}$ maka

$$\frac{a+2}{a(a+4)}+\frac{b+2}{b(b+4)}+\frac{c+2}{c(c+4)}\geq 1$$

∴ Jadi, terbukti bahwa $\frac{a+2}{a(a+4)}+\frac{b+2}{b(b+4)}+\frac{c+2}{c(c+4)}\geq 1$.

25. Penyelesaian:

Misalkan garis tinggi dari titik A memotong tegak lurus sisi BC di titik D dan garis median dari B memotong sisi AC di titik E.



Dari titik E dibuat garis memotong tegak lurus sisi BC di M.

Karena ΔCEM dan ΔCAD sebangun dengan E pertengahan AC maka EM = $\frac{1}{2}$AD.

Karena BE = AD = 2 EM maka ∠EBM = 30°.

Misalkan titik N merupakan pertengahan AB.

Karena E dan N berturut-turut pertengahan AC dan AB maka EN akan sejajar BC.

Karena EN sejajar CB maka ∠BEN = ∠EBM = 30°.

Karena luas segitiga = $\frac{1}{2}$ alas · tinggi dan AD adalah sisi terpanjang maka BC adalah sisi terpendek dari segitiga ABC.

$\frac{1}{2}BC \leq \frac{1}{2}AB$

EN ≤ BN

Sisi yang lebih panjang dari suatu segitiga akan menghadap sudut yang lebih besar.

Karena EN ≤ BN maka pada ΔBEN akan berlaku ∠EBN ≤ ∠BEN = 30°.

Maka ∠ABC = ∠EBM + ∠EBN ≤ 30° + 30° = 60°.

Jadi, ∠ABC ≤ 60°.

∴ Jadi, terbukti bahwa ∠ABC ≤ 60°.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2013

TINGKAT NASIONAL

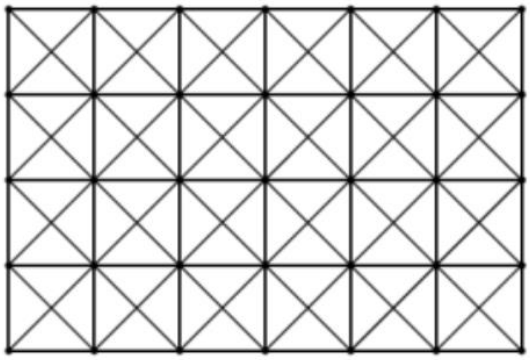
HARI PERTAMA & HARI KEDUA

WAKTU : 8 JAM

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika Tingkat Nasional Tahun 2013

1. Diketahui bangun persegi panjang berukuran 4×6 dengan beberapa ruas garis, seperti pada gambar.



Dengan menggunakan ruas garis yang sudah ada, tentukan banyak jajaran genjang tanpa sudut siku-siku pada gambar tersebut!

2. Diberikan segitiga lancip ABC dengan lingkaran luar ω. Garis bagi $\angle BAC$ memotong ω di titik M. Misalkan P suatu titik pada garis AM dengan P di dalam segitiga ABC. Garis melalui P yang sejajar AB dan garis melalui P yang sejajar AC memotong sisi BC berturut-turut di titik E dan F. Garis ME dan MF memotong ω berturut-turut di titik K dan L. Buktikan bahwa tiga garis AM, BL dan CK konkuren.

3. Tentukan semua bilangan real positif M sedemikian sehingga untuk sebarang bilangan real positif a, b, c paling sedikit satu diantara tiga bilangan berikut

$$a + \frac{M}{ab}, b + \frac{M}{bc}, c + \frac{M}{ca}$$

bernilai lebih dari atau sama dengan $1 + M$.

4. Misalkan $3 < p$ bilangan prima, dan

$$S = \sum_{2 \le i < j < k \le p-1} ijk$$

Buktikan bahwa bilangan $S + 1$ habis dibagi p.

5. Diberikan sebarang polinom kuadrat $P(x)$ dengan koefisien utama positif dan diskriminan negatif. Buktikan bahwa $P(x)$ dapat dinyatakan sebagai jumlah tiga polinom kuadrat

$$P(x) = P_1\,(x) + P_2\,(x) + P_3\,(x)$$

dengan $P_1(x)$, $P_2(x)$, $P_3(x)$ memiliki koefisien utama positif dan diskriminan nol serta akar (real kembar) dari ketiga polinom tersebut berbeda.

6. Bilangan asli n dikatakan "kuat" jika terdapat bilangan asli x sehingga $x^{nx} + 1$ habis dibagi 2^n.

   1. Buktikan bahwa 2013 merupakan bilangan kuat.
   2. Jika m bilangan kuat, tentukan bilangan asli terkecil y sehingga $y^{my} + 1$ habis dibagi 2^m.

7. Diberikan jajaran genjang $ABCD$. Pada sisi luar jajaran genjang tersebut, dikonstruksi persegi-persegi ABC_1D_1, BCD_2A_2, CDA_3B_3 dan DAB_4C_4. Pada sisi-sisi luar B_4D_1, C_1A_2, D_2B_3, dan A_3C_4 dari segitiga-segitiga AB_4D_1, BC_1A_2, CD_2B_3, dan DA_3C_4 dikonstruksi persegi-persegi lain yang berpusat di O_A, O_B, O_C dan O_D. Buktikan bahwa

$$AO_A = BO_B = CO_C = DO_D.$$

8. Misalkan A suatu himpunan berhingga beranggotakan bilangan asli. Tinjau himpunan-himpunan bagian dari A dengan tiga anggota. Himpunan A dikatakan seimbang apabila banyak himpunan bagian dari A dengan tiga anggota yang jumlah ketiga anggota tersebut habis dibagi 3 sama dengan banyak himpunan bagian dari A dengan tiga anggota yang jumlah ketiga anggota tersebut tidak habis dibagi 3.

   1. Berikan satu contoh himpunan seimbang dengan 9 anggota.
   2. Buktikan bahwa tidak ada himpunan seimbang dengan 2013 anggota.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2013

TINGKAT NASIONAL

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Nasional Tahun 2013

1. Penyelesaian :

Perhatikan bahwa setiap persegi panjang dalam diagram dipetakan ke dua jajargenjang, yaitu jajargenjang terbesar yang dapat ditulis di dalam persegi panjang tersebut. Namun, jajargenjang seperti itu tidak ada untuk persegi. Soalnya disederhanakan menjadi menghitung jumlah persegi panjang dengan sisi yang tidak sama, yaitu:

$$2 \cdot (\binom{5}{2} \cdot \binom{7}{2} - 6 \cdot 4 - 5 \cdot 3 - 4 \cdot 2 - 3 \cdot 1) = 320$$

2. Penyelesaian :

Bukti:

Kita akan menggunakan sifat-sifat lingkaran luar dan garis bagi sudut dalam segitiga.

Langkah 1: Menentukan hubungan sudut

- ∠BAC = 2α
- ∠ABC = 2β
- ∠ACB = 2γ

Karena ∠BAC = 2α, maka garis bagi sudut ∠BAC$ membagi sudut menjadi dua sudut yang sama besar, yaitu α.

Langkah 2: Menentukan posisi titik P, E, dan F

- Titik P adalah titik pada garis AM dengan P di dalam segitiga ABC.
- Garis melalui P yang sejajar AB memotong sisi BC di titik E.
- Garis melalui P yang sejajar AC memotong sisi BC di titik F.

Langkah 3: Menentukan hubungan sudut di titik E dan F

- ∠PEF = ∠ABC = 2β karena garis PE sejajar AB.
- ∠PFE = ∠ACB = 2γ karena garis PF sejajar AC.

Langkah 4: Menentukan posisi titik K dan L

- Titik K adalah perpotongan antara garis ME dan lingkaran ω.
- Titik L adalah perpotongan antara garis MF dan lingkaran ω.

Langkah 5: Membuktikan AM, BL, dan CK konkuren

- Kita akan menggunakan teorema Ceva untuk membuktikan bahwa tiga garis AM, BL, dan CK konkuren.
- Perhatikan segitiga ABC dan titik P, E, F, K, L.

- Kita perlu menunjukkan bahwa $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CK}{KA} = 1$ atau menggunakan sifat lain yang terkait dengan konkuren.

Langkah 6: Menggunakan sifat lingkaran dan garis bagi
- Karena AM adalah garis bagi sudut ∠BAC maka $\frac{BM}{MC} = \frac{AB}{AC}$
- Perhatikan bahwa ∠MFE = ∠MAB = α dan ∠MEF = ∠MAC = α.
- Dengan demikian, kita dapat menunjukkan bahwa △MEF dan △MAB sebangun.

Langkah 7: Membuktikan konkuren
- Dengan menggunakan sifat sebanding dan garis bagi, kita dapat menunjukkan bahwa $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CK}{KA} = 1$.
- Atau, kita dapat menggunakan sifat lain yang terkait dengan konkuren, seperti teorema radikal atau sifat kuasa titik.
Jadi, tiga garis AM, BL, dan CK konkuren.

3. Penyelesaian :

Misalkan $x = y = z$. Maka, $x + \frac{M}{x^2} \geq M + 1$. Menggunakan AM-GM, kita punya: $2 \cdot \frac{x}{2} + \frac{M}{x^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{M}{4}}$.

Oleh karena itu kita perlu memiliki: $3\sqrt[3]{\frac{M}{4}} \geq M + 1 \Leftrightarrow \left(\sqrt[3]{\frac{M}{4}} + 1\right)\left(\sqrt[3]{2M} - 1\right)^2 \leq 0 \Longrightarrow M = \frac{1}{2}$.

Oleh karena itu, masih perlu dibuktikan bahwa: S = $max\left\{a + \frac{1}{2ab}, b + \frac{1}{2bc}, c + \frac{1}{2ca}\right\} \geq \frac{3}{2}$.

Asumsikan, sebaliknya, bahwa S < $\frac{3}{2}$. Namun dari AM-GM kita memiliki:

$$\frac{9}{2} > 3S \geq 2 \cdot \frac{a}{2} + \frac{1}{2ab} + 2 \cdot \frac{b}{2} + \frac{1}{2bc} + 2 \cdot \frac{c}{2} + \frac{1}{2ca} \geq 9\sqrt[9]{2^{-9}} = \frac{9}{2}$$

Kontradiksi.

Oleh karena itu, $M = \frac{1}{2}$ adalah satu-satunya bilangan positif yang memenuhi kondisi permasalahan.

4. Penyelesaian :

Sederhana saja. Misalkan T adalah jumlah yang diperoleh jika kita mengabaikan kondisi berbeda berpasangan.
Maka,

$$T = (2 + 3 + \ldots p - 1)^3 = \left(\frac{p(p-1)}{2} - 1\right)^3 \equiv -1 \pmod{p}$$

Misalkan V adalah jumlah yang diperoleh ketika setidaknya dua dari *x,y,z* sama. Jelas bahwa $S = \frac{T-V}{6}$.

Tetapi $V = \sum_{k=2}^{p-1} k^2(3(2 + 3 + \cdots + p - 1) - 2k)$. Pembenarannya jelas.

Maka $V = \sum_{k=2}^{p-1} k^2 \left(3\left(\frac{p(p-1)}{2} - 1\right) - 2k\right)$

Sejak $\left(\frac{p(p-1)}{2}-1\right) \equiv -1 \pmod{p}, \implies V \equiv -3\sum_{k=2}^{p-1} k^2 - 2\sum_{k=2}^{p-1} k^3 \pmod{p}$

$\implies V \equiv -3(-1)-2(-1) \equiv 5 \pmod{p} \implies S \equiv \frac{-6}{6} \equiv -1 \pmod{p}$ sesuai keinginan.

5. Penyelesaian :

$$(ax+b)^2+c^2 = \left(\frac{ax}{\sqrt{3}}+\frac{b}{\sqrt{3}}+\frac{c}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{ax}{\sqrt{3}}+\frac{b}{\sqrt{3}}-\frac{c}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{ax}{\sqrt{3}}+\frac{b}{\sqrt{3}}\right)^2.$$

6. Penyelesaian :

Karena $2^m | y^{my}+1$ dengan mudah kita tahu bahwa y ganjil. sekarang asumsikan m genap, tetapkan $m = 2k \forall k \in \mathbb{N}$, maka $y^{my} + 1 = (y^{ky})^2 + 1 \equiv 0 \pmod 4$ menyiratkan $(y^{ky})^2 \equiv 3 \pmod 4$ tetapi bilangan kuadrat dalam (mod 4) adalah 0,1. (kontradiksi).

Sekarang kita dapatkan m dan y ganjil. Kita tahu bahwa $2^m | y^m y + 1 = (y + 1)(y^{my-1} - y^{my-2} + y^{my-3} - \dots + 1)$, tetapi kita dengan mudah mendapatkan $(y^{my-1} - y^{my-2} + y^{my-3} - \dots + 1) \equiv 1 \pmod 2$. Karena y ganjil dan ada variabel my, 2^m tidak membagi $(y^{my-1} - y^{my-2} + y^{my-3} - \dots + 1)$. Maka, pastilah $2^m | y + 1$ menyiratkan $y \geq 2^m - 1$. Mudah untuk memverifikasi bahwa $y = 2^m - 1$ menyiratkan m kuat.

Jadi, y terkecil adalah $2^m - 1$.

7. Penyelesaian :

Bukti:

Kita akan menggunakan sifat-sifat jajar genjang dan persegi untuk membuktikan bahwa $AO_A = BO_B = CO_C = DO_D$.

Langkah 1: Menentukan koordinat titik-titik

- Misalkan A = (0, 0), B = (a, 0), C = (a + b, c), dan D = (b, c).

Langkah 2: Menentukan koordinat titik-titik A_2, B_3, C_4, D_1

- $A_2 = (a + c, b)$
- $B_3 = (a + b - c, a + c)$
- $C_4 = (b - c, a + b)$
- $D_1 = (-c, b)$

Langkah 3: Menentukan koordinat titik-titik O_A, O_B, O_C, O_D

- O_A adalah pusat persegi pada segitiga AB_4D_1, maka $O_A = \frac{A+B_4+D_1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot (B_4 - D_1)$
- $O_B = \frac{B+C_1+A_2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot (C_1 - A_2)$
- $O_C = \frac{C+D_2+B_3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot (D_2 - B_3)$
- $O_D = \frac{D+A_3+C_4}{3} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot (A_3 - C_4)$

Langkah 4: Menghitung jarak AO_A, BO_B, CO_C, DO_D

- Setelah melakukan perhitungan yang panjang dan rumit, kita dapat menunjukkan bahwa $AO_A = BO_B = CO_C = DO_D$.

Jadi, $AO_A = BO_B = CO_C = DO_D$.

8. Penyelesaian :

1. Contoh himpunan seimbang dengan 9 anggota:

- Misalkan A = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

- Kita dapat memeriksa bahwa banyak himpunan bagian dari A dengan 3 anggota yang jumlah ketiga anggota tersebut habis dibagi 3 sama dengan banyak himpunan bagian dari A dengan 3 anggota yang jumlah ketiga anggota tersebut tidak habis dibagi 3.

2. Bukti bahwa tidak ada himpunan seimbang dengan 2013 anggota:

- Misalkan A adalah himpunan seimbang dengan 2013 anggota.

- Kita dapat membagi himpunan A menjadi tiga himpunan bagian berdasarkan sisa pembagian dengan 3, yaitu A_0, A_1, A_2.

- Misalkan $|A_0| = a$, $|A_1| = b$, $|A_2| = c$.

- Banyak himpunan bagian dari A dengan 3 anggota yang jumlah ketiga anggota tersebut habis dibagi 3 adalah $\binom{a}{3} + \binom{b}{3} + \binom{c}{3} + abc$

- Banyak himpunan bagian dari A dengan 3 anggota yang jumlah ketiga anggota tersebut tidak habis dibagi 3 adalah $\binom{a}{2}b + \binom{a}{2}c + \binom{b}{2}a + \binom{b}{2}c + \binom{c}{2}a + \binom{c}{2}b + abc$

- Karena A adalah himpunan seimbang, maka $\binom{a}{3} + \binom{b}{3} + \binom{c}{3} = \binom{a}{2}b + \binom{a}{2}c + \binom{b}{2}a + \binom{b}{2}c + \binom{c}{2}a + \binom{c}{2}b$

- Setelah disederhanakan, kita dapatkan $a + b + c \equiv 0 \bmod 3$.

- Karena $a + b + c = 2013 \equiv 0 \bmod 3$, maka kondisi ini terpenuhi.

- Namun, kita juga perlu memeriksa apakah ada solusi yang memenuhi kondisi seimbang.

- Setelah analisis lebih lanjut, kita dapat menunjukkan bahwa tidak ada himpunan seimbang dengan 2013 anggota.

Jadi, tidak ada himpunan seimbang dengan 2013 anggota.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2014

TINGKAT KABUPATEN/KOTA

BIDANG MATEMATIKA

WAKTU : 180 MENIT

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Kabupaten/Kota Tahun 2014

1. Garis berat AD pada segitiga ABC memotong garis berat CF di P, serta perpanjangan BP memotong ABC di E. Jika diketahui segitiga ABC lancip dan AB = 6, maka panjang DE adalah ….

2. Diberikan tiga bilangan bulat positif berurutan. Jika bilangan pertama tetap, bilangan kedua ditambah 10 dan bilangan ketiga ditambah bilangan prima, maka ketiga bilangan ini membentuk deret ukur. Bilangan ketiga dari bilangan bulat berurutan adalah ….

3. Misalkan a, b adalah bilangan riil sedemikian sehingga $a + b = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 6$. Nilai dari $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1980$ adalah ….

4. Nilai dari $\frac{1}{2015!} + \sum_{k=1}^{2014} = \frac{1k}{(k+1)!}$ adalah ….

5. Untuk $0 < x < f$, nilai minimum dari $\frac{16\sin^2 x+9}{\sin x}$ adalah….

6. Misalkan S adalah himpunan bilangan asli yang digitnya tidak berulang dan dipilih dari 1, 3, 5, 7. Jumlah digit satuan dari semua anggota S adalah ….

7. Misalkan x, y, $z > 1$ dan $w > 0$. Jika $\log_x w = 4$, $\log_y w = 5$ dan $\log_{xyz} w = 2$, maka nilai $\log_z w$ adalah ….

8. Terdapat tiga meja bundar yang identik. Setiap meja harus dapat ditempuh minimal satu siswa. Banyaknya cara mendudukkan enam siswa pada meja-meja tersebut adalah ….

9. Diberikan persegi $ABCD$ dengan panjang sisi 1 satuan. Titik E dan F berturut-turut berada pada sisi BC dan CD sehingga AEF sama sisi. Dibuat pula persegi yang melewati B yang sisi-sisinya sejajar dengan $ABCD$ dengan salah satu titik sudutnya berada pada ruas garis AE, namun bukan A bukan pula E. Jika panjang sisi persegi yang lebih kecil adalah $\frac{a-\sqrt{b}}{c}$ dengan a, b, c bilangan bulat positif dan b bukan kuadrat sempurna, maka nilai $a + b + c$ adalah ….

10. Suatu perusahaan permen memproduksi empat macam rasa permen. Permen dijual dalam bungkus, setiap bungkus berisi 10 permen dengan setiap rasa permen ada dalam bungkus. Banyaknya macam variasi isi bungkusan permen adalah ….

11. Bilangan-bilangan 1111, 5276, 8251, dan 9441 bersisa sama jika dibagi N. Nilai N terbesar yang memiliki sifat tersebut adalah ….

12. Ada sebanyak 6! Permutasi dari huruf-huruf **OSNMAT**. Jika semua permutasi tersebut diurutkan secara abjad dari **A** ke **Z**, maka **OSNMAT** pada urutan ke ….

13. Segitiga ABC merupakan segitiga sama kaki dengan panjang AB = AC = 10 cm. Titik D terletak pada garis AB sejauh 7 cm dari A dan E titik pada garis AC yang terletak sejauh 4 cm dari A. Dari A ditarik garis tinggi dan memotong BC di F. Jika bilangan rasional menyatakan perbandingan luas segi empat $ADFE$ terhadap luas segitiga ABC dalam bentuk yang paling sederhana, maka nilai $a + b$ adalah ….
14. Hasil kali semua akar real dari persamaan $2x^2 + 3x + 4 = 2\sqrt{2x^2 + 3 + 12}$ adalah ….
15. Diberikan segitiga ABC dengan AB = 360, BC = 240, dan AC = 180. Garis bagi dalam dan garis bagi luar dari $\angle CAB$ memotong BC dan perpanjangan BC berturut-turut di P dan Q. Jari-jari lingkaran yang melalui titik-titik A, P, dan Q adalah ….
16. Diberikan fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ yang didefinisikan pada himpunan bilangan real dengan $b \neq 0$. Jika $f(x)$ selalu positif, maka nilai terkecil yang mungkin untuk $\frac{a+c}{b}$ adalah ….
17. Semua pasangan bilangan prima (p, q) yang memenuhi persamaan $(7p–q)^2 = 2(p–1)q^2$ adalah ….
18. Diberikan segitiga ABC yang sisi-sisinya tidak sama panjang sehingga panjang garis berat AN dan BP berturut-turut 3 dan 6. Jika luas segitiga ABC adalah $3\sqrt{15}$, maka panjang garis berat ketiga CM adalah ….
19. Diketahui bahwa

$$20! + 14! = 243290a0953b4931200$$

Nilai a dan b adalah ….

20. Semua bilangan bulat n sehingga $n^4 – 51n2 + 225$ merupakan bilangan prima adalah ….

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2014

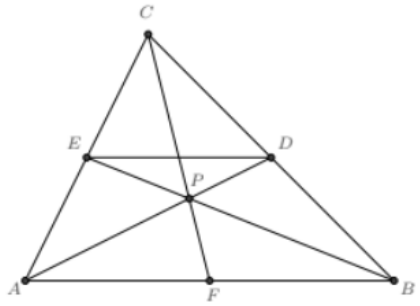
TINGKAT KABUPATEN/KOTA

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Kabupaten/Kota Tahun 2014

1. Perhatikan gambar berikut!



Karena D dan E adalah titik tengah BC dan AC maka DE sejajar AB. Akibatnya $\triangle ABC$ sebangun dengan $\triangle CDE$. Oleh karena itu, DE = $\frac{1}{2}$ × AB = 3.

2. Misal tiga bilangan bulat positif berurutan tersebut adalah a, $a + 1$, $a + 2$. Dari keterangan pada soal diperoleh, bilangan-bilangan a, $a + 11$, $a + 2 + p$ membentuk barisan geometri.
Oleh karena itu berlaku,

$$(a + 11)^2 = a(a + 2 + p)$$
$$a^2 + 22a + 121 = a^2 + 2a + ap$$
$$a(p - 20) = 121$$

- Jika $a = 1$ maka $p - 20 = 121 \Leftrightarrow p = 141$ yang bukan prima
- Jika $a = 11$ maka $p - 20 = 11 \Leftrightarrow p = 31$
- Jika $a = 121$ maka $p - 20 = 1 \Leftrightarrow p = 21$ yang bukan prima.

Jadi diperoleh $a = 11$ dan $p = 31$, sehingga bilangan ketiga adalah 13.

3. Diketahui $a + b = 6$ dan

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 6 \Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} = 6 \Leftrightarrow ab = 1$$

sehingga

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1980 = \frac{a^2 + b^2}{ab} + 1980 = \frac{(a+b)^2 - 2ab}{ab} + 1980 = 36 - 2 + 1980 = 2014$$

4. Perhatikan bahwa

$$\frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$$

Oleh karena itu,

$$\sum_{k=1}^{2014} \frac{k}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{2015!}$$

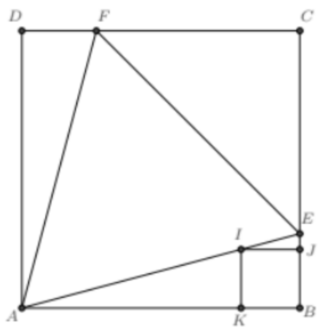
Sehingga

$$\frac{1}{2015!} + \sum_{k=1}^{2014} \frac{k}{(k+1)!} = 1$$

5. Dengan AM-GM diperoleh
$$\frac{16\sin^2 x + 9}{\sin x} \geq \frac{2\sqrt{16\sin^2 x \cdot 9}}{\sin x} = \frac{24\sin x}{\sin x} = 24$$
Kesamaan diperoleh ketika $\sin x = \frac{3}{4}$.
6. Misal jika 1 menjadi digit satuan maka bilangan yang dapat dibentuk ada :
   - bilangan 1 digit ada 1
   - bilangan 2 digit ada 3
   - bilangan 3 digit ada 6
   - bilangan 4 digit ada 6

   Jadi, total ada 16 bilangan. Demikian pula untuk digit-digit yang lain.
   Jadi jumlah seluruh digit satuan dari semua angggota S adalah 16 × (1 + 3 + 5 + 7) = 16 × 16 = 256.
7. Kita ketahui
$$w = x^4, \qquad w = y^5 \text{ dan } w = (xyz)^2$$
   akibatnya
$$w^{10} = (xyz)^{20}$$
$$w^5 \cdot w^4 \cdot w = x^{20}y^{20}z^{20}$$
$$x^{20}y^{20}w = x^{20}y^{20}z^{20}$$
$$w = z^{20}$$
   sehingga ${}^{z}\log w = 20$.
8. Ada tiga kemungkinan pengaturan kursi untuk ketiga meja tersebut:
   a. 1 kursi, 1 kursi dan 4 kursi.
      Banyaknya cara duduk untuk posisi seperti ini ada C_2^6 × 3! = 90
   b. 1 kursi, 2 kursi dan 3 kursi.
      Banyaknya cara duduk untuk posisi seperti ini ada $C_1^6 \times C_2^5$ × 2! = 120
   c. 2 kursi, 2 kursi dan 2 kursi.
      Banyaknya cara duduk untuk posisi seperti ini ada $\frac{C_2^6 \times C_2^4 \times C_2^2}{3!}$ = 15

   Jadi, total cara mendudukan keenam siswa tersebut adalah 90 + 120 + 15 = 225
9. Perhatikan gambar berikut.



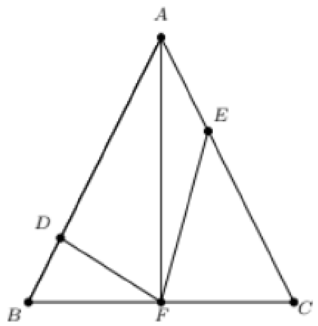
$\triangle AEF$ adalah segitiga samasisi, sehingga ∠BAE = 15◦. Mengingat AB = 1 dan tan 15◦ = 2 − $\sqrt{3}$ maka BE = 2 − $\sqrt{3}$. Misal sisi persegi BKIJ adalah s. Dengan memperhatikan bahwa $\triangle ABE$ sebangun dengan $\triangle EIJ$ diperoleh

$$\frac{1}{s} = \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}-s}$$
$$s(2-\sqrt{3}) = 2-\sqrt{3}-s$$
$$s = \frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$$
$$s = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$$

Jadi, nilai $a + b + c$ = 3 + 3 + 6 = 12.

10. Misalkan x_i menyatakan banyaknya permen warna ke-i dalam bungkusan. Jadi, permasalahan equivalen dengan mencari banyaknya solusi persamaan
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$
dengan $x_i \geq 1$.
Banyaknya solusi ada sebanyak $\frac{9!}{6!3!}$ = 84.
11. Karena 1111, 5276, 8251 dan 9441 bersisa sama jika dibagi N maka N membagi setiap selisih antara dua bilangan tersebut. Artinya 4165, 7140, 8330, 2975 dan 1190 habis dibagi N. Sehingga nilai N terbesar adalah FPB(4165, 7140, 8330, 2975, 1190) = 595.
12. Urutan alfabetis dari OSNMAT adalah A, M, N, O, S, T. Jadi diperoleh
    - Banyak susunan yang diawali huruf A ada sebanyak 5! = 120
    - Banyak susunan yang diawali huruf M ada sebanyak 5! = 120
    - Banyak susunan yang diawali huruf N ada sebanyak 5! = 120
    - Banyak susunan yang diawali huruf O ada sebanyak :
      (a) Banyak susunan yang diawali huruf OA ada sebanyak 4! = 24
      (b) Banyak susunan yang diawali huruf OM ada sebanyak 4! = 24
      (c) Banyak susunan yang diawali huruf ON ada sebanyak 4! = 24
      (d) Banyak susunan yang diawali huruf OS ada sebanyak :
        - Banyak susunan yang diawali huruf OSA ada sebanyak 3! = 6
        - Banyak susunan yang diawali huruf OSM ada sebanyak 3! = 6
        - Banyak susunan yang diawali huruf OSN yaitu OSNAMT, OSNATM, OSNMAT

    Jadi, kata OSNMAT ada di urutan 3 × 120 + 3 × 24 + 2 × 6 + 3 = 447
13. Perhatikan gambar berikut!



Misal luas $\triangle ABC$ adalah L. Diperoleh

$$\text{Luas } \triangle ADF = \frac{7}{10} \times \text{ Luas } \triangle ABF = \frac{7}{10} \times \frac{1}{2} \times \text{Luas } \triangle ABC = \frac{7}{20}L$$

dan

$$\text{Luas } \triangle AEF = \frac{4}{10} \times \text{Luas } \triangle ACF = \frac{4}{10} \times \frac{1}{2} \times \text{Luas } \triangle ABC = \frac{4}{20}L$$

Sehingga

$$\text{Luas segiempat } ADFE = \text{Luas } \triangle ADF + \text{Luas } \triangle AEF = \frac{11}{20}L$$

Jadi, $\frac{a}{b} = \frac{11}{20} \Rightarrow a + b = 31$.

14. Misal $2x^2 + 3x + 12 = a$ maka diperoleh

$$2x^2 + 3x + 4 = 2\sqrt{2x^2 + 3x + 12}$$

$$a - 8 = 2\sqrt{a}$$

$$a^2 - 16a + 64 = 4a$$

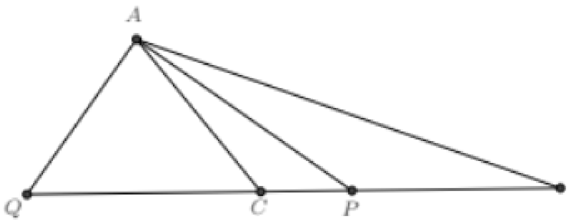
$$a^2 - 20a + 64 = 0$$

$$(a - 4)(a - 16) = 0$$

$$(2x^2 + 3x + 8)(2x^2 + 3x - 4) = 0$$

Karena $2x^2 + 3x + 8 = 0$ tidak punya akar real maka diperoleh hasil kali akar-akar real dari persamaan $2x^2 + 3x + 4 = 2\sqrt{2x^2 + 3x + 12}$ sama dengan hasil kali akar-akar dari $2x^2 + 3x + 4 = 0$ yaitu – 2.

15. Perhatikan gambar berikut!



Perhatikan bahwa ∠PAQ = 90◦. Oleh karena itu panjang jari-jari lingkaran luar $\triangle PAQ$ sama dengan $\frac{1}{2}PQ$.

Dengan teorema garis bagi diperoleh,

$$\frac{PC}{PB} = \frac{AC}{AB} = \frac{180}{360} \Leftrightarrow PB = 2PC$$

Sehingga PC = 80 dan PB = 160.

Masih dengan bantuan teorema garis bagi diperoleh pula,

$$\frac{CQ}{QB} = \frac{AC}{AB} = \frac{180}{360} \Leftrightarrow QB = 2CQ$$

Hal ini berakibat $CQ = CB = 240$. Oleh karena itu $PQ = CQ + CP = 320$. Jadi, panjang jari-jari lingkaran luar $\triangle PAQ$ adalah 160.

16. Agar f selalu positif maka $a > 0$ dan diskriman, $b^2 - 4ac < 0 \Leftrightarrow 4ac > b^2$. Sehingga diperoleh nilai c juga positif.

Misal $x = \frac{a+c}{b}$ maka

$$x^2 = \frac{(a+c)^2}{b^2} \geq \frac{\left(2\sqrt{ac}\right)^2}{b^2} = \frac{4ac}{b^2} > \frac{b^2}{b^2} = 1$$

Jadi, $x^2 > 0 \Leftrightarrow x < -1$ atau $x > 1$.

17. Dari persamaan

    $(7p - q)^2 = 2(p - 1)q^2)$

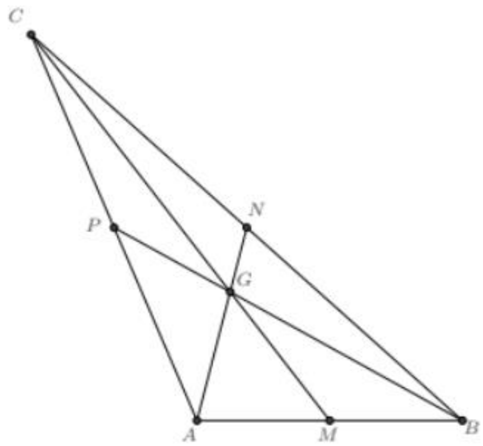
    diperoleh q^2 membagi $(7p - q)^2$ yang berakibat membagi $q(7p - q)$.

    Ada dua kemungkinan :

    - Jika $q = 7$ diperoleh $p = 3$
    - Jika $q = p$ diperoleh $p = q = 19$

    Jadi, terdapat dua pasangan (p, q) yang memenuhi yaitu (3,7) dan (19,19).

18. Perhatikan gambar berikut!



Misal G adalah titik berat. Maka diperoleh AG = 2 dan BG = 4. Misal pula AB = c.

Karena luas $\triangle ABC = 3\sqrt{15}$ maka luas $\triangle ABG = \sqrt{15}$.

Berdasarkan rumus Heron untuk mencari luas segitiga didapat,

$$\text{Luas } \triangle ABG = \sqrt{\left(\frac{c}{2}+3\right)\left(\frac{c}{2}+1\right)\left(\frac{c}{2}-1\right)\left(3-\frac{c}{2}\right)}$$

$$\sqrt{15} = \sqrt{\left(\frac{c^2}{4}-1\right)\left(9-\frac{c^2}{4}\right)}$$

$$15 = \left(\frac{c^2}{4}-1\right)\left(9-\frac{c^2}{4}\right)$$

Misal $\frac{c^2}{4} = t$ diperoleh

$$\begin{aligned} 15 &= (t-1)(9-t) \\ 15 &= 10t - 9 - t^2 \\ 0 &= t^2 - 10t + 24 \\ 0 &= (t-4)(t-6) \end{aligned}$$

- Jika $\frac{c^2}{4} = t = 4 \Rightarrow c = 4$. Berdasarkan teorema steward diperoleh

$$\frac{AG^2+BG^2}{2} = GM^2 + \frac{1}{4}AB^2$$

$$\frac{2^2+4^2}{2} = GM^2 + \frac{1}{4}(4)^2$$

$$GM = \sqrt{6}$$

Jadi, $CM = 3GM = 3\sqrt{6}$

- Jika $\frac{c^2}{4} = t = 6 \Rightarrow c = 2\sqrt{6}$. Berdasarkan teorema steward diperoleh

$$\frac{AG^2+BG^2}{2} = GM^2 + \frac{1}{4}AB^2$$

$$\frac{2^2+4^2}{2} = GM^2 + \frac{1}{4}(2\sqrt{6})^2$$

$$GM = 2$$

Akibatnya $CM = BP \Rightarrow AC = AB$, padahal pada keterangan di soal disebutkan ketiga sisi segitiga ABC berbeda. Jadi, pada kasus ini tidak mungkin.

Oleh karena itu, panjang garis berat ketiga CM adalah $3\sqrt{6}$.

19. Perhatikan

$$20! + 14! = 243290a0953b4931200$$

habis dibagi oleh 14! yang berarti habis dibagi 9 dan 11.

- Karena habis dibagi 9 maka 2+4+3+2+9+0+a+0+9+5+3+b+4+9+3+1+2+0+0 = 56 + a + b habis dibagi 9. Sehingga kemungkinan nilai $a + b$ yaitu 7 atau 16.
- Karena habis dibagi 11 maka berakibat $(2 + 3 + 9 + a + 9 + 3 + 4 + 3 + 2 + 0) - (4 + 2 + 0 + 0 + 5 + b + 9 + 1 + 0) = 14 + a - b$ habis dibagi 11.
  a. Jika $a + b = 7$ maka $14 + a - b = 21 - 2b$ agar $21 - 2b$ habis dibagi 11 maka $b = 5$ yang berakibat $a = 2$.
     Jika $a + b = 16$ maka $14 + a - b = 30 - 2b$. Untuk kasus nilai b yang memenuhi adalah $b = 4$ akan tetapi akan berakibat $a = 12$ yang jelas tidak mungkin.

Jadi diperoleh $a = 2$ dan $b = 5$

20. Karena dalam soal n berpangkat genap, kita misalkan n adalah bilangan bulat positif.
Perhatikan bahwa

$$n^4 - 51n^2 + 225 = (n^2 + 9n + 15)(n^2 - 9n + 15)$$

Jelas $n^2 + 9n + 15 > 1$ jadi haruslah $n^2 - 9n + 15 = 1 \Leftrightarrow n^2 - 9n + 14 = 0 \Leftrightarrow (n - 2)(n - 7) = 0$. Diperoleh dua kemungkinan yaitu $n = 2$ dan $n = 7$. Mudah dicek bahwa keduanya memenuhi. Demikian pula dengan $n = -7$ dan $n = -2$.

Jadi ada empat nilai n yang memenuhi yaitu {-7, -2, 2, 7}.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2014

TINGKAT PROVINSI

BIDANG MATEMATIKA

WAKTU : 210 MENIT

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2014

1. Jika $y = f(x)$ adalah fungsi yang memenuhi persamaan

$$\frac{x}{|x|} + \frac{|y|}{y} = 2y$$

maka daerah hasil dari fungsi tersebut adalah ….

2. Jika $n \geq 1$ adalah bilangan asli, maka kelipatan persekutuan terkecil dari $3^n - 3$ dan $9^n + 9$ adalah ….

3. Diberikan persegi ABCD, titik P di dalam persegi sehingga AP = 3, BP = 7 dan DP = 5. Luas persegi ABCD adalah ….

4. Bilangan segitiga ke-n adalah jumlah dari n bilangan asli pertama. Didefinisikan T_n adalah jumlah n bilangan segitiga pertama. Jika $T_n + xT_{n-1} + yT_{n-2} = n$ dimana x dan y adalah bilangan bulat, maka $x - y$ = ….

5. Lingkaran L_1 dan L_2 bersinggungan di titik A dan mempunyai garis singgung sekutu g yang menyinggung L_1 dan L_2 berturut-turut di B dan C. Jika BD merupakan diameter lingkaran L_1 dengan panjang 2, dan BC = 3, luas segitiga BDC adalah ….

6. Untuk sebarang bilangan real x, didefinisikan $\lfloor x \rfloor$ sebagai bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x. Jumlah 2014 digit terakhir dari $\left\lfloor \frac{60^{2014}}{7} \right\rfloor$ adalah ….

7. Untuk persiapan OSP, seorang guru mengadakan pembinaan kepada para siswa selama satu minggu. Setiap hari, pada minggu pembinaan tersebut, setiap siswa mengirimkan 5 email kepada siswa lain atau guru. Pada acara penutupan, setengah dari siswa mendapat 6 email sepertiga siswa mendapat 4 email dan sisanya masing-masing satu email. Sang guru mendapat 2014 email. Jika guru tersebut diperbolehkan mengambil cuti pada pekan pembinaan, maka banyaknya cuti yang digunakan adalah …. hari.
(Catatan: Saat guru mengambil cuti, siswa tetap belajar dikelas secara mandiri dan hanya mengirim email kepada sesama siswa)

8. Jumlah dari semua bilangan bulat x sehingga ${}^2\log(x^2 - 4x - 1)$ merupakan bilangan bulat adalah ….

9. Jika akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ berada dalam interval [0, 1], maka nilai maksimum dari

$$\frac{(2a - b)(a - b)}{a(a - b + c)}$$

adalah ….

10. Semua $n \leq 1000$ sedemikian sehingga bilangan

$$9+99+999+\cdots+\underbrace{99\ldots9}_{n\text{ angka}}$$

Pada digit-digitnya terdapat tepat n buah angka 1 adalah ....

11. Diberikan persegi ABCD dengan panjang sisi satu satuan. Misalkan lingkaran L dengan AD sebagai diameter, dan pilih titik E pada sisi AB sehingga garis CE menjadi garis singgung pada L. Luas segitiga BCE adalah ...

12. Suatu sekolah mempunyai empat kelompok belajar kelas 11. Masing-masing kelompok belajar mengirimkan dua siswa untuk suatu pertemuan. Mereka akan duduk melingkar dengan tidak ada dua siswa dari satu kelompok belajar yang duduk berdekatan. Banyaknya cara adalah .... (Dua cara mereka duduk melingkar dianggap sama jika salah satu cara dapat diperoleh dari cara yang lain dengan suatu rotasi).

13. Dono memiliki enam kartu. Setiap kartunya ditulis satu bilangan bulat positif. Untuk setiap putaran, Dono mengambil 3 kartu secara acak dan menjumlahkan ketiga bilangan yang ada pada kartu-kartu tersebut. Setelah melakukan 20 kemungkinan dalam memilih 3 dari 6 kartu, Dono mendapatkan angka 16 sebanyak 10 kali dan angka 18 sebanyak 10 kali. Bilangan terkecil yang terdapat pada kartu adalah ....

14. Untuk bilangan real t dan bilangan real positif a dan b berlaku

$$2a^2-3abt+b^2=2a^2+abt-b^2=0.$$

Nilai t adalah ....

15. Misalkan S(n) menyatakan hasil penjumlahan digit-digit dari n. Sebagai contoh

$$S(567)=5+6+7=18.$$

Banyaknya bilangan asli n yang kurang dari 1000, sehingga $\frac{S(n)}{S(n+1)}$ merupakan bilangan bulat adalah ....

16. Diberikan segitiga ABC, dengan sisi-sisi: $AB = c$, $BC = a$, $CA = b = \frac{1}{2}(a+c)$. Ukuran terbesar dari $\angle ABC$ adalah ....

17. Di dalam segitiga ABC, digambar titik X, Y, Z dengan aturan

$$\angle XBC=\angle ZBA=\frac{\angle ABC}{3},$$

$$\angle XCB=\angle YCA=\frac{\angle BCA}{3},$$

$$\angle ZAB=\angle YAC=\frac{\angle BAC}{3}.$$

Besar sudut $\angle XYZ$ adalah ....

18. Misalkan $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\Pi}{2}$ dan $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$. Banyaknya tripel bilangan bulat positif (a, b, c) sehingga $\tan \alpha = \frac{1}{a}$, $\tan \beta = \frac{1}{b}$, dan $\tan \gamma = \frac{1}{c}$ adalah ….

19. Semua tripel bilangan ganjil berurutan (a, b, c) dengan a < b < c sedemikian sehingga $a^2 + b^2 + c^2$ merupakan bilangan dengan 4 digit (angka) yang semua digitnya sama adalah ….

20. Diketahui suatu pertikel pada koordinat Cartesius, semula terletak pada titik asal (0,0). Partikel tersebut bergerak, setiap langkah adalah satu unit searah sumbu X positif, searah sumbu X negatif, searah sumbu Y positif atau seaarah sumbu Y negatif. Banyaknya cara partikel tersebut bergerak agar setelah bergerak 9 langkah partikel tersebut sampai pada titik (2, 3) adalah ….

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2014

TINGKAT PROVINSI

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2014

1. $y = f(x)$

   $\frac{x}{|x|} + \frac{|y|}{y} = 2y$

   Jelas bahwa $x, y \neq 0$.

   Jika $\alpha > 0$ maka $\frac{\alpha}{|\alpha|} = \frac{|\alpha|}{\alpha} = 1$ sedangkan jika $\alpha < 0$ maka $\frac{\alpha}{|\alpha|} = \frac{|\alpha|}{\alpha} = -1$

   Maka $2y = 2$ jika $y = 1$ dan $x > 0$ dan $2y = -2$ jika $y = -1$ dan $x < 0$.

   Jadi, nilai y yang memenuhi adalah $y = 1$ atau $y = -1$.

   $\therefore$ Jadi, daerah hasil dari fungsi $y = f(x)$ adalah $\{\mathbf{-1}, \mathbf{1}\}$.

2. Misalkan $FPB(9^n + 9, 3^n - 3) = d$

   $9^n + 9 = dp$ dan $3^n - 3 = dq$

   KPK$(9^n + 9, 3^n - 3) = dpq = \frac{dp \cdot dq}{d} = \frac{(9n + 9)(3n - 3)}{d}$

   $d \mid (3^n - 3)$ dan $d \mid (9^n + 9)$

   Maka $d(9^n + 9) - (3^n + 3)(3^n - 3) = 18$

   Tetapi untuk $n > 1$ didapat $3^n - 3$ tidak habis dibagi 9.

   Maka untuk $n > 1$, nilai d yang mungkin memenuhi adalah 1, 2, 3 atau 6.

   $9^n + 9$ dan $3^n - 3$ keduanya habis dibagi 2 dan 3. Maka keduanya habis dibagi 6.

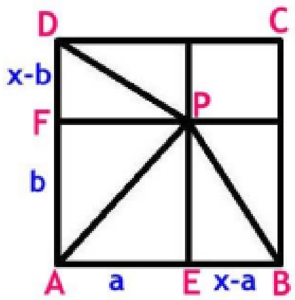
   Jadi, $d = 6$.

   Jika $n = 1$ maka $KPK(9^n + 9, 3^n - 3) = KPK(18, 0) = 0 = \frac{(9^n + 9)(3^n - 3)}{6}$

   $KPK(9^n + 9, 3^n - 3) = \frac{(9^n + 9)(3^n - 3)}{6}$

   $\therefore$ Jadi, $KPK(9^n + 9, 3^n - 3) = \frac{(9^n + 9)(3^n - 3)}{6}$

3. Misalkan panjang sisi persegi = x. Misalkan juga proyeksi P ke AB adalah E dan ke AD adalah F dengan AE = a dan AF = b sehingga EB = $x - a$ dan FD = $x - b$.



   $a^2 + b^2 = 9$ ································ (1)

   $a^2 + (x - b)^2 = 25$ ························ (2)

   $b^2 + (x - a)^2 = 49$ ························ (3)

   Pers (2) − (1) didapat

$b = \frac{x^2-16}{2x}$ .... (4)

Pers (3) – (1) didapat

$a = \frac{x^2-24}{2x}$ .... (5)

Misalkan $[ABCD] = x^2 = y$

$\frac{(y-16)^2}{4y} + \frac{(y-40)^2}{4y} = 9$

$y^2 - 74y + 928 = 0$ sehingga $(y - 16)(y - 58) = 0$

Jika $x = 4$ didapat bahwa titik P akan terletak pada perpanjangan AB. Jadi, $x^2 = 58$.

∴ Jadi, luas persegi ABCD adalah 58.

4. $T_n = (1) + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) + \ldots + \left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = 1 + 3 + 6 + \ldots + \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$.

Barisan T_n adalah 1, 4, 10, 20, ⋯. Akan ditentukan rumus suku ke-n dari T_n.

n	T_n	$D_1(n) = T_n - T_{n-1}$	$D_2(n) = D_1(n) - D_1(n-1)$	$D_3(n) = D_2(n) - D_2(n-1)$
1	1			
2	4	3		
3	10	6	3	
4	20	10	4	1
5	35	15	5	1

Karena $D_3(n)$ konstan maka dapat diambil kesimpulan bahwa rumus T_n merupakan polinomial pangkat 3. Misalkan $T_n = an^3 + bn^2 + cn + d$.

n	T_n	$D_1(n) = T_n - T_{n-1}$	$D_2(n) = D_1(n) - D_1(n-1)$	$D_3(n) = D_2(n) - D_2(n-1)$
1	a+b+c+d			
2	8a+4b+2c+d	7a+3b+c		
3	27a+9b+3c+d	19a+5b+c	12a+2b	
4	64a+16b+4c+d	37a+7b+c	18a+2b	6a
5	125a+25b+5c+d	61a+9b+c	24a+2b	6a

Dari kedua tabel didapat bahwa :

6a = 1 ································ (1)

12a + 2b = 3 ························ (2)

7a + 3b + c = 3 ···················· (3)

a + b + c + d = 1 ····················· (4)

Dari pers (1) didapat $a = \frac{1}{6}$

Dari pers (2) didapat $b = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$

Dari pers (3) didapat $c = 3 - 7\left(\frac{1}{6}\right) - 3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{18-7-9}{6} = \frac{1}{3}$

Dari pers (4) didapat $d = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{6-1-3-2}{6} = 0$

Maka rumus jumlah n suku pertama, $T_n = \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

$T_n + xT_{n-1} + yT_{n-1} = n$.

$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{x(n-1)n(n+1)}{6} + \frac{y(n-2)(n-1)n}{6} = n$

$(n + 1)(n + 2) + x(n - 1)(n + 1) + y(n - 2)(n - 1) = 6$

Berdasarkan koefisien n^2 didapat 1 + x + y = 0

Berdasarkan koefisien n didapat 3 + 0 − 3y = 0

Berdasarkan konstanta didapat 2 − x + 2y = 6

Didapat $x = -2$ dan $y = 1$.

∴ Jadi, nilai $x - y$ adalah −3.

5. Karena garis singgung persekutuan menyinggung lingkaran ω_1 di B sedangkan BD adalah diameter maka BD ⊥ BC.

   $[BCD] = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = 3$

   ∴ Jadi, luas segitiga BDC adalah 3.

6. Misalkan $X = \left\lfloor \frac{60^{2014}}{7} \right\rfloor$.

   $6^{2014} \equiv (-1)^{2014} \pmod 7 \equiv 1 \pmod 7$

   $6^{2014} = 7k + 1$ dengan $k \in N$.

   $X = \left\lfloor \frac{60^{2014}}{7} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{6^{2014} \cdot 10^{2014}}{7} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{(7k+1) \cdot 10^{2014}}{7} \right\rfloor = k \cdot 10^{2014} + \left\lfloor \frac{10^{2014}}{7} \right\rfloor$

   Karena $\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$ maka 2014 angka di belakang koma dari $\frac{1}{7}$ berulang dengan kala ulang 6.

   $2014 = 335 \cdot 6 + 4$

   $X = \left\lfloor \frac{60^{2014}}{7} \right\rfloor \equiv \left\lfloor \frac{10^{2014}}{7} \right\rfloor \pmod{10^{2014}}$

   $\left\lfloor \frac{10^{2014}}{7} \right\rfloor$ terdiri dari tepat 2014 angka.

   Jumlah 2014 digit terakhir $\left\lfloor \frac{60^{2014}}{7} \right\rfloor = 335 \cdot (1 + 4 + 2 + 8 + 5 + 7) + (1 + 4 + 2 + 8) = 9060$.

   ∴ Jadi, jumlah 2014 digit terakhir dari $\left\lfloor \frac{60^{2014}}{7} \right\rfloor$ adalah 9060.

7. Misalkan banyaknya siswa = n dan banyaknya email yang dikirimkan guru = x.

   Banyaknya email yang diterima sama dengan banyaknya email yang dikirim.

   $\frac{n}{2} \cdot 6 + \frac{n}{3} \cdot 4 + \frac{n}{6} \cdot 1 + 2014 = 5 \cdot 7 \cdot n + x \geq 35n$

   $27n + 12084 \geq 210n$ sehingga $n \leq 66$.

   Karena $1980 = 66 \cdot 5 \cdot 6 < 2014 < 66 \cdot 5 \cdot 7 = 2310$ maka dibutuhkan waktu minimal 7 hari untuk menerima 2014 email.

   ∴ Jadi, banyaknya cuti yang dilakukan oleh guru tersebut sama dengan 0.

8. ${}^2\log (x^2 - 4x - 1) = m$ dengan $m \in Z$.

   $(x - 2)^2 - 5 = 2^m$

   $(x - 2)^2 = 5 + 2^m$

   Jika m < 0 maka ruas kanan merupakan pecahan. Tidak ada x bulat yang memenuhi.

   Jika m = 0 maka $(x - 2)^2 = 6$. Tidak ada x bulat yang memenuhi.

   Jadi, m > 0.

Alternatif:

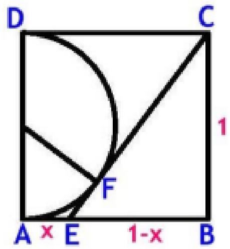
- Jika m ganjil
  Angka satuan 2^m berulang dengan periode 4. Jika m ganjil maka angka satuan 2^m adalah 2 atau 8 sehingga angka satuan $5 + 2^m$ adalah 7 atau 3 untuk m ganjil. Bilangan kuadrat tidak mungkin memiliki angka satuan 3 atau 7 sehingga tidak mungkin ada x bulat yang memenuhi.
- Jika m genap
  Misalkan m = 2n maka
  $(x - 2)^2 - (2^n)^2 = 5$
  $(x - 2 + 2^n)(x - 2 - 2^n) = 5$
  Karena $x - 2 + 2^n > x - 2 - 2^n$ maka ada 2 kasus
  - Kasus 1, $x - 2 + 2^n = 5$ dan $x - 2 - 2^n = 1$
    Maka didapat $x - 2 = 3$ dan $2^n = 2$ sehingga $x = 5$ dan $m = 2n = 2$
  - Kasus 2, $x - 2 + 2^n = -1$ dan $x - 2 - 2^n = -5$
    Maka didapat $x - 2 = -3$ dan $2^n = 2$ sehingga $x = -1$ dan $m = 2n = 2$

Maka jumlah semua bilangan x yang memenuhi = 5 − 1 = 4.

∴ Jadi, jumlah semua bilangan x yang memenuhi = 4.

9. Misalkan akar-akar persamaan $ax^2 + bx + c = 0$ adalah p dan q dengan $p \geq q$.
   $p + q = -\frac{b}{a}$ dan $pq = \frac{c}{a}$
   Karena $0 \leq p, q \leq 1$ maka $(1 - p)(q - 1) \leq 0$
   $p + q \leq pq + 1$ dengan tanda kesamaan terjadi ketika $p = 1$.
   Karena $0 \leq p, q \leq 1$ maka $p^2 + q^2 \leq p + q$ dengan kesamaan terjadi ketika $p, q = 0$ atau 1.
   $$\frac{(2a-b)(a-b)}{a(a-b+c)} = \frac{\left(2-\frac{b}{a}\right)\left(1-\frac{b}{a}\right)}{\left(1-\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)} = \frac{(2+p+q)(1+p+q)}{1+p+q+pq} = \frac{p^2+q^2+2pq+3p+3q+2}{1+p+q+pq}$$
   $$\frac{(2a-b)(a-b)}{a(a-b+c)} = 2 + \frac{p^2+q^2+p+q}{1+p+q+pq} \leq 2 + \frac{(p+q)+(pq+1)}{1+p+q+pq} = 3$$
   Dengan tanda kesamaan terjadi ketika $p = 1$ dan $q = 0$ atau 1.
   ∴ Jadi, nilai maksimum dari $\frac{(2a-b)(a-b)}{a(a-b+c)}$ adalah 3.
10. $n \leq 1000$.
    $X = 9 + 99 + 999 + \cdots + \underbrace{999\ldots9}_{n \text{ angka}} = (10 + 100 + 1000 + \cdots + 10^n) - n = \underbrace{111\ldots1}_{n-3 \text{ angka}} \cdot 10^4 + 1110 - n$
    Maka cukup dicari nilai n sehingga $1110 - n$ terdiri dari 3 buah angka 1. Ada 3 kasus:
    - Kasus 1, jika $1110 - n = 1101$
      Maka $n = 9$
    - Kasus 2, jika $1110 - n = 1011$
      Maka $n = 99$
    - Kasus 3, jika $1110 - n = 111$
      Maka $n = 999$

    ∴ Jadi, semua $n \leq 1000$ yang memenuhi adalah 9, 99 dan 999.
11. Misalkan garis CE menyinggung lingkaran berdiameter AD di titik F dengan AE = x.



Karena CE menyinggung lingkaran di F maka CF = CD = 1 dan EF = AE = x.
Dengan menggunakan dalil pitagoras pada ΔBCE didapat
$(1 + x)^2 = (1)^2 + (1 - x)^2$ $2x = 1 - 2x$ sehingga $x = \frac{1}{4}$.
$[BCE] = \frac{1}{2} \cdot EB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot (1) = \frac{3}{8}$
∴ Jadi, luas segitiga BCE adalah $\frac{3}{8}$

12. Beri nomor kursi dari 1 sampai 8. Anggap kursi yang ditempati siswa 1 dari kelompok 1 adalah kursi beromor 1 sebagai suatu acuan.
Ada 5 kemungkinan posisi duduk siswa 2 dari kelompok 1. Karena simetris, banyaknya susunan ketika siswa 2 tersebut duduk di kursi 3 sama dengan banyaknya susunan ketika siswa 2 tersebut duduk di kursi 7. Banyaknya susunan ketika siswa 2 tersebut duduk di kursi 4 sama dengan banyaknya susunan ketika siswa 2 tersebut duduk di kursi 6. Maka ada 3 kasus :
   - Kasus 1, jika siswa 2 kelompok 1 duduk di kursi nomor 3
   Banyaknya kemungkinan kelompok belajar duduk di kursi nomor 2 ada 3. Misalkan kelompok belajar yang duduk di kursi 2 adalah kelompok x.
   Posisi duduk siswa 2 dari kelompok x ada 5. Karena simetris, banyaknya susunan ketika siswa 2 tersebut duduk di kursi 4 sama dengan banyaknya susunan ketika siswa 2 tersebut duduk di kursi 8. Banyaknya susunan ketika siswa 2 tersebut duduk di kursi 5 sama dengan banyaknya susunan ketika siswa 2 tersebut duduk di kursi 7. Maka ada 3 subkasus :
      - Sub kasus 1, jika siswa 2 kelompok x duduk di kursi nomor 4. Maka 2 pasang siswa dari 2 kelompok lain akan duduk pada 4 kursi sejajar. Ada 2 cara memilih kelompok yang akan duduk di kursi 5. Pasangannya harus duduk di kursi 7. Sisa kursi akan diisi pasangan kelompok terakhir. Setiap pasang siswa dari kelompok belajar selain kelompok 1 dapat saling tukar posisi sehingga hitungan semula harus dikali 2^3. Banyaknya susunan = $2 \cdot 2^3 = 16$.
      - Sub kasus 2, jika siswa 2 kelompok x duduk di kursi nomor 5. 2 pasang siswa akan duduk pada 4 kursi yang terbagi dua : 1 kursi dan 3 kursi sejajar. Banyaknya cara memilih kelompok yang duduk di kursi 4 ada 2. Kursi lain harus menyesuaikan. Banyaknya susunan = $2 \cdot 2^3 = 16$.
      - Sub kasus 3, jika siswa 2 kelompok x duduk di kursi nomor 6. 4 kursi tersisa terbagi jadi 2 bagian, masing-masing 2 kursi. Masingmasing 2 cara memilih kelompok yang akan duduk pada kursi 4 dan 7. Banyaknya susunan = $2 \cdot 2 \cdot 2^3 = 32$.
      Banyaknya susunan = $3 \cdot (2 \cdot 16 + 2 \cdot 16 + 32) = 288$.
   - Kasus 2, jika siswa 2 kelompok 1 duduk di kursi nomor 4
   Banyaknya cara memilih kelompok yang duduk di kursi 2 dan 3 = $3 \cdot 2 = 6$. Sepasang siswa dari sekolah lain akan duduk di kursi nomor 5 sampai 8. Banyak cara ada 3, yaitu duduk di kursi nomor

(5,7), (5,8) atau (6,8). Banyaknya cara pengisian dua kursi tersisa adalah 2 · 1 = 2. Banyaknya susunan = 6 · 3 · 2 · 2^3 = 288.

- Kasus 3, jika siswa 2 kelompok 1 duduk di kursi nomor 5
  Sepasang siswa kelompok 1 membagi 6 kursi tersisa menjadi dua bagian sama. Ada 2 kasus :
  - Sub kasus 1, ada sepasang siswa duduk di kursi 2 dan 4 Banyaknya cara memilih kelompok = 3. Banyaknya cara memilih kelompok duduk di kursi nomor 3 ada 2. Tempat duduk lain menyesuaikan. Banyaknya cara menyusun = 3 · 2 · 2^3 = 48.
  - Sub kasus 2, tidak ada sepasang siswa duduk di kursi 2 sampai 4 Banyaknya cara memilih kelompok di kursi 2 sampai 4 = 3 · 2 = 6. Banyaknya cara memilih kelompok di kursi 6 sampai 8 = 3 · 2 = 6. Banyaknya cara menyusun = 6 · 6 · 2^3 = 288.

  Banyaknya susunan = 48 + 288 = 336.

Maka, banyaknya seluruh susunan = 2 · 288 + 2 · 288 + 336 = 1488
∴ Jadi, banyaknya cara adalah 1488.

13. Andaikan terdapat 3 kartu dengan angka yang berbeda. Misalkan saja ketiga kartu tersebut adalah a, b dan c. Misalkan juga ketiga kartu yang lain adalah x, y dan z.
Karena jumlah setiap 3 kartu hanya menghasilkan 2 kemungkinan yaitu 16 atau 18 maka 2 di antara $x + y + a$, $x + y + b$ dan $x + y + c$ harus ada yang sama. Tetapi karena a, b dan c berbeda maka ketiga bilangan tersebut harus berbeda. Kontradiksi. Jadi, hanya ada 2 jenis angka dari 6 kartu tersebut.
Karena hanya ada 2 jenis angka, maka akan ada 3 kartu dengan jenis angka yang sama. Karena 3 membagi 18 dan 3 tidak membagi 16, maka salah satu jenis kartu tersebut adalah 6. Karena 16 = 6 + 6 + 4 maka jenis kartu satu lagi adalah kartu dengan angka 4.
Lebih lanjut, misalkan ada 2 kartu dengan angka 4 maka 4 + 4 + 6 = 14 haruslah salah satu penjumlahan yang muncul. Kontradiksi. Maka kartu dengan angka 4 hanya ada 1. Maka keenam kartu tersebut adalah kartu dengan angka 6, 6, 6, 6, 6 dan 4.
∴ Jadi, bilangan terkecil yang terdapat pada kartu adalah 4.

14. a dan b adalah bilangan real positif dengan t adalah bilangan real.
$2a^2 - 3abt + b^2 = 2a^2 + abt - b^2 = 0$
Dari ruas kiri dan tengah didapat
$4abt = 2b^2$
Karena $b \neq 0$ maka $b = 2at$
Dari ruas tengah dan kanan didapat
$2a^2 + at(2at) - (2at)^2 = 0$ Karena $a \neq 0$ maka $t^2 = 1$ sehingga $t = \pm 1$
Tetapi jika $t = -1$ maka $b = -2a$ yang tidak mungkin memenuhi a dan b keduanya real positif.
∴ Jadi, nilai t adalah 1.

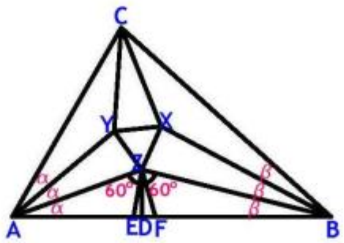
15. $n < 1000$.
Jika angka satuan n bukan 9 maka $S(n) < S(n + 1)$. Tidak mungkin $\frac{s(n)}{s(n+1)}$ bulat. Jadi, angka satuan n harus 9.
- Sub kasus 1, jika angka puluhan n adalah 9.
  Jelas n = 999 memenuhi.

Agar $\frac{k+9+9}{k+1} = 1 + \frac{17}{k+1} \in Z$ maka k + 1 membagi 17. Nilai k < 10 yang memenuhi hanya k = 0.
Jadi, bilangan yang memenuhi adalah 99.

- Sub kasus 2, jika angka puluhan n bukan 9.
  Misalkan angka ratusan adalah k dan angka puluhan adalah m.
  $$\frac{s(n)}{s(n+1)} = \frac{k+m+9}{k+m+1} = 1 + \frac{8}{k+m+1}$$
  Maka k + m + 1 membagi 8. Pasangan (k,m) yang memenuhi adalah (0,0), (0,1), (1,0), (0,3), (1,2), (2,1), (3,0), (0,7), (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1) dan (7,0).
  Bilangan yang memenuhi adalah 9, 19, 109, 39, 129, 219, 309, 79, 169, 259, 349, 439, 529, 619 dan 709 yang banyaknya ada 15.

∴ Jadi, banyaknya bilangan asli n ≤ 1000 yang memenuhi $\frac{s(n)}{s(n+1)} \in Z$ adalah 17.

16. $b^2 = \frac{1}{4}(a+c)^2$
    $\cos \angle ABC = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{4a^2+4c^2-(a+c)^2}{8ac} = \frac{3a^2+3c^2-2ac}{8ac}$
    Dengan ketaksamaan AM-GM didapat
    $\cos \angle ABC = \frac{3a^2+3c^2-2ac}{8ac} \geq \frac{6ac-2ac}{8ac} = \frac{1}{2}$
    Karena $\cos \angle ABC \geq \frac{1}{2}$ maka $\angle ABC \leq 60^o$
    ∴ Jadi, ukuran terbesar ∠ABC adalah 60°.
17. Berdasarkan teorema Morley akan didapat bahwa ΔXYZ adalah segitiga sama sisi. Berikut adalah pembuktian teorema Morley.
    Misalkan ∠ZAB = ∠YAZ = ∠CAY = α dan ∠ABZ = ∠ZBX = ∠XBC = β maka
    ∠ACY = ∠YCX = ∠XCB = 60° − α − β
    ∠AYC = 180° − (α) − (60° − α − β) = β + 120° dan ∠BXC = 180° − (β) − (60° − α − β) = α + 120°
    Buat titik D, E dan F pada AB sehingga ∠ADZ = 90°, ∠AZE = ∠BZF = 60°.
    Maka ∠ZEF = 60° + α sedangkan ∠ZFE = 60° + β sehingga ∠EZF = 60° − α − β



sin 3θ = sin (2θ + θ) = sin θ cos² θ + 2 sin θ cos2θ = sin θ (cos 2θ + 1 + cos 2θ)
sin 3θ = 2 sin θ (cos 2θ + cos 60°) = 4 sin θ (cos (θ + 30°) cos (θ − 30°)
sin 3θ = 4 sin θ sin (90° + θ + 30°) sin (90° + θ − 30°)
sin 3θ = 4 sin θ sin (θ + 120°) sin (θ + 60°)
Pada ΔBCX berlaku $\frac{BC}{\sin \angle BXC} = \frac{CX}{\sin \angle XBC}$ sehingga sin(α + 120^o) = $\frac{BC \cdot \sin \beta}{CX}$
Pada ΔZED didapat sin$\angle ZED$ = sin(α + 60^o) = $\frac{DZ}{EZ}$
Misalkan jarak C ke AB adalah h maka

$h = AC \sin 3\alpha = 4AC \sin \alpha \sin(\alpha + 60^o) \sin(\alpha + 120^o) = \frac{4 \cdot AC \cdot BC \cdot DZ \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta}{CX \cdot EZ}$

Dengan jalan lain.

Pada ΔACY berlaku $\frac{AC}{\sin \angle AYC} = \frac{CY}{\sin \angle YAC}$ sehingga $\sin(\beta + 120^o) = \frac{AC \cdot \sin \alpha}{CY}$

Pada ΔZED didapat $\sin\angle ZFD = \sin(\beta + 60^o) = \frac{DZ}{FZ}$

$h = BC \sin 3\beta = 4BC \sin \beta \sin(\beta + 60^o) \sin(\beta + 120^o) = \frac{4 \cdot AC \cdot BC \cdot DZ \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta}{CY \cdot FZ}$

Dari dua persamaan tersebut didapat $CX \cdot EZ = CY \cdot FZ$

$\frac{CX}{CY} = \frac{FZ}{EZ}$ serta ∠YCX = ∠EZF = 60° − α − β sehingga ΔCYX ≅ ΔEZF.

Maka ∠CYX = ∠ZEF = 60° + α

Dengan cara yang sama didapat ∠AYZ = 60° + ∠BCX = 60° + (60° − α − β) = 120° − α − β ∠XYZ = 360° − ∠CYX − ∠AYC − ∠AYZ = 360° − (60° + α) − (120° + β) − (120° − α − β) = 60°.

∴ Jadi, besar sudut XYZ adalah 60°.

18. $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$ dengan $0 < \alpha, \beta, \gamma < \frac{\pi}{2}$.

Jelas bahwa $a, b, c > 1$.

$\tan(\beta + \gamma) = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$

$\frac{\tan \beta + \tan \gamma}{1 - \tan\beta \cdot \tan \gamma} = \frac{1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha}$

$\frac{b+c}{bc-1} = \frac{a-1}{a+1}$ .... (1)

Karena simetri, tanpa mengurangi keumuman misalkan $\alpha \geq \beta \geq \gamma$.

$3\alpha \geq \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{4}$ sehingga $\alpha \geq \frac{\pi}{12}$

$\frac{1}{a} = \tan \alpha \geq \tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3} > \frac{1}{4}$

Maka $1 < a < 4$

- Kasus 1, jika $a = 3$

  $4(b + c) = 2(bc - 1)$

  $(b - 2)(c - 2) = 5$

  Pasangan bilangan bulat positif (b, c) yang memenuhi adalah (3,7).

  Maka tripel bilangan bulat positif (a, b, c) yang memenuhi adalah (3,3,7) dan permutasinya yang ada sebanyak 3.

- Kasus 2, jika $a = 2$.

  $3(b + c) = (bc - 1)$

  $(b - 3)(c - 3) = 10$

  Pasangan bilangan bulat positif (b, c) yang memenuhi adalah (4,13) dan (5,8)

Maka tripel bilangan bulat positif (a, b, c) yang memenuhi adalah (2,5,8) dan (2,4,13) beserta permutasinya yang masing-masing ada sebanyak 6.

Maka banyaknya tripel bilangan bulat positif (a, b, c) yang memenuhi = 2 · 6 + 3 = 15.

∴ Jadi, banyaknya tripel bilangan bulat positif (a, b, c) yang memenuhi adalah 15.

19. $a^2 + b^2 + c^2$ adalah bilangan ganjil dengan a < b < c

Karena a, b dan c ganjil maka $a^2 + b^2 + c^2 \equiv 3 \pmod 8$

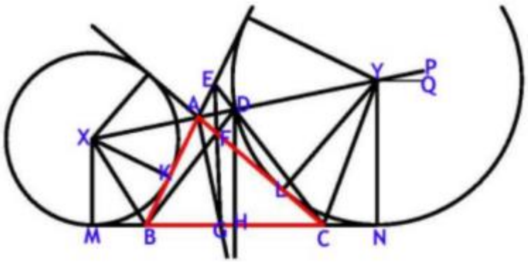
Di antara 1111, 3333, 5555, 7777 dan 9999 yang bersisa 3 jika dibagi 8 hanya 5555.
$(b-2)^2 + (b)^2 + (b+2)^2 = 5555$
$3b^2 = 5555 - 8 = 5547$ $b = \pm 43$
∴ Jadi, semua tripel bilangan ganjil berurutan (a,b,c) yang memenuhi adalah (41,43,45) dan (−45,−43,−41).

20. Misalkan angka 1 menyatakan langkah ke kanan, angka 2 menyatakan langkah ke atas, angka 3 menyatakan langkah ke kiri dan angka 4 menyatakan langkah ke bawah. Langkah terpendek dari (0,0) ke (3,2) hanya membutuhkan 5 langkah. Agar dibutuhkan 9 langkah maka partikel harus bergerak ke kiri 2 langkah atau ke bawah 2 langkah atau ke kiri dan ke bawah.
Maka ada 3 kasus :
    - Partikel bergerak ke kiri 2 langkah
      Karena melangkah ke kiri 2 langkah maka harus ada tambahan langkah ke kanan sebanyak 2 langkah. Persoalan setara dengan banyaknya susunan 111112233.
      Banyaknya susunan = $\frac{9!}{5!2!2!}$ = 756.
    - Partikel bergerak ke bawah 2 langkah
      Karena melangkah ke bawah 2 langkah maka harus ada tambahan langkah ke atas sebanyak 2 langkah. Persoalan setara dengan banyaknya susunan 111222244.
      Banyaknya susunan = $\frac{9!}{4!3!2!}$ = 1260.
    - Partikel bergerak ke kiri 1 langkah dan ke bawah 1 langkah
      Karena melangkah ke kiri 1 langkah dan ke bawah 1 langkah maka harus ada tambahan langkah ke kanan 1 langkah dan ke atas sebanyak 1 langkah. Persoalan setara dengan banyaknya susunan 111122234.
      Banyaknya susunan = $\frac{9!}{4!3!}$ = 2520.

    Banyaknya cara partikel melangkah = 756 + 1260 + 2520 = 4536.
    ∴ Jadi, cara partikel melangkah adalah 4536.

21. Karena a, b dan c positif maka $a^3 + b^3$, $b^3 + c^3$ dan $c^3 + a^3$ tidak ada yang bernilai 0.
$$X = ab\left(\frac{a^2+b^2}{a^3+b^3}\right) + bc\left(\frac{b^2+c^2}{b^3+c^3}\right) + ca\left(\frac{c^2+a^2}{c^3+a^3}\right) + \frac{a^4+b^4}{a^3+b^3} + \frac{b^4+c^4}{b^3+c^3} + \frac{c^4+a^4}{c^3+a^3}$$
$$X = \frac{a^4+a^3b+ab^3+b^4}{a^3+b^3} + \frac{b^4+b^3c+bc^3+c^4}{b^3+c^3} + \frac{c^4+c^3a+ca^3+a^4}{c^3+a^3}$$
$$X = \frac{(a+b)(a^3+b^3)}{a^3+b^3} + \frac{(b+c)(b^3+c^3)}{b^3+c^3} + \frac{(c+a)(c^3+a^3)}{c^3+a^3} = (a+b)+(b+c)+(c+a) = 2$$
∴ Jadi, nilai dari $ab\left(\frac{a^2+b^2}{a^3+b^3}\right) + bc\left(\frac{b^2+c^2}{b^3+c^3}\right) + ca\left(\frac{c^2+a^2}{c^3+a^3}\right) + \frac{a^4+b^4}{a^3+b^3} + \frac{b^4+c^4}{b^3+c^3} + \frac{c^4+a^4}{c^3+a^3}$ sama dengan 2.

22. Misalkan $\angle ABC = \beta$ dan $\angle ACB = \gamma$ sehingga $\angle BAC = 180^o - (\beta + \gamma)$.
Alternatif 1:
Maka $\angle XAK = \angle YAL = \frac{\beta+\gamma}{2}$ dan $\angle KXB = \angle BXM = \frac{\beta}{2}$
sedangkan $\angle LYC = \angle CYN = \frac{\gamma}{2}$.
$\angle PYQ = \angle AXK + \angle KXM - 90^o = (90^o - (\frac{\beta+\gamma}{2})) + (\beta) - 90^o = \frac{\beta-\gamma}{2}$



Misalkan jari-jari lingkaran berpusat di X = R_x dan jari-jari lingkaran berpusat di Y = R_y.

$$c = \frac{a\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)} = AK + KB = R_x\left(\cot\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right) + \tan\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)$$

$$a\sin\gamma\cdot\sin\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) = R_x\cdot\sin(\beta+\gamma)\cdot\left(\cos\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\right)$$

$$R_x = \frac{a\sin\gamma\cdot\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{a\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}$$

Dengan cara yang sama didapat

$$R_y = \frac{a\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}$$

$$\frac{MB}{CN} = \frac{R_x\cdot\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)}{R_y\cdot\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\cdot\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)\cdot}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)\cdot\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)} = 1$$

Karena MB = CN maka proyeksi titik tengah XY (titik D) terhadap BC (titik H) akan berada di tengah-tengah BC. Jadi, BH = HC.

Karena H adalah pertengahan BC maka ΔBDC adalah segitiga sama kaki.

Misalkan $\angle CBD$ = $\angle BCD$ = θ.

$$\tan\theta = \frac{DH}{AH} = \frac{R_x + R_y}{a} = \frac{\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)} + \frac{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)} = \tan\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)$$

$\angle CBD = \angle BCD = \frac{\beta+\gamma}{2}$ sehingga $\angle BDC = 180^o - (\beta+\gamma)$. Maka ABCD adalah segiempat talibusur

$\angle ADC = 180^o - \beta$ dan $\angle DAC = \angle CBD = \frac{\beta+\gamma}{2}$

$$\frac{AC}{CD} = \frac{\sin\angle ADC}{\sin\angle CBD} = \frac{\sin\beta}{\sin\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}$$

$\angle ADE = \angle BCD - \angle PYQ = \left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right) - \left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right) = \beta$ dan $\angle DAE = \angle BCD = \frac{\beta+\gamma}{2}$

$$\frac{EA}{DE} = \frac{\sin\angle ADE}{\sin\angle DAE} = \frac{\sin\beta}{\sin\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}$$

Maka $\frac{AC}{CD} = \frac{EA}{DE}$

Alternatif 2:

Karena ∠EAY = ∠YAC maka AD adalah garis bagi ΔCAE.

$$\frac{AC}{CD} = \frac{EA}{DE}$$

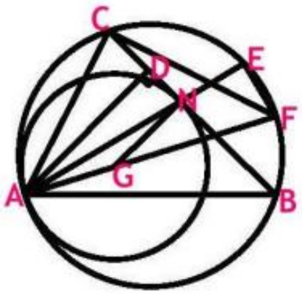
Alternatif 1.2.a:

Karena garis BD, AC dan EG melalui 1 titik maka sesuai dalil Ceva didapat

$$\frac{BG}{GC}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{EA}{AB} = 1$$

$\frac{BG}{GC} = \frac{AB}{EA} \cdot \frac{DE}{CD} = \frac{AB}{AC}$
$\frac{BG}{AB} = \frac{GC}{AC}$
Alternatif 1.2.b:
Pada ΔEAF berlaku $\frac{EA}{\sin\angle AFE} = \frac{EF}{\sin\angle EAF}$ yang setara dengan $\frac{EA}{\sin\angle CFG} = \frac{EF}{\sin(\beta+\alpha)}$
Pada ΔDEF berlaku $\frac{DE}{\sin\angle DFE} = \frac{EF}{\sin\angle EDF}$ yang setara dengan $\frac{DE}{\sin\angle BFG} = \frac{EF}{\sin(\beta+\alpha)}$.
Maka didapat $\frac{\sin\angle BFG}{\sin\angle CFG} = \frac{DE}{EA}$
Pada ΔBFG berlaku $\frac{BG}{\sin\angle BFG} = \frac{BF}{\sin\angle BFG} = \frac{BF}{\sin\angle CGF}$
Pada ΔCFG berlaku $\frac{GC}{\sin\angle CGF} = \frac{CF}{\sin\angle CGF}$.
Dengan memperhatikan ΔABF ≅ ΔCDF maka
$\frac{BG}{GC} = \frac{BF\cdot\sin\angle BFG}{CF\cdot\sin\angle CFG} = \frac{AB}{CD} \cdot \frac{DE}{EA} = \frac{AB}{AC}$
$\frac{BG}{AB} = \frac{GC}{AC}$
$\frac{\sin\angle BAG}{\sin\angle AGB} = \frac{\sin\angle GAC}{\sin\angle AGC}$
$\sin\angle BAG = \sin\angle GAC$
Karena ∠BAG + ∠GAC ≠ 180° maka ∠BAG = ∠GAC.
∴ Jadi, terbukti bahwa AG adalah garis bagi ∠BAC.

23. Karena setiap 50 himpunan bagian mempunyai lebih dari 100 anggota maka sesuai Pigeon Hole Principle akan ada 1 himpunan bagian dengan sedikitnya 3 anggota. Misalkan himpunan bagian ini adalah A_x. Bagi 101 himpunan bagian ke dalam 3 kelompok : Kelompok I terdiri dari 50 himpunan bagian, kelompok II terdiri dari 50 himpunan bagian dan kelompok III adalah A^x.
    Karena setiap 50 himpunan bagian mempunyai lebih dari 100 anggota sedangkan X hanya memiliki 102 anggota, maka paling banyak hanya 1 anggota X yang tidak menjadi anggota gabungan himpunan bagian di kelompok I dan juga paling banyak hanya 1 anggota X yang tidak menjadi anggota gabungan himpunan bagian di kelompok II.
    Karena A_x mempunyai sedikitnya 3 anggota maka akan ada 1 anggota A_x yang menjadi anggota salah satu himpunan bagian di kelompok I (misalkan A_y) dan juga menjadi anggota salah satu himpunan bagian di kelompok II (misalkan A_z).
    Maka irisan setiap dua himpunan bagian di antara A_x, A_y dan A_z tidak akan kosong.
    ∴ Jadi, terbukti bahwa terdapat $1 \le i < j < k \le 101$ sedemikian sehingga $A_i \cap A_j$, $A_i \cap A_k$, dan $A_j \cap A_k$ semuanya tidak kosong.
24. Misalkan pusat lingkaran ω ada di G. Karena lingkaran ω menyinggung lingkaran Γ di A dengan AF adalah diameter lingkaran Γ maka G akan terletak pada garis AF.



Karena AF diameter maka ∠AEF = 90°.

Misalkan ∠GAN = x. Karena N terletak pada lingkaran ω maka ∠GNA = x.

Karena lingkaran ω menyinggung BC maka ∠GND = 90° sehingga ∠AND = 90° − x dan ∠NAD = x. Karena ∠NAD = ∠FAE = x dan ∠ADN = ∠AEF = 90° maka ΔADN ≅ ΔAEF.

$\frac{AN}{AD} = \frac{AF}{AE}$

AN x AE = AD x AF

Karena AF diameter lingkaran Γ maka ∠ACF = 90° sedangkan ∠ADB = 90°. Karena menghadap talibusur yang sama maka ∠ABD = ∠AFC.

Jadi, ΔABD ≅ ΔAFC.

$\frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AF}$

AD x AF = AB x AC

∴ Jadi, terbukti bahwa $\boldsymbol{AN}$ x $\boldsymbol{AE}$ = $\boldsymbol{AD}$ x $\boldsymbol{AF}$ = $\boldsymbol{AB}$ x $\boldsymbol{AC}$.

25. $a_1 = 2$ dan $a_2 = 8$

$a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n + 5(-1)^n$

$a_{n+2} = a_{n+1} - a_n + 2a_{n+1} + 5(-1)^n$

Karena $a_2 = 8$ dan $a_2 > a_1$ maka $a_k \in N$ untuk setiap $k \in N$.

$a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n + 5(-1)^n$

Persamaan karakteristiknya adalah $y^2 - 3y + 1 = 0$ yang dipenuhi oleh $y^{12} = \frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

$A \cdot (-1)^{n+2} = 3A \cdot (-1)^{n+1} - A \cdot (-1)^n + (-1)^n$

$A = -3A - A + 1$

$A = \frac{1}{5}$

$a_n = C\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + D\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n + (-1)^n$

Dengan mengambil $a_1 = 2$ dan $a_2 = 8$ didapat C = 1 dan D = 1 sehingga rumus suku ke-n adalah

$a_n = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n + (-1)^n$

Misalkan $p^n = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ dan $q^n = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

$a_m + a_{4m} = p^m + q^m + p^{4m}\mathrm{p}^{\mathrm{m}} + \mathrm{q}^{\mathrm{m}} + q^{4m}$

Karena 2m genap dan 3m ganjil maka

$$\frac{\frac{a_{2m}+a_{3m}}{a_m+a_{4m}}}{a_{2m}+a_{3m}}=\frac{\frac{p^{2m}+q^{2m}+p^{3m}+q^{3m}}{p^m+q^m+p^{4m}+q^{4m}}}{p^{2m}+q^{2m}+p^{3m}+q^{3m}}$$

$$\frac{a_m+a_{4m}}{a_{2m}+a_{3m}}=p^m+q^m+\frac{p^m+q^m-p^{3m}-(pq^2)^m-(pq^3)^m-(p^2q)^m-q^{3m}-(p^3q)^m}{p^{2m}+q^{2m}+p^{3m}+q^{3m}}$$

Karena pq = 1 maka

$$\frac{a_m+a_{4m}}{a_{2m}+a_{3m}}=p^m+q^m+\frac{p^m+q^m-p^{3m}-q^m-q^{2m}-p^m-q^{3m}-p^{2m}}{p^{2m}+q^{2m}+p^{3m}+q^{3m}}=p^m+q^m-1=a_m\epsilon N$$

∴ Jadi, terbukti bahwa untuk m bilangan ganjil maka $\frac{a_m+a_{4m}}{a_{2m}+a_{3m}}$ merupakan bilangan bulat.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2014

TINGKAT NASIONAL

HARI PERTAMA & HARI KEDUA

WAKTU : 8 JAM

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Nasional Tahun 2014

1. Bilangan-bilangan 1, 2, …, 9 akan ditempatkan ke dalam papan catur berukuran 3 × 3. Mungkinkah bilangan-bilangan ini ditempatkan sehingga setiap dua persegi yang bertetangga baik secara bertikal ataupun horizontal, jumlah dari dua bilangan yang ada di dalamnya selalu prima?

2. Misalkan m, n bilangan asli sehingga sistem persamaan

$$x + y^2 = m$$

$$x^2 + y = n$$

memiliki tepat satu solusi bulat (x, y). Tentukan semua nilai yang mungkin bagi $m - n$.

3. Diberikan trapesium $ABCD$ dengan AB sejajar CD dan $AB < CD$. Misalkan diagonal AC dan BD bertemu di E dan misalkan garis AD dan BC bertemu di titik F. Bangun jajar genjang $AEDK$ dan $BECL$. Buktikan bahwa garis EF melalui titik tengah segmen KL.

4. Tentukan semua polinom dengan koefisien bulat $P(x)$ sehingga untuk setiap bilangan asli a, b, c yang merupakan panjang sisi-sisi suatu segitiga siku-siku, berlaku $P(a)$, $P(b)$, $P(c)$ juga merupakan panjang sisi-sisi suatu segitiga siku-siku.

   Catatan: Jika c sisi miring, $P(c)$ tidak harus merupakan sisi miring.

5. Suatu barisan bilangan asli a_1, a_2, a_3, … memenuhi $a_k + a_l = a_m + a_n$ untuk setiap bilangan asli k, l, m, n dengan $kl = mn$. Jika m membagi n, buktikan bahwa $a_m \leq a_n$.

6. Diberikan segitiga ABC dengan AD sebagai garis bagi dalam $\angle BAC$. Misalkan titik M dan N berturut-turut pada AB dan AC sehingga $\angle MDA = \angle ABC$ dan $\angle NDA = \angle ACB$. Jika P merupakan titik potong dari garis AD dan garis MN, buktikan bahwa $AD^3 = AB.AC.AP$.

7. Misalkan k, m, n merupakan bilangan asli dengan $k \leq n$. Buktikan bahwa

$$\sum_{r=0}^{m} \frac{k\binom{m}{r}\binom{n}{k}}{(r+k)\binom{m+n}{r+k}} = 1$$

8. Suatu bilangan asli disebut cantik jika dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{x^2+y^2}{x+y}$ untuk setiap suatu bilangan asli x dan y yang berbeda.

   a. Tunjukkan bahwa 2014 dapat dituliskan sebagai perkalian bilangan *cantik* dan bilangan *tidak cantik*.
   b. Buktikan bahwa hasil perkalian dua bilangan *tidak cantik* tetap *tidak cantik*.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2014

TINGKAT NASIONAL

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Nasional Tahun 2014

1. Penyelesaian :
Ide serupa: perhatikan bahwa semua bilangan prima harus ganjil, sehingga semua bilangan harus berada di antara bilangan genap dan ganjil. Hal ini memaksa konfigurasi bilangan genap dan ganjil berikut:
OEO
EOE
OEO
Jika bilangan pusatnya adalah x, maka x + 2, x + 4, x + 6, x + 8 pastilah prima. Hal ini mustahil karena x + 4, x + 6, x + 8 mengandung kelipatan 3 yang lebih besar dari 3.

2. Penyelesaian :
Dengan mengurangkan sisi-sisinya, kita mendapatkan
y(y – 1) – x(x – 1) = m – n, perhatikan bahwa y(y – 1) dan x(x – 1) keduanya genap, sehingga 2|m – n.
Sekarang, untuk sembarang k, sistem
$x^2 + y = k^2 + k + 1$ dan $x + y^2 = k^2 + 3k + 1$ memiliki solusi (k, k + 1), mudah untuk membuktikan bahwa ini adalah satu-satunya solusi melalui beberapa estimasi.
Jadi, jawabannya adalah bilangan apa pun yang habis dibagi 2.

3. Penyelesaian :
Menunjukkan $F = (0,0), A = (2,2a), B = (2,2b), C = (2k,2kb), D = (2k,2ka)$
Pertama kita cari koordinat E. Garis BD mempunyai persamaan $y = \frac{kb-a}{k-1}(x-2) + 2b$ dan garis AC memiliki persamaan $y = \frac{kb-a}{k-1}(x-2) + 2a$. Pemecahan memberi $E = \left(\frac{4k}{k+1}, \frac{2k(a+b)}{k+1}\right)$. Karena AEPK adalah jajargenjang, kita bisa mendapatkan
$K = \left(\frac{2k^2+2}{k+1}, \frac{2ak^2+2ak-2bk+2a}{k+1}\right)$ dan $L = \left(\frac{2k^2+2}{k+1}. \frac{2bk^2+2bk-2ak+2b}{k+1}\right)$
Maka, $\left(\frac{2k^2+2}{k+1}, \frac{(k^2+1)(a+b)}{k+1}\right)$. Perhatikan bahwa gradien EF dan EM keduanya $\frac{a+b}{2}$. Selesai.

4. Penyelesaian :
Pertama, anggaplah P(x) tidak identik nol. Misalkan $P(x) = a_nx^n + \ldots + a_0x^0$. Dengan mengambil bilangan x, x, $\sqrt{2}$x sebagai sisi-sisi segitiga siku-siku, kita peroleh bahwa $2P(x)^2 = P(\sqrt{2}x)^2$ atau $P(x)^2 + P(\sqrt{2}x)^2 = P(x)^2 \Leftrightarrow P\sqrt{2}x) = 0$. Karena P(x) berderajat n, ia dapat memiliki paling banyak n akar, sehingga kita peroleh bahwa $2P(x)^2 = P(\sqrt{2}x)^2$ untuk tak terhingga banyaknya x. Jadi, $2P(x)^2 - P(\sqrt{2}x)^2$ pasti identik nol. Dengan demikian, $\sqrt{2}P(x) = \pm P(\sqrt{2}x)$ atau akibatnya $\sqrt{2}[x^i]P(x) = \sqrt{2}a_i = \pm [x^i]\ P(\sqrt{2}x) = \pm (\sqrt{2})^i a_i$, yang menyiratkan bahwa $a_i = 0$ untuk semua $i \neq 1$. Jadi, kita peroleh bahwa P(x) = nx untuk setiap bilangan bulat n.

5. Penyelesaian :

Bukti:

- Misalkan m membagi n, maka n = mk untuk beberapa bilangan asli k.
- Kita dapat menulis $a_n = a_{mk}$.
- Dengan menggunakan sifat barisan yang diberikan, yaitu $a_k + a_l = a_m + a_n$ untuk setiap bilangan asli k, l, m, n dengan kl = mn, kita dapat memilih k = m dan l = k.
- Maka, $a_m + a_k = a_{m \cdot k} + a_1 = a_{mk} + a_1$.
- Dengan demikian, $a_{mk} = a_m + a_k - a_1$.
- Karena $a_{mk} = a_n$, maka $a_n = a_m + a_k - a_1$.
- Untuk membuktikan bahwa $a_m \leq a_n$, kita perlu menunjukkan bahwa $a_k - a_1 \geq 0$.
- Pilih k = 1 dan l = 1, maka $a_1 + a_1 = a_m + a_n$ untuk $m \cdot n = 1 \cdot 1 = 1$, yang berarti m = n = 1.
- Dalam kasus ini, $2a_1 = 2a_1$, yang tidak memberikan informasi tambahan.
- Namun, kita dapat memilih k = 1 dan l = m, maka $a_1 + a_m = a_1 + a_m$ untuk $1 \cdot m = m \cdot 1$.
- Untuk membuktikan $a_k \geq a_1$, kita dapat menggunakan induksi.
- Untuk k = 1, $a_1 = a_1$.
- Asumsikan $a_k \geq a_1$ untuk beberapa k.
- Pilih l = 1 dan m = k, maka $a_k + a_1 = a_k + a_1$ untuk $k \cdot 1 = k \cdot 1$.
- Sekarang, pilih k = k dan l = k, maka $a_k + a_k = a_k^2 + a_1$.
- Dengan demikian, $a_k^2 = 2a_k - a_1 \geq 2a_1 - a_1 = a_1$.
- Dengan induksi, kita dapat menunjukkan bahwa $a_k \geq a_1$ untuk semua k.
- Karena $a_n = a_m + a_k - a_1$ dan $a_k \geq a_1$, maka $a_n \geq a_m$.

Jadi, jika m membagi n, maka $a_m \leq a_n$.

6. Penyelesaian :

Karena $\angle AND + \angle ADM = \angle ACB + \angle ABC = 180^\circ - \angle MAN$, maka AMDN bersifat siklik, dengan D sebagai titik tengah busur lingkaran luarnya MN. Maka $\angle AND = \angle AMN$ dan $\angle DAN = \angle DAM$ menghasilkan $\triangle ADN \sim \triangle AMP \Longrightarrow AM \cdot AN = AP \cdot AD$ (1). Namun $\angle MDA = \angle ABC \Longrightarrow AD^2 = AM \cdot AB$ dan demikian pula $AD^2 = AN \cdot AC$, maka $AD^4 = AB \cdot AC \cdot AM \cdot AN$ (2). Penggabungan (1) dan (2) menghasilkan $AD^3 = AB \cdot AC \cdot AP$.

7. Penyelesaian :

Menggunakan fakta $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ dan $(r+k)\binom{m+n}{r+k} = (m+n)\binom{m+n-1}{r+k-1}$ dapat dengan mudah diperoleh bahwa cukup dengan membuktikan:

$$\frac{n}{m+n}\sum_{r=0}^{m}\frac{\binom{m}{r}\binom{n-1}{k-1}}{\binom{m+n-1}{r+k-1}} = 1.$$

Setelah menuliskan semua faktorial dan menyederhanakannya, kita hanya perlu:

$$\sum_{r=0}^{m}\binom{r+k-1}{k-1}\binom{m+n-k-r}{n-k} = \binom{m+n}{n}.$$

Hal ini dapat diinterpretasikan secara kombinatorial. Mari kita perhatikan m + n siswa yang berbaris dari kiri ke kanan dalam garis lurus. Beri label 1, 2, ..., m + n dari kiri ke kanan. n dari mereka akan dipilih untuk membentuk sebuah komite. Kita akan membuktikan identitas di atas dengan mengerjakan kasus pada posisi siswa ke-k dari kiri di antara mereka yang terpilih untuk menjadi anggota komite. Memang, label siswa ke-k haruslah r + k untuk beberapa 0 < r < m. Identitasnya mudah dipahami dari sini.

8. Penyelesaian :
   Mari kita identifikasi terlebih dahulu bilangan-bilangan indah tersebut secara lengkap. Misalkan d = FPB(x,y), x = da, y = db, dengan FPB(a,b) = 1 dan selanjutnya (a,b) ≠ (1,1) karena kita menginginkan x ≠ y. Karena kita membutuhkan x + y|x^2 + y^2, maka persamaannya adalah a + b|d(a^2 + b^2).
   - Jika a, b memiliki paritas yang berbeda, maka FPB(a + b, a^2 + b^2) = 1, sehingga kita membutuhkan a + b|d, sehingga d = e(a + b). Jadi,
     $x = e(a+b)a, y = e(a+b)b$ dan $\frac{x^2+y^2}{x+y} = e(a^2+b^2)$
   - Jika a, b keduanya ganjil maka FPB(a + b, a^2 + b^2) = 2, maka kita perlu $\frac{a+b}{2}|d$ sehingga $d = \frac{1}{2}e(a+b)$. Jadi $x = \frac{1}{2}e(a+b)a, y = \frac{1}{2}e(a+b)b$ dan, $\frac{x^2+y^2}{x+y} = \frac{1}{2}e(a^2+b^2) = e\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right)$, berjenis sama $\frac{x^2+y^2}{x+y} = e(a'^2+b'^2)$ seperti diatas, dengan $a' = \frac{a+b}{2}, b' = \frac{|a-b|}{2}$ dan a', b' dari paritas yang berbeda.

Hal ini menunjukkan bahwa bilangan indah n adalah bilangan yang dapat direpresentasikan sebagai n = e(a^2 + b^2) untuk a, b koprima dan berparitas berbeda (dengan demikian berbeda). Konsekuensi langsungnya adalah hasil perkalian bilangan indah n = e(a^2 + b^2) dengan bilangan lain m adalah indah, karena mn = (me)(a^2 + b^2).
Jelas 1 jelek dan 2 jelek. Bilangan prima ganjil p ≡ 1 mod 4 indah, karena terdapat (uniknya) a, b (koprima dan berparitas berbeda) sehingga p = a^2 + b^2 dan kita dapat mengambil e=1. Terakhir, bilangan prima ganjil p ≡ -1 mod 4 jelek.
Kita sekarang dapat memperluas karakterisasi lebih jauh. Jika suatu bilangan n memiliki faktor prima p ≡ 1 mod 4, maka bilangan tersebut indah. Sebaliknya, bilangan indah n = e(a^2 + b^2) memiliki faktor prima a^2 + b^2. Oleh karena itu, bilangan indah adalah bilangan yang memiliki faktor prima p ≡ 1 mod 4.
Dengan demikian, titik b) dari soal terpecahkan, dan titik a) mengikuti karena 2014 = 2 · 19 · 53; dengan demikian 53, 2 · 53, 19 · 53, 2 · 19 · 53 indah, sedangkan 2 · 19, 19, 2, 1 jelek, dan kita memiliki banyak pilihan untuk representasi yang dibutuhkan.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2015

TINGKAT KABUPATEN/KOTA

BIDANG MATEMATIKA

WAKTU : 180 MENIT

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Kabupaten/Kota Tahun 2015

1. Banyaknya faktor bulat positif dari 2015 adalah …

2. Suatu dadu ditos enam kali. Probabilitas jumlah mata dadu yang muncul 9 adalah …

3. Jika $(f \circ g)(x) = \frac{7x+3}{5x-9}$ dan $g(x) = 2x - 4$, maka nilai $f(2)$ adalah …

4. Diberikan trapesium $ABCD$ dengan AB sejajar DC dan $AB = 84$ serta $DC = 25$. Jika trapesium $ABCD$ memiliki lingkaran dalam yang menyinggung keempat sisinya, keliling trapesium $ABCD$ adalah …

5. Diketahui barisan bilangan real $a_1, a_2, a_3, a_n, \ldots$ merupakan barisan geometri. Jika $a_1 + a_4 = 20$, maka nilai minimal dari
$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$$
adalah …

6. Bilangan bulat x jika dikalikan 11 terletak di antara 1500 dan 2000. Jika x dikalikan 7 terletak di antara 970 dan 1275. Jika x dikalikan 5 terletak di antara 690 dan 900. Banyaknya bilangan x sedemikian yang habis dibagi 3 sekaligus habis dibagi 5 ada sebanyak …

7. Suatu sekolah mempunyai lima kelompok belajar siswa kelas 11. Kelompok-kelompok belajar itu berturut-turut mengirimkan 2, 2, 2, 3, dan 3 siswa untuk suatu pertemuan. Mereka akan duduk melingkar sehingga setiap siswa memiliki paling sedikit satu teman dari kelompok belajar yang sama yang duduk di sampingnya. Banyaknya cara melakukan hal tersebut adalah … (Dua cara mereka duduk melingkar dianggap sama jika salah satu cara dapat diperoleh dari cara yang lain dengan suatu rotasi)

8. Diberikan segitiga ABC dengan sudut $\angle ABC = 90^\circ$. Lingkaran L_1 dengan AB sebagai diameter sedangkan lingkaran L_2 dengan BC sebagai diameternya. Kedua lingkaran L_1 dan L_2 berpotongan di B dan P. Jika $AB = 5$, $BC = 12$ dan $BP = x$ maka nilai dari $\frac{240}{x}$ adalah …

9. Diketahui bilangan real positif a dan b memenuhi persamaan
$$a^4 + a^2b^2 + b^4 = 6 \quad \text{dan} \quad a^2 + ab + b^2 = 4.$$
Nilai dari $a + b$ adalah …

10. Bilangan x adalah bilangan bulat positif terkecil yang membuat
$$31^n + x \cdot 96^n$$
merupakan kelipatan 2015 untuk setiap bilangan asli n. Nilai x adalah …

11. Semua bilangan bulat n yang memenuhi

$$p(n) = \frac{n^8 + n^7 + n^6 + 2n^5 + 2n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2017}{n^2 - n + 1}$$

bulat adalah …

12. Diketahui a, b, c akar-akar dari persamaan $x^3 - 5x^2 - 9x + 10 = 0$. Jika suku banyak $P(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx - 2015$ memenuhi $P(a) = b + c$, $P(b) = a + c$ dan $P(c) = a + b$ maka nilai dari $A + B + C$ adalah …

13. Pada segitiga ABC, garis tinggi AD, garis bagi BE dan garis berat CF berpotongan di satu titik. Jika panjang $AB = 4$ dan $BC = 5$, dan $CD = \frac{m^2}{n^2}$ dengan m dan n relatif prima, maka nilai dari $m - n$ adalah …

14. Banyaknya bilangan asli $n \leq 2015$ yang dapat dinyatakan dalam bentuk $n = a + b$ dengan a, b bilangan asli yang memenuhi $a - b$ bilangan prima dan ab bilangan kuadrat sempurna adalah …

15. Tiga titik berbeda B, C dan D terletak segaris dengan C di antara B dan D. Titik A adalah suatu titik yang tidak terletak di garis B☒D dan memenuhi $|AB| = |AC| = |CD|$. Jika diketahui

$$\frac{1}{|CD|} - \frac{1}{|BD|} = \frac{1}{|CD| + |BD|}$$

maka benar sudut $\angle BAC$ adalah …

16. Masing-masing kotak pada papan catur berukuran 3×3 dilabeli dengan satu angka yaitu 1, 2, atau 3. Banyaknya penomoran yang mungkin sehingga jumlah angka pada masing-masing baris dan masing-masing kolom habis dibagi 3 adalah …

17. Pada segilima beraturan $ABCDE$, diagonal-diagonalnya berpotongan di F, G, H, I dan J. Misalkan S_1 menyatakan luas segilima $ABCDE$ dan S_2 menyatakan luas segilima $FGHIJ$. Jika $\frac{S_1}{S_2} = \frac{m-\sqrt{n}}{k}$, dengan k, m, n bilangan bulat positif dan n tidak memiliki faktor kuadrat selain 1, maka nilai dari $k + m + n$ adalah …

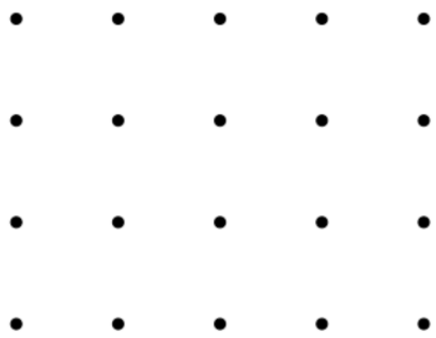
18. Suatu permutasi $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$ dari $\{1, 2, \cdots, 10\}$ dikatakan sebagai suatu permutasi yang *hampir naik* jika terdapat tepat satu indeks i sehingga $a_{i-1} > a_i$. Banyaknya permutasi *hampir naik* yang mungkin adalah …

19. Untuk setiap bilangan real a, didefinisikan $f(a)$ sebagai nilai maksimal dari

$$\left|\sin x + \frac{2}{3 + \sin x} + a\right|$$

Nilai minimal dari $f(a)$ adalah …

20. Diketahui susunan 4 × 5 titik yang jarak ke kanan sama dan jarak ke bawah sama. Ada berapa segitiga (dengan luas positif) yang titik-titik sudutnya adalah ketiga titik pada susunan tersebut?



SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2015

TINGKAT KABUPATEN/KOTA

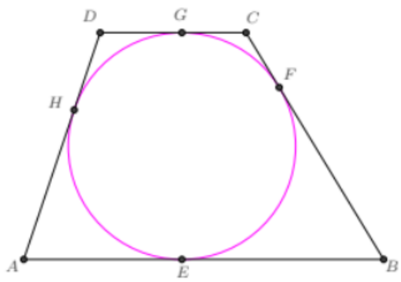
SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Kabupaten/Kota Tahun 2015

1. Karena 2015 = 5 × 13 × 31 maka banyaknya faktor positif dari 2015 adalah (1 + 1) × (1 + 1) × (1 + 1) = 8.
2. Untuk mencari banyak cara memperoleh jumlah mata dadu sama dengan 9 ekuivalen dengan mencari koefisien x^9 dari $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^6$.
   Perhatikan bahwa
   $$x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 = x(1 + x^3)(1 + x + x^2)$$
   sehingga
   $$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^6 = x^6(1 + x^3)^6(1 + x + x^2)^6$$
   x^9 dapat diperoleh dengan dua cara yaitu,
   a. mengalikan x^6, suku x^3 dari penjabaran $(1 + x^3)^6$ dan suku konstan dari penjabaran $(1 + x + x^2)^6$. Padahal koefisien x^3 dari penjabaran $(1 + x^3)^6$ adalah 6 dan konstanta dari $(1 + x + x^2)^6$ adalah 1. Jadi, diperoleh koefisien x^9 adalah 1 × 6 × 1 = 6.
   b. mengalikan x^6, suku konstan dari penjabaran $(1 + x^3)^6$ dan suku x^3 dari penjabaran $(1 + x + x^2)^6$. Mudah dilihat bahwa konstanta dari penjabaran $(1 + x^3)^6$ adalah 1 dan (dengan sedikit usaha dan bantuan binom newton) diperoleh koefisien x^3 dari penjabaran $(1 + x + x^2)^6$ adalah 50. Jadi, diperoleh koefisien x^9 adalah 1 × 1 × 50 = 50.

   Total dari dua cara di atas diperoleh koefisien x^9 adalah 56. Oleh karena itu, peluang 9 muncul jumlah mata dadu 9 adalah $\frac{56}{6^6}$.
3. $f(2) = f(g(3)) = \frac{26}{4} = 4$
4. Misalkan lingkaran dalam menyinggung sisi-sisi trapesium ABCD berturut-turut di E, F, G, H, seperti terlihat pada gambar di bawah ini.

   Dengan memanfaatkan sifat garis singgung diperoleh AE = AH, BE = BF, CG = CF dan DG = DH. Hal ini berakibat keliling trapesium ABCD sama dengan
   $$2(AB + CD) = 2(84 + 25) = 218$$
5. Misalkan $a_1 = a$ dan rasio barisan geometri tersebut adalah r, sehingga diperoleh $a + ar^3 = 20$. Jika $r = 1$ diperoleh $a = 10$ dan jumlah $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 60$. Untuk selanjutnya kita anggap $r \neq 1$.

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = \frac{a(r^6-1)}{r-1}$$
$$= \frac{a(r^3+1)(r-1)(r^2+r+1)}{r-1}$$
$$= 20(r^2 + r + 1)$$
$$= 20\left(\left(r + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right) \geq 20 \times \frac{3}{4} = 15$$

Jadi, nilai minimum dari $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$ adalah 15, diperoleh saat suku pertama sama dengan $\frac{160}{7}$ dan rasio $-\frac{1}{2}$.

6. Dari keterangan soal diperoleh
$$1500 < 11x < 2000 \Leftrightarrow 137 \leq x \leq 181$$
$$970 < 7x < 1275 \Leftrightarrow 139 \leq x \leq 182$$
$$690 < 5x < 900 \Leftrightarrow 139 \leq x \leq 179$$
Jadi, didapat $139 \leq x \leq 179$. Sedangkan bilangan bulat yang habis dibagi 15 dalam interval [139, 179] adalah
$$\left\lfloor\frac{179}{15}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{139}{15}\right\rfloor = 11 - 9 = 2$$

7. Karena kondisi soal maka (mau tidak mau) tiap siswa dari masing-masing kelompok belajar harus duduk berdampingan. Oleh karena itu banyaknya cara menyusun cara duduk siswa - siswa tersebut yaitu
$$(5 - 1)! \times 2! \times 2! \times 2! \times 3! \times 3! = 6912$$

8. Misalkan B(0, 0), A(0, 5) dan C(12, 0), maka diperoleh persamaan lingkaran
$$L_1 : x^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 5y = 10$$
$$L_2 : (x - 6)^2 + y^2 = 36 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 12x = 0$$
Dari dua persamaan di atas diperoleh $5y = 12x$. Substitusikan kembali hasil ini ke pers. pertama diperoleh
$$x^2 + \left(\frac{12x}{5}\right)^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{12 \cdot 25}{169}$$
Sehingga
$$BP = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{12x} = \sqrt{\frac{12^2 \cdot 25}{169}} = \frac{12 \cdot 5}{13} = \frac{60}{13}$$
Jadi,
$$\frac{240}{BP} = 240 \cdot \frac{13}{60} = 52$$

9. Misalkan $a + b = x$ dan $ab = y$, maka diperoleh
$$a^4 + a^2b^2 + b^4 = 6 \Leftrightarrow (a^2 + b^2)^2 - a^2b^2 = 6$$
$$\Leftrightarrow \left((a + b)^2 - 2ab\right)^2 - a^2b^2 = 6$$
$$\Leftrightarrow (x^2 - 2y)^2 - y^2 = 6$$
dan

$$a^2 + ab + b^2 = 4 \Leftrightarrow (a+b)^2 - ab = 4$$
$$\Leftrightarrow x^2 - y = 4$$
$$\Leftrightarrow x^2 = y + 4$$

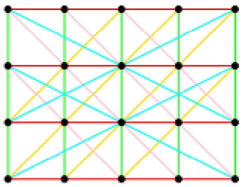
Dari dua persamaan terakhir didapat

$$8y = 10 \Leftrightarrow y = \frac{5}{4}$$

Sehingga

$$x = \sqrt{y+4} = \sqrt{\frac{21}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{21}$$

10. Total segitiga yang dapat dibentuk dari 20 titik tanpa ada tiga titik yang segaris adalah . Namun pada kenyataannya, dari 20 titik yang diberikan banyak titik yang $\binom{20}{3}$ = 1140 segaris. Rinciannya sebagai berikut :



a. 5 titik segaris sebanyak 4 baris (garis warna merah). Kontribusi dalam membentuk segitiga ada sebanyak 4 × $\binom{5}{3}$ = 40
b. 4 titik segaris sebanyak 5 kolom (garis warna hijau). Kontribusi dalam membentuk segitiga ada sebanyak 5 × $\binom{4}{3}$ = 40
c. Arah diagonal ke kanan juga ada beberapa titik yang segaris (garis warna orange). Kontribusi dalam membentuk segitiga ada sebanyak 2 × $\binom{3}{3}$ + 2 × $\binom{4}{3}$ = 10
d. Arah diagonal ke kiri (garis warna ungu) jumlahnya sama dengan arah diagonal ke kanan. Jadi berkontribusi sebanyak 10.
e. Empat garis penyelinap (garis warna biru). Kontribusi dalam membentuk segitiga ada sebanyak 4.

Oleh karena itu, total jumlah segitiga yang terbentuk dari susunan 4 × 5 titik tersebut adalah 1140 − (40 + 20 + 10 + 10 + 4) = 1056

11. Misalkan N_n = $31^n + x \cdot 96^n$, maka akan dicari bilangan bulat positif x sehingga N_n = 0 mod 2015. Akan tetapi karena 2015 = 5 × 13 × 31, maka cukup dicari bilangan bulat positif x sehingga dipenuhi

$$N_n \equiv 0 \bmod 5$$
$$N_n \equiv 0 \bmod 13$$
$$N_n \equiv 0 \bmod 31$$

Dari $N_n \equiv 0$ mod 5 diperoleh

$$31^n + x \cdot 96^n \equiv 0 \bmod 5$$
$$1 + x \equiv 0 \bmod 5$$
$$x \equiv 4 \bmod 5$$

Sedangkan dari $N_n \equiv 0 \bmod 13$ diperoleh

$$31^n + x \cdot 96^n \equiv 0 \bmod 13$$
$$5^n + x \cdot 5^n \equiv 0 \bmod 13$$
$$5^n(1+x) \equiv 0 \bmod 13$$
$$1 + x \equiv 0 \bmod 13$$
$$x \equiv 12 \bmod 13$$

Terakhir dari $N^n \equiv 0 \bmod 31$ didapat

$$31^n + x \cdot 96^n \equiv 0 \bmod 31$$
$$x \equiv 0 \bmod 31$$

Pada akhirnya diperoleh persamaan kongruensi

$$x \equiv 4 \bmod 5$$
$$x \equiv 12 \bmod 1$$
$$x \equiv 0 \bmod 31$$

Silahkan dicoba sendiri menyelesaikan persamaan di atas (tidak susah, relatif mudah). Nanti didapat $x \equiv$ 1364 mod 2015. Jadi, nilai terkecil dari x adalah 1364.

12. Gunakan pembagian polinom secara sintetik, diperoleh

$$p(n) = n^6 + 2n^5 + 2n^4 + 2n^3 + 2n^2 + 2n + 2 + \frac{2015}{n^2 - n + 1}$$

Mengingat $n^2 - n + 1 > 0$ maka $n^2 - n + 1$ adalah faktor positif dari 2015. Ada 8 kemungkinan, silahkan dikuli. Ada enam nilai n yang memenuhi yaitu {-5, -3, 0, 1, 4, 6}.

13. Perhatikan bahwa

$$P(a) + a = P(b) + b = P(c) + c = a + b + c = 5$$

Misalkan $Q(x) = P(x) + x - 5 = Ax^3 + Bx^2 + (C+1)x - 2020$, maka a, b, c adalah akar-akar dari $Q(x)$. Akibatnya

$$Ax^3 + Bx^2 + (C+1)x - 2020 = A(x^3 - 5x^2 - 9x + 10)$$

Sehingga diperoleh A = -202. Selanjutnya diperoleh pula nilai B = 1010, C = 1817. Jadi, A + B + C = (-202) + 1010 + 1817 = 2625.

14. Berdasarkan teorema garis bagi diperoleh $\frac{CE}{EA} = \frac{5}{4}$. Dan berdasarkan Ceva didapat

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1 \Leftrightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{4}{5}$$

Sehingga

$$CD = \frac{5}{9} \cdot 5 = \frac{25}{9} = \frac{m^2}{n^2}$$

Jadi, $m - n = 5 - 3 = 2$.

15. Karena a − b prima maka FPB(a, b) = 1. Di sisi lain, ab adalah kuadrat sempurna, sehingga a dan b keduanya juga bilangan kuadrat. Misalkan a = k^2 dan b = m^2 untuk suatu bilangan asli k, m. Mengingat a − b = p dengan p prima ganjil, diperoleh

$$p = k^2 - m^2 = (k + m)(k - m)$$

sehingga k + m = p dan k − m = 1 yang berarti $k = \frac{p+1}{2}$ dan $m = \frac{p-1}{2}$.

Terakhir didapat

$n = a + b = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 = \frac{p^2+1}{2} \leq 2015$
sehingga $p \leq 63$.
Oleh karena itu, banyaknya bilangan asli n yang memenuhi sama dengan banyaknya bilangan prima ganjil kurang dari 63 yaitu ada 17.

16. Misalkan ∠BAC = α, |AB| = |AC| = |CD| = x dan |BC = y|. Dari

$$\frac{1}{|CD|} - \frac{1}{|BD|} = \frac{1}{|CD| + |BD|}$$

diperoleh

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+y} = \frac{1}{2x+y}$$
$$\Leftrightarrow y^2 + xy = x^2$$

Bagi dengan y^2 dan misalkan $\frac{x}{y} = a$, diperoleh

$$1 + a = a^2 \Leftrightarrow a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Dengan aturan cosinus pada $\triangle ABC$ diperoleh

$$y^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cos\alpha$$
$$1 = 2a^2 - a^2 \cos\alpha$$
$$\cos\alpha = 1 - \frac{1}{2a^2}$$
$$\cos\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

Jadi, ∠BAC = α = 36°.

17. Untuk bilangan-bilangan 1, 2, 3, masing-masing ambil mod 3 sehingga kita dapatkan 1, −1, 0. Ada 4 cara untuk mengatur bilangan-bilangan ini dalam baris/kolom, yaitu

0, 0, 0
1, 1, 1
− 1, −1, −1
− 1, 0, 1

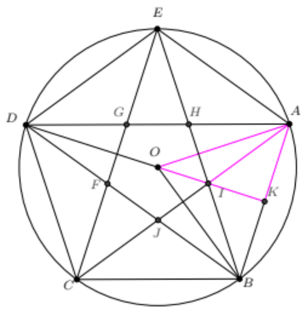
Selanjutnya kita ambil dua-dua untuk digunakan sebagai pengisi baris satu dan dua. Ada 10 kemungkinan

a. Ambil 0, 0, 0 dan 0, 0, 0 untuk mengisi baris satu dan dua. Obviously, baris tiga ya 0, 0, 0. Ada 1 cara.
b. Ambil 1, 1, 1 dan 1, 1, 1 untuk mengisi baris satu dan dua. Obviously, baris tiga ya 1, 1, 1. Ada 1 cara.
c. Ambil −1, −1, −1 dan −1, −1, −1 untuk mengisi baris satu dan dua. Obviously, baris tiga −1, −1, −1. Ada 1 cara.
d. Ambil 0, 0, 0 dan 1, 1, 1 untuk mengisi baris satu dan dua. Tentu saja, baris tiga ya −1, −1, −1. Namun, karena posisi antara 0, 0, 0 dan 1, 1, 1 dapat ditukar antara baris satu dan dua maka ada 2 cara.
e. Ambil 0, 0, 0 dan −1, −1, −1 untuk mengisi baris satu dan dua. Dan pasti, baris tiga ya 1, 1, 1. Sekali lagi, karena posisi antara 0, 0, 0 dan −1, −1, −1 dapat ditukar antara baris satu dan dua maka ada 2 cara.

f. Ambil 1, 1, 1 dan −1, −1, −1 untuk mengisi baris satu dan dua. Sedang baris tiga ya pasti 0, 0, 0. Sekali lagi, karena posisi antara 1, 1, 1 dan −1, −1, −1 dapat ditukar antara baris satu dan dua maka ada 2 cara.
g. Ambil 0, 0, 0 dan −1, 0, 1 untuk mengisi baris satu dan dua. Untuk mengisi baris tiga akan tepat ada satu cara untuk setiap cara pengisian baris satu dan baris dua yang diberikan.
Untuk kasus ini banyaknya cara ada sebanyak 2 × 3! = 12 cara.
h. Ambil 1, 1, 1 dan −1, 0, 1 untuk mengisi baris satu dan dua. Untuk mengisi baris tiga akan tepat ada satu cara untuk setiap cara pengisian baris satu dan baris dua yang diberikan.
Untuk kasus ini banyaknya cara ada sebanyak 2 × 3! = 12 cara.
i. Ambil −1, −1, −1 dan −1, 0, 1 untuk mengisi baris satu dan dua. Untuk mengisi baris tiga akan tepat ada satu cara untuk setiap cara pengisian baris satu dan baris dua yang diberikan.
Untuk kasus ini banyaknya cara ada sebanyak 2 × 3! = 12 cara.
j. Ambil −1, 0, 1 dan −1, 0, 1 untuk mengisi baris satu dan dua. Untuk mengisi baris tiga akan tepat ada satu cara untuk setiap cara pengisian baris satu dan baris dua yang diberikan.
Untuk kasus ini banyaknya cara ada sebanyak 3! × 3! = 36 cara.

Jadi, total ada 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 2 + 12 + 12 + 12 + 36 = 81 cara.

18. Perhatikan gambar dibawah ini!



Tanpa mengurangi keumuman misal OA = 4, karena ∠AOK = 36° maka OK = $1+\sqrt{5}$. Dengan rumus pitagoras pada $\triangle AOK$ diperoleh $AK = \sqrt{10-2\sqrt{5}}$. Namun karena ∠IAK = 36° maka $AI = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{1+\sqrt{5}}$.
Dengan pitagoras sekali lagi pada $\triangle AIK$ didapat $IK = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}$.
Sehingga kita peroleh

$$OI = \left(1+\sqrt{5}\right) - \left(\frac{10-2\sqrt{5}}{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}\right) = \frac{4\sqrt{5}-4}{1+5\sqrt{5}}$$

Akibatnya

$$\begin{aligned}\frac{S_1}{S_2} &= \left(\frac{OA}{OI}\right)^2 \\ &= \left(4 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{4\sqrt{5}-4}\right)^2 \\ &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$$

19. Misalkan pasangan (a_{i-1}, a_i) dengan $a_{i-1} > a_i$ kita sebut sebagai pasangan cantik. Misalkan pula $a_{i-1} = m$ dan $a_i = k$ dengan $1 \le k < m \le 10$. Jelas bahwa bilangan-bilangan 1, 2, $\cdots$, $(k-1)$ pada permutasi hampir naik harus ada di kiri pasangan cantik dan bilangan-bilangan $(m + 1)$, $(m + 2)$, $\cdots$, 10 ada di kanan pasangan cantik.

   Oleh karena itu kita tinggal perlu mengatur bilangan-bilangan $(k + 1)$, $(k + 2)$, $\cdots$, $(m - 1)$, yang tentu saja bisa terletak di kiri maupun kanan pasangan cantik. Jadi, banyaknya cara mengatur penempatan bilangan-bilangan $(k + 1)$, $(k + 2)$, $\cdots$, $(m - 1)$ adalah 2^{m-k-1} yang sekaligus ini juga merupakan jumlah permutasi hampir naik yang bisa dibentuk untuk setiap pasangan cantik terpilih.

   Padahal dari bilangan-bilangan 1, 2, 3, $\cdots$, 10 kita bisa memilih pasangan cantik (m, k) sebanyak $\binom{10}{2} = 45$ dengan rincian :

   a) Pasangan dengan m − k − 1 = 0 ada sebanyak 9 pasang. Permutasi hampir naik yang bisa dibentuk ada $9 \times 2^0 = 9$
   b) Pasangan dengan m − k − 1 = 1 ada sebanyak 8 pasang. Permutasi hampir naik yang bisa dibentuk ada $8 \times 2^1 = 16$
   c) Pasangan dengan m − k − 1 = 2 ada sebanyak 7 pasang. Permutasi hampir naik yang bisa dibentuk ada $7 \times 2^2 = 28$
   d) Pasangan dengan m − k − 1 = 3 ada sebanyak 6 pasang. Permutasi hampir naik yang bisa dibentuk ada $6 \times 2^3 = 48$
   e) Pasangan dengan m − k − 1 = 4 ada sebanyak 5 pasang. Permutasi hampir naik yang bisa dibentuk ada $5 \times 2^4 = 80$
   f) Pasangan dengan m − k − 1 = 5 ada sebanyak 4 pasang. Permutasi hampir naik yang bisa dibentuk ada $4 \times 2^5 = 128$
   g) Pasangan dengan m − k − 1 = 6 ada sebanyak 3 pasang. Permutasi hampir naik yang bisa dibentuk ada $3 \times 2^6 = 192$
   h) Pasangan dengan m − k − 1 = 7 ada sebanyak 2 pasang. Permutasi hampir naik yang bisa dibentuk ada $2 \times 2^7 = 256$
   i) Pasangan dengan m − k − 1 = 8 ada sebanyak 1 pasang. Permutasi hampir naik yang bisa dibentuk ada $1 \times 2^8 = 256$

   Jadi, total permutasi hampir naik yang bisa dibentuk yaitu 9 + 16 + 28 + 48 + 80 + 128 + 192 + 256 + 256 = 1013.

20. Tanpa mengurangi kerumunan kita cukup merperhatikan nilai untuk $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$. Perhatikan pada interval $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$, fungsi $g(x) = sin\, x + \frac{2}{3+\sin x}$ adalah fungsi naik dengan $0 \le g(x) \le \frac{3}{2}$. Kita bagi kasus

   a. Untuk $a \ge 0$, maka $f(a) = \frac{3}{2} + a \ge \frac{3}{2}$
   b. Untuk $-\frac{3}{4} < x < 0$, maka $f(a) = \frac{3}{2} + a \ge \frac{3}{4}$
   c. Untuk $x \le -\frac{3}{4}$, maka $f(a) = -a \ge \frac{3}{4}$

   Jadi, nilai terkecil dari $f(a)$ adalah $\frac{3}{4}$.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2015

TINGKAT PROVINSI

BIDANG MATEMATIKA

WAKTU : 210 MENIT

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2015

1. Jumlah dari semua bilangan real x yang memenuhi

$$x^2 - 2x = 2 + x\sqrt{x^2 - 4x}$$

adalah .....

2. Banyaknya bilangan bulat n, sehingga $n + 1$ merupakan faktor dari $n^2 + 1$ adalah .....

3. Dalam suatu pesta, setiap pria berjabat tangan dengan pria lain hanya sekali. Demikian juga, setiap wanita hanya berjabat tangan sekali dengan wanita lain yang hadir dalam pesta tersebut. Tidak ada yang berjabat tangan antara pria dan wanita dalam pesta tersebut. Jika banyaknya pria yang hadir dalam pesta lebih banyak dari wanita dan jumlah jabat tangan antara pria atau wanita ada 7 jabat tangan. Banyaknya pria yang hadir dalam pesta tersebut adalah ……

4. Diberikan segitiga ABC, melalui titik D yang terletak pada sisi BC ditarik garis DE dan DF berturut-turut sejajar dengan AB dan AC, (E pada AC, F pada AB). Jika luas segitiga DEC sama dengan 4 kali luas segitiga BDF, maka perbandingan luas segitiga AEF dengan luas segitiga ABC adalah………

5. Jika f adalah fungsi yang terdefinisi pada himpunan bilangan real dan berlaku

$$3f(x) - 2f(2 - x) = x^2 + 8x - 9$$

untuk semua bilangan real x, maka nilai dari $f(2015)$ adalah ……

6. Banyaknya pasangan bilangan bulat (a, b) yang memenuhi $\frac{1}{a} + \frac{1}{b+1} = \frac{1}{2015}$ adalah …….

7. Ada 10 orang, lima laki-laki dan lima perempuan, termasuk sepasang pengantin. Seorang tukang foto yang bukan salah satu di antara 10 orang tersebut akan megambil gambar enam orang di antara mereka, termasuk ke-dua pengantin, dengan tidak ada dua laki-laki maupun dua perempuann yang berdekatan. Banyaknya cara adalah ……

8. Panjang sisi-sisi segitiga merupakan bilangan bulat berurutan, dan sudut terbesar dua kali sudut terkecil. Nilai cosinus sudut terkecil adalah ………

9. Diberikan dua suku banyak kuadrat berbeda $f(x) = x^2 + ax + b$ dan $g(x) = x^2 + cx + d$ yang memenuhi

$$f(20) + f(15) = g(20) + g(15).$$

Jumlah dari semua bilangan real x yang memenuhi $f(x) = g(x)$ sama dengan ……

10. Diberikan a dan b bilangan bulat positif dengan $\frac{53}{201} < \frac{a}{b} < \frac{4}{15}$. Nilai b terkecil yang mungkin adalah…….

11. Misalkan pada suatu laboratorium terdapat 20 komputer dan 15 printer. Kabel digunakan untuk menghubungkan komputer dan printer. Sayangnya, satu printer hanya dapat melayani satu komputer pada suatu waktu bersamaan. Diinginkan 15 komputer selalu dapat menggunakan printer pada waktu bersamaan. Banyaknya kabel yang diperlukan untuk menghubungkan komputer dan printer minimal ada sebanyak ……

12. Diberikan segitiga ABC dengan M pertengahan BC, dan pada sisi AB dipilih titik N sehingga NB = 2NA. Jika $\angle CAB = \angle CMN$, maka nilai dari $\frac{AC}{BC}$ adalah……

13. Diberikan barisan $a_0, a_1, a_2, \ldots$ dengan $a_0 = 2$, $a_1 = 83$ dan

$$a_m \cdot a_n = a_{m+n} - a_{m-n}$$

untuk setiap bilangan asli m, n dengan $m \geq n$. Banyaknya bilangan asli n yang memenuhi

$$a_n - 3^n > \frac{1}{2015}$$

adalah ……

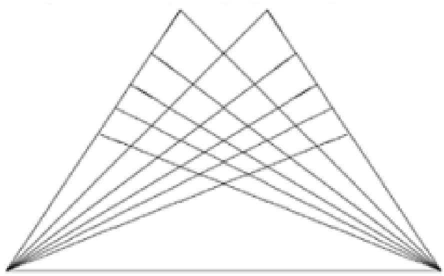
14. Untuk bilangan real x, notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang tidak lebih besar dari x; sedangkan $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang tidak lebih kecil dari x. Bilangan real x yang memenuhi

$$\lfloor x \rfloor^2 - 3x + \lceil x \rceil = 0$$

adalah ……

15. Suatu lingkaran memotong segitiga sama sisi ABC pada enam titik yang berbeda. Keenam titik komposisinya, setiap dua titik terletak pada sisi segitiga, sehingga: B, D, E, C; C, F, G, A, dan A, H, J, B berturut-turut segaris. Jika AG = 2, GF = 13, FC = 1, dan HJ = 7, maka panjang DE adalah …..

16. Pada gambar terdapat segitiga sebanyak ……



17. Misalkan M dan m berturut turut merupakan nilai a terbesar dan terkecil sehingga berlaku $\left|x^2 - 2ax - a^2 - \frac{3}{4}\right| \leq 1$ untuk setiap $x \in [0, 1]$. Nilai dari M − m adalah ……

18. Semua bilangan bulat n sehingga $\frac{9n+1}{n+3}$ merupakan kuadrat suatu bilangan rasional adalah …….

19. Himpunan A bagian dari {1, 2, 3, ..., 15} dikatakan baik, jika untuk setiap $a \in A$ berlaku $a - 1 \in A$ atau $a + 1 \in A$. Banyaknya himpunan bagian dengan lima anggota dari {1, 2, ..., 15} yang baik ada sebanyak ....

20. Diberikan segitiga sama kaki ABC, dengan $AB = AC = b$, $BC = a$, dan $\angle BAC = 100°$. Jika BL garis bagi $\angle ABC$, maka nilai $AL + BL$ adalah ......

21. Misalkan X = {1, 2, 3, 4, 5}.

    Misalkan $F = \{A_1, A_2, A_3, ..., A_m\}$, dengan $A_i \subseteq$ X dan anggota A_i sebanyak 2, untuk $i = 1, 2, ..., m$. Tentukan m minimum sehingga untuk sebarang $B \subseteq$ X, dengan B beranggota sebanyak 3, terdapat anggota F yang termuat di B. Buktikan jawab Anda.

22. Tentukan semua tripel bilangan real (x, y, z) yang memenuhi sistem persamaan

$$(x+1)^2 = x + y + 2$$

$$(y+1)^2 = y + z + 2$$

$$(z+1)^2 = z + x + 2.$$

23. Diberikan segitiga samakaki ABC, dengan AB = AC. Misalkan D titik pada segmen BC sehingga BD = 2DC. Misalkan pula bahwa P titik pada segmen AD sehingga: $\angle BAC = \angle BPD$. Buktikan bahwa $\angle BAC = 2\angle DPC$.

24. Misalkan $p_1, p_2, ..., p_n$ barisan aritmetika dengan beda $b > 0$ dan p_i prima untuk setiap $i = 1, 2, ..., n$.

    a. Jika $p_1 > n$, tunjukkan bahwa setiap bilangan prima p dengan $p \leq n$, maka p membagi habis b.
    b. Berikan contoh barisan aritmetika $p_1, p_2, ..., p_{10}$, dengan beda positif dan p_i prima untuk $i = 1, 2, ..., 10$.

25. Diberikan himpunan yang terdiri 22 bilangan bulat, $A = \pm a_1, \pm a_2, ..., \pm a_{11}$. Tunjukkan bahwa terdapat himpunan bagian S dari A yang sekaligus mempunyai sifat berikut:

    a. Untuk setiap $i = 1, 2, ..., 11$ paling banyak hanya satu di antara a_i atau $-a_i$ merupakan anggota S
    b. Jumlah semua bilangan di S habis dibagi 2015.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2015

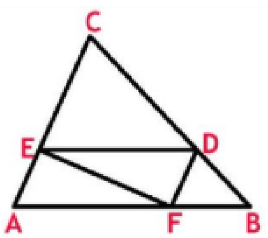
TINGKAT PROVINSI

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2015

1. $x^2 - 2x = 2 + x\sqrt{x^2 - 4x}$
   Syarat batas : $x^2 - 4x \geq 0$
   $x \leq 0$ atau $x \geq 4$
   $(x^2 - 2x - 2)^2 = x^2(x^2 - 4x)$
   $x^4 + 4x^2 + 4 - 4x^3 - 4x^2 + 8x = x^4 - 4x^3$
   $8x + 4 = 0$
   $x = -\frac{1}{2}$ yang memenuhi syarat batas dan setelah diuji kembali ke soal juga memenuhi.
   ∴ Jadi, jumlah dari semua bilangan real x yang memenuhi adalah $-\frac{1}{2}$.
2. $(n + 1) \mid (n^2 + 1) = (n + 1)(n - 1) + 2$
   Maka $(n + 1) \mid 2$
   Jadi $n + 1 = \pm 1$ atau ± 2.
   Nilai n yang memenuhi adalah −3, −2, 0, 1.
   ∴ Jadi, banyaknya bilangan bulat n sehingga n + 1 membagi $n^2 + 1$ adalah 4.
3. Misalkan banyaknya pria yang hadir adalah x dan banyaknya wanita yang hadir adalah y.
   $x > y$
   ${}_xC_2 + {}_yC_2 = 7$
   Jelas bahwa $4 \leq {}_xC_2 \leq 7$
   Nilai x yang memenuhi hanya x = 4 yang dipenuhi jika y = 2.
   ∴ Jadi, banyaknya pria yang hadir dalam pesta tersebut adalah 4.
4. Karena DE sejajar AB dan DF sejajar AC maka ΔABC, ΔEDC dan ΔFBD semuanya sebangun. Jelas juga bahwa dua segitiga sebangun memiliki perbandingan panjang sisi k jika dan hanya jika perbandingan luasnya adalah k^2.
   [DEC] = 4[BDF] dengan ΔDEC sebangun dengan ΔBDF.
   Maka perbandingan sisi ΔDEC dan ΔBDF adalah 2 : 1.



   Misalkan BD = x, FB = y dan DF = z maka DC = 2x, ED = 2y dan EC = 2z. Misalkan juga ∠BAC = α.
   ΔCED sebangun dengan ΔABC dan CD : CB = 2 : 3 maka AF = 2y dan AE = z
   $[AEF] = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot AF \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}AB \cdot \frac{1}{3}AC \cdot \sin\alpha = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin\alpha = \frac{2}{9}[ABC]$
   ∴ Jadi, perbandingan luas segitiga AEF dengan luas segitiga ABC adalah 2 : 9.
5. $3f(x) - 2f(2 - x) = x^2 + 8x - 9$ ································· (1)

Misalkan y = 2 − x didapat

3f(2 − y) − 2f(y) = $(2 - y)^2$ + 8(2 − y) − 9 yang setara dengan

3f(2 − x) − 2f(x) = $(2 - x)^2$ + 8(2 − x) − 9 ∙∙∙∙∙∙∙∙∙∙∙∙∙∙∙∙∙∙∙∙∙∙ (2)

Kalikan persamaan (1) dengan 3 dan persamaan (2) dengan 2 lalu jumlahkan, didapat

5f(x) = $3x^2$ + 24x − 27 + $2(2 - x)^2$ + 16(2 − x) − 18

5f(x) = $5x^2$ −5 fF(x) = $x^2 - 1$

f(2015) = $2015^2 - 1$ = 4.060.224

∴ Jadi, nilai f(2015) aalah 4.060.224.

6. $\frac{1}{a} + \frac{1}{b+1} = \frac{1}{2015}$

Dengan syarat a ≠ 0 atau b ≠ −1.

Persamaan di atas setara dengan 2015a + 2015b + 2015 = ab + a

ab − 2014a − 2015b = 2015

(a − 2015)(b − 2014) = $2015^2 = 5^2 \cdot 13^2 \cdot 31^2$

Banyaknya faktor positif dan negatif dari 2015^2 ada 54.

Maka banyaknya pasangan (a, b) yang memenuhi ada 54.

Tetapi (a, b) = (0, −1) termasuk salah satu dari 54 penyelesaian.

Maka banyaknya penyelesaian (a, b) yang memenuhi = 54 − 1 = 53.

∴ Jadi, banyaknya pasangan bilangan bulat (a, b) yang memenuhi adalah 53.

7. Karena tidak ada keterangan jika pengantin harus berdekatan maka dapat diasumsikan bahwa pengantin tidak harus berdekatan.

Dua laki-laki dipilih dari empat laki-laki dan dua perempuan dipilih dari empat perempuan.

Banyaknya cara = ${}_4C_2 \cdot {}_4C_2$ = 36.

Susunan 3 laki-laki dan 3 perempuan yang memenuhi adalah LPLPLP dan PLPLPL yang masingmasing ada sebanyak 3!3! = 36

Jadi, banyaknya cara menyusunnya = 36 · 2 · 36 = 2592

∴ Jadi, banyaknya cara adalah 2592.

8. Misalkan sudut terkecil α dan sudut terbesar 2α.

Pada segitiga berlaku, semakin besar sudut maka akan menghadap sisi yang semakin panjang.

Misalkan sisi terpendek n − 1 dan sisi terpanjang n + 1.

Sesuai dalil sinus didapat

$\frac{n+1}{\sin 2\alpha} = \frac{n-1}{\sin \alpha}$

$\cos \alpha = \frac{n+1}{2n-2}$

Sesuai dalil cosinus didapat

$(n - 1)^2 = n^2 + (n + 1)^2 - 2n(n + 1) \cos \alpha$

$(n + 1)^2 = (n + 4)(n - 1)$

n = 5

$\cos \alpha = \frac{n+1}{2n-2} = \frac{3}{4}$

∴ Jadi, nilai cosinus sudut terkecil adalah $\frac{3}{4}$.

9. f(x) = x^2 + ax + b

$g(x) = x^2 + cx + d$

Karena f(x) dan g(x) berbeda maka a ≠ c atau b ≠ d

f(20) + f(15) = g(20) + g(15)

20a + b + 15a + b = 20c + d + 15c + d

35a + 2b = 35c + 2d

Karena a ≠ c atau b ≠ d maka akan didapat a ≠ c dan b ≠ d.

$\frac{d-b}{a-c} = \frac{35}{2}$

f(x) = g(x)

$x^2 + ax + b = x^2 + cx + d$

$x = \frac{d-b}{a-c} = \frac{35}{2}$

Hanya ada 1 nilai x yang memenuhi.

∴ Jadi, jumlah dari semua bilangan real x yang memenuhi f(x) = g(x) sama dengan $\frac{35}{2}$.

10. a dan b adalah bilangan bulat positif yang memenuhi

$\frac{53}{201} < \frac{a}{b} < \frac{4}{15}$

$3\frac{3}{4} < \frac{b}{a} < 3\frac{42}{53}$

Maka jelas bahwa b = 3a + s dengan s < a. Maka

$\frac{3}{4} < \frac{s}{a} < \frac{42}{53}$

Agar b bernilai minimum maka a harus bernilai minimum.

Jelas juga bahwa a > 4

- Jika a = 5

  $3\frac{3}{4} = \frac{15}{4} < s < \frac{210}{53} = 3\frac{51}{53}$

  Tidak ada bilangan bulat positif s yang memenuhi.
- Jika a = 6

  $4\frac{1}{2} = \frac{18}{4} < s < \frac{252}{53} = 4\frac{40}{53}$

  Tidak ada bilangan bulat positif s yang memenuhi.
- Jika a = 7

  $5\frac{1}{4} = \frac{21}{4} < s < \frac{294}{53} = 5\frac{29}{53}$

  Tidak ada bilangan bulat positif s yang memenuhi.
- Jika a = 8

  $6 = \frac{24}{4} < s < \frac{336}{53} = 6\frac{18}{53}$

  Tidak ada bilangan bulat positif s yang memenuhi.
- Jika a = 9

  $6\frac{3}{4} = \frac{27}{4} < s < \frac{378}{53} = 7\frac{7}{53}$

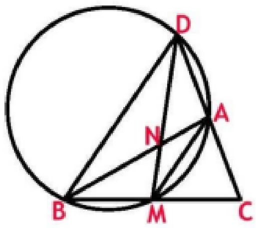
  Bilangan bulat positif s yang memenuhi adalah s = 7.

Maka nilai b binimum adalah b = 3a + s = 3(9) + 7 = 34.

∴ Jadi, nilai terkecil b yang memenuhi adalah 34.

11. Hubungkan komputer K_i dengan printer P_i untuk i = 1, 2, 3, ⋯, 15.
Kabel yang digunakan ada sebanyak 15.
Hubungkan 5 komputer tersisa masing-masing dengan 15 printer. Banyaknya kabel yang diperlukan ada sebanyak 5 · 15 = 75 kabel.
Maka jika ada 1 atau beberapa printer dari K_i = 1, 2, 3 ⋯, 15 diganti oleh 1 atau beberapa dari 5 printer tersisa maka akan tetap didapat 15 komputer yang terhubung masing-masing dengan 1 printer berbeda.
Jadi, total kabel yang diperlukan adalah 15 + 75 = 90.
Andaikan jumlah kabel kurang dari 90.
Karena 15 printer x 6 = 90 maka ada sedikitnya 1 printer yang terhubung dengan paling banyak 5 komputer. Misalkan saja printer tersebut adalah P_k.
Perhatikan sedikitnya 15 komputer lain yang tidak terhubung dengan P_k. Maka tidak mungkin banyaknya kabel kurang dari 90.
∴ Jadi, banyaknya minimal kabel yang diperlukan sebanyak 90.

12. Misalkan ∠BAC = ∠CMN = α. Perpanjang sisi AC sehingga memotong MN di titik D.
Maka ∠BAD = ∠BMD = 180° − α dan pada bagian sisi yang sama sehingga BMAD adalah segiempat talibusur.



Karena M adalah pertengahan BC dan BN : NC = 2 : 1 maka DM dan BA adalah garis berat ΔBCD dan N adalah titik berat ΔBCD.
Karena BA adalah garis berat ΔBCD maka CA = AD.
Karena CA : CD = CM : CB maka AM sejajar DB.
Jadi BMAD adalah trapesium sama kaki.
DA = BM sehingga BC = DC = 2 AC
∴ Jadi, nilai dari $\frac{AC}{BC}$ adalah $\frac{1}{2}$.

13. $a_0 = 2$ dan $a_1 = \frac{8}{3}$
$a_m a_n = a_{m+n} - a_{m-n}$
Ambil n = 1 didapat
$a_m a_1 = a_{m+1} - a_{m-1}$
$3a_{m+1} = 8a_m + 3a_{m-1}$
Maka akan didapat persamaan karakteristik $3r^2 = 8r + 3$ dengan $a_n = A \cdot r_1^n + B \cdot r_2^n$ dengan r_1 dan r_2 adalah akar-akar berbeda dari persamaan karakteristik $3r^2 = 8r + 3$.
$a_n = A \cdot 3^n + B \cdot (-\frac{1}{3})^n$
Jika n = 0 maka A + B = 2
Jika n = 1 maka 9A − B = 8

Didapat A = 1 dan B = 1

$a_n = 3^n + (-\frac{1}{3})^n$

$a_n - 3^n = (-\frac{1}{3})^n > \frac{1}{2025}$

Jelas bahwa bilangan ganjil n tidak akan memenuhi.

Megingat bahwa $3^6 = 729 < 2015$ dan $3^7 = 2187 > 2015$ maka nilai n yang memenuhi hanya n = 2, 4 dan 6.

∴ Jadi, banyaknya bilangan asli n yang memenuhi adalah 3.

14. $\lfloor x \rfloor^2 - 3x + \lceil x \rceil = 0$
    - Jika x bulat

      Maka $x = \lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$

      $x^2 - 2x = 0$

      Didapat x = 0 atau x = 2.
    - Jika x tak bulat

      $x = \frac{\lfloor x \rfloor^2 + \lceil x \rceil}{3}$

      $x < \lfloor x \rfloor + 1$ dan $\lfloor x \rfloor < \lceil x \rceil$

      $\lfloor x \rfloor^2 = 3x - \lceil x \rceil < 3(\lfloor x \rfloor + 1) - \lfloor x \rfloor = 2\lfloor x \rfloor + 3$

      $(\lfloor x \rfloor - 3)(\lfloor x \rfloor + 1) < 0$

      $-1 < \lfloor x \rfloor < 3$
      - Jika $\lfloor x \rfloor = 0$

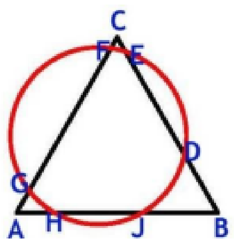
        Maka $\lceil x \rceil = 1$ didapat $x = \frac{1}{3}$ yang memenuhi persamaan.
      - Jika $\lfloor x \rfloor = 1$

        Maka $\lceil x \rceil = 2$ didapat $x = 1$ yang tidak memenuhi persamaan.
      - Jika $\lfloor x \rfloor = 2$

        Maka $\lceil x \rceil = 3$ didapat $x = \frac{7}{3}$ yang memenuhi persamaan.

    ∴ Jadi, bilangan real x yang memenuhi adalah $0, \frac{1}{3}, 2, \frac{7}{3}$.

15. AC = AG + GF + FC = 2 + 13 + 1 = 16 = AB = BC HJ = 7



Sesuai dalil Power of Point/Secant Tangent maka

AH · AJ = AG · AF

AH (AH + 7) = 2 · (2 + 13)

(AH + 7)(AH − 3) = 0

Maka AH = 3 sehingga BJ = 16 − 7 − 3 = 6

Misalkan panjang BD = y dan DE = x sehingga CE = 16 − x − y Sesuai dalil Power of Point/Secant Tangent maka

CF · CG = CE · CD

1 · (1 + 13) = (16 − x − y)(16 − x − y + x)

$y^2 + xy - 16x - 32y + 242 = 0$ ····················· (1)

Sesuai dalil Power of Point/Secant Tangent maka

BJ · BH = BD · BE

6 · (6 + 7) = (y)(y + x)

$y^2 + xy = 78$ ································ (2)

Subtitusikan pers (2) ke persamaan (1) didapat

x + 2y = 20

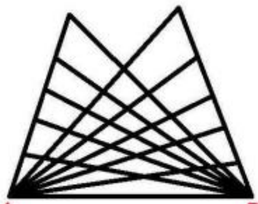
$\left(\frac{20-x}{2}\right)^2 + x\left(\frac{20-x}{2}\right) = 78$

$400 - 40x + x^2 + 40x - 2x^2 = 312$

$x^2 = 88$

∴ Jadi, panjang DE adalah $2\sqrt{22}$.

16. Perhatikan gambar. Titik A atau titik B akan menjadi salah satu titik sudut segitiga. Maka cukup mencari banyaknya cara memilih 2 titik yang lain.



- Jika titik A dan titik B adalah titik sudut segitiga
  Banyaknya cara memilih 1 titik lain = ${}_6C_1 \cdot 5 + {}_5C_1 = 35$
- Jika tepat salah satu di antara A atau B adalah salah satu titik sudut.
  Banyaknya cara memilih 2 titik lain = $2({}_6C_2 \cdot 5 + {}_5C_2) = 170$

Maka banyaknya segitiga = 35 + 170 = 205.

∴ Jadi, pada gambar terdapat segitiga sebanyak 205.

17. $x \in [0,1]$

$\left|x^2 - 2ax - a^2 - \frac{3}{4}\right| \le 1$

Akan diuji pada 3 titik :

- Untuk x = 0
  $-a^2 - \frac{3}{4}$ | = 1
  $a = \pm\frac{1}{2}$
  - Jika $a = \frac{1}{2}$
    $|x^2 - x - 1| = \left|\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right|$

Nilai maksimum $\frac{5}{4} \neq 1$ didapat jika $x = \frac{1}{2}$. Maka $a = \frac{1}{2}$ tidak memenuhi.

- Jika $a = -\frac{1}{2}$

  $|x^2 + x - 1| = \left|\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}\right|$

  Nilai maksimum 1 didapat jika x = 0 atau 1. Maka $a = -\frac{1}{2}$ memenuhi.

- Untuk $x = 1$

  $\left|\frac{1}{4} - 2a - a^2\right| = 1$

  - Jika $a^2 - 2a - \frac{1}{4} = 1$

    Nilai a yang memenuhi adalah $a = \frac{5}{2}$ atau $a = -\frac{1}{2}$.

    $a = -\frac{1}{2}$ sudah dibuktikan memenuhi.

    Jika $a = \frac{5}{2}$ maka $\left|x^2 - 2ax - a^2 - \frac{3}{4}\right| = |x^2 - 5x - 7| = \left|\left(x-\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{43}{4}\right| \leq 7$

    Nilai maksimum 7 didapat ketika x = 0. Jadi, $a = \frac{5}{2}$ tidak memenuhi.

  - Jika $a^2 - 2a - \frac{1}{4} = -1$

    $a^2 - 2a - \frac{1}{4} = -1$

    Nilai a yang memenuhi adalah $a = \frac{3}{2}$ atau $a = \frac{1}{2}$.

    $a = \frac{1}{2}$ sudah dibuktikan tidak memenuhi.

    Jika $a = \frac{3}{2}$ maka $|x^2 - 2ax - a^2 - \frac{3}{4}| = |x^2 - 3x - 3| = \left|\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{21}{4}\right| \leq 3$.

    Nilai maksimum 3 didapat ketika x = 0. Jadi, $a = \frac{3}{2}$ tidak memenuhi.

- Untuk $x = -\frac{B}{2A} = a$

  $|x^2 - 2ax - a^2 - \frac{3}{4}| = \left|-2a^2 - \frac{3}{4}\right| = 1$

  $a = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}}$

  Karena $x \in [0,1]$ maka $a = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

  $|x^2 - 2ax - a^2 - \frac{3}{4}| = |x^2 - \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{7}{8}| = \left|\left(x - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 - 1\right| \leq 1$

Jadi, $M = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ dan $m = -\frac{1}{2}$.

∴ Jadi, nilai dari M − m adalah $\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2}$.

18. Karena $\frac{9n+1}{n+3}$ adalah kuadrat dari suatu bilangan rasional maka 9n + 1 = p · a^2 dan n + 3 = p · b^2 yang artinya (9n + 1)(n + 3) = $9n^2$ + 28n + 3 adalah bilangan kuadrat sempurna.

    Jadi, $81n^2 + 252n + 27 = k^2$

    $(9n + 14)^2 - 169 = k^2$ untuk suatu bilangan bulat tak negatif k.

    (9n + 14 + k)(9n + 14 − k) = 169

    - Jika 9n + 14 + k = 169 dan 9n + 14 − k = 1

9n + 14 = 85 dan k = 84. Tidak ada bilangan bulat n yang memenuhi.

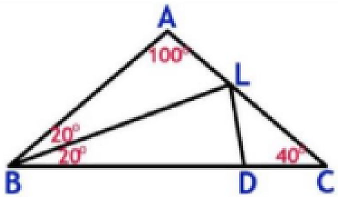
- Jika 9n + 14 + k = 13 dan 9n + 14 − k = 13
  9n + 14 = 13 dan k = 0. Tidak ada bilangan bulat n yang memenuhi.
- Jika 9n + 14 + k = −1 dan 9n + 14 − k = −169
  9n + 14 = −85 dan k = 84. Bilangan bulat n yang memenuhi adalah n = −11.
- Jika 9n + 14 + k = −13 dan 9n + 14 − k = −13
  9n + 14 = −13 dan k = 0. Bilangan bulat n yang memenuhi adalah n = −3.
  Tetapi n ≠ −3

Maka semua bilangan bulat n yang memenuhi adalah n = −11.
∴ Jadi, semua bilangan bulat n yang memenuhi adalah n = −11.

19. Misalkan bilangan terkecil dari himpunan baik yang baik adalah n dan yang terbesar k.
Jelas bahwa selisih setiap anggota himpunan bagian yang baik dengan bilangan terdekat dengannya yang juga anggota himpunan bagian yang baik sama dengan 1. Misalkan a adalah banyaknya bilangan bulat asli yang kurang dari n dan b adalah banyaknya bilangan asli yang lebih dari k namun kurang dari 16.
Ada 2 kasus :
- Jika a + b = 10
  Maka anggota himpunan baik adalah 5 bilangan bulat berurutan. Jadi, untuk setiap pasangan (a, b) yang memenuhi akan da tepat 1 himpunan bagian yang baik. Banyaknya pasangan (a, b) yang memenuhi ada 11.
- Jika 0 ≤ a + b ≤ 9
  Maka untuk setiap pasangan (a, b) yang memenuhi akan ada 2 jenis himpunan bagian yang baik yaitu {n, n + 1, n + 2, k − 1, k} dan {n, n + 1, k − 2, k − 1, k} dengan k − n ≥ 5.
  Banyaknya pasangan (a, b) yang memenuhi = 10 + 9 + 8 + 7 + ⋯ + 1 = 55.

Banyaknya himpunan bagian yang baik = 11 + 2(55) = 121.
∴ Jadi, banyaknya himpunan bagian yang baik ada sebanyak 121.

20. Karena ∠BAC = 100^o BL garis bagi maka ∠ABL = 20^o dan ∠ALB = 60^o.



Alternatif :
Sesuai dalil sinus pada ΔABC didapat
$b = \frac{a \sin 40\hat{}o}{\sin 100^o} = \frac{a \sin 40^o}{\sin 80^o}$
Sesuai dalil sinus pada ΔABL didapat
$AL = \frac{b \sin 20^o}{\sin 60^o}$
Sesuai dalil sinus pada ΔABL didapat
$BL = \frac{b \sin 100^o}{\sin 60^o}$

$AL + BL = \frac{b(\sin 20^o + \sin 100^o)}{\sin 60^o} = \frac{a \sin 40^o (2 \sin 60^o \cos 40^o)}{\sin 60^o \cdot \cos 80^o}$

Mengingat 2 sin 40° cos 40° = sin 80° maka

AL + BL = a

∴ Jadi, nilai AL + BL adalah a.

21. X = {1, 2, 3, 4, 5}

    F = {A_1, A_2, ⋯, A_m}

    B ⊆ X dengan B memiliki 3 anggota

    Ada 2 pandangan terhadap F.

    - Pandangan 1, F dapat dikonstruksi

      Semua kemungkinan himpunan B ada sebanyak ${}_5C_3$ = 10, yaitu {1,2,3}, {1,2,4}, {1,2,5}, {1,3,4}, {1,3,5}, {1,4,5}, {2,3,4}, {2,3,5}, {2,4,5} dan {3,4,5}.

      Dengan memilih A_1 = {1,2}, A_2 = {3,4}, A_3 = {3,5}, A_4 = {4,5} maka apapun 3 anggota dari B akan didapat salah satunya adalah Ai dengan i = 1, 2, 3, 4. Akan dibuktikan bahwa m = 4 adalah minimum.

      Andaikan m < 4. Cukup dibuktikan m = 3 tidak memenuhi.

      Misalkan juga a, b, c, d, e ∈ {1, 2, 3, 4, 5} dengan a, b, c, d, e adalah 5 bilangan asli berbeda.

      Ada 3 kasus :

      - Kasus 1, jika H = $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ memiliki paling banyak 3 anggota.

        Ambil 2 anggota lain sebagai anggota B maka tidak mungkin ada A_i termuat di B.

      - Kasus 2, jika H = $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ memiliki tepat 4 anggota.

        Tanpa mengurangi keumuman misalkan H = $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ = {a, b, c, d}. Banyaknya himpunan bagian dari H dengan 2 anggota ada sebanyak ${}_4C_2$ = 6 > 3.

        Misalkan K = {a, b} adalah himpunan bagian H yang berbeda dengan A_i. Maka untuk B = {a, b, e} tidak ada A_i termuat di B.

      - Kasus 3, jika H = $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ memiliki tepat 5 anggota.

        Tanpa mengurangi keumuman misalkan A_1 = {a, b}, A_2 = {c, d} dan A_3 = {e, a}. Maka untuk B = {b, c, e} tidak ada A_i termuat di B.

      ∴ Jadi, nilai m minimum adalah 4.

    - Pandangan 2, F tidak dikonstruksi terlebih dulu

      Banyaknya himpunan bagian dari X dengan 2 anggota ada sebanyak ${}_5C_2$ = 10.

      Banyaknya himpunan bagian B dengan 2 anggota = ${}_3C_2$ = 3

      Maka agar memenuhi m > 10 − 3 = 7

      ∴ Jadi, nilai m minimum adalah 8.

22. $(x + 1)^2 = x + y + 2$ ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ (1)

    $(y + 1)^2 = y + z + 2$ ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ (2)

    $(z + 1)^2 = z + x + 2$ ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ (3)

    Jumlahkan ketiga persamaan didapat

    $x2 + y^2 + z^2 = 3$ ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ (4)

    Persamaan (1), (2) dan (3) juga setara dengan

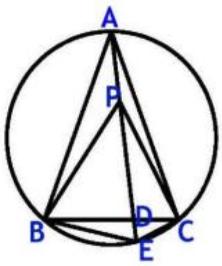
    $x(x + 1) = y + 1$ ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ (5)

y(y + 1) = z + 1 ························ (6)
z(z + 1) = x + 1 ························ (7)

- Jika sedikitnya salah satu di antara x, y atau z sama dengan −1
  Jika x = −1 maka pada pers (5) akan didapat y = −1
  Jika y = −1 maka pada pers (6) akan didapat z = −1
  Jika z = −1 maka pada pers (7) akan didapat x = −1
  Jadi, jika sedikitnya salah satu di antara x, y atau z sama dengan −1 maka yang lain akan bernilai −1. Maka (x, y, z) = (−1, −1, −1) juga penyelesaian.
- Jika x ≠ −1, y ≠ −1 dan z ≠ −1
  Kalikan persamaan (5), (6) dan (7) didapat
  xyz(x + 1)(y + 1)(z + 1) = (x + 1)(y + 1)(z + 1)
  Karena x ≠ −1, y ≠ −1 dan z ≠ −1 maka xyz = 1
  Sesuai ketaksamaan AM-GM
  $\frac{x^2+y^2+z^2}{3} \geq \sqrt[3]{x^2y^2z^2} = \sqrt[3]{(xyz)^2}$
  Karena terjadi kesamaan maka $x^2 = y^2 = z^2 = 1$
  Maka (x, y, z) = (1, 1, 1) adalah juga penyelesaian.

∴ Jadi, semua tripel bilangan real (x, y, z) yang memenuhi adalah (−1, −1, −1) dan (1, 1, 1).

23. Misalkan ∠BAC = ∠BPD = 2α.
Perpanjang PD hingga titik E dengan PB = PE.



Karena ∠BPD = 2α dan PB = PE maka ∠PEB = 90° − α.
Karena ∠PEB = ∠ACB = 2α serta menghadap talibusur yang sama dan pada bagian yang sama maka ABEC adalah segiempat talibusur.
∠BEP + ∠AEC + ∠BAC = 180°
(90° − α) + ∠AEC + 2α = 180°
∠AEC = 90° − α = ∠AEB
Misalkan F adalah titik tengah BE
Karena PB = PE dan dan F adalah pertengahan BE maka ∠PFB = 90°. Maka ED adalah garis bagi ∠BEC
Karena ED adalah garis bagi ΔBEC maka
$\frac{BE}{EC} = \frac{ED}{DC} = 2$
Jadi, BE = 2EC
Karena F adalah pertengahan BE maka BF = EC
Karena PB = PE dan BF = EC serta ∠PBF = ∠PEC maka ΔPBF ≡ PEC
Maka ∠BPF = ∠EPC = ∠DPC = α

∴ Jadi, terbukti bahwa ∠BAC = 2∠DPC

24. Karena p_i untuk i = 1, 2, 3, ⋯, n membentuk barisan aritmatika dengan beda b > 0 maka $p_i = p_1 + (i - 1)b > n$ dengan $p_1 > n$.
Misalkan qm dengan m = 1, 2, 3, ⋯, r adalah bilangan-bilangan prima ≤ n yang memenuhi $q_i < q_j$ untuk $i < j$.
Karena $p_i > n \geq q_m$ maka tidak mungkin q_m membagi p_i untuk semua nilai m dan i.
Perhatikan q_m buah bilangan p_i untuk i = 1, 2, 3, ⋯, q_m.
Karena p_i tidak habis dibagi q_m, kemungkinan sisa jika p_i dibagi q_m ada sebanyak qm − 1 ≤ n − 1. Karena p_i untuk i = 1, 2, ⋯, q_m ada sebanyak q_m maka sesuai Pigeon Hole Principle akan ada sedikitnya 2 di antara p_i untuk i = 1, 2, ⋯, q_m yang akan bersisa sama jika dibagi q_m. Misalkan kedua bilangan yang bersisa sama jika dibagi q_m adalah p_j dan p_k. $p_k - p_j = (p_1 + (k - 1)b) - (p_1 + (j - 1)b) = (k - j)b$ harus habis dibagi q_m. $k - j \leq q_m - 1 < q_m$
Karena q_m adalah bilangan prima dan $q_m > k - j$ maka qm tidak membagi (k − j).
Karena q_m membagi $p_k - p_j$ sedangkan qm tidak membagi k − j maka qm membagi b.
∴ Jadi, terbukti bahwa setiap bilangan prima p dengan p ≤ n, maka p membagi habis b.

Contoh barisan aritmetika $p_1, p_2, \cdots, p_{10}$, dengan beda positif dan pi prima untuk i = 1, 2, ⋯, 10 : 199, 409, 619, 829, 1039, 1249, 1459, 1669, 1879, 2089.

25. $A = \{\pm a_1, \pm a_2, \cdots, \pm a_{11}\}$
Denisikan J_X adalah jumlah anggota himpunan X.
Misalkan B adalah himpunan yang memiliki 11 anggota bilangan asli.
$B = \{a_1, a_2, \cdots, a_{11}\}$
Maka B adalah juga himpunan bagian A.
Banyaknya himpunan bagian tak kosong dari B = $2^{11} - 1 = 2047 > 2015$.
Andaikan ada salah satu himpunan bagian dari B yang jumlah seluruh angotanya habis dibagi 2005. Maka himpunan bagian tersebut adalah S yang juga merupakan himpunan bagian dari A dan bukti selesai.
Andaikan tidak ada salah satu himpunan bagian dari B yang jumlah seluruh angotanya habis dibagi 2005. Karena banyaknya himpunan bagan tak kosong dari B ada 2047 sedangkan kemungkian sisa jika dibagi 2015 ada 2015 kemungkinan maka sesuai Pigeon Hole Principle, sedikitnya 2 himpunan bagian dari B yang memiliki anggota dengan jumlah masing-masing anggota akan bersisa sama jika dibagi 2015. Misalkan kedua himpunan ini adalah C dan D.
Andaikan salah satu himpunan X atau D adalah himpunan bagian satunya lagi. Tanpa mengurangi keumuman misalkan D adalah himpunan bagian C.
Konstruksi himpunan baru E = C − (C∩D) yang didapat dari himpunan C dengan membuang semua anggota C yang juga anggota D.
Karena $J_C \equiv J_D$ (mod 2015) maka jelas $J_E \equiv 0$ (mod 2015) yang kontradiksi karena E adalah juga himpunan bagian dari B.
Jadi D tidak mungkin himpunan bagian dari C dan C tidak mungkin himpunan bagian dari D. Konstruksi dua himpunan P = C − (C∩D) dan Q = D − (C∩D) artinya himpunan P didapat dari himpunan C dengan membuang semua anggota himpunan C yang juga merupakan anggota himpunan D dan himpunan Q

didapat dari himpunan D dengan membuang semua anggota himpunan D yang juga merupakan anggota himpunan C.
Karena anggota yang dibuang sama maka $J_P \equiv J_Q$ (mod 2015).
Karena D bukan himpunan bagian dari C dan C juga bukan himpunan bagian dari D maka P dan Q tidak mungkin himpunan kosong.
Jelas anggota Q adalah bilangan-bilangan asli.
Konstruksi himpunan Q” yang beranggotakan negatif dari anggota Q.
Jelas Q” adalah juga himpunan bagian A.
Karena P dan Q adalah himpunan saling lepas maka P dan Q” adalah juga himpunan saling lepas.
Maka $J_{Q''} = -J_Q$
$J_P + J_{Q''} \equiv J_Q + J_{Q''} \equiv 0$ (mod 2015)
Maka $S = P \cup Q''$ adalah himpunan bagian A yang memenuhi $J_S \equiv 0$ (mod 2015)
∴ Jadi, terbukti bahwa bahwa terdapat himpunan bagian S dari A yang memenuhi.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2015

TINGKAT NASIONAL

HARI PERTAMA & HARI KEDUA

WAKTU : 8 JAM

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Nasional Tahun 2015

1. Albert, Bernard dan Cheryl sedang bermain kelereng. Di awal permainan masing-masing membawa 5 kelereng merah, 7 kelereng hijau dan 13 kelereng biru, sedangkan di kotak kelereng ada tak berhingga banyaknya kelereng. Pada satu langkah setiap anak diberi kebebasan membuang dua kelereng yang berbeda warna, kemudian menggantinya dengan dua kelereng dengan warna ketiga. Sebagai contoh, satu kelereng hijau dan satu kelereng merah dibuang, kemudian dua kelereng biru diambil dari kotak. Setelah serangkaian langkah (banyaknya langkah yang dilakukan masing-masing anak boleh berbeda) terjadilah percakapan berikut.

   Albert: “Saya hanya membawa kelereng berwarna merah.”

   Bernard: “Saya hanya membawa kelereng berwarna biru.”

   Cheryl: “Saya hanya membawa kelereng berwarna hijau.”

   Siapa sajakah yang pasti berkata bohong?

2. Untuk setiap bilangan asli a, b notasikan dengan $[a, b]$ kelipatan persekutuan terkecil dari a dan b dan notasikan dengan (a, b) faktor persekutuan terbesar dari a dan b. Tentukan semua bilangan asli n sehingga

$$4\sum_{k=1}^{n}[n,k] = 1 + \sum_{k=1}^{n}(n,k) + 2n^2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n,k)}$$

3. Diberikan segitiga lancip ABC. Lingkaran Γ_B dengan pusat O_B, adalah lingkaran yang melalui titik A dan B, serta menyinggung AC di titik A. Dengan cara yang sama didefinisikan lingkaran Γ_C dengan pusat O_C. Misalkan garis tinggi segitiga ABC melalui B dan C, berturut-turut memotong lingkaran luar ABC di titik X dan Y. Buktikan bahwa titik A, titik tengah segmen XY dan titik tengah segmen O_BO_C, ketiganya terletak pada satu titik garis lurus.

4. Misalkan pasangan fungsi f, $g : R^+ \to R^+$ memenuhi persamaan fungsi

$$f(g(x)y + f(y)) = (y + 2015)f(x)$$

   untuk setiap $x, y \in R^+$.

   a. Buktikan bahwa $g(x) = \frac{f(x)}{2015}$ untuk setiap $x \in R^+$.
   b. Berikan contoh pasangan fungsi yang memenuhi persamaan di atas dan $f(x)$, $g(x) \leq 1$ untuk setiap $x \in R^+$.

5. Misalkan a, b, c, d adalah bilangan asli sehingga $a | c^d$ dan $b | d^c$. Buktikan bahwa $ab | (cd)^{\text{maks}\{a,\, b\}}$.

   Catatan: maks$\{a, b\}$ menyatakan nilai terbesar dari a atau b.

6. Diberikan segitiga lancip ABC dengan titik pusat lingkaran luar O. Garis AO memotong lingkaran luar segitiga ABC lagi di titik D. Misalkan P titik pada sisi BC. Garis melalui P tegak lurus AP memotong garis DB dan DC berturut-turut di E dan F. Garis melalui D tegak lurus BC memotong EF di titik Q. Buktikan bahwa $EQ = FQ$ jika dan hanya jika $BP = CP$.

7. Misalkan a, b, c bilangan real positif. Buktikan ketaksamaan

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}}+\sqrt{\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}}+\sqrt{\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}} \geq 3$$

8. Diketahui ada 3 gedung berbentuk sama yang lokasinya membentuk segitiga sama sisi. Masing-masing gedung memiliki 2015 lantai dengan setiap lantainya tepat memiliki 1 jendela. Pada ketiga gedung, setiap lantai 1 tidak berpenghuni, sedangkan masing-masing lantai yang lain mempunyai tepat satu penghuni.

   Semua jendela akan diwarnai dengan salah satu dari warna merah, hijau, atau biru. Sang penghuni masing-masing lantai pada suatu gedung dapat melihat warna jendela pada kedua gedung yang lain untuk lantai yang sama dan satu lantai tepat di bawahnya, tetapi dia tidak bisa melihat warna jendela-jendela yang lain pada kedua gedung tersebut. Selain itu, sang penghuni tidak dapat melihat warna jendela dari lantai manapun pada gedungnya sendiri. Sebagai contoh, penghuni lantai 10 dapat melihat warna jendela lantai 9 dan 10 untuk kedua gedung yang lain (total 4 jendela) dan dia tidak dapat melihat warna jendela lainnya.

   Kita ingin mewarnai jendela-jendela tersebut agar setiap penghuni dapat melihat paling sedikit 1 jendela dari setiap warna. Ada berapa cara mewarnai jendela-jendela tersebut?

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2015

TINGKAT NASIONAL

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Nasional Tahun 2015

1. Penyelesaian :

   Untuk Bernard: Misalkan a_n, b_n, c_n adalah jumlah kelereng merah, hijau, dan biru yang dimilikinya setelah n putaran. Dan $f_n = |a_n - b_n|$ Mudah dilihat bahwa f_n mod 3 adalah konstan, jadi pada akhirnya $f = |a - b| = 2$, jadi Bernard memiliki kelereng merah atau hijau, jadi dia berbohong. Hal yang sama berlaku untuk Cheryl.

   Untuk Albert: (5,7,13) → (4,9,12) → (3,11,11) → (5,10,10) → ... → (23,1, 1) → (25,0,0).

2. Penyelesaian :

   Kami tahu itu $nk = (n,k)[n,k] \Rightarrow [n,k] = \dfrac{nk}{(n,k)}$

   Jadi persamaan yang diberikan disederhanakan menjadi,
$$1 + \sum_{k=1}^{n}(n,k) + \sum_{k=1}^{n}\frac{2n(n-2k)}{(n,k)} = 0$$
   Dan juga, $(n,k) = (n, n-k)$

   Perhatikan itu,
$$\frac{2n(n-2(n-k))}{(n,n-k)} = \frac{2n(2k-n)}{(n,k)} = -\frac{2n(n-2k)}{(n,k)}$$
   Karena itu,
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2n(n-2k)}{(n,k)} = \frac{2n(n-2n)}{(n,n)} = -2n$$

   (Jika, $k = \frac{n}{2}$ maka $\frac{2n\left(n-\frac{2n}{2}\right)}{\left(n,\frac{n}{2}\right)} = 0$. Oleh karena itu hanya -2n yang tersisa dalam jumlah akhir)

   Jadi kita harus menemukan n sedemikian rupa sehingga:
$$1 + \sum_{k=1}^{n}(n,k) - 2n = 0$$
   Kasus 1: Jika n adalah bilangan prima
$$1 + (n-1) + n - 2n = 0$$
   Oleh karena itu semua bilangan prima n memenuhi kondisi yang diberikan.

   Kasus 2: Jika n bukan bilangan prima

   Kita buktikan bahwa tidak ada solusi untuk hal ini. Cukup dengan membuktikan:
$$\sum_{k=1}^{n}(n,k) + 1 > 2n$$

$$\sum_{k=1}^{n}(n,k) \geq 2n$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n,k) \geq n$$

Kita tahu bahwa

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n,k) = n-1$$

jika n prima. Jadi untuk semua n bukan prima,

$$\sum_{k=1}^{n-1}(n,k) \geq n$$

Itulah yang perlu kita buktikan.
Oleh karena itu, tidak ada solusi untuk n non-prima.

3. Penyelesaian :
Misalkan $BX \cap AC \equiv E, CY \cap AB \equiv F, H \equiv BX \cap CY$
Misalkan M, N masing-masing adalah titik tengah XY, O_BO_C. Kita akan menunjukkan bahwa kedua AM, AN melalui O, yaitu pusat lingkaran △ABC, yang akan menyelesaikan soal.
Klaim: AM melewati O.
Bukti : $\angle XYA = \angle XBA = 90^\circ - \angle BAC = \angle YCA = \angle YXA$,
jadi $AM \perp XY \implies \angle YAM = 90^\circ - \angle XYA = \angle BAC$.
Dengan begitu, $\angle YAB = \angle YCB = 90^\circ - \angle ABC$.
Oleh karena itu, $\angle BAM = \angle YAM - \angle YAB = 90^\circ - \angle ACB = \angle BAO$, jadi AM melewati O yang membuktikan klaim tersebut.

Klaim: AN melewati O.
Bukti : Perluas BA ke titik S sehingga $AS = AB$. $\Delta AO_BB \sim \Delta AO_CC$ menggunakan pengejaran sudut sederhana $\Rightarrow \frac{AO_B}{AO_C} = \frac{AB}{AC} = \frac{AS}{AC}$.
Dan juga, $\angle O_BAO_C = 180^o - \angle BAC = \angle SAC$, jadi $\Delta O_BAO_C \sim \Delta SAC$.
Misalkan T adalah titik tengah CS. Maka kesamaan tersebut menyiratkan bahwa $\angle O_BAM = \angle SAT$. Karena A, T masing-masing adalah titik tengah dari BS, CS, maka Teorema Titik Tengah menyiratkan bahwa $AT||BC \Rightarrow \angle SAT = \angle ABC \Rightarrow \angle O_BAM = \angle ABC$. Maka kita lihat bahwa $\angle BAN = \angle O_BAN - \angle O_BAB = \angle ABC - (90^o - \angle BAC) = 90^O - \angle ACB = \angle BAO$ jadi AN melewati O yang membuktikan klaim tersebut.
Kedua klaim ini menyelesaikan masalah karena M, N keduanya terletak pada AO.

4. Penyelesaian :

Kita punya $f\big(g(x)y + f(x) + zg(x)\big) - g(g(x)y + f(x)$, untuk semua $x, y, z \in \mathbb{R}^+$.
Jadi, $f(T+Z) - f(T) = \frac{Zf(x)}{g(x)}$ untuk semua $x, T, Z \in \mathbb{R}^+$ bahwa $T > f(x)$.

Untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}^+$ terdapat $K > f(a), f(b)$, jadi $f(K+Z) - f(K) = \frac{Zf(a)}{g(a)} = \frac{Zf(b)}{g(b)}$
Untuk semua $Z \in \mathbb{R}^+$.
Jadi, $\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f(b)}{g(b)}$. Dengan kata lain, $f(x) = cg(x)$, untuk semua $x \in \mathbb{R}^+$ untuk beberapa konstanta positif c. Masukkan kondisi yang diberikan kepada kami $g\big((y+c)g(x)\big) = (y+2015)g(x)$ untuk semua $x, y \in \mathbb{R}^+$. Kita punya,
$(y+2015)(z+2015)g(x) = (y+2015)g((z+c)g(x)) = g((y+c)g((z+c)g(x))) = g((y+c)(z+2015)g(x))$
dan $g\big((y+c)(z+2015)g(x)\big) = ((y+c)(z+2015) - c + 2015)g(x)$ untuk semua $x, y, z \in \mathbb{R}^+$.
Jadi, $(1+2015)(1+2015) = (1+c)(1+2015) - c + 2015 \to c = 2015$

Dan contoh fungsi g tersebut adalah $g(x) = \begin{cases} 1, & \text{for } 0 < x < 1 \\ x, & \text{for } 1 \le x \end{cases}$

5. Penyelesaian :
   Misalkan p|ab-prima. Kita akan membandingkan $v_p(ab)$ dan $v_p((cd)^{\max(a,b)})$
   $v_p(a) \le a$ - mudah ditunjukkan

   Jika $p|a, p|b \to p|c, p|d$ dan dari $v_p(a) \le a$, maka $v_p(ab) \le a+b \le 2\max(a,b) \le \max(a,b)\ (v_p(cd)) = v_p((cd)^{\max(a,b)})$
   Jika $p|a$, $p \nmid |b$ maka $v_p(ab) = v_p(a) \le \max(a,b) \le v_p(c^{\max(a,b)}) \le v_p((cd)^{\max(a,b)})$

6. Penyelesaian :
   Klaim 1: AEDF adalah segiempat siklik.
   ∠ABC = ∠AEF = ∠ADF ⟹ AEDF adalah segiempat siklik.
   Klaim 2:- Selain itu, AEDF adalah segi empat harmonik.
   Perhatikan bahwa karena kesamaan segitiga ABE dan ACF, kita memperoleh bahwa
   $\frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF} = \frac{BE}{CF}$
   Sekarang dengan Teorema Menelaus kita memperoleh bahwa
   $$\frac{DF}{FC} \times \frac{CP}{PB} \times \frac{BE}{ED} = 1 \implies \frac{DF}{FC} = \frac{ED}{EB} \implies \frac{EB}{FC} = \frac{ED}{DF} = \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{AF} \implies (A, D; E, F) = -1 \implies$$
   AEDF adalah segiempat harmonic
   Sekarang perhatikan bahwa DA adalah D-Symmedian dari △EDF. Juga ∠QDC = ∠ACB = ∠ADB ⟹ AD dan DQ isogonal. Jadi, Q pastilah titik tengah EF.
   Sekarang, balikkan langkah-langkah ini dan dapatkan bahwa P adalah titik tengah EF dengan menggunakan fakta bahwa Q adalah titik tengah EF.

7. Penyelesaian :

$$\sqrt{\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}} \geq \frac{2(y+z)(z+2x+y)}{(z+x)(2y+z+x)+(x+y)(2z+x+y)}. \qquad (1)$$

$$\left(\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\right)\frac{\left((z+x)(2y+z+x)+(x+y)(2z+x+y)\right)^2}{(y+z)^2(z+2x+y)^2}-8\frac{y^2+z^2+xy+xz}{(y+z)(z+2x+y)}$$

$$=\frac{\left(y^2+z^2+xy+xz\right)\left(-z^2-y^2+2x^2\right)^2}{(z+x)(x+y)(y+z)^2(z+2x+y)^2} \geq 0. \qquad (2)$$

$$2\frac{y^2+z^2+xy+xz}{(y+z)(z+2x+y)}-1=\frac{(y-z)^2}{(y+z)(z+2x+y)} \geq 0. \qquad (3)$$

8. Penyelesaian :

Kami menggunakan notasi untuk warna: merah = 1, hijau = 2, biru = 3.

Nyatakan A,B,C sebagai bangunan dan a_k (masing-masing b_k, c_k) sebagai warna jendela yang terletak di lantai k gedung A (masing-masing B,C).

Jika warna jendela di lantai k membentuk triplet $T_k = (a_k, b_k, c_k)$, kami menentukan nilai yang mungkin untuk triplet $T_{k+1} = (a_{k+1}, b_{k+1}, c_{k+1})$, di mana $k \in \mathbb{N}$, $k \leq 2014$.

Kasus 1: T_k mengandung satu warna.

Asumsikan $T_k = (1,1,1)$. Setiap pasangan (a_{k+1}, b_{k+1}), (b_{k+1}, c_{k+1}), (a_{k+1}, c_{k+1}) harus mengandung kedua bilangan 2 dan 3, mustahil. Oleh karena itu, tidak ada solusi T_{k+1} dalam kasus ini.

Kasus 2: T_k mengandung 2 warna berbeda.

Asumsikan $T_k = (1,1,2)$. Menghasilkan dua kemungkinan solusi, $T_{k+1} \in ((2,3,3), (3,2,3))$.

Kasus 3: T_k mengandung 3 warna berbeda. Asumsikan $T_k = (1,2,3)$. Hasilkan dua kemungkinan solusi, $T_{k+1} \in ((2,3,1), (3,1,2))$.

Kesimpulan: Untuk konfigurasi T_k yang valid (2 atau 3 warna berbeda), hasilkan tepat 2 kemungkinan konfigurasi untuk T_{k+1}.

Hasil: Jumlah cara mewarnai jendela adalah $N = n_1 \cdot 2^{2014}$, di mana n_1 adalah jumlah konfigurasi yang valid untuk T_1.

Untuk 2 warna berbeda:

Kita menggunakan dua kali warna x dan sekali warna y, di mana $x, y \in \{1,2,3\}$, $x \neq y$. Terdapat 6 kemungkinan pasangan terurut (x,y) dan untuk setiap (x,y) terdapat 3 triplet T_1 ((x,x,y), (x,y,x), (y,x,x)). Oleh karena itu, terdapat $n_2 = 6 \cdot 3 = 18$ kemungkinan triplet T_1 dengan 2 warna berbeda.

Untuk 3 warna berbeda, terdapat $n_3 = 3! = 6$ kemungkinan triplet T_1.

$n_1 = n_2 + n_3 = 24 = 2^3 \cdot 3$ dan hasilnya adalah jumlah cara mewarnai jendela:

$N = 3 \cdot 2^{2017}$.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2016

TINGKAT KABUPATEN/KOTA

BIDANG MATEMATIKA

WAKTU : 180 MENIT

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Kabupaten/Kota Tahun 2016

1. Jika a, b, c, d, e merupakan bilangan asli dengan $a < 2b$, $b < 3c$, $c < 4d$, $d < 5e$ dan $e < 100$, maka nilai maksimum dari a adalah …
2. Rudi membuat bilangan asli dua digit. Probabilitas bahwa kedua digit bilangan tersebut merupakan bilangan prima dan bilangan tersebut bersisa 3 jika dibagi 7 adalah …
3. Pada segitiga ABC, titik M terletak pada BC sehingga $AB = 7$, $AM = 3$, $BM = 5$ dan $MC = 6$. Panjang AC adalah …
4. Diberikan a dan b bilangan real dengan $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 20$. Nilai maksimum dari $a - 5b$ adalah …
5. Pada segitiga ABC, titik X, Y dan Z berturut-turut terletak pada sinar BA, CB dan AC sehingga $BX = 2BA$, $CY = 2CB$ dan $AZ = 2AC$. Jika luas ΔABC adalah 1, maka luas ΔXYZ adalah …
6. Banyaknya bilangan asli n yang memenuhi sifat hasil jumlah n dan suatu pembagi positif n yang kurang dari n sama dengan 2016 adalah …
7. Misalkan a adalah bilangan real sehingga polinomial $p(x) = x^4 + 4x + a$ habis dibagi oleh $(x - c)^2$ untuk suatu bilangan real c. Nilai a yang memenuhi adalah …
8. Anak laki-laki dan anak perempuan yang berjumlah 48 orang duduk melingkar secara acak. Banyaknya minimum anak perempuan sehingga pasti ada enam anak perempuan yang duduk berdekatan tanpa diselingi anak laki-laki adalah …
9. Misalkan (a, b, c, d, e, f) adalah sebarang pengurutan dari $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Banyaknya pengurutan sehingga $a + c + e > b + d + f$ adalah …
10. Misalkan n_1, n_2, n_3, … bilangan-bilangan asli yang membentuk barisan aritmatika. Banyaknya nilai di himpunan $\{1, 2, 3, \cdots, 1000\}$ yang mungkin menjadi nilai $n_{n2} - n_{n1}$ adalah …
11. Segitiga ABC mempunyai panjang sisi $AB = 20$, $AC = 21$ dan $BC = 29$. Titik D dan E terletak pada segmen garis BC, dengan $BD = 8$ dan $EC = 9$. Besar $\angle DAE$ adalah … derajat.
12. Bilangan real t sehingga terdapat dengan tunggal tripel bilangan real (x, y, z) yang memenuhi $x^2 + 2y^2 = 3z$ dan $x + y + z = t$ adalah …
13. Palindrom adalah bilangan yang sama dibaca dari depan atau dari belakang. Sebagai contoh 12321 dan 32223 merupakan palindrom. Palindrom 5 digit terbesar yang habis dibagi 303 adalah …

14. Diberikan barisan $\{a_n\}$ dan $\{b_n\}$ dengan $a_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$ dan $b_n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}$ untuk setiap bilangan asli n. Misalkan $S_n = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n$. Banyaknya bilangan asli n dengan $n \leq 2016$ sehingga S_n merupakan bilangan rasional adalah …

15. Diberikan persegi $ABCD$ dengan panjang sisi 1. Titik K dan L berturut-turut terletak pada segmen garis BC dan DC sehingga keliling dari ΔKCL adalah 2. Luas minimum dari ΔAKL adalah …

16. Banyaknya pasangan terurut bilangan asli (a, b, c) dengan $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ sehingga max $\{a, b, c\}$ < 2 min $\{a, b, c\}$ adalah …

17. Banyaknya bilangan asli $n \in \{1, 2, 3, \cdots, 1000\}$ sehingga terdapat bilangan real positif x yang memenuhi $x^2 + \lfloor x \rfloor^2 = n$ adalah …

18. Misalkan x, y, z bilangan real positif yang memenuhi

$$3\log_{x}(3y) = 3\log_{3x}(27z) = \log_{3x^4}(81yz) \neq 0$$

Nilai dari x^5y^4z adalah …

19. Diberikan empat titik pada satu lingkaran Γ dalam urutan A, B, C, D. Sinar garis AB dan DC berpotongan di E, dan sinar garis AD dan BC berpotongan di F. Misalkan EP dan FQ menyinggung lingkaran Γ berturut-turut di P dan Q. Misalkan pula bahwa EP = 60 dan FQ = 63, maka panjang EF adalah …

20. Pada sebuah bidang datar, terdapat 16 garis berbeda dan n titik potong berbeda. Nilai minimal n sehingga dapat dipastikan terdapat 3 kelompok garis yang masing-masing memuat garis-garis berbeda yang saling sejajar adalah …

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2016

TINGKAT KABUPATEN/KOTA

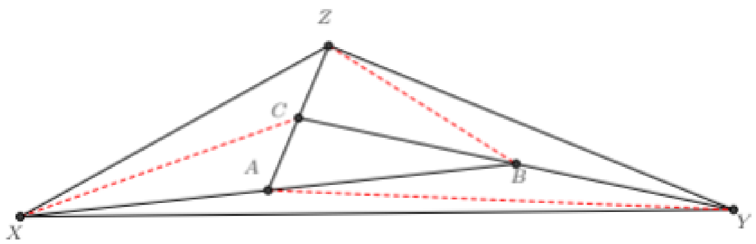
SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Kabupaten/Kota Tahun 2016

1. $e \leq 99 \Rightarrow d < 495$
   $d \leq 494 \Rightarrow c < 1976$
   $c \leq 1975 \Rightarrow b < 5925$
   $b \leq 5924 \Rightarrow a < 11848$
   Jadi, nilai maksimum a adalah 11847.
2. Misalkan bilangan yang dibuat Rudi adalah 10a + b. Diketahui bahwa
   $$10a + b \equiv 3 \bmod 7 \Leftrightarrow 3a + b \equiv 3 \bmod 7$$
   karena $a, b \in \{2, 3, 5, 7\}$ maka tinggal dibagi kasus
   - a = 2, diperoleh $6 + b \equiv 3 \bmod 7 \Leftrightarrow b \equiv 4 \bmod 7$. Tidak ada nilai b yang memenuhi.
   - a = 3, diperoleh $9 + b \equiv 3 \bmod 7 \Leftrightarrow b \equiv 1 \bmod 7$. Tidak ada nilai b yang memenuhi.
   - a = 5, diperoleh $15 + b \equiv 3 \bmod 7 \Leftrightarrow b \equiv 2 \bmod 7$. Diperoleh b = 2.
   - a = 7, diperoleh $21 + b \equiv 3 \bmod 7 \Leftrightarrow b \equiv 3 \bmod 7$. Diperoleh b = 3.

   Jadi, ada dua bilangan yang memiliki sifat kedua digit penyusunnya berupa bilangan prima dan bilangan tersebut bersisa 3 jika dibagi 7 yaitu 52 dan 73. Sehingga peluangnya adalah $\frac{2}{90} = \frac{1}{45}$.
3. Dengan Dalil Stewart diperoleh
   $$AB^2 \times MC + AC^2 \times BM = AM^2 \times BC + BC \times BM \times MC$$
   $$\Leftrightarrow 49 \times 6 + AC^2 \times 5 = 9 \times 11 + 11 \times 5 \times 6$$
   $$\Leftrightarrow 5AC^2 = 135$$
   $$\Leftrightarrow AC = 3\sqrt{3}$$
4. $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 20 \Rightarrow a = b + 40\sqrt{b} + 400$, sehingga
   $$a - 5b = b + 40\sqrt{b} + 400 - 5b =- 4(\sqrt{b} - 5)^2 + 500$$
   Oleh karena itu, nilai maksimum dari a − 5b adalah 500, dicapai ketika a = 625 dan b = 25.
5. Perhatikan gambar berikut!



   Kita punya
   $$[ABC] = [ABY] = [AXY]$$
   $$[ABC] = [BCZ] = [BZY]$$
   $$[ABC] = [ACX] = [CZX]$$
   Sehingga [XYZ] = 7[ABC] = 7.

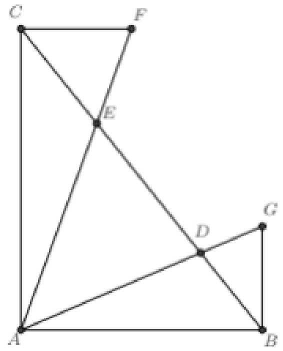
6. Misalkan a < n adalah faktor positif dari n sehingga a + n = 2016. Perhatikan bahwa a membagi 2016. Sehingga a adalah faktor positif dari 2016. Karena 2016 = $2^5 \times 3^2 \times 7$ maka faktor positif dari 2016 ada sebanyak 6 × 3 × 2 = 36. Dan karena n = 2016 − a ≥ 1 serta a < n maka $a \neq 2016$ dan $a \neq 1008$. Sehingga banyaknya bilangan asli n yang memenuhi ada 36 − 2 = 34.
7. Jelas $c \neq 0$. Karena $(x - c)^2$ faktor dari $p(x)$ maka diperoleh
$$x^4 + 4x + a = (x^2 - 2cx + c^2)(x^2 + bx + \frac{a}{c^2})$$
dengan menjabarkan ruas kanan diperoleh
$$x^4 + 4x + a = x^4 + (b - 2c)x^3 + \left(\frac{a}{c^2} - 2bc + c^2\right)x^2 + \left(bc^2 - \frac{2a}{c}\right)x + a$$
Oleh karena itu,
$$b - 2c = 0 \Rightarrow b = 2c$$
$$\frac{a}{c^2} - 2bc + c^2 = 0 \Rightarrow a = 3c^4$$
$$bc^2 - \frac{2a}{c} = 4 \Rightarrow c^3 = -1 \Rightarrow c = -1$$
sehingga $a = 3c^4 = 3$.
8. Misalkan n menyatakan jumlah anak laki-laki dan misalkan pula tempat duduk diantara dua laki-laki yang berdekatan kita sebut sebagai ruang. Jika n ≥ 8 maka ada minimal 8 ruang yang bisa ditempati oleh anak perempuan. Sementara itu, jumlah anak perempuan maksimal ada 40. Jadi, kita dapat mengatur anak perempuan tersebut ke dalam ruang-ruang sehingga tiap ruang maksimal ada 5 anak perempuan.
Jika n = 7 maka ada 7 ruang yang bisa ditempati oleh 41 anak perempuan. Berdasarkan PHP pasti ada setidaknya satu ruang yang ditempati oleh setidaknya 6 anak perempuan. Jadi, jumlah anak perempuan minimum ada 41.
9. Karena 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21, dan a + c + e > b + d + f maka 6 ≤ b + d + f ≤ 10. WLOG a < c < e dan b < d < f.
   - Jika b + d + f = 6 maka (b, d, f) = (1, 2, 3) dan (a, c, e) = (4, 5, 6).
   - Jika b + d + f = 7 maka (b, d, f) = (1, 2, 4) dan (a, c, e) = (3, 5, 6).
   - Jika b + d + f = 8 maka
     – (b, d, f) = (1, 2, 5) dan (a, c, e) = (3, 4, 6),
     – (b, d, f) = (1, 3, 4) dan (a, c, e) = (2, 5, 6)
   - Jika b + d + f = 9 maka
     – (b, d, f) = (1, 2, 6) dan (a, c, e) = (3, 4, 5),
     – (b, d, f) = (1, 3, 5) dan (a, c, e) = (2, 4, 6),
     – (b, d, f) = (2, 3, 4) dan (a, c, e) = (1, 5, 6)
   - Jika b + d + f = 10 maka
     – (b, d, f) = (1, 3, 6) dan (a, c, e) = (2, 4, 5),
     – (b, d, f) = (1, 4, 5) dan (a, c, e) = (2, 3, 6),
     – (b, d, f) = (2, 3, 5) dan (a, c, e) = (1, 4, 6)

   Jadi, pasangan (a, b, c, d, e, f) yang memenuhi ada sebanyak 10 × 3! × 3! = 360.
10. Misalkan $n_1 = a$ dan beda barisan aritmatika tersebut adalah b dengan a, b > 0.

$$n_{n2} - n_{n1} = n_{a+b} - n_a = a + (a + b - 1)b - (a + (a - 1)b) = b^2$$

karena $31^2 < 1000 < 32^2$ maka banyaknya nilai yang mungkin dari $n_{n2} - n_{n1}$ adalah 31.

11. Buat garis melalui B sejajar AC yang memotong perpanjangan AD di G. Demikian pula, buat garis melalui C sejajar AB yang memotong perpanjangan AE di F, seperti gambar berikut.



Dengan memanfaatkan kesebangunan antara $\triangle BDG$ dan $\triangle ADC$ diperoleh BG = $\frac{8}{21} \times 21 = 8$ Dengan cara serupa diperoleh pula CF = 9. Misalkan ∠CAF = β dan ∠BAG = α. Maka diperoleh

$$\tan \alpha = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} \text{ dan } \tan \beta = \frac{9}{21} = \frac{3}{7}$$

sehingga didapat

$$\begin{aligned} \tan \angle DAE &= \tan(90 - (\alpha + \beta)) \\ &= \cot(\alpha + \beta)) \\ &= \frac{1}{\tan(\alpha + \beta))} \\ &= \frac{1 - \tan \alpha \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta} \\ &= \frac{1 - \frac{2}{5} \times \frac{3}{7}}{\frac{2}{5} + \frac{3}{7}} \\ &= \frac{35 - 6}{14 + 15} = 1 \end{aligned}$$

Jadi, ∠DAE = 45∘.

12.

$$3t = 3x + 3y + 3z = 3x + 3y + x^2 + 2y^2 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + 2\left(y + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{27}{8}$$

Agar memiliki penyelesaian tunggal maka haruslah $3t = -\frac{27}{8} \Leftrightarrow t = -\frac{9}{8}$

13. Misalkan palindrom lima digit tersebut adalah n = $\overline{abcba}$ = 10001a + 1010b + 100c. Karena habis dibagi 303 = 3 × 101 maka

$$n = 10001a + 1010b + 100c \equiv 2a - c \equiv 0 \bmod 101$$

dan

$$n = 10001a + 1010b + 100c \equiv 2a + 2b + c \equiv 0 \bmod 3$$

karena 2a − c ≡ 0 mod 101 dan − 9 ≤ 2a − c ≤ 18 maka 2a − c = 0 ⇒ c = 2a. Agar n maksimal pilih a = 4. Akibatnya

$$2a + 2b + c \equiv 0 \bmod 3 \Leftrightarrow 16 + 2b \equiv 0 \bmod 3 \Leftrightarrow b \equiv 1 \bmod 3$$

maka nilai b terbesar adalah b = 7. Jadi, n = 47874.

14. Perhatikan bahwa

$$a_k b_k = \frac{1}{k\sqrt{k}} \times \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)+\sqrt{1+\frac{1}{k}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k}(k+1)+k\sqrt{k+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)$$

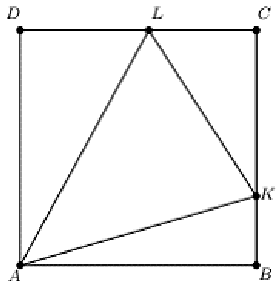
$$= \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

Sehingga

$$S_n = \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + ... + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

Agar S_n bernilai rasional maka $n + 1$ harus berupa bilangan kuadrat. Mengingat $2 \le n + 1 \le 2017$, dan 442 < 2017 < 452, maka nilai n yang mungkin ada sebanyak 43.

15. Perhatikan gambar berikut.



Misalkan CK = a dan CL = b dengan 0 < a, b < 1. Karena keliling $\triangle KCL = 2$ diperoleh

$$a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = 2 \Leftrightarrow a + b + \sqrt{(a + b)^2 - 2ab} = 2$$

misalkan a + b = x dan ab = y dengan 0 < x < 2 dan 0 < y < 1 diperoleh

$$x + \sqrt{x^2 - 2y} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2y = 4 - 4x + x^2 \Leftrightarrow y = 2x - 2$$

selain itu berdasarkan AM - GM diperoleh pula $a + b \ge 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow x \ge 2\sqrt{y}$. Yang berakibat

$$x \ge 2\sqrt{2x - 2} \Leftrightarrow x^2 - 8x + 8 \ge 0$$

sehingga $x \le 4 - 2\sqrt{2}$ atau $x \ge 4 + 2\sqrt{2}$. Akan tetapi, karena x < 2 maka diperoleh

$$x \le 4 - 2\sqrt{2}.$$

Di lain pihak

$$[AKL] = 1 - [ABK] - [KCL] - [ADL]$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(1 - a) - \frac{1}{2}ab - \frac{1}{2}(1 - b)$$

$$= \frac{1}{2}(a + b - ab)$$

$$= \frac{1}{2}(x - y)$$

$$= \frac{1}{2}(2-x) \geq \frac{1}{2}\left(2-\left(4-2\sqrt{2}\right)\right) = \sqrt{2}-1$$

Jadi, luas $\triangle AKL$ minimal adalah $\sqrt{2} - 1$ yang dicapai saat a = b = $2 - \sqrt{2}$

16. WLOG a ≤ b ≤ c, maka diperoleh c < 2a.
    a. Jika a = 1 maka c = 1 dan b = 1, maka diperoleh pasangan (1, 1, 1).
    b. Jika a = 2 maka
        - c = 2 dan b = 2, diperoleh pasangan (2, 2, 2)
        - c = 3 dan b = 2, 3, diperoleh pasangan (2, 2, 3) dan (2, 3, 3) ada sebanyak 2 × 3 = 6 pasangan.
    c. Jika a = 3 maka
        - c = 3 dan b = 3, diperoleh pasangan (3, 3, 3)
        - c = 4 dan b = 3, 4, diperoleh pasangan (3, 3, 4) dan (3, 4, 4) ada sebanyak 2 × 3 = 6 pasangan.
        - c = 5 dan b = 3, 4, 5, diperoleh pasangan (3, 3, 5),(3, 4, 5) dan (3, 5, 5) ada sebanyak 3 + 6 + 3 = 12 pasangan.
    d. Jika a = 4 maka
        - c = 4 dan b = 4, diperoleh pasangan (4, 4, 4)
        - c = 5 dan b = 4, 5, diperoleh pasangan (4, 4, 5) dan (4, 5, 5) ada sebanyak 2 × 3 = 6 pasangan.
    e. Jika a = 5 maka c = 5 dan b = 5, maka diperoleh pasangan (5, 5, 5).

    Jadi, total ada 1 + 7 + 19 + 7 + 1 = 35 pasangan.
17. Perhatikan bahwa $x^2 = n - [x]^2$ sehingga x^2 adalah bilangan bulat positif. Oleh karena itu, $x = \sqrt{a}$ untuk suatu bilangan a bulat positif. Misalkan $a = k^2 + m$ dengan $0 \leq m \leq 2k$, maka diperoleh
    $$n = k^2 + m + k^2 = 2k^2 + m$$
    Untuk k = 1, 2, 3, · · ·, 21 maka nilai n yang mungkin ada sebanyak
    $$\sum_{k=1}^{21}(2k+1) = 483$$
    Sedangkan untuk k = 22 perlu diperhatikan bahwa nilai m yang mungkin hanya m = 0, 1, 2, 3, · · ·, 32. Jadi ada 33 nilai n yang mungkin.
    Untuk k ≥ 23 akan berakibat n > 1000.
    Jadi, total banyaknya kemungkinan nilai n adalah 483 + 33 = 516.
18. Misalkan
    $$3\log_x(3y) = 3\log_{3x}(27z) = \log_{3x^4}(81yz) = k$$
    Berdasarkan definisi fungsi logaritma diperoleh
    $$\log_x(3y) = \frac{k}{3} \Rightarrow 3y = x^{\frac{k}{3}} \Rightarrow x^k = 3^3y^3 \text{ .... } (1)$$
    $$\log_{3x}(27z) = \frac{k}{3} \Rightarrow 27z = (3x)^{\frac{k}{3}} \Rightarrow (3x)^k = 3^9z^3 \text{ .... } (2)$$
    $$\log_{3x^4}(81yz) = k \Rightarrow 81yz = (3x^4)^k \text{ .... } (3)$$
    Sehingga diperoleh
    $$\frac{x^k \cdot 3^k \cdot x^k}{3^k \cdot x^{4k}} = \frac{3^3y^3 \cdot 3^9z^3}{3^4yz} \Leftrightarrow \frac{1}{x^{2k}} = 3^8y^2z^2 \Leftrightarrow x^k = \frac{1}{3^4yz}$$

Dari pers.(1) diperoleh

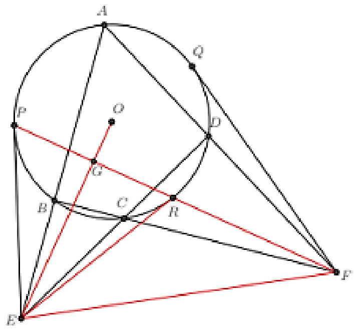
$$\frac{1}{3^4 yz} = 27y^3 \Rightarrow y^4 z = \frac{1}{3^7}$$

Dari pers.(3) diperoleh

$$(3x^4)^k = \left(\frac{1}{x}\right)^k \Rightarrow 3x^4 = \frac{1}{x} \Rightarrow x^5 = \frac{1}{3}$$

Jadi, $x^5y^4z = \frac{1}{3^8}$

19. Misalkan ER adalah garis singgung (lain) yang ditarik dari titik E. Misalkan O adalah pusat lingkaran Γ, dan G perpotongan antara EO dan PR, seperti terlihat pada gambar berikut



Jelas bahwa PG = GR. Perhatikan pula bahwa P, R, F segaris. Hal ini karena PR adalah polar dari E, sementara itu F juga terletak pada polar E.

Selanjutnya dengan dalil phytagoras pada $\triangle EPG$ dan $\triangle EFG$ diperoleh

$$EP^2 - PG^2 = EF^2 - FG^2$$

$$\Leftrightarrow EP^2 - PG^2 = EF^2 - (GR + RF)^2$$

$$\Leftrightarrow EP^2 - PG^2 = EF^2 - (PG + RF)^2$$

$$\Leftrightarrow EP^2 - PG^2 = EF^2 - PG^2 - 2 \times PG \times RF - RF^2$$

$$\Leftrightarrow EP^2 = EF^2 - RF(2 \times PG + RF)$$

$$\Leftrightarrow EP^2 = EF^2 - RF \times PF)$$

$$\Leftrightarrow EP^2 = EF^2 - FQ^2$$

$$\Leftrightarrow EF = p602 + 632 = 87$$

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2016

TINGKAT PROVINSI

BIDANG MATEMATIKA

WAKTU : 210 MENIT

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2016

1. Misalkan a, b, c tiga bilangan asli yang memenuhi $2a + 2b + 2c = 100$. Nilai dari $a + b + c$ adalah …
2. Suatu fungsi f mempunyai sifat $f(65x + 1) = x^2 - x + 1$ untuk semua bilangan real x. Nilai $f(2016)$ adalah …
3. Tiga bilangan berbeda a, b, c akan dipilih satu persatu secara acak dari 1, 2, 3, 4, …, 10 dengan memperhatikan urutan. Probabilitas bahwa $ab + c$ genap adalah …
4. Titik P adalah suatu titik pada segiempat konveks $ABCD$ dengan $PA = 2$, $PB = 3$, $PC = 5$ dan $PD = 6$. Luas maksimum segiempat $ABCD$ adalah …
5. Jika $0 < x < \pi/2$ dan $4 \tan x + 9 \cot x \leq 12$, maka nilai $\sin x$ yang mungkin adalah …
6. Untuk setiap bilangan asli n, misalkan $S(n)$ menyatakan hasil jumlah digit-digit n dalam penulisan desimal. Sebagai contoh, $S(2016) = 2 + 0 + 1 + 6 = 9$. Hasil jumlah semua bilangan asli n sehingga $n + S(n) = 2016$ adalah …
7. Diantara 30 siswa, 15 siswa senang atletik, 17 siswa senang basket dan 17 siswa senang catur. Siswa yang senang atletik dan basket sama banyak dengan siswa yang senang basket dan catur. Sebanyak 8 siswa senang atletik dan catur. Siswa yang senang basket dan catur sebanyak dua kali siswa yang senang ketiganya. Sedangkan 4 siswa tidak senang satupun dari ketiganya. Dari 30 siswa tersebut dipilih tiga siswa secara acak. Probabilitas masing-masing siswa yang terpilih hanya senang catur saja atau basket saja adalah …
8. Diberikan kubus $ABCD.EFGH$ dengan panjang rusuk 5. Titik I dan J sebarang pada BF dengan $IJ = 1$. Titik K dan L sebarang pada CG dengan $KL = 2$. Semut bergerak dari A ke H dengan lintasan $AIJKLH$. Panjang lintasan terpendek adalah …
9. Banyaknya tripel bilangan prima (p, q, r) yang memenuhi $15p + 7pq + qr = pqr$ adalah …
10. Jika $x^2 + xy + 8x = -9$ dan $4y^2 + 3xy + 16y = -7$, maka nilai $x + 2y$ yang mungkin adalah …
11. Panjang rusuk-rusuk suatu limas segitiga semuanya adalah bilangan bulat. Lima rusuknya masing-masing memiliki panjang 14, 20, 40, 52, dan 70. Banyaknya kemungkinan panjang rusuk yang keenam adalah …
12. Seorang pemain catur setiap hari bertanding minimum satu kali selama tujuh hari dengan total m pertandingan. Nilai m maksimum agar ada dua atau lebih hari berturutan dengan total pertandingannya empat kali adalah …
13. Rumah Pak Adi memiliki meteran air yang rusak, di mana meteran tersebut tidak dapat menunjukkan angka 3 dan 9. Sebagai contoh, angka yang tertunjuk pada meteran setelah angka 22 adalah 24 dan juga angka yang tertunjuk setelah 28 adalah 40. Misalkan dalam satu bulan, meteran air Pak Adi menunjukkan angka 478 m^3. Kerugian yang sebenarnya ditanggung oleh Pak Adi karena meteran yang rusak tersebut adalah … m^3.
14. Untuk sebarang bilangan riil x, notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang tidak lebih besar dari x. Hasil jumlah semua bilangan riil x yang memenuhi $|8x - 1008| + \lfloor x \rfloor = 2016$ adalah …

15. Misalkan a_1, a_2, …, a_{120} adalah 120 permutasi dari kata $MEDAN$ yang diurutkan berdasarkan abjad seperti di kamus, misalnya $a_1 = ADEMN$, $a_2 = ADENM$, $a_3 = ADMEN$, dan seterusnya. Hasil jumlah semua indeks k sehingga huruf A merupakan huruf ketiga pada permutasi ak adalah …
16. Misalkan $ABCDE$ adalah suatu segilima beraturan dengan luas 2. Titik-titik P, Q, R, S, T adalah perpotongan antara diagonal-diagonal dari segilima $ABCDE$ sedemikian hingga $PQRST$ adalah suatu segilima beraturan. Jika luas $PQRST$ ditulis dalam bentuk $a - \sqrt{b}$ dengan a dan b bilangan asli, maka nilai $a + b$ adalah …
17. Segitiga ABC mempunyai lingkaran luar berjari-jari 1. Jika dua garis berat segitiga ABC masing-masing mempunyai panjang 1, maka keliling segitiga ABC adalah …
18. Barisan x_0, x_1, x_2, …, x_n didefinisikan dengan $x_0 = 10$, $x_1 = 5$, dan $x_{n+1} = x_{n-1} - \frac{1}{x_n}$ untuk $k = 1, 2, 3, \ldots, n-1$ dan diperoleh $x_n = 0$. Nilai n adalah …
19. Dalam suatu turnamen sepakbola yang diikuti oleh n tim, tiap tim bermain melawan tim lainnya tepat satu kali. Dalam satu pertandingan, 3 poin akan diberikan kepada tim yang menang dan 0 poin untuk tim yang kalah. Sedangkan 1 poin diberikan kepada masing-masing tim apabila pertandingan berakhir seri. Setelah pertandingan berakhir, hanya satu tim yang memperoleh poin paling banyak dan hanya tim itu yang memperoleh jumlah kemenangan paling sedikit. Nilai n terkecil sehingga hal ini mungkin terjadi adalah …
20. Barisan bilangan non-negatif $a_1, a_2, a_3, \ldots$ didefinisikan dengan $a_1 = 1001$ dan $a_{n+2} = |a_{n+1} - a_n|$ untuk $n \geq 1$. Jika diketahui bahwa $a_2 < 1001$ dan $a_{2016} = 1$, maka banyaknya nilai a_2 yang mungkin adalah …
21. Diketahui a dan b adalah bilangan riil positif sehingga $a + \sqrt{ab}$ dan $b + \sqrt{ab}$ rasional. Buktikan bahwa a dan b rasional.
22. Tentukan banyaknya pasangan terurut bilangan asli (a, b, c, d) yang memenuhi
$$ab + bc + cd + da = 2016.$$
Catatan: Jawaban dalam bentuk paling sederhana.
23. Untuk bilangan asli k, kita katakan persegi panjang berukuran $1 \times k$ atau $k \times 1$ sebagai pita. Suatu persegi panjang berukuran $2016 \times n$ dipotong menjadi pita-pita yang semua ukurannya berbeda. Tentukan bilangan asli $n \leq 2016$ terbesar sehingga kita bisa melakukan hal tersebut.
Catatan : Pita $1 \times k$ dan $k \times 1$ dianggap berukuran sama.
24. Misalkan PA dan PB adalah garis singgung lingkaran ω dari suatu titik P di luar lingkaran. Misalkan M adalah sebarang titik pada AP dan N adalah titik tengah AB. Perpanjangan MN memotong ω di C dengan N di antara M dan C. Misalkan PC memotong ω di D dan perpanjangan ND memotong PB di Q.
Tunjukkan bahwa MQ sejajar dengan AB.
25. Diberikan tripel bilangan asli berbeda (x_0, y_0, z_0) yang memenuhi $x_0 + y_0 + z_0 = 2016$. Setiap jam ke-i, dengan $i \geq 1$, dibentuk tripel baru
$$(x_i, y_i, z_i) = (y_{i-1} + z_{i-1} - x_{i-1}, z_{i-1} + x_{i-1} - y_{i-1}, x_{i-1} + y_{i-1} - z_{i-1})$$
Tentukan bilangan asli n terkecil sehingga pada jam ke-n pasti ditemukan minimal satu di antara x_n, y_n, atau z_n merupakan bilangan negatif.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2016

TINGKAT PROVINSI

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2016

1. Penyelesaian:
   Menuliskan persamaan yang diberikan:
   Persamaan yang diberikan adalah $2a + 2b + 2c = 100$.
   Melakukan faktorisasi pada persamaan:
   Ruas kiri persamaan dapat difaktorkan dengan mengeluarkan faktor 2, sehingga menjadi $2(a + b + c) = 100$.
   Mengisolasi variabel yang dicari:
   Untuk menemukan nilai dari $a + b + c$, kedua ruas persamaan dibagi dengan 2, sehingga diperoleh $a + b + c = \frac{100}{2}$.
   Menghitung nilai akhir:
   Pembagian tersebut menghasilkan $a + b + c = 50$.
   Jawaban Akhir
   Nilai dari $a + b + c$ adalah 50.

2. Penyelesaian:
   Menentukan Nilai x
   Langkah pertama adalah menyamakan argumen fungsi f dengan nilai yang dicari. $65x + 1 = 2016$
   Menyelesaikan Persamaan untuk x
   Selanjutnya, nilai x ditentukan dengan mengisolasi x dari persamaan.
   $65x = 2016 - 1$
   $65x = 2015$
   $x = \frac{2015}{65}$
   $x = 31$
   Menghitung Nilai Fungsi
   Nilai x yang telah ditemukan disubstitusikan ke dalam ekspresi fungsi yang diberikan. $f(2016) = (31)^2 - 31 + 1$
   $f(2016) = 961 - 31 + 1$
   $f(2016) = 930 + 1$
   $f(2016) = 931$
   Jawaban Akhir
   Nilai $f(2016)$ adalah 931.

3. Penyelesaian:
   Banyak bilangan ganjil = 5
   Banyak bilangan genap = 5

Banyak kemungkinan seluruhnya 10 × 9 × 8 = 720

Kemungkinan 1
$ab + c$ = genap
ganji; + ganjil = genap
ab = ganjil
ganjil × ganjil = 5 × 4 = 20
jadi 20 × 3 = 60

Kemungkinan 2
$ab + c$ = genap
Genap + genap = genap
ab = genap
Ganjil × genap = 5 × 5 = 25
Genap × genap = 5 × 4 = 20
Genap × ganjil = 5 × 5 = 25
Jadi 25 × 4 = 100 dan 20 × 3 = 60 dan 25 × 4 = 100

Total 260
Jadi, Peluangnya adalah $\frac{320}{720} = \frac{32}{72} = \frac{4}{9}$.

4. Penyelesaian:
Luas suatu segiempat konveks ABCD dengan titik di dalamnya P yang terhubung ke semua titik sudut (PA, PB, PC, PD) adalah jumlah luas empat segitiga.

$$Luas(ABCD) = Luas(\triangle PAB) + Luas(\triangle PBC) + Luas(\triangle PCD) + Luas(\triangle PDA)$$

Luas setiap segitiga, $L = \frac{1}{2}ab\sin\theta$, akan maksimum jika $\sin\theta = 1$, yang berarti sudut di P adalah 90^o.
Karena jumlah keempat sudut di titik P harus $360^o(90^o + 90^o + 90^o + 90^o = 360^o)$, maka Luas Maksimum terjadi ketika semua sudut di P adalah 90^o.

Gunakan jarak yang diketahui $(PA = 1, PB = 3, PC = 5, PD = 6)$ dan asumsikan $\sin\theta = 1$ untuk setiap segitiga.

Segitiga	Sisi-sisi (a, b)	Rumus Luas $\frac{1}{2}ab\sin 90^o$	Luas Maksimum
ΔPAB	2, 3	$\frac{1}{2}(2)(3)(1)$	3
ΔPBC	3, 5	$\frac{1}{2}(3)(5)(1)$	$\frac{15}{2} = 7.5$

ΔPCD	5, 6	$\frac{1}{2}(5)(6)(1)$	15
ΔPDA	6, 2	$\frac{1}{2}(6)(2)(1)$	6

Luas Maksimum Segiempat $ABCD$ adalah jumlah dari semua luas maksimum segitiga:

$$L_{max} = 3 + 7.5 + 15 + 6 = 31.5$$

Jadi, Luas Maksimum Segiempat $ABCD$ adalah 31.5.

5. Penyelesaian:

Diberikan pertidaksamaan:

$$4 \tan x + 9 \cot x \leq 12$$

Dengan syarat $0 < x < \frac{\pi}{2}$ (Ini berarti x berada di kuadran I, dimana $\tan x$ dan $\cot x$ keduanya positif).

1. Ubah $\cot x$ ke $\tan x$

Kita tahu $\cot x = \frac{1}{\tan x}$. Misalkan $t = \tan x$. Karena $0 < x < \frac{\pi}{2}$, maka $t > 0$.

$$4t + \frac{9}{t} \leq 12$$

2. Kalikan dengan t dan Atur Ulang

Karena $t > 0$, kita dapat mengalikan seluruh pertidaksamaan dengan t tanpa membalik tanda pertidaksamaan:

$$4t^2 + 9 \leq 12t$$
$$4t^2 - 12t + 9 \leq 0$$

3. Faktorkan Persamaan Kuadrat

Persamaan kuadrat ini adalah bentuk kuadrat sempurna $(at - b)^2$.

$$(2t)^2 - 2(2t)(3) + (3)^2 \leq 0$$
$$(2t - 3)^2 \leq 0$$

4. Tentukan Nilai t

Kuadrat dari bilangan real selalu lebih besar dari atau sama dengan nol. Agar $(2t - 3)^2$ kurang dari atau sama dengan nol, satu-satunya kemungkinan adalah ia harus sama dengan nol.

$$(2t - 3)^2 = 0$$
$$2t - 3 = 0$$
$$2t = 3$$

$$t = \frac{3}{2}$$

Jadi, solusi untuk pertidaksamaan ini adalah nilai tunggal:

$$\tan x = \frac{3}{2}$$

5. Menentukan Nilai $\sin x$

Karena $\tan x = \frac{sisi\ depan}{sisi\ samping} = \frac{3}{2}$, kita dapat menggambar segitiga siku-siku di kuadran I:

- Sisi depan $(y) = 3$

- Sisi samping $(x) = 2$

Kita cari sisi miring (r) menggunakan teorema Pythagoras:

$$r = \sqrt{(sisi\ depan)^2 + (sisi\ samping)^2}$$
$$r = \sqrt{3^2 + 2^2}$$
$$r = \sqrt{9 + 4}$$
$$r = \sqrt{13}$$

Sekarang kita bisa menentukan $\sin x$:

$$\sin x = \frac{sisi\ depan}{sisi\ miring} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

Untuk merasionalkan penyebut:

$$\sin x = \frac{3}{\sqrt{13}} \times \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

Nilai $\sin x$ yang mungkin adalah $\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

6. Penyelesaian:

Pertama, kita tentukan batas nilai n.

Karena n adalah bilangan asli dan $S(n) \geq 1$, maka:

$$n < n + S(n) = 2016$$

Jadi, n adalah bilangan 1, 2, 3, atau 4 digit.

Karena $n + S(n) = 2016$, maka n harus sedikit lebih kecil dari 2016.

1. Menentukan Batas Atas $S(n)$

Jika n adalah bilangan 4 digit, nilai maksimum $S(n)$ terjadi pada n = 1999.

$$S(1999) = 1 + 9 + 9 + 9 = 28$$

Jika $n = 2015$, $S(2015) = 2 + 0 + 1 + 5 = 8$.

Batas atas yang realistis untuk $S(n)$ adalah S(1999) = 28.

2. Memperkirakan Nilai n

Dari persamaan $n + S(n) = 2016$, kita peroleh:

$$n = 2016 - S(n)$$

Karena $1 \leq S(n) \leq 28$, maka:

$$2016 - 28 \leq n \leq 2016 - 1$$
$$1988 \leq n \leq 2015$$

Ini berarti kita hanya perlu memeriksa bilangan n yang terdiri dari 4 digit dan berada dalam rentang [1988, 2015].

Mencari Solusi n

Karena n berada di rentang $1988 \leq n \leq 2015$, n dapat ditulis dalam dua bentuk umum:

Kasus I: $n = 19ab$

Dalam kasus ini, $S(n) = 1 + 9 + a + b = 10 + a + b$.
Substitusikan ke persamaan $n + S(n) = 2016$:

$$(1000 + 900 + 10a + b) + (10 + a + b) = 2016$$
$$1910 + 11a + 2b = 2016$$
$$11a + 2b = 2016 - 1910$$
$$11a + 2b = 106$$

Kita tahu a dan b adalah digit, $0 \leq a, b \leq 9$.

- Jika $a = 8$: $11(8) + 2b = 106 \Longrightarrow 88 + 2b = 106 \Longrightarrow 2b = 18 \Longrightarrow b = 9$.
  $n = 1989$. Cek: $S(1989) = 1 + 9 + 8 + 9 = 27$.
  $n + S(n) = 1989 + 27 = 2016$. (Solusi 1)
- Jika $a = 9$: $11(9) + 2b = 106 \Longrightarrow 99 + 2b = 106 \Longrightarrow 2b = 7$. $b = 3.5$ (bukan bilangan bulat).
- Jika $a \leq 7$: $11a \leq 77$. Nilai maksimum $11a + 2b \leq 77 + 2(9) = 95 < 106$. Tidak ada solusi.

Solusi yang ditemukan: n_1 = 1989.

Kasus II: $n = 20ab$
Dalam kasus ini, $S(n) = 2 + 0 + a + b = 2 + a + b$.
Karena $n \leq 2015$, maka a hanya mungkin 0 atau 1.
A. Jika $a = 0$, $n = 200b$
$S(n) = 2 + 0 + 0 + b = 2 + b$.
Substitusikan ke persamaan $n + S(n) = 2016$:

$$(2000 + b) + (2 + b) = 2016$$
$$2002 + 2b = 2016$$
$$2b = 2016 - 2002$$
$$2b = 14$$
$$b = 7$$

n = 2007. Cek: $S(2007) = 2 + 0 + 0 + 7 = 9$.
$n + S(n) = 2007 + 9 = 2016$. (Solusi 2)

B. Jika $a = 1, n = 201b$
$S(n) = 2 + 0 + 1 + b = 3 + b$.
Substitusikan ke persamaan $n + S(n) = 2016$:

$$(2010 + b) + (3 + b) = 2016$$
$$2013 + 2b = 2016$$
$$2b = 2016 - 2013$$
$$2b = 3$$

b = 1.5 (bukan bilangan bulat). Tidak ada solusi.
Solusi yang ditemukan: n_2 = 2007.

Hasil Jumlah Semua Bilangan n

Bilangan asli n yang memenuhi syarat adalah n_1 = 1989 dan n_2 = 2007.

Hasil jumlah semua bilangan asli n adalah:

Jumlah = $n_1 + n_2$

= 1989 + 2007

= 3996

Hasil jumlah semua bilangan asli n sehingga $n + S(n) = 2016$ adalah 3996.

7. Penyelesaian:

1. Mencari Jumlah Siswa yang Senang Ketiganya (x)
   - Total siswa: 30
   - Siswa yang tidak senang satupun: 4
   - Siswa yang senang minimal satu cabang ($|A \cup B \cup C|$): $30 - 4 = 26$

Gunakan prinsip Inklusi-Eksklusi:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + x$$

Kita tahu $|A \cap B| = |B \cap C| = 2x$ dan $|A \cap C| = 8$.

$$26 = 15 + 17 + 17 - (2x + 8 + 2x) + x$$
$$26 = 49 - 4x - 8 + x$$
$$26 = 41 - 3x$$
$$3x = 15 \Longrightarrow x = 5$$

5 siswa senang ketiganya.

2. Menghitung Jumlah Siswa Target

Kita perlu jumlah siswa yang hanya senang catur saja atau hanya senang basket saja.

- Siswa Hanya Basket: $|B| - (|A \cap B| - x) - (|B \cap C| - x) - x$
  - $17 - (5 + 5 + 5) = 2$
- Siswa Hanya Catur: $|C| - (|A \cap C| - x) - (|B \cap C| - x) - x$
  - $17 - (3 + 5 + 5) = 4$

Total siswa target (N_{target}): 2 + 4 = 6.

3. Menghitung Probabilitas

Probabilitas memilih 3 siswa dari 6 orang target, dari total 30 siswa.

- Total Cara Memilih (Ruang Sampel $n(S)$): Memilih 3 dari 30

$$n(S) = \binom{30}{3} = \frac{30 \times 29 \times 28}{6} = 4060$$

(Koreksi perhitungan: 10 × 29 × 28 = 8120. 30/6 × 29 × 28 = 5 × 29 × 28 = 4060)

- Cara Memilih yang Sesuai ($n(E)$): Memilih 3 dari 6 target

$$n(E) = \binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{6} = 20$$

- Probabilitas $\left(P(E)\right)$:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{20}{4060} = \frac{2}{406} = \frac{1}{203}$$

Jadi, Probabilitasnya adalah $\frac{1}{203}$.

8. Penyelesaian:
   1. Menentukan Bentangan Sisi

   Semut bergerak dari A ke H melalui rusuk BF dan CG. Artinya, lintasan melewati 3 sisi yang harus dibentangkan berurutan:
   - Sisi ABFE (mengandung A dan I, J di BF)
   - Sisi BCGF (mengandung I, J di BF dan K, L di CG)
   - Sisi CDHG (mengandung K, L di CG dan H)

   Ketika ketiga sisi ini dibentangkan, mereka membentuk persegi panjang besar dengan dimensi:
   - Lebar (sumbu horizontal): AB + BC + CD = 5 + 5 + 5 = 15
   - Tinggi (sumbu vertikal): AE = 5

   2. Mencari Jarak Garis Lurus AH

   Pada bidang datar bentangan tersebut, titik A dan H berada pada posisi:
   - Titik A: Di sudut kiri bawah (misal, koordinat (0,0)).
   - Titik H: Di sudut kanan atas (koordinat (15,5)).

   Jarak terpendek adalah panjang diagonal dari titik (0,0) ke (15,5), yang dihitung dengan Teorema Pythagoras:

$$L_{terpendek} = \sqrt{(Lebar^2) + (Tinggi^2)}$$
$$L_{terpendek} = \sqrt{(15)^2 + (5)^2}$$
$$L_{terpendek} = \sqrt{225 + 25}$$
$$L_{terpendek} = \sqrt{250}$$
$$L_{terpendek} = \sqrt{25 \times 10}$$
$$L_{terpendek} = 5\sqrt{10}$$

   Jadi, Panjang lintasan tependek adalah $5\sqrt{10}$.

9. Penyelesaian:
   1. Faktorkan Persamaan

   Pindahkan qr ke kanan dan faktorkan p di kiri, dan qr di kanan:

$$15p + 7pq = pqr - qr$$
$$p(15 + 7q) = qr(p - 1)$$

   Karena p, q, r adalah bilangan prima, p harus membagi ruas kanan. Ini berarti p harus membagi q atau r (karena p tidak membagi p – 1).

   Ini memunculkan dua kasus: $p = q$ atau $p = r$.

   2. Kasus I: $p = q$

   Substitusikan $q = p$ ke persamaan, lalu bagi dengan p:

$$p(15+7p) = pr(p-1)$$
$$15+7p = r(p-1)$$

Susun ulang untuk mencari r:

$$r = \frac{15+7p}{p-1} = \frac{7(p-1)+22}{p-1} = 7 + \frac{22}{p-1}$$

Agar r prima, $(p-1)$ harus menjadi factor dari 22: {1, 2, 11, 22}.

$p-1$	p	$r = 7 + \frac{22}{p-1}$	Tripel (p, q, r)
1	2 (prima)	$r = 7 + 22 = 29$ (prima)	**(2, 2, 29)**
2	3 (prima)	$r = 7 + 11 = 18$ (bukan prima)	
11	12 (bukan prima)	$r = 7 + 2 = 9$ (bukan prima)	
22	23 (prima)	$r = 7 + 1 = 8$ (bukan prima)	

Diperoleh 1 solusi: **(2, 2, 29).**

3. Kasus II: $p = r$

Substitusikan $r = p$ ke persamaan, lalu bagi dengan p:

$$p(15+7q) = qp(p-1)$$
$$15+7q = q(p-1)$$
$$15 = q(p-1) - 7q$$
$$15 = q(p-8)$$

Karena q prima, q harus membagi 15. Faktor prima dari 15 adalah 3 dan 5.

- Jika q = 3:
  $15 = 3(p-8) \Longrightarrow 5 = p - 8 \Longrightarrow p = 13.$
  p = 13 prima, dan $r = p$, jadi $r = 13$.
  Tripel solusi: **(13, 3, 13).**

- Jika q = 5:
  $15 = 5(p-8) \Longrightarrow 3 = p - 8 \Longrightarrow p = 11.$
  $p = 11$ prima, dan $r = p$, jadi $r = 11$.
  Tripel solusi: **(11, 5, 11).**

Jadi, Total tripel bilangan prima yang memenuhi adalah 3:

(2, 2, 29), (13, 3, 13), dan (11, 5, 11)

Maka, Banyaknya tripel adalah 3.

10. Penyelesaian:

Jumlahkan kedua persamaan:

$$(x^2 + xy + 8x) + (4y^2 + 3xy + 16y) = -9 + (-7)$$
$$x^2 + 4xy + 4y^2 + 8x + 16y = -16$$

Kelompokkan suku-suku yan mengandung x dan y:

$$(x^2 + 4xy + 4y^2) + (8x + 16y) - 16$$
$$(x + 2y)^2 + 8(x + 2y) = -16$$

Misalkan $K = x + 2y$. Persamaan menjadi:

$$K^2 + 8K = -16$$
$$K^2 + 8K + 16 = 0$$
$$(K + 4)^2 = 0$$
$$K = -4$$

Karena $K = x + 2y$, maka nilai yang mungkin untuk $x + 2y$ adalah -4.

11. Penyelesaian:

Lima rusuk yang diketahui adalah R_k = {14, 20, 40, 52, 70}. Rusuk keenam adalah x. Limas segitiga (tetrahedron) memiliki 6 rusuk.

Kita bagi masalah ini berdasarkan posisi relatif dari dua rusuk yang paling ekstrem, 14 dan 70.

Kasus I: Rusuk 14 dan 70 Bertemu (Berbagi Titik Sudut)

Jika 14 dan 70 berbagi titik sudut, maka mereka adalah sisi-sisi yang berdekatan. Mereka bersama-sama membentuk 2 dari 4 sisi segitiga pada limas.

Dalam kasus ini, analisis geometri penuh menunjukkan bahwa terdapat 3 solusi untuk x:

- x = 48
- x = 60
- x = 84

(3 kemungkinan)

Kasus II: Rusuk 14 dan 70 Tidak Bertemu (Bersilangan)

Jika 14 dan 70 adalah rusuk yang bersilangan (berhadapan dan tidak berpotongan), mereka tidak berbagi titik sudut.

Dalam kasus ini, analisis geometri penuh menunjukkan bahwa terdapat 3 solusi untuk x:

- x = 26
- x = 68
- x = 76

(3 kemungkinan)

Total Kemungkinan

Menjumlahkan solusi unik dari kedua kasus memberikan total kemungkinan panjang rusuk keenam x:

Total kemungkinan = (Kasus I) + (Kasus II)

Total kemungkinan = 3 + 3 = 6

Nilai-nilai x yang mungkin adalah {26, 48, 60, 68, 76, 84}.

Banyaknya kemungkinan panjang rusuk yang keenam adalah 6.

12. Penyelesaian:

Kita ingin mencari nilai maksimum dari total pertandingan m seelama 7 hari ($m = \sum h_i$), dengan syarat harus ada periode minimal 2 hari berturut-turut yang totalnya 4 kali pertandingan.

Agar syarat "total 4 kali" tidak terpenuhi hanya dalam satu hari, haruslah:

$$h_i \neq 4$$

Karena h_i adalah bilangan bulat dan $h_i \geq 1$, maka nilai maksimum yang mungkin untuk satu hari adalah $h_i = 3$.

Untuk mendapatkan m maksimum, kita harus:

- Menggunakan hari paling sedikit (2 hari) untuk memenuhi syarat total 4.
- Memaksimalkan pertandingan di hai-hari sisanya (menggunakan $h_i = 3$)

a. Memenuhi syarat (2 hari):
   Kita pilih $h_j + h_{j+1} = 4$. Kombinasi yang optimal adalah menggunakan nilai 1 dan 3 (misalnya, $h_1 = 1$ dan $h_2 = 3$).
b. Memaksimalkan sisa hari (5 hari):
   Sisa 7 – 2 = 5 hari harus diisi dengan nilai maksimum yang diizinkan, yaitu 3.

Total m = (Hari 1 + Hari 2) + (Sisa 5 Hari)
m = (1 + 3) + (3 + 3 + 3 + 3 + 3)
m = 4 + 15
m = 19

Verifikasi: Susunan (1, 3, 3, 3, 3, 3, 3) memenuhi syarat $h_1 + h_2 = 4$. Tidak ada periode berturut-turut lainnya yang berjumlah 4 (karena 3 + 3 = 6, 3 + 3 + 3 = 9, dst.).
Nilai m maksimum adalah 19.

13. Penyelesaian:

Meteran yang rusak menghilangkan dua digit: 3 dan 9. Ini berarti meteran tersebut sebenarnya menggunakan 8 digit unik: {0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8}. Angka-angka ini mewakili nilai 0 sampai 7 dalam sistem bilangan Basis 8 (Oktal).
Pembacaan meteran yang ditunjukkan adalah 478.

1. Konversi Digit ke Basis 8

Kita tentukan nilai sebenarnya (nilai Basis 8) untuk setiap digit yang ditampilkan, dengan menghitung berapa banyak digit yang dilewati:

Digit Ditampilkan (d)	Nilai Sebenarnya (Basis 8)	Keterangan
4 (Ratusan)	4 – 1 = 3	Melewati angka 3
7 (Puluhan)	7 – 1 = 6	Melewati angka 3
8 (Satuan)	8 – 1 = 7	Melewati angka 3

Nilai sebenarnya dari pembacaan meteran dalam Basis 8 adalah $(367)_8$.

2. Konversi Basis 8 ke Basis 10

Sekarang, kita ubah nilai Basis 8 tersebut menjadi nilai desimal yang sebenarnya:

$$\text{Nilai Sebenarnya} = 3 \times 8^2 + 6 \times 8^1 + 7 \times 8^0$$
$$\text{Nilai Sebenarnya} = 3 \times 64 + 6 \times 8 + 7$$
$$\text{Nilai Sebenarnya} = 192 + 48 + 7$$
$$\text{Nilai Sebenarnya} = 247$$

3. Hitung Kerugian

Kerugian adalah selisih antara angka yang ditunjukkan meteran (478) dan nilai penggunaan yang sebenarnya (247):

$$\text{Kerugian} = \text{Pembacaan Salah} - \text{Nilai Sebenarnya}$$
$$\text{Kerugian} = 478 - 247$$
$$\text{Kerugian} = 231$$

Kerugian yang ditanggung Pak Adi adalah 231 m^3.

14. Penyelesaian:

1. Ubah Persamaan Menggunakan Fungsi Lantai n

Misalkan $n = \lfloor x \rfloor$. Karena n adalah bilangan bulat, kita punya $n \leq x < n + 1$.

Substitusikan n ke persamaan dan isolasi nilai mutlak:

$$| \, 8x - 1008 \, | = 2016 - n$$

Dari sini, kita dapatkan batasan $n \leq 2016$.

2. Selesaikan Kasus I: Nilai Mutlak Positif

Kita asumsikan $8x - 1008 \geq 0$.

$$8x - 1008 = 2016 - n$$
$$8x = 3024 - n$$
$$x = \frac{3024 - n}{8}$$

Kita substitusikan x ke dalam batasan $n \leq x < n + 1$:

$$n \leq \frac{3024 - n}{8} \text{ dan } \frac{3024 - n}{8} < n + 1$$

- Dari ketidaksamaan pertama: $8n \leq 3024 - n \Longrightarrow 9n \leq 3024 \Longrightarrow n \leq 336$.
- Dari ketidaksamaan kedua: $3024 - n < 8n + 8 \Longrightarrow 3016 < 9n \Longrightarrow n > 335.111 \cdots \Longrightarrow n \geq 336$.

Satu-satunya solusi bilangan bulat adalah $n = 336$.

$$x_1 = \frac{3024 - 336}{8} = \frac{2688}{8} = 336$$

3. Selesaikan Kasus II: Nilai Mutlak Negatif

Kita asumsikan $8x$ – 1008 < 0.

$$-(8x - 1008) = 2016 - n$$
$$1008 - 8x = 2016 - n$$
$$8x = n - 1008$$
$$x = \frac{n - 1008}{8}$$

Kita substitusikan x ke dalam Batasan $n \leq x < n + 1$:

$$n \leq \frac{n - 1008}{8} \quad \text{dan} \quad \frac{n - 1008}{8} < n + 1$$

- Dari ketidaksamaan pertama: $8n \leq n - 1008 \Longrightarrow 7n \leq -1008 \Longrightarrow n \leq -144$.
- Dari ketidaksamaan kedua: $n - 1008 < 8n + 8 \Longrightarrow -1016 < 7n \Longrightarrow n > -145.14 \cdots \Longrightarrow n \geq -145$.

Nilai bilangan bulat yang mungkin adalah n = –145 dan n = –144.

- Untuk n = –145:
$$x_2 = \frac{-145 - 1008}{8} = \frac{-1153}{8}$$
- Untuk $n = -144$:
$$x_3 = \frac{-144 - 1008}{8} = \frac{-1152}{8} = -144$$

4. Hitunglah Jumlah Semua Solusi

Jumlahkan ketiga solusi yang ditemukan:

$$\text{Jumlah} = x_1 + x_2 + x_3$$
$$\text{Jumlah} = 336 + \left(-\frac{1153}{8}\right) + \left(-\frac{1152}{8}\right)$$
$$\text{Jumlah} = 336 - \frac{2305}{8}$$

Ubah 336 ke pecahan penyebut 8: $336 = \frac{2688}{8}$.

$$\text{Jumlah} = \frac{2688}{8} - \frac{2305}{8} = \frac{2688 - 2305}{8} = \frac{383}{8}$$

15. Penyelesaian:

Menghitung Jumlah Semua Indeks k

Kita mencari jumlah indeks k dari permutasi 5 huruf (A, D, E, M, N) di mana huruf A berada di posisi ketiga ($H_1H_2AH_4H_5$).

1. Identifikasi Kelompok Solusi

Permutasi yang memenuhi syarat memiliki bentuk $H_1H_2AH_4H_5$.

- Huruf yang digunakan: A, D, E, M, N.
- H_1 dan H_2 adalah dua huruf berbeda dari {D, E, M, N}. Ada 4 × 3 = 12 pasangan yang mungkin untuk H_1H_2.
- H_4 dan H_5 adalah dua huruf sisanya. Ada 2! = 2 cara mengaturnya.

Setiap pasangan H_1H_2A membentuk sebuah blok yang terdiri dari 2 permutasi. Jadi, total ada 12 × 2 = 24 solusi a_k.

2. Tentukan Pola Indeks Kelompok

Kita hitung indeks awal blok H_1H_2A berdasarkan urutan kamus.

Setiap huruf awal (H_1) memimpin 4! = 24 permutasi.

Setiap pasangan H_1H_2 memimpin 3! = 6 permutasi, yang dibagi lagi menjadi 3 blok berisi 2 permutasi.

Kita perhatikan pola indeks awal I untuk setiap blok H_1H_2A:

- Ketika H_1 = D (Indeks 25 hingga 48):
    - DEA: Indeks 31, 32
    - DMA: Indeks 37, 38
    - DNA: Indeks 43, 44

    (Pola selisih: 6)

- Ketika H_1 = E (Indeks 49 hingga 72):
    - EDA: Indeks 55, 56 (Diawali EA = 6 blok, ED = 6 blok. 48 + 6 + 1 = 55)
    - EMA: Indeks 61, 62 (Diawali EA = 6, ED = 6, EMA di 61)
    - ENA: Indeks 67, 68

    (Pola selisih: 6)

- Ketika H_1 = M (Indeks 73 hingga 96):
    - MDA: Indeks 79, 80
    - MEA: Indeks 85, 86
    - MNA: Indeks 91, 92

    (Pola selisih: 6)

- Ketika H_1 = N (Indeks 97 hingga 120):
    - NDA: Indeks 103, 104
    - NEA: Indeks 109, 110
    - NMA: Indeks 115, 116

    (Pola selisih: 6)

3. Hitung Jumlah Total Indeks

Setiap kelompok H_1H_2A berkontribusi jumlah indeks sebesar I + (I + 1) = 2I + 1. Ada 12 kelompok, jadi kita perlu menjumlahkan 2I + 1 sebanyak 12 kali.

Indeks awal I yang kita cari adalah:

$$I = \{31, 37, 43, 55, 61, 67, 79, 85, 91, 103, 109, 115\}$$

$$\text{Jumlah Indeks} = \sum_{k=1}^{12} \big(I_k + (I_k + 1)\big) = 2 \times \sum I + 12$$

Jumlah semua indeks awal ($\sum I$):

$$\sum I = 31 + 37 + 43 + 55 + 61 + 67 + 79 + 85 + 91 + 103 + 109 + 115$$

Kita pasangkan ujung-ujungnya untuk mempermudah penjumlahan:

$$\sum I = (31 + 115) + (37 + 109) + (43 + 103) + (55 + 91) + (61 + 85) + (67 + 79)$$

$$\sum I = 146 + 146 + 146 + 146 + 146 + 146$$

$$\sum I = 6 \times 146 = 876$$

Hitung total akhir:

Jumlah Indeks = 2 × 876 + 12

Jumlah Indeks = 1752 + 12

Jumlah Indeks = 1764

Hasil jumlah semua indeks k adalah 1764.

16. Penyelesaian:

Mencari luas segilima dalam ($L_{dalam} = L_{PQRST}$) yang dibentuk oleh perpotongan diagonal segilima luar ($L_{luar} = L_{ABCDE} = 2$).

1. Rasio Sisi dan Luas

Rasio antara sisi segilima dalam (s_{dalam}) dan sisi segilima luar (s_{luar}) adalah kebalikan dari Rasio Emas (ϕ):

$$\frac{s_{dalam}}{s_{luar}} = \frac{1}{\phi}$$

Karena rasio luasnya adalah kuadrat dari rasio sisinya:

$$\frac{L_{dalam}}{L_{luar}} = \left(\frac{1}{\phi}\right)^2 = \frac{1}{\phi^2}$$

2. Menggunakan Sifat Rasio Emas

Kita gunakan sifat kunci dari ϕ: $\phi^2 = \phi + 1$.

$$\frac{L_{dalam}}{L_{luar}} = \frac{1}{\phi + 1}$$

Substitusikan nilai $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ dan rasionalkan:

$$\frac{L_{\text{dalam}}}{L_{\text{luar}}} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1} = \frac{2}{3+\sqrt{5}}$$

$$\frac{L_{\text{dalam}}}{L_{\text{luar}}} = \frac{2}{3+\sqrt{5}} \times \frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{2(3-\sqrt{5})}{9-5} = \frac{2(3-\sqrt{5})}{4} = \frac{\mathbf{3}-\sqrt{\mathbf{5}}}{\mathbf{2}}$$

3. Menghitung Luas dan $a+b$

Karena luas segilima luar $L_{luar} = 2$:

$$L_{\text{dalam}} = L_{\text{luar}} \times \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$
$$L_{\text{dalam}} = 2 \times \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$
$$L_{\text{dalam}} = \mathbf{3} - \sqrt{\mathbf{5}}$$

Berikut ini adalah $a - \sqrt{b}$.

- Maka, $a = 3$
- Dan, $b = 5$

Nilai a dan b (bilangan asli) adalah 3 dan 5.

$$a + b = 3 + 5 = 8$$

Jadi, nilai $a + b$ adalah 8.

17. Penyelesaian:

Diberikan ΔABC dengan jari-jari lingkaran luar $R = 1$, dan dua garis beratnya sama Panjang, $m_b = m_c = 1$.

1. Menetapkan Sifat Segitiga

Dua garis berat yang sama Panjang mengimplikasikan bahwa ΔABC adalah sama kaki dengan sisi $b = c$.

2. Hubungan Sisi dan Garis Berat

Karena $b = c$, kita hanya perlu menemukan Panjang a dan c. Kita gunakan rumus garis berat:

$$4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$$

Karena $m_c = 1$ dan $b = c$:

$$4(1)^2 = 2a^2 + 2c^2 - c^2$$
$$4 = 2a^2 + c^2$$

$$c^2 = 4 - 2a^2 \quad \text{(Persamaan I)}$$

3. Menghubungkan Garis Berat ke Jari-jari (R)

Garis berat m_a adalah garis tinggi (h_a). Kita gunakan rumus yang menghubungkan R dengan sisi dan tinggi:

$$R = \frac{bc}{2h_a}$$

Karena $R = 1, b = c$ dan $h_a = m_a$:

$$1 = \frac{c^2}{2m_a} \Longrightarrow c^2 = 2m_a \quad \text{(Persamaan II)}$$

4. Menyelesaikan Persamaan untuk m_a

Kita eliminasi c^2 dengan menyamakan (I) dan (II):

$$2m_a = 4 - 2a^2 \Longrightarrow 2a^2 = 4 - 2m_a$$
$$a^2 = 2 - m_a \quad \text{(Persamaan III)}$$

Sekarang kita gunakan rumus garis berat m_a:

$$4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$$

Karena $b = c$ dan $c^2 = 2m_a$ (dari II):

$$4m_a^2 = 4c^2 - a^2$$
$$4m_a^2 = 4(2m_a) - a^2$$
$$4m_a^2 = 8m_a - a^2 \Longrightarrow a^2 = 8m_a - 4m_a^2 \quad \text{(Persamaan IV)}$$

Samakan (III) dan (IV) untuk menemukan m_a:

$$2 - m_a = 8m_a - 4m_a^2$$
$$4m_a^2 - 9m_a + 2 = 0$$

Faktorkan:

$$(4m_a - 1)(m_a - 2) = 0$$

- $m_a = 2$: Dari (III), $a^2 = 2 - 2 = 0$, yang tidak mungkin.
- $m_a = 1/4$: Ini adalah solusi yang valid.

5. Menghitung Panjang Sisi dan Keliling

- Sisi c (dan b): Dari (II), $c^2 = 2m_a = 2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

$$c = b = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- Sisi a: Dari (III), $a^2 = 2 - m_a = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$

$$a = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

Keliling K:

$$K = a + 2c$$
$$K = \frac{\sqrt{7}}{2} + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$K = \frac{\sqrt{7}}{2} + \sqrt{2}$$

$$K = \frac{\sqrt{7} + 2\sqrt{2}}{2}$$

18. Penyelesaian:

Barisan didefinisikan oleh $x_0 = 10, x_1 = 5$, dan rumus rekursif:

$$x_{n+1} = x_{n-1} - \frac{1}{x_n}$$

Susun ulang rumus rekursif ini menjadi sebuah hubungan perkalian:

$$x_{n+1}x_n = x_{n-1}x_n - 1$$

Mari kita periksa hasil perkalian dua suku berturut-turut $(x_{i-1}x_i)$ dimulai dari $i = 1$:

- Untuk $i = 1$:

$$x_0x_1 = 10 \times 5 = 50$$

- Untuk $i = 2$ $(x_{i-1}x_i) = x_1x_2)$:

  Menggunakan $x_{n+1}x_n = x_{n-1}x_n - 1$ dengan $n = 1$:

$$x_2x_1 = x_0x_1 - 1$$
$$x_2x_1 = 50 - 1 = 49$$

- Untuk $i = 3$ (x_2x_3):

  Menggunakan $x_{n+1}x_n = x_{n-1}x_n - 1$ dengan $n = 2$:

$$x_3x_2 = x_1x_2 - 1$$
$$x_3x_2 = 49 - 1 = 48$$

- Untuk $i = 4$ (x_3x_4):

  Menggunakan $n = 3$:

$$x_4x_3 = x_2x_3 - 1$$
$$x_4x_3 = 4\,8 - 1 = 47$$

Rumus Umum Pola

Kita melihat sebuah pola sederhana: nilai perkalian suku berturut-turut berkurang 1 di setiap langkah.

$$x_{i-1}x_i = 51 - i$$

Kita diminta mencari nilai n sehingga $x_n = 0$.

Terapkan rumus pola untuk perkalian terakhir, yaitu $x_{n-1}x_n$:

$$x_{n-1}x_n = 51 - n$$

Karena $x_n = 0$, substitusikan:

$$x_{n-1} \times 0 = 51 - n$$
$$0 = 51 - n$$
$$n = 51$$

Jadi, nilai n adalah 51.

19. Penyelesaian:

1. Memaksimalkan Poin Tim X

Untuk membuat W_X minimum (yaitu $W_X = 0$) sambal memaksimalkan poin, Tim X harus bermain seri di semua $n-1$ pertandingan.

$$Poin\ Tim\ X = P_X = 3(0) + (n-1) = n-1$$

2. Membatasi Poin Tim Lain ($i \neq X$)

Semua tim lain harus memiliki $W_i \geq 1$ dan $P_i < P_X$

Kita cari poin maksimum ($P_{i,max}$) yang mungkin bagi Tim i jika ia hanya menang sekali ($W_i = 1$).

$$P_{i,max} = 3(1) + D_{i,max}$$

Agar $P_{i,max}$ tetap di bawah P_X, kita harus memiliki:

$$P_{i,max} \leq P_X - 1$$
$$3 + D_{i,max} \leq (n-1) - 1$$
$$D_{i,max} \leq n - 5$$

3. Menghitung Nilai n Terkecil

Jumlah seri $D_{i,max}$ harus minimal 1 untuk mempermudah konstruksi turnamen sirkuler yang valid (atau setidaknya 0 agar solusi $W_i = 1$ mungkin).

Jika kita tetapkan $D_{i,max} \geq 1$:

$$n - 5 \geq 1$$
$$n \geq 6$$

Jadi, Nilai n terkecil yang mungkin adalah 6.

20. Penyelesaian:

1. Menentukan Syarat FPB

Kita diberi $a_{2016} = 1$. Karena 2016 adalah indeks yang sangat besar, ini berarti barisan sudah stabil dan berulang.

Agar suku barisan akhirnya menjadi 1, FPB dari suku-suku awal haruslah 1.

$$FPB(a_1, a_2) = 1$$

Kita tahu $a_1 = 1001$ dan $0 \leq a_2 < 1001$.

2. Menghitung Nilai a_2 yang Mungkin

Kita perlu mencari banyaknya bilangan bulat a_2 yang memenuhi FPB$(a_2, 1001) = 1$.

- Kasus $a_2 = 0$: FPB(0, 1001) = 1001. Ini bukan 1, jadi $a_2 = 0$ tidak mungkin.
- Kasus $1 \leq a_2 \leq 1000$: Kita mencari bilangan yang prima relative terhadap 1001. Ini dihitung menggunakan Fungsi Euler Totient (ϕ).

$$\text{Banyaknya } a_2 = \phi(1001)$$

Langkah-langkah menghitung $\phi(1001)$:

a. Faktorisasi 1001:

$$1001 = 7 \times 11 \times 13$$

b. Aplikasi Rumus Totient:

$$\phi(1001) = 1001\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)\left(1-\frac{1}{13}\right)$$
$$\phi(1001) = 1001\left(\frac{6}{7}\right)\left(\frac{10}{11}\right)\left(\frac{12}{13}\right)$$

c. Perhitungan Akhir:

$$\phi(1001) = \frac{1001}{7\times 11\times 13}\times(6\times 10\times 12)$$
$$\phi(1001) = 1\times 720$$
$$\phi(1001) = 720$$

Banyaknya nilai a_2 yang mungkin adalah 720.

21. Penyelesaian:

$a+\sqrt{ab}$ rasional dan $b+\sqrt{ab}$ rasional, sehingga pembagiannya juga rasional, yaitu:

$$\frac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{b}(\sqrt{b}+\sqrt{a})} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \implies \text{rasional}$$

Misal: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = p$ dengan p bilangan rasional:

$$\implies \frac{a}{b} = p^2 \implies a = b\cdot p^2 \ldots (i)$$

Substitusi $a = bp^2$ ke bentuk awal:

$$a+\sqrt{ab} = (a+bp) \implies \text{rasional}$$
$$b+\sqrt{ab} = b+bp = b(1+p) \implies b \text{ juga rasional}$$

Untuk $a = (a+bp) - bp \implies a$ juga rasional.

Jadi, terbukti a dan b rasional.

22. Penyelesaian:

Persamaan yang diberikan adalah $ab+bc+cd+da = 2016$.

Kita faktorkan persamaan ini menjadi dua factor:

$$(ab+da)+(bc+cd) = 2016$$
$$a(b+d)+c(b+d) = 2016$$
$$(a+c)(b+d) = 2016$$

Misalkan $X = a+c$ dan $Y = b+d$.

Karena a,b,c,d adalah bilangan asli $(a,b,c,d \geq 1)$, maka $X \geq 2$ dan $Y \geq 2$.

Total banyaknya pasangan (a,b,c,d) adalah jumlah dari $(X-1)(Y-1)$ untuk setiap pasangan factor (X,Y) dari 2016.

$$Total\ Solusi = \sum_{X|2016}(X-1)(Y-1)$$

Kita kembangkan dan gunakan fakta bahwa $XY = 2016$:

$$Total\ Solusi = \sum_{X|2016}(XY-X-Y+1)$$

$$Total\ Solusi = \sum_{X|2016} (2016 - X - Y + 1)$$
$$Total\ Solusi = \sum_{X|2016} (2017 - X - Y)$$

Kita pecah penjumlahan ini:

$$Total\ Solusi = 2017 \times \tau(2016) - 2 \times \sigma(2016)$$

Di mana:

- $\tau(n)$ adalah banyaknya pembagi n.
- $\sigma(n)$ adalah jumlah semua pembagi n.

Perhitungan Nilai $\tau(2016)$ dan $\sigma(2016)$

Faktorisasi Prima:

$$2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7^1$$

Banyaknya Pembagi (τ):

$$\tau(2016) = (5+1)(2+1)(1+1) = 6 \cdot 3 \cdot 2 = 36$$

Jumlah Pembagi (σ):

$$\sigma(2016) = \left(\frac{2^{5+1}-1}{2-1}\right)\left(\frac{3^{2+1}-1}{3-1}\right)\left(\frac{7^{1+1}-1}{7-1}\right)$$
$$\sigma(2016) = \left(\frac{63}{1}\right)\left(\frac{26}{2}\right)\left(\frac{48}{6}\right)$$
$$\sigma(2016) = 63 \cdot 13 \cdot 8 = 63 \cdot 104 = \mathbf{6552}$$

Substitusikan nilai $\tau(2016)$ dan $\sigma(2016)$ ke dalam rumus Total Solusi:

$$Total\ Solusi = 2017 \times 36 - 2 \times 6552$$
$$Total\ Solusi = 72612 - 13104$$
$$Total\ Solusi = 59508$$

Banyak pasangan terurut bilangan asli (a, b, c, d) adalah 59508.

23. Penyelesaian:

Kita memiliki persegi Panjang $2016 \times n$ yang dipartisi menjadi pita-pita dengan ukuran k yang berbeda.

1. Persamaan Luas: Luas total persegi Panjang harus sama dengan jumlah luas semua pita. Karena pita $1 \times k$ memiliki luas k, maka:
$$2016 \cdot n = \sum k$$
2. Batasan Ukuran Pita: Ukuran pita k tidak boleh lebih dari dimensi terbesar, yaitu 2016.
$$k \leq 2016$$
3. Maksimalkan $\sum k$: Untuk mendapatkan nilai n terbesar, kita harus menggunakan pita sebanyak mungkin dan sebesar mungkin. Jumlah terbesar $\sum k$ terjadi jika kita menggunakan semua pita dengan ukuran $k = 1$ hingga $k = 2016$.

$$\sum k_{max} = 1 + 2 + \cdots + 2016 = \frac{2016(2016+1)}{2}$$

Hitung nilai $\sum k_{max}$:

$$\sum k_{max} = \frac{2016 \cdot 2017}{2} = 1008 \cdot 2017 = 2033136$$

Sekarang kita substitusikan $\sum k_{max}$ ke persamaan luas untuk mencari n_{max}:

$$2016 \cdot n_{max} = 2033136$$

$$n_{max} = \frac{2033136}{2016} = 1008.5$$

Karena n harus bilangan asli (bilangan bulat), maka nilai n terbesar yang mungkin secara matematis adalah:

$$n = 1008$$

Kita perlu memastikan bahwa, dengan $n = 1008$, kita bisa memilih himpunan pita K yang berbeda sehingga $\sum k = 2016 \cdot 1008 = 2030688$, dan $\max(K) \leq 2016$.

Perhatikan bahwa $2016 = 2 \times 1008$.

Untuk persegi Panjang $M \times N$, jika M adalah kelipatan 2, konstruksi partisi dengan pita yang berbeda selalu mungkin. Karena 2016 adalah bilangan genap, dan $n = 1008$ (setengah dari 2016), kita bisa menggunakan himpunan K yang sedikit lebih kecil dari $\{1,2,\dots,2016\}$.

Kita butuh $\sum k = 2030688$. Karena $\sum k_{max} = 2033136$, kita harus menghilangkan pita yang totalnya:

$$2033136 - 2030688 = 2448$$

Kita dapat menghilangkan pita-pita yang berbeda dari himpunan {1, 2, …, 2016} yang totalnya 2448. Contohnya, kita bisa menghilangkan pita $k = 2016$ dan $k = 432$.

- $K = \{1,2,\dots,2015\} \setminus \{432\}$.
- Semua ukuran pita berbeda dan $\max(K) = 2015 \leq 2016$.

Karena $n = 1008$ memenuhi syarat kelipatan dan partisi fisik dimungkinkan (terutama karena $n = M/2$), maka 1008 adalah nilai n terbesar yang mungkin.

Jadi, Nilai terbesar $n \leq 2016$ adalah 1008.

24. Penyelesaian:

Untuk membuktikan MQ sejajar AB kita cukup membuktikan bahwa MNQ sama kaki dengan $MN = NQ$. Hal ini bisa dilakukan salah satunya dengan cara membuktikan bahwa $\angle ANM = \angle BNQ$ (sebab $AN = NB$).

Lemma. Kita punya $\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$.

Bukti. Karena segitiga ACP sebangun dengan DAP, serta segitiga BCP sebangun dengan DBP maka

$$\frac{AC}{AD} = \frac{CP}{AP} = \frac{CP}{BP} = \frac{BC}{BD}$$

Maka $AC \times BD = AD \times BC$ atau setara dengan yang perlu kita buktikan.

Berikutnya, perpanjang AD sehingga $AA' = 2 \times AD$. Ini berakibat $ND||BA'$ serta segitiga AND sebangun dengan segitiga ABA'. Dari kedua segitiga tersebut serta lemma sebelumnya, bisa diperoleh bahwa

$$\frac{A'D}{BD} = \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$$

Atau $\frac{A'D}{BD} = \frac{AC}{BC}$. Di sisi lain kita punya $\angle ACB = \angle A'DB$ sebab $ACBD$ segiempat siklis. Akibatnya segitiga ACB sebangun dengan DBA'.

Tinjau segitiga AND dan segitiga CBD. Karena $\angle NAD = \angle BAD = \angle BCD$ serta

$$\angle ADN = \angle DA'B = \angle CAB = \angle CDB$$

Maka segitiga AND sebangun dengan segitiga CBD.

Dengan cara yang sama segitiga ACN sebangun dengan segitiga CBD (dengan meninjau perpanjangan AC *instead of* AD).

Terakhir, dengan menggunakan informasi yang telah kita peroleh, bisa kita hitung bahwa

$$\angle ANM = \angle CNB = \angle CAN + \angle ACN = \angle ADN + \angle NAD = \angle BND = \angle BNQ$$

Dan kita selesai.

25. Penyelesaian:

Dari rumus tribel baru, perhatikan bahwa hasil jumlah $x_i + y_i + z_i$ akan selalu sama untuk setiap $i \geq 0$, yaitu selalu 2016.

Misalkan (x, y, z) adalah tripel sehingga salah satu dari $-x + y + z, x - y + z, x + y - z$ negative mensyaratkan bahwa $x + y + z < 2\max\{x, y, z\}$. Berarti, kita ingin mencari n terkecil sehingga $\max\{x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}\} \geq 1009$.

Perhatikan bahwa diperoleh juga sifat bahwa

$$x_i = 2016 - 2x_{i-1}$$
$$y_i = 2016 - 2y_{i-1}$$
$$z_i = 2016 - 2z_{i-1}.$$

Definisikan $a_i = \max\{x_i, y_i, z_i\}$ dan $b_i = \min\{x_i, y_i, z_i\}$, maka dari sifat terakhir, berlaku

$$a_i = 2016 - 2b_{i-1}$$
$$b_i = 2016 - 2a_{i-1}$$

Jadi, untuk $i \geq 2$, berlaku sifat

$$a_i = 2016 - 2(2016 - 2a_{i-2})$$
$$= 4a_{i-2} - 2016$$

Misalkan $c_i = a_i - 672$, maka diperoleh $c_i = 4c_{i-2}$ untuk setiap $i \geq 2$. Jadi, berlaku $c_{2n} = 4^n c_0$ dan $c_{2n+1} = 4^n c_1$. Perhatikan bahwa

$$c_0 = a_0 - 672 = \max\{x_1, y_1, z_1\} - 672 = 1344 - 2\min\{x_0, y_0, z_0\} \geq 1344 - 2 \cdot 2$$

Syarat pada soal ekivalen dengan mencari n terkecil agar dijamin

$$c_{n-1} = a_{n-1} - 672 \geq 1009 - 672 = 337$$

Akan ditunjukkan bahwa $n = 10$ cukup. Perhatikan bahwa untuk $n = 10$, berlaku

$$c_9 = 4^4 c_1 \geq 4^4 \cdot 2 \geq 512 > 337$$

Dan juga

$$c_{10} = 4^5 \cdot c_0 \geq 4^5 \cdot 1 \geq 1024 > 337$$

Sekarang, kita cukup berikan contoh tripel (x_0, y_0, z_0) sehingga $x_i, y_i, z_i \geq 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, 9$.

i	x_i	y_i	z_i
0	671	672	673
1	674	672	670
2	668	672	676
3	680	672	664
4	656	672	688
5	704	672	640
6	608	672	736
7	800	672	544
8	416	672	928
9	1184	672	160

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2016

TINGKAT NASIONAL

HARI PERTAMA & HARI KEDUA

WAKTU : 8 JAM

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Nasional Tahun 2016

1. Diberikan segiempat talibusur $ABCD$ dengan kedua diagonalnya saling tegak lurus dan berpotongan di titik O. Garis tegak lurus dari O pada AB, memotong AB di E. Garis tegak lurus dari O pada BC, memotong BC di F. Garis tegak lurus dari O pada CD, memotong CD di G. Garis tegak lurus O pada DA, memotong DA di H.
   a. Buktikan bahwa $\angle EFG + \angle GHE = 180^\circ$
   b. Buktikan bahwa OE merupakan garis bagi sudut FEH
2. Tentukan semua tripel bilangan asli (a, b, c) dengan $b > 1$ yang memenuhi
$$2^c + 2^{2016} = a^b.$$
3. Terdapat 5 kotak yang disusun secara melingkar. Pada mulanya, terdapat satu kotak yang berisi satu bola, sementara kotak lainnya kosong. Pada setiap langkah, kita dapat melakukan salah satu dari dua operasi berikut:
   a. pilih satu kotak yang tak kosong, hilangkan satu bola dari kotak tersebut dan tambahkan masing-masing satu bola ke kedua kotak yang bersebelahan dengan kotak tersebut,
   b. pilih satu kotak kosong yang bersebelahan dengan kotak yang tidak kosong, dari kotak yang tidak kosong tersebut pindahkan satu bola ke kotak yang kosong tadi.

   Apakah mungkin, bahwa setelah beberapa langkah, diperoleh kondisi dimana setiap kotak berisi tepat 1752016 bola?
4. Misalkan dalam segitiga ABC berlaku bahwa
$$\frac{\cos A}{20} + \frac{\cos B}{21} + \frac{\cos C}{29} = \frac{29}{420}$$
   Buktikan bahwa segitiga ABC merupakan segitiga siku-siku.
5. Diberikan bilangan bulat positif a, b, c, d sehingga $a | c^d$ dan $b | d^c$. Buktikan bahwa
$$ab \mid (cd)^{maks(a,b)}$$
6. Diberikan segiempat $ABCD$ yang kedua diagonalnya tidak saling tegak lurus. Suatu persegi dikatakan fantastik jika masing-masing garis sisi persegi tersebut memuat tepat satu titik yang berbeda diantara A, B, C, D. Buktikan bahwa sebarang segiempat $ABCD$ memiliki paling sedikit 6 persegi fantastik. Catatan: garis sisi adalah sisi dan perpanjangannya.
7. Misalkan $p > 2$ suatu bilangan prima. Untuk setiap bilangan bulat $k = 1, 2, \ldots, p-1$, didefinisikan r_k sebagai sisa pembagian k^p oleh p^2. Buktikan bahwa
$$r_1 + r_2 + r_3 + \cdots + r_{p-1} = \frac{p^2(p-1)}{2}$$
8. Tentukan dengan bukti, banyaknya permutasi $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{2016}$ dari 1, 2, 3, …, 2016 sedemikian rupa sehingga nilai $|a_i - i|$ tetap untuk semua $i = 1, 2, 3, \ldots, 2016$, dan nilainya merupakan kelipatan bilangan bulat 3.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2016

TINGKAT NASIONAL

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Nasional Tahun 2016

1. Penyelesaian :
   Pertama, perhatikan bahwa OEBF, OEAH, OHDG, dan OFGC bersifat siklik. Oleh karena itu
   $$\begin{aligned}\angle EHG + \angle EFG &= \angle EHO + \angle GHO + \angle EFO + \angle GFO \\ &= \angle EAO + \angle GDO + \angle EBO + \angle GCO \\ &= \angle EAC + \angle GDB + \angle EBD + \angle GCA \\ &= 2(\angle CAB + \angle ABD) \\ &= 2(180^\circ - 90^\circ) \\ &= 180^\circ,\end{aligned}$$
   membuktikan bagian a. Untuk bagian b, perhatikan bahwa
   $$\angle HEO = \angle HAO = \angle DAC = \angle DBC = \angle OBF = \angle OEF,$$
   membuktikan bahwa OE membagi dua ∠FEH.

2. Penyelesaian :
   Lemma: $2^b + 1 = x^a$ dengan $x > 0$, $a, b > 1$, hanya memiliki satu solusi $x = 3$, $a = 2$, $b = 3$.

   Buktikan:
   Kasus 1: $a = 2m$. $2^b = (x^m - 1)(x^m + 1)$ sehingga $x^m = 3$ sehingga $m = 1$, $a = 2$, $x = 3$, $b = 3$
   Kasus 2: $a = 2m + 1$. $2^b = (x - 1)(x^{2m} + x^{2m-1} + \ldots + x + 1)$ sehingga $x - 1 = 2^b$ sehingga kontradiksi karena $a > 1$.

   Solusi:
   Kasus 1: $c > 2016$. $2^{2016}(2^{c-2016} + 1) = a^b$. Jadi, dari lemma $c = 2019$, $a = 3*2^{1008}$, $b = 2$
   Kasus 2: $c < 2016$. $2^c(2^{2016-c} + 1) = a^b$. Jadi, dari lemma $c = 2013$, $b = 2$, tetapi 2^{2013} bukan bilangan kuadrat, jadi tidak ada solusi.
   Kasus 3: $c = 2016$. 2017 prima, jadi tidak ada solusi.

3. Penyelesaian :
   Saya rasa gerakan kedua tidak diperlukan.
   Pertama, lakukan gerakan pertama empat kali sebagai berikut:
   $(1,0,0,0,0) \to (0,1,0,0,1) \to (1,0,1,0,1) \to (2,0,1,1,0) \to (1,1,1,1,1)$.
   Sekarang, perhatikan bahwa setiap kali kita memiliki x bola di setiap kotak untuk $x > 0$, jika kita cukup menerapkan operasi pertama pada setiap kotak tepat satu kali dalam urutan apa pun, kita akan mendapatkan $x + 1$ di setiap kotak setelah lima langkah ini. Oleh karena itu, cukup menerapkan $5 \cdot (7^{5^{2016}} - 1)$ operasi lagi untuk menyelesaikannya.

4. Penyelesaian :
   Berikut ini adalah bukti yang agak buruk:

Misalkan $t = \arcsin\frac{21}{29}$ sehingga $\sin t = \frac{21}{29}$ dan $\cos t = \frac{20}{29}$

Dituliskan $C = \pi - A - B$ persamaannya adalah $\frac{\cos A}{\cos t} + \frac{\cos B}{\sin t} - \cos(A+B) = \frac{1}{\sin t \cos t}$

Yaitu $\left(\frac{1}{\sin t} - \cos A\right)\left(\frac{1}{\cos t} - \cos B\right) = \sin A \sin B$

Kita peroleh bahwa sin A sin B ≠ 0 dan dengan demikian :

$\frac{1}{\sin t} - \cos A = \alpha \sin A$ dan $\frac{1}{\cos t} - \cos B = \frac{1}{\alpha}\sin B$ untuk beberapa $\alpha > 0$

Dituliskan $u = \arcsin\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+1}}$ ini menjadi:

$\frac{\sin u}{\sin t} = \sin(A+u)$ dan $\frac{\cos u}{\cos t} = \cos(B-u)$

Jadi 0 < sin u < sin t dan 0 < cos u < cos t yang berarti u = t.

Dan juga $\boxed{(A,B,C) = \left(\frac{\pi}{2} - t, t, \frac{\pi}{2}\right)}$

5. Penyelesaian :

Misalkan p|ab adalah prima. Kita akan membandingkan $v_p(ab)$ dan $v_p((cd)^{\max(a,b)})$

$v_p(a) \leq a$ - mudah ditunjukkan

Jika p|a, p|b → p|c, p|d dan dari $v_p(a) \leq a$, maka

$v_p(ab) \leq a + b \leq 2max(a,b) \leq max(a,b)(v_p(cd)) = v_p((cd)^{max(a,b)})$

Jika $p|a, p \nmid b$

Maka, $v_p(ab) = v_p(a) \leq max(a,b) \leq v_p(c^{max(a,b)}) \leq v_p((cd)^{max(a,b)})$

6. Penyelesaian :

Di sini saya akan menyajikan metode kombinatorial.

Misalnya, lingkaran ω berpusat di A dengan jari-jari 1, dan misalkan titik "merah" adalah titik sembarang pada ω

Dari titik A, kita tarik garis tegak lurus terhadap DC, CB, DB dan tandai perpotongannya dengan ω seperti yang ditunjukkan pada gambar di bawah ini. Kita juga menyatakan perpotongan antara ω dengan sisi segiempat seperti yang ditunjukkan di bawah ini.

Untuk setiap titik "merah" R, kita menggambar garis yang melewati titik sudut segiempat yang sejajar atau tegak lurus terhadap AR.

Dan misalkan perpotongannya membentuk 3 persegi panjang dengan diagonal "biru, hijau, merah muda" seperti yang ditunjukkan pada gambar di bawah ini.

Untuk persegi panjang dengan diagonal hijau, ketika kita memindahkan titik merah, mulai dari G_1 dan menuju G_2 dan berakhir di G_3. Kita telah menetapkan 4 titik sudut persegi panjang, A_1, A_2, A_3, A_4.

Pada G_1, kita melihat bahwa persegi panjang tersebut akan berimpit dengan BD, kita peroleh bahwa $\frac{A_iA_{i+1}}{A_{i+1}A_{i+2}} = \infty$ untuk beberapa $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Pada G_2, kita melihat bahwa persegi panjang akan berimpit dengan AC, kita peroleh bahwa $\frac{A_iA_{i+1}}{A_{i+1}A_{i+2}} = 0$

Pada G_3, kita melihat bahwa persegi panjang akan berimpit dengan BD lagi, kita memperoleh bahwa $\frac{A_iA_{i+1}}{A_{i+1}A_{i+2}} = \infty$

Dan perhatikan bahwa $\frac{A_iA_{i+1}}{A_{i+1}A_{i+2}}$ kontinu ketika titik merah bergerak sepanjang busur ω.

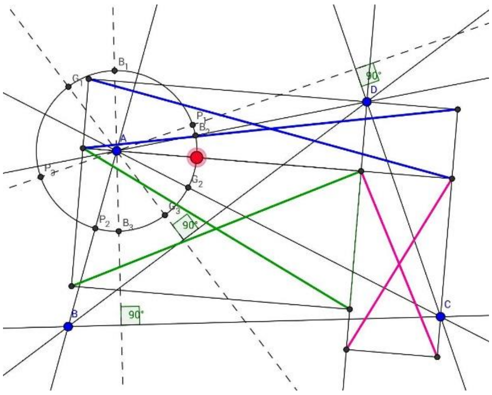
Dan ketika $\frac{A_iA_{i+1}}{A_{i+1}A_{i+2}} = 1$ kita mendapatkan bahwa persegi panjang itu adalah persegi.

Jadi, terdapat setidaknya dua titik merah R_1 pada busur minor G_1G_2 dan R_2 pada busur minor G_2G_3 yang menjadikan persegi panjang tersebut persegi.

Metode serupa juga berlaku untuk persegi panjang dengan diagonal merah muda dan biru, sehingga kita mendapatkan setidaknya 2 + 2 + 2 = 6 persegi "luar biasa".

P.S. Perhatikan bahwa karena AC tidak tegak lurus terhadap BC, kita mendapatkan bahwa G_1, G_2, G_3 semuanya merupakan titik yang berbeda.

Dan ketika dua titik merah berada pada arah yang berlawanan, persegi panjang yang diperoleh dari titik-titik merah tersebut adalah persegi panjang yang sama.



7. Penyelesaian :

Perhatikan bahwa $r_i + r_{p-i}$ habis dibagi p^2 karena eksponen pengangkatannya, karena FPB $(r_i, p) = 1$ dan $v_p(i^p + (p-i)^p) = v_p(p) + v_p(p) = 2$

Sekarang kita tahu bahwa karena merupakan sisa dari p^2 dan tidak ada yang sama dengan nol, maka:

$0 < r_i < p^2$

$0 < r_{p-i} < p^2$

$0 < r_i + r_{p-i} < 2p^2$

tetapi $r_i + r_{p-i}$ kelipatan p^2 secara otomatis gaya ini

$r_i + r_{p-i} = p^2$

maka jumlahkan semua suku ini

$r_1 + r_{p-1} = p^2$

8. Penyelesaian :
   Dinyatakan bahwa $|a_i - i|$ adalah tetap untuk semua i, dan dapat disimpulkan bahwa untuk setiap nilai i yang diberikan, paling banyak ada satu kemungkinan permutasi:
   $i+1, i+2, i+3, \ldots, 2i, 1, 2, 3, \ldots, i, 3i+1, 3i+2, 3i+3, \ldots, 4i, 2i+1, 2i+2, 2i+3, \ldots, 3i, \ldots\ldots$
   Masalahnya setara dengan menemukan jumlah bilangan bulat n sehingga
   $$2016 \equiv k \in \{3n+1, 3n+2, \ldots, 6n\} \mod 6n$$

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2017

TINGKAT KABUPATEN/KOTA

BIDANG MATEMATIKA

WAKTU : 180 MENIT

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Kabupaten/Kota Tahun 2017

1. Diketahui $x - y$ =10 dan xy = 10. Nilai $x^4 + y^4$ adalah …

2. Empat siswa Adi, Budi, Cokro dan Dion bertanding balap sepeda. Kita hanya diberikan sebagian informasi sebagai berikut:

 a. Setiap siswa sampai di garis finish paada waktu yang berlainan,
 b. Adi bukan juara pertama,
 c. Cokro kalah dari Budi. Dengan hanya mengetahui informasi ini saja, banyaknya susunan juara pertama, kedua, ketiga dan keempaat adalah …

3. Banyaknya bilangan asli k yang memenuhi $k|(n^7 - n)$ untuk semua bilangan asli n adalah …

4. Pada sebuah lingkaran dengan pusat O, talibusur AB berjarak 5 dari titik O dan talibusur AC berjarak $5\sqrt{2}$ dari titik O. Jika panjang jari-jari lingkaran 10, maka BC^2 adalah …

5. Jika $\frac{(a-b)(c-d)}{(b-c)(d-a)} = -\frac{4}{7}$ maka nilai dari $\frac{(a-b)(c-d)}{(b-c)(d-a)}$ adalah …

6. Pada suatu kotak ada sekumpulan bola berwarna merah dan hitam yang secara keseluruhannya kurang dari 1000 bola. Misalkan diambil dua bola hitam adalah q dengan $p - q = \frac{23}{37}$. Selisih terbesar yang mungkin dari banyaknya bola merah dan hitam adalah …

7. Misalkan $s(n)$ menyatakan faktor prima terbesar dari n dan $t(n)$ menyatakan faktor prima terkecil dari n. Banyaknya bilangan asli $n \in \{1, 2, \ldots, 100\}$ sehingga $t(n) + 1 = s(n)$ adalah …

8. Misalkan a, b, c bilangan real positif yang memenuhi $a + b + c = 1$. Nilai minimum dari $\frac{a+b}{abc}$ adalah …

9. Sebuah hotel mempunyai kamar bernomor 000 sampai dengan 999. Hotel tersebut menerapkan aturan aneh sebagai berikut: jika suatu kamar berisi tamu dan sembarang dua digit nomor kamar tersebut dipertukarkan tempatnya, maka diperolah nomor kamar yang sama atau nomor kamar yang tidak berisi tamu. Maksimal banyaknya kamar yang berisi tamu adalah …

10. Fungsi f memetakan himpunan bilangan asli ke himpunan bilangan bulat tak negatif. Fungsi tersebut memenuhi $f(1) = 0$ dan untuk setiap bilangan asli berbeda m, n dengan $m|n$, berlaku $f(m) < f(n)$. Jika diketahui $f(8!) = 11$, maka nilai dari $f(2016)$ adalah …

11. Diberikan segiitiga ABC dengan $AC = 12(AB + BC)$. Misalkan K dan M berturut-turut titik tengah AB dan BC. Titik L terletak pada sisi AC sehingga BL adalah garis bagi sudut ABC, Jika $\measuredangle ABC = 72^\circ$. maka besarnya sudut KLM sama dengan …

12. Misalkan $P(x)$ suatu polinom berderajat 4 yang memiliki nilai maksimum 2018 di $x = 0$ dan $x = 2$. Jika $P(1) = 2017$, maka nilai $P(3)$ adalah …

13. Terdapat enam anak, A, B, C, D, E dan F, akan saling bertukar kado. Tidak ada yang menerima kadonya sendiri, dan kado dari A diberikan kepada B. Banyaknya cara membagikan kado dengan car demikian adalah …

14. Bilangan asli terbesar n sehingga $n!$ dapat dinyatakan sebagai hasil perkalian $n - 4$ bilangan asli berurutan adalah …

15. Pada segitiga ABC titik K dan L berturut-turut adalah titik tengah AB dan AC. Jika CK dan BL saling tegak lurus, maka nilai minimum dari cot B + cot C adalah …

16. Misalkan a, b, c dan d bilangan-bilangan bulaat positif. Jajargenjang yang dibatasi oleh garis-garis $y = ax + c$, $y = ax + d$, $y = bx + c$ daan $y = bx + d$ mempunyai luas 18. Jajargenjang yang dibatasi oleh garis-garis $y = ax + c$, $y = ax - d$, $y = bx + c$ dan $y = bx - d$ mempunyai luas 72. Nilai terkecil yang mungkin untuk $a + b + c + d$ adalah …

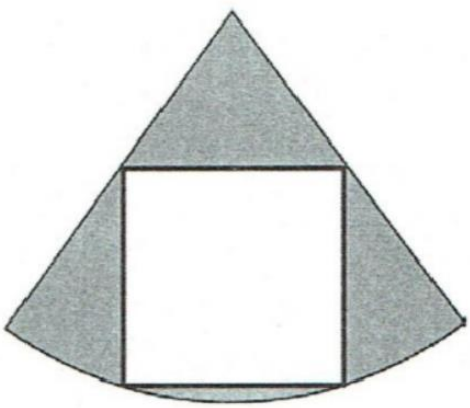
17. Seratus bilangan bulat disusun mengelilingi lingkaran sedemikian sehingga (menurut arah jaram jam) setiap bilangan lebih besar daripada hasil penjumlahan dua bilangan sebelumnya. Maksimal banyaknya bilangan bulat positif yang terdapat pada lingkaran tersebut adalah …

18. Untuk sebarang bilangan asli n, misalkan $S(n)$ adalah jumlah digit-digit dari n dalam penulisan desimal. Jika $S(n) = 5$, maka nilai maksimum dari $S(n5)$ adalah …

19. Diberikan segitiga ABC dengan $AB = 12$, $BC = 5$, $AC = 13$. Misalkan P suatu titik pada garis bagi $\angle A$ yang terletak didalam ABC dan misalkan M suatu titik pada sisi AB (dengan $A \neq M \neq B$). Garis AP dan MP memotong BC dan AC berturut-turut di D dan N.

    Jika $\angle MPB = \angle PCN$ dan $\angle NPC = \angle MBP$, maka nilai $\frac{AP}{PD}$ adalah …

20. Semua titik sudut suatu persegi dengan panjang sisi s terletak pada batas dari juring lingkaran berjari-jari r yang sudut pusatnya 60∘. Jika persegi diletakkan secara simetris di dalam juring, maka nilai $\frac{r^2}{s^2}$ adalah …



SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2017

TINGKAT KABUPATEN/KOTA

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Kabupaten/Kota Tahun 2017

1. Perhatikan untuk mencari bentuk $x^4 + y^4$ jalur yang kita tempuh adalah mencari terlebih dahulu bentuk $x^2 + y^2$.
   Perhatikan karena $(x + y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$, maka $x^2 + y^2 = (x - y)^2 + 2xy$, sehingga
   $$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (x - y)^2 + 2xy \\ &= (10)^2 + 2(10) \\ &= 100 + 20 \\ &= 120 \end{aligned}$$
   Padahal karena $(x^2 + y^2)^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$, maka $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2(xy)^2$, sehingga
   $$\begin{aligned} x^4 + y^4 &= (x^2 + y^2)^2 - 2(xy)^2 \\ &= (120)^2 - 2(10)^2 \\ &= 14400 - 200 \\ &= 14200 \end{aligned}$$
2. Perhatikan informasi yang diberikan ada soal adalah sebagai berikut:
   a. Setiap siswa sampai di garis finish pada waktu yang berlainan, artinya setiap posisi juara ditempati oleh satu orang saja.
   b. Adi bukan juara pertama, artinya juara pertama tidak mungkin ditempati oleh Adi. Adi hanya bisa menempati posisi juara kedua, ketiga atau keempat.
   c. Cokro kalah dari Budi, artinya jika Cokro menjadi juara pertama, maka kemungkinan Budi adalah juara kedua, ketiga atau keempat. Sedangkan jika Cokro juara kedua, maka kemungkinan Budi hanya menjadi juara ketiga atau keempat saja. Sedang jika Cokro juara ketiga, maka Budi pastilah juara keempat. Syarat ini tidak memungkinkan untuk Cokro menjadi juara keempat.

   Sehingga, dari informasi tersebut, kita misalkan posisi masing-masing juara sebagai berikut:
   1. Posisi Adi.
      Kemungkinan posisi Adi adalah memilih satu tempat dari 3, sehingga ${}_3P_1$.
   2. Posisi Cokro dan Budi
      Kemungkinan posisi Cokro dan Budi adalah memilih dua tempat dari 3 tempat secara kombinasi, karena posisinya sudah pasti Cokro kalah dari Budi, sehingga ${}_3C_2$.
   3. Posisi Dion
      Posisi Dion sudah tidak perlu ditentukan karena hanya tersisa satu tempat lagi, sehingga ${}_1P_1$.

   Jadi, banyaknya cara menentukan susunan juara pertama, kedua, ketiga dan keempat adalah: ${}_3P_1 . {}_3C_2 . {}_1P_1 = 3 \cdot 3 \cdot 1 = 9$.
3. Perhatikan $k|(n^7 - n)$ maksudnya k adalah faktor dari $(n^7 - n)$ dimana n, k adalah bilangan asli.
   Pemfaktoran dari bentuk $(n^7 - n)$, diperoleh:
   $$\begin{aligned} n^7 - n &= n(n^6 - 1) \\ &= n(n^3 - 1)(n^3 + 1) \\ &= n(n - 1)(n^2 + n + 1)(n + 1)(n^2 - n + 1) \end{aligned}$$

$$= \underbrace{(n-1)n(n+1)}_{\substack{\text{bentuk 3 buah bilangan}\\ \text{asli berurutan}}}(n^2+n+1)(n^2-n+1)$$

Mudah diperiksa bahwa bentuk $(n^7 - n)$ memuat bentuk perkalian dari 3 bilangan asli berurutan, dimana 3 bilangan asli berurutan pasti habis dibagi 6.
Sehingga $(n^7 - n)$, untuk semua n bilangan asli pasti juga habis dibagi oleh 6.
Namun, setelah diperiksa labih lanjut, ternyata 7 juga menjadi faktor dari $n^7 - n$.
Misal $f(n) = n^7 - n$, maka $f(2) = 2^7 - 2 = 126$ dan $f(3) = 3^7 - 3 = 2184$.
Kedua nilai $f(2)$ dan $f(3)$ adalah juga kelipatan 7 karena $FPB(126, 2184) = 42$.
Misal $f(k) = k^7 - k$ adalah kelipatan 7, maka akan dibuktikan $f(k+1) = (k+1)^7 - (k+1)$ adalah juga kelipatan 7.
Perhatikan,

$$(k+1)^7 - (k+1) = \left(\sum_{i=0}^{7} {}_7C_i \cdot k^{7-i}\right) - (k+1)$$

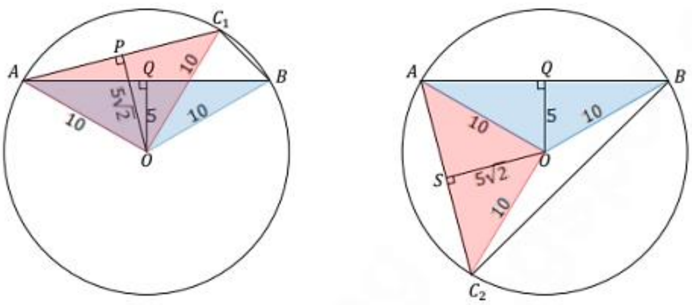
$$= \left(\sum_{i=0}^{0} {}_7C_i \cdot k^{7-i}\right) + \left(\sum_{i=1}^{5} {}_7C_i \cdot k^{7-i}\right) + \left(\sum_{i=6}^{7} {}_7C_i \cdot k^{7-i}\right) - k - 1$$

$$= k^7 + \left(\sum_{i=1}^{5} {}_7C_i \cdot k^{7-i}\right) + 7k + 1 - k - 1$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{5} {}_7C_i \cdot k^{7-i}\right)}_{\substack{\textit{pasti habis dibagi 7}\\ \textit{karena memuat}\\ \textit{bentuk } {}_7C_i}} + \underbrace{(k^7 - k)}_{\substack{\textit{sudah jelas}\\ \textit{bentuk ini}\\ \textit{kelipatan 7}}} + \underbrace{7k}_{\textit{dapat dibagi 7}}$$

Jadi jelas bahwa 7 adalah salah satu faktor dari $(n^7 - n)$.
Jadi, karena faktor 6 x 7 = 42 adalah 1, 2, 3, 6, 7, 14, 21, dan 42, maka terdapat 8 buah bilangan asli k yang merupakan faktor dari $(n^7 - n)$.
Atau menggunakan rumus banyak faktor bulat positif, maka karena 42 = 2 x 3 x 7, sehingga banyak faktor bulat positif dari 42 adalah (1 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 8 buah.

4. Ilustrasi soal terlihat pada gambar berikut:



(i) (ii)

Ternyata tali busur AC ada dua buah yang sesuai kriteria pada soal, yaitu berjarak $5\sqrt{2}$ dari titik O. Sehingga, titik C kita beri indeks masing-masing untuk membedakannya, yaitu C_1 dan C_2.

Pada gambar (i), titik C_1 kita pilih berada "di atas" B.

Perhatikan $\triangle AOP$, misal ∠OAP = α, maka:

$$\sin\alpha = \frac{OP}{OA} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{5\sqrt{2}}{10}$$
$$\Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow \alpha = 45^o$$

Perhatikan $\triangle AOQ$, misal ∠OAQ = β, maka:

$$\sin\beta = \frac{OQ}{OA} \Rightarrow \sin\beta = \frac{5}{10}$$
$$\Leftrightarrow \sin\beta = \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \beta = 30^o$$

Padahal, sudut keliling $\angle BAC\ 1 = \alpha - \beta = 45^o - 30^o = 15^o$.

Sehingga sudut pusat $\angle BOC_1 = 2\angle BAC_1 = 2(15^o) = 30^o$.

Jadi, dengan menggunakan aturan cosinus, diperoleh:

$$BC_1^2 = OB^2 + OC_1^2 - 2 \cdot OB \cdot OC_1 \cdot \cos 30^o$$
$$= 10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}$$
$$= 100 + 100 - 100\sqrt{3}$$
$$= 200 - 100\sqrt{3}$$

5. Misal,

a - b = x

c - d = y

Maka, (a - b) + (c - d) = x + y

Sehingga diperoleh, (b - c) + (d - a) = - x - y

Apabila kedua persamaan dikuadratkan, maka

$$((a-b)+(c-d))^2 = (x+y)^2 \Rightarrow (a-b)^2 + 2(a-b)(c-d) + (c-d)^2 = (x+y)^2$$

dan,

$$((b-c)+(d-a))^2 = (-(x+y))^2 \Rightarrow (b-c)^2 + 2(b-c)(d-a) + (d-a)^2 = (x+y)^2$$

Jadi, diperoleh,

$$(a-b)^2 + 2(a-b)(c-d) + (c-d)^2 = (b-c)^2 + 2(b-c)(d-a) + (d-a)^2$$
$$\Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 + 2(a-b)(c-d) + c^2 - 2cd + d^2 = b^2 - 2bc + c^2 + 2(b-c)(d-a) + d^2 - 2ad + a^2$$
$$\Leftrightarrow -2ab - 2cd + 2(a-b)(c-d) =- 2bc - 2ad + 2(b-c)(d-a)$$
$$\Leftrightarrow 2(a-b)(c-d) = 2ab + 2cd - 2bc - 2ad + 2(b-c)(d-a)$$
$$\Leftrightarrow 2(a-b)(c-d) = 2(ab - ad - bc + cd) + 2(b-c)(d-a)$$
$$\Leftrightarrow 2(a-b)(c-d) = 2(a-c)(b-d) + 2(b-c)(d-a)$$
$$\Leftrightarrow (a-b)(c-d) = (a-c)(b-d) + (b-c)(d-a)$$
$$\Leftrightarrow \frac{(a-b)(c-d)}{(a-b)(c-d)} = \frac{(a-c)(b-d)}{(a-b)(c-d)} + \frac{(b-c)(d-a)}{(a-b)(c-d)}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 = \frac{(a-c)(b-d)}{(a-b)(c-d)} + \left(-\frac{7}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 + \frac{7}{4} = \frac{(a-c)(b-d)}{(a-b)(c-d)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{11}{4} = \frac{(a-c)(b-d)}{(a-b)(c-d)}$$

6. Misal,

   x = banyaknya bola merah

   y = banyaknya bola hitam

   Sehingga, apabila banyak bola merah dan bola hitam secara keseluruhan dimisalkan n dan banyak keseluruhan kurang dari 1000, maka

   x + y < 1000 $\Rightarrow n$ 1000

   Peluang terambil dua bola merah dan dua bola hitam adalah

   $$P(2M) = \frac{{}_xC_2}{{}_nC_2} = p \,;\; P(2H) = \frac{{}_yC_2}{{}_nC_2} = \frac{{}_{n-x}C_2}{{}_nC_2} = q$$

   Perhatikan, pada soal diketahui $p - q = \frac{23}{37}$, sehingga:

   $$p - q = \frac{23}{37} \Rightarrow \quad \frac{{}_xC_2}{{}_nC_2} - \frac{{}_{n-x}C_2}{{}_nC_2} = \frac{23}{37}$$

   $$\Leftrightarrow \frac{x(x-1)-(n-x)(n-x-1)}{n(n-1)} = \frac{23}{37}$$

   $$\Leftrightarrow \frac{(x^2-x)-(n^2-nx-n-nx+x^2+x)}{n(n-1)} = \frac{23}{37}$$

   $$\Leftrightarrow \frac{-n^2-2nx-2x}{n(n-1)} = \frac{23}{37}$$

   $$\Leftrightarrow \frac{(n-1)(2x-n)}{n(n-1)} = \frac{23}{37}$$

   $$\Leftrightarrow \frac{(2x-n)}{n} = \frac{23}{37}$$

   $$\Leftrightarrow \frac{2x}{n} - 1 = \frac{23}{37}$$

   $$\Leftrightarrow \frac{2x}{n} = \frac{60}{37}$$

   $$\Leftrightarrow \frac{37}{30}x = n$$

   Padahal, n < 1000, sehingga:

   $\frac{37}{30}x < 1000 \;\; \Rightarrow 37x < 30000$

   $\Leftrightarrow x < \frac{30000}{37}$

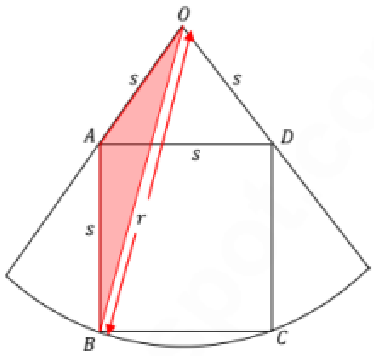
   $\Leftrightarrow x < 810\frac{37}{30}$

Jadi, nilai terbesar x adalah x = 810,
Sedangkan karena x + y < 1000, jadi jumlah terbesar x + y = 999, maka diperoleh y = 189. Sehingga selisih terbesar yang mungkin dari banyaknya bola merah dan hitam adalah

$$x - y = 810 - 189 = 621$$

7. Karena t(n) + 1 = s(n) - t(n) = 1, maka dua bilangan prima yang selisihnya 1 adalah bilangan 2 dan 3.
   Jadi jelas bahwa s(t) = 3 dan t(n) = 2
   Sehingga, bilangan yang dimaksud adalah $n = 2^p \times 3^q$, dengan p dan q adalah bilangan asli.
   Padahal bilangan $n \in \{1, 2, ..., 100\}$, maka
   - untuk p = 1, diperoleh tiga buah nilai q yang mungkin adalah q = {1,2,3}
   - untuk p = 2, diperoleh dua buah nilai q yang mungkin adalah q = {1,2}
   - untuk p = 3, diperoleh dua nilai q yang mungkin adalah q = {1,2}
   - untuk p = 4, diperoleh dua nilai q yang mungkin adalah q = {1}
   - untuk p = 5, diperoleh dua nilai q yang mungkin adalah q = {1}

   Jadi, ada 9 buah bilangan asli n yang memenuhi.
8. Perhatikan gambar!



Jika persegi berada di dalam juring dengan sudut pusat 60°, maka $\triangle AOD$ adalah segitiga sama sisi. Sehingga, AO = AD = OD = s.
Perhatikan, $\triangle AOB$,
$\angle OAB = \angle BAD + \angle OAD = 90^o + 60^o = 150^o$
Pada $\triangle AOB$ berlaku aturan kosinus sebagai berikut:
$OB^2 = OA^2 + AB^2 - 2 \cdot OA \cdot AB \cdot \cos 150^o$
$\Leftrightarrow r^2 = s^2 + s^2 - 2 \cdot s \cdot s \cdot \left(-\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$
$\Leftrightarrow r^2 = 2s^2 + s^2\sqrt{3}$
$\Leftrightarrow r^2 = s^2(2 + \sqrt{3})$
$\Leftrightarrow \frac{r^2}{s^2} = 2 + \sqrt{3}$

9. Misal
   a + b = d
   a + b + c = 1 ⇒ d + c = 1

   Berdasarkan ketaksamaan $AM \geq GM$ diperoleh:

$\frac{d+c}{2} \geq \sqrt{dc} \quad \Rightarrow \frac{1}{2} \geq \sqrt{dc}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \geq dc$

Tanda kesamaan terjadi saat d = c, sehingga d = $\frac{1}{2}$ dan c = $\frac{1}{2}$

Padahal d = a + b, sehingga a + b = $\frac{1}{2}$

Berdasarkan ketaksamaan $AM \geq GM$ diperoleh:

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Rightarrow \frac{1}{4} \geq \sqrt{ab}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{16} \geq ab$

Tanda kesamaan terjadi saat a = b, sehingga a = $\frac{1}{4}$ dan b = $\frac{1}{4}$

Sehingga, nilai minimum dari $\frac{a+b}{abc}$ adalah

$$\min\left(\frac{a+b}{abc}\right) = \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{32}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{32}{1} = 16$$

10. Perhatikan aturan pada hotel tersebut: “Jika suatu kamar berisi tamu, dan sembarang dua digit nomor kamar tersebut dipertukarkan tempatnya”, maka diperoleh:
    - nomor kamar yang sama.
      Jika nomor kamarnya sama, maka sudah pasti nomor kamar tersebut berisi tamu.
    - nomor kamar yang tidak berisi tamu.
      Artinya, permutasi dari digit kamar menghasilkan nomor kamar yang tidak berisi tamu.

    Padahal, kamar hotel bernomor 000 sampai dengan 999. Artinya ada 1000 buah kamar hotel. Kamar hotel tersebut dapat diklasifikasikan berdasarkan jenis digitnya, yaitu:
    - Nomor kamar yang ketiga digitnya sama.
      Maka nomor kamar tersebut adalah aaa.
      Karena a = {0,1,2, …, 9}, maka ada sebanyak 10 buah kamar yang tiga digitnya sama. Karena apabila dipertukarkan dua digitnya mendapat nomor kamar yang sama, maka ada 10 buah kamar yang berisi tamu.
    - Nomor kamar dengan dua digit yang sama.
      Maka nomor kamar tersebut adalah abb, bab, bba.
      Karena a = {0,1,2, …, 9} dan misal dipilih a = 0, maka b = {1,2,3, …, 9}, maka ada sebanyak 3 x 10 x 9 = 270 buah kamar.
      Perhatikan tabel berikut:

Jenis nomor kamar	Tamu		
	Ditukar 2 digitnya	Ada	Tidak
abb	[illegible]	√	
bab			√
bba			√

      Sehingga ada $\frac{1}{3}$ x 270 = 90 kamar yang berisi tamu.
    - Nomor kamar yang ketiga digitnya berbeda.

Maka nomor kamar tersebut adalah abc.
Karena a = {0,1,2, …, 9} dan misal dipilih a = 0, maka b = {1,2,3, …, 9} dan misal dipilih b = 1, maka c = {2,3,4, …, 9}, maka ada sebanyak 10 x 9 x 8 = 720 buah kamar.
Perhatikan tabel berikut:

Jenis nomor kamar	Tamu: Ditukar 2 digitnya	Tamu: Ada	Tamu: Tidak	Tamu: Ditukar 2 digitnya	Tamu: Ada	Tamu: Tidak	Tamu: Ditukar 2 digitnya	Tamu: Ada	Tamu: Tidak
abc		√							
acb			√			√			√
bac			√			√			√
bca					√				
cab								√	
cba			√			√			√

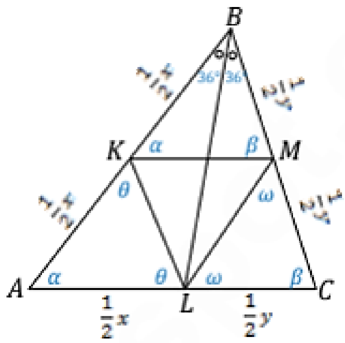
Berarti, ada tiga kamar yang terisi tamu, yaitu abc, bca, cab.
Sehingga ada $\frac{1}{2}$ x 720 = 360 kamar yang berisi tamu.

Jadi, maksimal banyak kamar yang berisi tamu adalah 10 + 90 + 360 = 460 buah kamar.

11. Perhatikan bahwa untuk setiap bilangan asli berbeda m,n dengan m | n, maka berlaku f (m) < f (n).
Perhatikan, pandang bentuk = $a^p \times b^q$.
Jika untuk setiap bilangan asli berbeda m,n dengan m | n, maka diperoleh
$m_x = \{m_0, m_1, m_2, \ldots, m_p, m_{p+1}, m_{p+2}, \ldots m_{p+q-1}, m_{p+q}\}$ dimana:
$m_0 = a^0 \times b^0$
$m_1 = a^1 \times b^0$
$m_2 = a^2 \times b^0$
…
$m_p = a^p \times b^0$
$m_{p+1} = a^p \times b^1$
$m_{p+2} = a^p \times b^2$
…
$m_{p+q-1} = a^p \times b^{q-1}$
$m_{p+q} = a^p \times b^q$
Sehingga apabila m diurutkan dari kecil ke besar diperoleh
$$m_0 < m_1 < m_2 < \ldots < m_p < m_{p+1} < m_{p+2} < \ldots < m_{p+q-1} < m_{p+q}$$
Dan apabila x,y bilangan asli dimana x < y, maka $m_x \mid m_y$.
Jadi, akan berlaku
$$f(m_0) < f(m_1) < f(m_2) < \ldots < f(m_{p+q-1}) < f(m_{p+q})$$
Kemudian perhatikan bentuk faktorisasi prima dari 2016 adalah 2016 = $2^5 \times 3^2 \times 7$
Serta pandang bentuk faktorisasi prima dari 8! adalah 8! = $2^7 \times 3^2 \times 5 \times 7$
Juga pada soal diketahui $f(1) = 0$ dan $f(8!) = 11$
Untuk n = 8! = $2^7 \times 3^2 \times 5 \times 7$, maka diperoleh salah satu alternatif susunan m_x yaitu:
$m_0 = 2^0 \times 3^0 \times 5^0 \times 7^0$
$m_1 = 2^1 \times 3^0 \times 5^0 \times 7^0$
$m_2 = 2^2 \times 3^0 \times 5^0 \times 7^0$

$m_3 = 2^3 \times 3^0 \times 5^0 \times 7^0$
$m_4 = 2^4 \times 3^0 \times 5^0 \times 7^0$
$m_5 = 2^5 \times 3^0 \times 5^0 \times 7^0$
$m_6 = 2^5 \times 3^1 \times 5^0 \times 7^0$
$m_7 = 2^5 \times 3^2 \times 5^0 \times 7^0$
$m_8 = 2^5 \times 3^2 \times 5^0 \times 7^1 = 2016$
$m_9 = 2^5 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^1$
$m_{10} = 2^6 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^1$
$m_{11} = 2^7 \times 3^2 \times 5^1 \times 7^1 = 8!$
Dan karena $m_0 < m_1 < m_2 < \ldots < m_{11}$ maka berlaku $f(m_0) < f(m_1) < f(m_2) < \ldots < f(m_{11})$.
Perhatikan juga karena $f(m_0) = f(1) = 0$ dan $f(m_{11}) = f(8!) = 11$, artinya $f(m_x) = x$.
Dari alternatif susunan m_x di atas maka dengan mudah dapat dilihat $f(2016) = f(m_8) = 8$.

12. Perhatikan ilustrasi gambar berikut!



Misal,
$AB = x$; $BC = y$; $\angle BAC = \alpha$; $\angle BCA = \beta$
Karena garis BL membagi sudut B sama besar, sehingga $\frac{AL}{LC} = \frac{AB}{CB} \Rightarrow AL = LC\left(\frac{x}{y}\right)$
Padahal $AC = \frac{1}{2}(AB + BC) \Rightarrow AC = \frac{1}{2}(x + y)$
Sehingga,
$AC = AL + LC \Rightarrow \frac{1}{2}(x + y) = LC\left(\frac{x}{y}\right) + LC$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x + y) = LC\,\frac{(x+y)}{y}$
$\Leftrightarrow \frac{1}{2}y = LC$
$AL = LC\left(\frac{x}{y}\right) \Leftrightarrow AL = \frac{1}{2}y\left(\frac{x}{y}\right)$
$\Leftrightarrow AL = \frac{1}{2}x$
Padahal K dan M merupakan titik tengah berturut-turut sisi AB dan BC, sehingga
$AK = BK = \frac{1}{2}AB \Rightarrow AK = BK = \frac{1}{2}x = AL$
$BM = CM = \frac{1}{2}BC \Rightarrow BM = CM = \frac{1}{2}y = LC$
Sehingga, karena AL = AK, maka $\triangle ALK$ adalah segitiga sama kaki.
Misal $\angle ALK = \angle AKL = \theta$

Diperoleh $\alpha + 2\theta = 180^o \Rightarrow \alpha = 180^o - 2\theta$
Begitu pula karena LC = CM, maka $\triangle CLM$ adalah segitiga sama kaki.
Misal $\angle LMC = \angle LCM = \omega$
Diperoleh $\beta + 2\omega = 180^o \Rightarrow \beta = 180^o - 2\omega$
Perhatikan $\triangle ABC$, berlaku

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + 72^o = 180^o \quad &\Rightarrow \alpha + \beta = 108^o \\ &\Leftrightarrow (180^o - 2\theta) + (180^o - 2\omega) = 108^o \\ &\Leftrightarrow 360^o - 2(\theta + \omega) = 108^o \\ &\Leftrightarrow 360^o - 108^o = 2(\theta + \omega) \\ &\Leftrightarrow 252^o = 2(\theta + \omega) \\ &\Leftrightarrow 126^o = \theta + \omega \end{aligned}$$

Jadi, $\angle KLM$ dapat ditemukan dengan memandang bahwa ALC adalah suatu garis lurus.

$$\begin{aligned} \angle ALK + \angle KLM + \angle MLC = 180^o \quad &\Rightarrow \theta + \angle KLM + \omega = 180^o \\ &\Leftrightarrow \angle KLM + 126^o = 180^o \\ &\Leftrightarrow \angle KLM = 180^o - 126^o \\ &\Leftrightarrow \angle KLM = 54^o \end{aligned}$$

13. Perhatikan, nilai maksimum P(x) di x = 2, artinya P'(0) = 0 dan P'(2) = 0.
Karena P(x) suatu polinom berderajat 4, maka P'(x) adalah suatu polinom berderajat 3 yang memuat faktor x dan (x - 2), serta satu faktor yang lain, misal (x - p).
Jadi, $P'(x) = a(x(x-2)(x-p)) = a(x^3 - (p+2)x^2 + 2px)$
$P(x)$ dapat ditentukan dengan menggunakan anti-turunan dari P'(x), sehingga

$$\begin{aligned} P(x) &= \int P'(x)\,dx \\ &= \int a(x^3 - (p+2)x^2 + 2px)dx \\ &= a\int (x^3 - (p+2)x^2 + 2px)dx \\ &= a\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}(p+2)x^3 + px^2\right) + c \end{aligned}$$

Padahal $P(x)$ memiliki nilai maksimum 2018 di $x = 0$, artinya P(0) = 2018, maka

$$\begin{aligned} P(0) = 2018 &\Rightarrow a\left(\frac{1}{4}(0)^4 - \frac{1}{3}(p+2)(0)^3 + p(0)^2\right) + c = 2018 \\ &\Leftrightarrow c = 2018 \end{aligned}$$

Sehingga, karena c = 2018 maka diperoleh $P(x) = a\left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}(p+2)x^3 + px^2\right) + 2018$
$P(x)$ juga memiliki nilai maksimum 2018 di x = 2, artinya $P(2) = 2018$, maka

$$\begin{aligned} P(2) = 2018 &\Rightarrow a\left(\frac{1}{4}(2)^4 - \frac{1}{3}(p+2)(2)^3 + p(2)^2\right) + 2018 = 2018 \\ &\Leftrightarrow a\left(4 - \frac{8}{3}(p+2) + 4p\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow 4 - \frac{8}{3}p - \frac{16}{3} + 4p = 0 \\ &\Leftrightarrow 12 - 8p - 16 + 12p = 0 \\ &\Leftrightarrow 4p - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4p = 4 \\ &\Leftrightarrow p = 1 \end{aligned}$$

Sehingga, diperoleh $P(x) = a\left(\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2\right) + 2018$

Maka, nilai a dapat ditentukan menggunakan P(1) = 2017

$P(1) = 2017 \Rightarrow \left(\frac{1}{4}(1)^4 - (1)^3 + (1)^2\right) + 2018 = 2017$

$\Leftrightarrow a\left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right) = 2017 - 2018$

$\Leftrightarrow \frac{1}{4}a = -1$

$\Leftrightarrow a = -4$

Sehingga, diperoleh

$P(x) = -4\left(\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2\right) + 2018 = -x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 2018$

Jadi, $P(3) = -(3)^4 + 4(3)^3 - 4(3)^2 + 2018$

$= -81 + 108 - 36 + 2018$

$= 2009$

14. Dengan cara manual kita dapat mencari banyaknya cara membagi kado.
Tanpa mengikutkan B yang sudah pasti mendapatkan kado dari A, maka hasil pengacakan yang mungkin dapat dilihat seperti berikut:
Kemungkinan pertama, B memberikan kado ke A, sehingga terjadi pengacakan pada keempat orang lain yaitu, C, D, E dan F sehingga menghasilkan bentuk sebagai berikut:
24 permutasi yang mungkin dari CDEF adalah sebagai berikut:

CDEF	DCEF	ECDF	FCDE
CDFE	DCFE	ECFD	FCED
CEDF	DECF	EDCF	FDCE
CEFD	DEFC	EDFC	FDEC
CFDE	DFCE	EFCD	FECD
CFED	DFEC	EFDC	FEDC

Maka diperoleh 9 buah kemungkinan pengacakan yang diperbolehkan yaitu yang bertanda biru.
Kemungkinan kedua, B memberikan kado ke selain A, berarti ada 4 kemungkinan, yaitu memberikan kado tersebut ke C, D, E atau F.
Anggap B memberikan kado ke C, berarti ada 24 permutasi yang mungkin dari CDEF yang akan diletakkan pada ADEF, yaitu:

CDEF	DCEF	ECDF	FCDE
CDFE	DCFE	ECFD	FCED
CEDF	DECF	EDCF	FDCE
CEFD	DEFC	EDFC	FDEC
CFDE	DFCE	EFCD	FECD
CFED	DFEC	EFDC	FEDC

Maka diperoleh 11 buah kemungkinan yang diperbolehkan yaitu yang bertanda biru. Sehingga, banyaknya kemungkinan adalah 4 x 11 = 44 cara.
Jadi, banyak kemungkinan seluruhnya adalah 9 + 44 = 53 cara.

15. Perhatikan, $n! = \underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}_{n \text{ buah faktor}}$

Ide untuk menjadikan n! menjadi n - a perkalian bilangan asli berurutan adalah dengan memotong beberapa perkalian bilangan asli berurutan pertama.

Pandang bahwa n! adalah perkalian dari n - a bilangan asli berurutan, maka bilangan terbesar n dapat diperoleh dengan memotong a + 1 buah perkalian bilangan asli pertama, yaitu

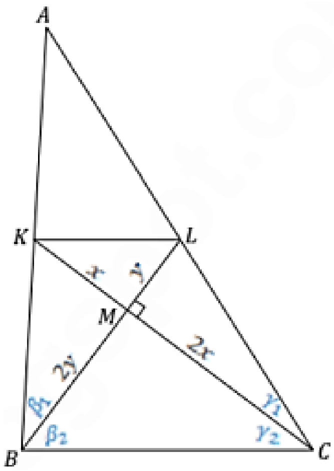
$$n! = \left\{\underbrace{\underbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots}_{n-a-1\text{ buah faktor}}\cdot\underbrace{\ldots\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}_{a\text{ buah faktor}}}_{n\text{ buah faktor}}\right\} = x\cdot\underbrace{\left\{\underbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots}_{n-a-1\text{ buah faktor}}\right\}}_{n-a\text{ buah faktor}}$$

dimana, x adalah hasil perkalian dari beberapa perkalian bilangan asli pertama yang terpotong. Sehingga, karena

$$119! = \underbrace{119\cdot118\cdot117\cdot\ldots\cdot6\cdot\underbrace{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}_{=120}}_{119\text{ buah faktor}} = \underbrace{120\cdot119\cdot118\cdot\ldots\cdot6}_{115\text{ buah faktor}}$$

Jadi, diperoleh bahwa bilangan asli terbesar n sehingga n! dapat dinyatakan sebagai hasil perkalian dari n - 4 bilangan asli berurutan adalah 119.

16. Perhatikan gambar!



Karena K dan L berturut-turut titik tengah AB dan AC, maka

$$\frac{KL}{BC} = \frac{AK}{AB} \Rightarrow \frac{KL}{BC} = \frac{1}{2}$$

Perhatikan, $\triangle KLM$ dan $\triangle BCM$ sebangun $\frac{KL}{BC} = \frac{1}{2}$, dan maka

$$\frac{KM}{MC} = \frac{LM}{MB} = \frac{KL}{CB} = \frac{1}{2}$$

Misal,

$KM = x$

$LM = y$

maka,

$\frac{KM}{MC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x}{MC} = \frac{1}{2}$ dan $\frac{LM}{MB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{y}{MB} = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow MC = 2x \Leftrightarrow MB = 2y$

Perhatikan, $\triangle KBC$, maka diperoleh

misal, $\angle KBC = \beta$; $\angle KBM = \beta_1$; $\angle MBC = \beta_2$

maka,

$$\cot\beta = \cot(\beta_1+\beta_2)$$
$$= \frac{1}{\tan(\beta_1+\beta_2)}$$
$$= \frac{1-\tan\beta_1\cdot\tan\beta_2}{\tan\beta_1+\tan\beta_2}$$
$$= \frac{1-\frac{x}{2y}\cdot\frac{2x}{2y}}{\frac{x}{2y}+\frac{2x}{2y}}$$
$$= \frac{2y^2-x^2}{3xy}$$

Perhatikan, $\triangle BCL$, maka diperoleh

misal, $\angle BCL = \gamma$; $\angle BCM = \gamma_1$; $\angle MCL = \gamma_2$

maka,

$$\cot\gamma = \cot(\gamma_1+\gamma_2)$$
$$= \frac{1}{\tan(\gamma_1+\gamma_2)}$$
$$= \frac{1-\tan\gamma_1\cdot\tan\gamma_2}{\tan\gamma_1+\tan\gamma_2}$$
$$= \frac{1-\frac{y}{2x}\cdot\frac{2y}{2x}}{\frac{y}{2x}+\frac{2y}{2x}}$$
$$= \frac{2x^2-y^2}{3xy}$$

Sehingga,

$\cot\beta + \cot\gamma = \frac{2y^2-x^2}{3xy} + \frac{2x^2-y^2}{3xy} = \frac{x^2+y^2}{3xy}$

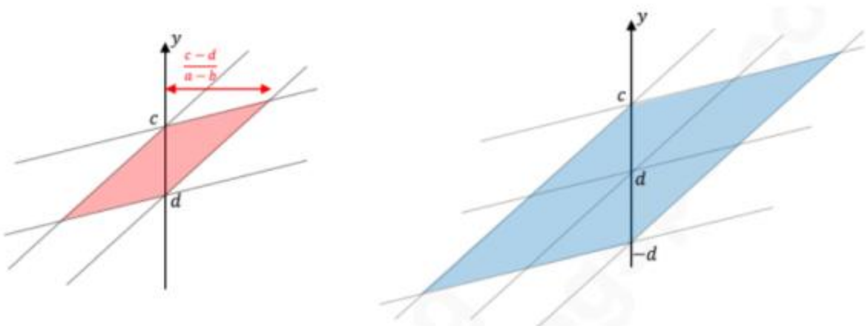
Mengingat, dari $AM - GM$ diperoleh $x^2 + y^2 \geq 2xy$

$x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow \frac{x^2+y^2}{2xy} \geq 1$ (kalikan kedua ruas dengan $\frac{2}{3}$)

$\Rightarrow \frac{x^2+y^2}{3xy} \geq \frac{2}{3}$

Jadi, nilai minimum $\cot\beta + \cot\gamma = \frac{2}{3}$.

17.



Secara grafik, kita dapat melihat dengan mudah bahwa titik potong dengan sumbu Y untuk keempat garis adalah:

a. Untuk jajargenjang dengan luas 18, adalah di (0,c) dan (0,d).
b. Untuk jajargenjang dengan luas 72, adalah di (0,c) dan (0,d).

Perhatikan bahwa luas jajargenjang menjadi 4 kali lebih besar, maka dengan prinsip kesebangunan dan perbandingan, maka ukuran panjang sisi jajargenjang menjadi 2 kali lebih besar dari semula.

Sehingga,
Perhatikan jarak (0,c) ke (0,d) adalah (c - d).
Perhatikan jarak (0,c) ke (0, -d) adalah (c + d).
Padahal, ukuran sisi jajargenjang menjadi 2 kali lebih besar dari semula, sehingga
c + d = 2(c - d) ⇒ c = 3d

Secara grafik, kita juga dapat melihat dengan mudah bahwa jajargenjang dipisahkan menjadi dua bagian sama besar oleh sumbu Y.
Perhatikan luas bagian sebelah kanan sumbu Y adalah 9, sehingga

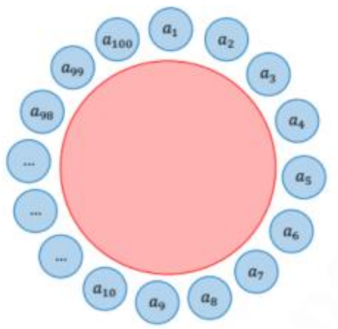
y = ax + d
y = bx + c
0 = (a - b)x + (d - c)
$\Leftrightarrow \frac{c-d}{a-b} = x$

Jadi, $t = \frac{c-d}{a-b}$

Sehingga diperoleh, $L = \frac{1}{2}at \Rightarrow 9 = \frac{1}{2}(c-d)\left(\frac{c-d}{a-b}\right)$
$\Leftrightarrow 9 = \frac{1}{2}2d\left(\frac{2d}{a-b}\right)$
$\Leftrightarrow 9 = \frac{2d^2}{a-b}$
$\Leftrightarrow 9(a-b) = 2d^2$

Perhatikan, bahwa $d^2 = 9 \Rightarrow d = 3$, sehingga dari hubungan c = 3d juga dapat diperoleh c = 9. Dan pandang bentuk a - b = 2 dengan a, b bilangan positif, maka nilai a, b terkecil adalah masing-masing a = 3 dan b = 1.
Sehingga, diperoleh penyelesaian min(a,b,c,d) = (3,1,9,3).
Jadi, nilai minimum a + b + c + d = 3 + 1 + 9 + 3 = 16.

18. Perhatikan gambar di bawah.



Terdapat 100 buah bilangan bulat yang mengelilingi lingkaran, sedemikian hingga menurut arah jarum jam, setiap bilangan lebih besar dari hasil penjumlahan dua bilangan seterusnya.
Sehingga dapat dipahami bahwa pada susunan bilangan melingkar tersebut berlaku:

$$\begin{array}{c} a_1 > a_{99} + a_{100} \\ a_2 > a_{100} + a_1 \\ a_3 > a_1 + a_2 \\ \vdots \\ a_{99} > a_{97} + a_{98} \\ a_{100} > a_{98} + a_{99} \\ \hline a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100} > 2(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100}) \Rightarrow a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100} < 0 \end{array} +$$

Perhatikan pernyataan $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{100} < 0$
Artinya, paling tidak ada satu buah nilai diantara a_1, a_2, a_3, ..., a_{100} yang bernilai negatif.
Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $a_1 < 0$, perhatikan bahwa $a_1 > a_{99} + a_{100}$ berarti paling tidak ada satu nilai a yang negatif diantara a_{99} atau a_{100}.
Misalkan juga $a_{100} < 0$, maka akibatnya paling tidak juga ada satu nilai a yang negatif diantara a_{98} atau a_{99}. Agar bilangan negatif minimum, maka $a_{98} < 0$.
Proses tersebut berulang sampai $a_2 < 0$.
Sehingga diperoleh $a_1, a_2, a_4, a_6 ..., a_{100} < 0$ dan $a_3, a_5, a_7, a_9 ..., a_{99} > 0$.
Jadi, banyaknya bilangan positif ada sebanyak 49 buah.

19. Perhatikan,
Misal, $n = 10^a + 10^b + 10^c + 10^d + 10^e$ maka untuk semua a, b, c, d, e bilangan bulat non negatif jumlah digit-digit dari n adalah 5.
Contohnya, Apabila a = 1, b = 2, c = 0, d = 1, e = 3, maka diperoleh:
$n = 10^1 + 10^2 + 10^0 + 10^1 + 10^3 = 10 + 100 + 1 + 10 + 1000 = 1121$
Sehingga, jumlah digit-digit dari 1121 adalah 1 + 1 + 2 + 1 = 5.
Terbukti, $S(n) = 5$.

Jadi diperoleh bentuk $n^5 = (10^a + 10^b + 10^c + 10^d + 10^e)^5$ yang apabila dijabarkan akan menjadi,

$$\begin{aligned} n^5 &= (10^a + 10^b + 10^c + 10^d + 10^e)^5 \\ &= k_1 \underbrace{(10^{5a} + 10^{5b} + \cdots)}_{\text{sebanyak } n_1 \text{ suku}} + k_2 \underbrace{(10^{4a+b} + 10^{4a+c} + \cdots)}_{\text{sebanyak } n_2 \text{ suku}} + k_3 \underbrace{(10^{3a+2b} + 10^{3a+2c} + \cdots)}_{\text{sebanyak } n_3 \text{ suku}} + k_4 \underbrace{(10^{3a+b+c} + 10^{3a+b+d} + \cdots)}_{\text{sebanyak } n_4 \text{ suku}} \\ &\quad + k_5 \underbrace{(10^{2a+2b+c} + 10^{2a+2b+d} + \cdots)}_{\text{sebanyak } n_5 \text{ suku}} + k_6 \underbrace{(10^{2a+b+c+d} + 10^{2a+b+c+e} + \cdots)}_{\text{sebanyak } n_6 \text{ suku}} + k_7 \underbrace{(10^{a+b+c+d+e})}_{\text{sebanyak } n_7 \text{ suku}} \end{aligned}$$

Sehingga, terdapat 7 bentuk suku yang dapat dikelompokkan berdasarkan pangkat dari 10^x, yaitu:

Cara penjumlahan menghasilkan bentuk 5	Bentuk 10^x	Koefisien	Banyak suku yang terbentuk
5	$10^{5a} + 10^{5b} + \cdots$	$k_1 = \frac{5!}{5!} = 1$	$n_1 = {}_5P_1 = 5$
$4+1$	$10^{4a+b} + 10^{4a+c} + \cdots$	$k_2 = \frac{5!}{4!\,1!} = 5$	$n_2 = {}_5P_2 = 20$
$3+2$	$10^{3a+2b} + 10^{3a+2c} + \cdots$	$k_3 = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$	$n_3 = {}_5P_2 = 20$
$3+1+1$	$10^{3a+b+c} + 10^{3a+b+d} + \cdots$	$k_4 = \frac{5!}{3!\,1!\,1!} = 20$	$n_4 = {}_5P_1 \cdot {}_4C_2 = 30$
$2+2+1$	$10^{2a+2b+c} + 10^{2a+2b+d} + \cdots$	$k_5 = \frac{5!}{2!\,2!\,1!} = 30$	$n_5 = {}_5P_1 \cdot {}_4C_2 = 30$
$2+1+1+1$	$10^{2a+b+c+d} + 10^{2a+b+c+e} + \cdots$	$k_6 = \frac{5!}{2!\,1!\,1!\,1!} = 60$	$n_6 = {}_5P_1 \cdot {}_4C_3 = 20$
$1+1+1+1+1$	$10^{a+b+c+d+e}$	$k_7 = \frac{5!}{1!\,1!\,1!\,1!\,1!} = 120$	$n_7 = {}_5C_5 = 1$

Keterangan:

Pandang bentuk $(10^a + 10^b + 10^c + 10^d + 10^e)^5$ sebagai perkalian berulang sebagai berikut:

$$\underbrace{(10^a + 10^b + 10^c + 10^d + 10^e)}_{faktor\ pertama}\underbrace{(10^a + 10^b + 10^c + 10^d + 10^e)}_{faktor\ kedua}\underbrace{(10^a + 10^b + 10^c + 10^d + 10^e)}_{faktor\ ketiga}\underbrace{(10^a + 10^b + 10^c + 10^d + 10^e)}_{faktor\ keempat}\underbrace{(10^a + 10^b + 10^c + 10^d + 10^e)}_{faktor\ kelima}$$

maka,

- Koefisien dari 10^{3a+b+c} adalah berapa banyak cara dapat terbentuk dari 10^{3a+b+c} perkalian berulang sebanyak lima kali, dengan mengacak bentuk
  $10^a \cdot 10^a \cdot 10^a \cdot 10^b \cdot 10^c$ yaitu
  $10^a \cdot 10^a \cdot 10^a \cdot 10^b \cdot 10^c$
  $10^a \cdot 10^a \cdot 10^b \cdot 10^a \cdot 10^c$
  $10^a \cdot 10^a \cdot 10^b \cdot 10^c \cdot 10^a$
  dan seterusnya…
  Sehingga, koefisien dapat dihitung dengan konsep permutasi n unsur dengan ada unsur yang sama.
  Diperoleh koefisien dari 10^{3a+b+c} adalah $k_4 = \frac{5!}{3!1!1!} = 20$.
- Banyak suku yang terbentuk dari $3a + b + c$, $3a + b + d$, dst adalah berapa banyak cara pangkat dari 10^x dapat terbentuk dari huruf-huruf yang tersedia yaitu a,b,c,d,e.
  Yaitu, memilih sebuah huruf secara permutasi untuk dipasangkan dengan 3, dan memilih dua huruf yang lain dipasangkan dengan 1 dari dua huruf yang tersisa secara kombinasi. Sehingga, $n_4 = {}_5P_1 \cdot {}_4C_2 = 30$ buah suku.

Lalu pandang lagi, bahwa apabila dua digit dijumlahkan dan lebih besar dari 10, maka jumlah digit mereka akan lebih kecil dari jumlah kedua digit tersebut.

Perhatikan, sebagai contohnya misalkan saja ada dua bilangan yaitu 8 dan 9.

Maka, jumlah kedua digit adalah 8 + 9 = 17. Sedangkan, apabila kedua digit dijumlahkan 8 + 9 = 17, maka jumlah digit dari 17 adalah 1 + 7 = 8. Jelas bahwa 8 < 17.

Sehingga, jumlah digit-digit dari $n^5 = (10^a + 10^b + 10^c + 10^d + 10^e)^5$ adalah akan maksimum apabila setiap bentuk 10^x memiliki bentuk pangkat x yang tidak sama.

Artinya:

$5a \neq 4a + b \neq 3a + 2b \neq 3a + b + c \neq 2a + 2b + c \neq 2a + b + c + d \neq a + b + c + d + e$

sehingga seluruh bentuk 10^x adalah bentuk berbeda nilainya.

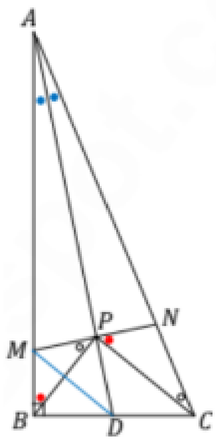
Maka, bilangan n^5 yang menghasilkan jumlah digit terbesar adalah:

$(k_1 \cdot n_1) \times 10^{x_1} + (k_2 \cdot n_2) \times 10^{x_2} + \ldots + (k_7 \cdot n_7) \times 10^{x_7}$ dengan $x_1 \neq x_2 \neq \ldots \neq x_7$ dan $k_1, k_2, \ldots, k_7$ hanya dilihat jumlah digitnya saja (contoh : 20 hanya dilihat sebagai 2 + 0 = 2).
Jadi, jumlah digit maksimum dari n^5 adalah:

Bentuk 10^x	Koefisien	Banyak suku yang terbentuk	Jumlah digit
$10^{5a} + 10^{5b} + \cdots$	$k_1 = \frac{5!}{5!} = 1$	$n_1 = {}_5P_1 = 5$	$1 \times 5 = 5$
$10^{4a+b} + 10^{4a+c} + \cdots$	$k_2 = \frac{5!}{4!\,1!} = 5$	$n_2 = {}_5P_2 = 20$	$5 \times 20 = 100$
$10^{3a+2b} + 10^{3a+2c} + \cdots$	$k_3 = \frac{5!}{3!\,2!} = 10$	$n_3 = {}_5P_2 = 20$	$(1+0) \times 20 = 20$
$10^{3a+b+c} + 10^{3a+b+d} + \cdots$	$k_4 = \frac{5!}{3!\,1!\,1!} = 20$	$n_4 = {}_5P_1 \cdot {}_4C_2 = 30$	$(2+0) \times 30 = 60$
$10^{2a+2b+c} + 10^{2a+2b+d} + \cdots$	$k_5 = \frac{5!}{2!\,2!\,1!} = 30$	$n_5 = {}_5P_1 \cdot {}_4C_2 = 30$	$(3+0) \times 30 = 90$
$10^{2a+b+c+d} + 10^{2a+b+c+e} + \cdots$	$k_6 = \frac{5!}{2!\,1!\,1!\,1!} = 60$	$n_6 = {}_5P_1 \cdot {}_4C_3 = 20$	$(6+0) \times 20 = 120$
$10^{a+b+c+d+e}$	$k_7 = \frac{5!}{1!\,1!\,1!\,1!\,1!} = 120$	$n_7 = {}_5C_5 = 1$	$(1+2+0) \times 1 = 3$
Jumlah maksimum dari digit-digit n^5			398

Jadi, jumlah maksimum dari digit-digit n^5 adalah
$s(n^5)$ = 5 + 100 + 20 + 60 + 90 + 120 + 3 = 398

20. Perhatikan ilustrasi $\triangle ABC$ berikut.



Karena AD membagi sudut A sama besar, maka menurut sifat garis bagi berlaku:
$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD} \Rightarrow BD = \frac{12}{5}$ dan $CD = \frac{13}{5}$
Perhatikan,
Misal, $\angle MPB = \angle PCN = x^o$ dan $\angle NPC = \angle MBP = y^o$, maka
Dengan menggunakan sudut luar segitiga diperoleh:
$\angle PMA = \angle PNA = (x + y)^o$
Perhatikan sekali lagi pada $\triangle AMP$ dan $\triangle ANP$, berlaku
- AP = AP (kedua sisi berhimpit)
- $\angle MAP = \angle NAP$ (sifat garis bagi sudut)
- $\angle PMA = \angle PNA$ (sifat sudut luar segitiga)

Jadi, dengan prinsip si-su-su maka $\triangle AMP$ kongruen dengan $\triangle ANP$, sehingga, AM = AN

Perhatikan, karena $\triangle AMN$ adalah segitiga sama kaki, maka AP selain merupakan garis bagi, maka AP juga merupakan garis berat dan garis tinggi $\triangle AMN$. Oleh karena itu, $AP \perp MN$ dan $MP = PN$.
Perhatikan, $\angle MBD = \angle MPD = 90^o$ sehingga,
misal, $MB = y \Rightarrow NC = y + 1$ dan $MP = x$
maka,

$MD^2 = MB^2 + BD^2 \Rightarrow MD^2 = y^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2$

$MD^2 = MP^2 + PD^2 \Rightarrow MD^2 = x^2 + PD^2$

Dengan menggunakan kesamaan pada kedua persamaan di atas, maka diperoleh:

$y^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 = x^2 + PD^2 \Rightarrow PD^2 = y^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 - x^2$

Padahal, $\triangle BMP$ sebangun $\triangle PNC$, sehingga

$\frac{BM}{MP} = \frac{PN}{NC} \quad \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{x}{y+1}$

$\Leftrightarrow x^2 = y^2 + y$

Substitusikan $x^2 = y^2 + y$ ke $PD^2 = y^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 - x^2$, sehingga diperoleh:

$PD^2 = y^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2 - (y^2 + y) \quad \Rightarrow PD^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2 - y$

$\Leftrightarrow PD^2 = \frac{144}{25} - y$

Perhatikan, pada $\triangle APM$ berlaku,

$AP^2 = AM^2 - MP^2 \quad \Rightarrow AP^2 = (12 - y)^2 - x^2$

$\Leftrightarrow AP^2 = 144 - 24y + y^2 - (y^2 + y)$

$\Leftrightarrow AP^2 = 144 - 25y$

$\Leftrightarrow AP^2 = 25\left(\frac{144}{25} - y\right)$

$\Leftrightarrow AP^2 = 25 \cdot PD^2$

$\Leftrightarrow \frac{AP^2}{PD^2} = 25$

$\Leftrightarrow \frac{AP}{PD} = 5$

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2017

TINGKAT PROVINSI

BIDANG MATEMATIKA

WAKTU : 210 MENIT

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2017

1. Dua bilangan real tidak nol a dan b memenuhi $ab = a - b$. Nilai $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab$ yang mungkin adalah …

2. Tokoh masyarakat di suatu RW, selain Pak RW dan Bu RW, terdapat 5 orang wanita dan 6 orang pria. Kelurahan meminta 6 orang untuk mengikuti seminar ditingkat kota. Dipilih 6 orang sebagai delegasi RW, dengan komposisi 3 orang wanita dan 3 orang pria, yang salah satu di antaranya Pak RW. Banyaknya cara memilih delegasi tersebut adalah …

3. Diberikan segitiga ABC dengan $AB = 13$, $AC = 15$ dan panjang garis tinggi ke BC adalah 12. Jumlah semua panjang BC yang mungkin adalah …

4. Bilangan prima dua digit $p = \overline{ab}$ yang memenuhi $\overline{ba}$ juga prima ada sebanyak …

5. Misalkan f fungsi real yang memenuhi $f\left(\frac{x}{3}\right) = x^2 + 2x + 3$. Jumlah semua nilai z yang memenuhi $f(3z) = 12$ adalah …

6. Ita memilih 5 bilangan di antara $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ dan mengatakan kepada Budi hasil kali dari kelima bilangan tersebut. Kemudian Ita bertanya apakah Budi mengetahui hasil penjumlahan kelima bilangan tersebut merupakan bilangan ganjil atau genap. Budi menjawab bahwa dia tidak bisa memastikannya. Nilai hasil kali lima bilangan yang dimiliki Ita adalah …

7. Misalkan $ABCD$ sebuah persegi dengan panjang sisi 2017. Titik E terletak pada segmen CD sehingga $CEFG$ merupakan persegi dengan panjang sisi 1702, dengan F dan G terletak diluar $ABCD$. Jika lingkaran luar segitiga ACF memotong BC lagi di titik H, maka panjang CH adalah …

8. Banyaknya pasangan bilangan asli (x, y) yang memenuhi persamaan
$$x + y = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{xy}$$
adalah …

9. Misalkan x dan y adalah bilangan-bilangan real yang memenuhi persamaan
$$x^2y^2 + 4x^2 + y^2 + 1 = 6xy$$
Jika M dan m berturut-turut menyatakan nilai terbesar dan nilai terkecil yang mungkin dari $x - y$, maka nilai dari $M - m$ adalah …

10. Diberikan 2017 lampu yang dilengkapi saklar untuk menyalakan dan mematikan lampu. Mula-mula semua lampu dalam keadaan padam. Pada setiap menit Ani harus menekan tepat 5 saklar. Setiap saklar ditekan lampu yang tadinya padam menjadi menyala dan yang tadinya menyala menjadi padam. Untuk menyalakan semua lampu Ani paling sedikit membutuhkan … menit.

11. Diberikan bilangan real positif k. Pada suatu segitiga ABC titik-titik D, E dan F berturut-turut terletak pada sisi BC, CA dan AB sehingga

$$\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB} = k$$

Jika $[ABC]$ dan $[DEF]$ berturut-turut menyatakan luas segitiga ABC dan DEF, maka $\frac{[DEF]}{[ABC]}$ = …

12. Untuk sebarang bilangan asli k, misalkan I_k = 10…064 dengan 0 di antara 1 dan 6 sebanyak k. Jika $N(k)$ menyatakan banyaknya faktor 2 pada faktorisasi prima dari I_k, maka nilai maksimum untuk $N(k)$ adalah …

13. Jika x, y dan z bilangan-bilangan real positif yang memenuhi $x + \frac{1}{y} = 4, y + \frac{1}{z} = 1$, dan $z + \frac{1}{x} = \frac{7}{3}$ maka nilai xyz sama dengan …
14. Sepuluh siswa mempunyai tinggi badan yang berbeda. Guru olahraga menginginkan mereka berbaris menyamping, dengan syarat tidak ada siswa diapit oleh dua siswa lain yang lebih tinggi daei dirinya. Banyaknya cara membuat barisan seperti itu adalah …
15. Diberikan segitiga ABC dengan T sebagai lingkaran luarnya. Tali busur AD adalah garis bagi dalam sudut BAG yang memotong BC di titik L. Tali busur DK tegak lurus pada AC dan memotong AC di titik M. Jika $\frac{BL}{LC} = \frac{1}{2}$ maka nilai dari $\frac{AM}{MC}$ adalah …
16. Bilangan asli empat-digit n habis dibagi oleh 7. Bilangan asli k, yang diperoleh dengan menuliskan digit-digit n dari belakang ke depan, juga habis dibagi oleh 7. Selain itu, diketahui bahwa n dan k mempunyai sisa yang sama apabila dibagi oleh 37. Jika $k > n$, maka jumlah dari semua n yang memenuhi adalah …
17. Untuk sebarang bilangan real x, notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang tidak lebih besar daripada x. Diketahui $\{a_i\}_{i\geq 1}$ barisan bilangan real dengan $a_1 = 20,17$.
Jika $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$ dan $\lfloor a_1 \rfloor, \lfloor a_2 \rfloor, \ldots, \lfloor a_{10} \rfloor$ masing-masing merupakan barisan aritmetika; sedangkan $\lfloor a_1 \rfloor, \lfloor a_1 \rfloor, \ldots, \lfloor a_{11} \rfloor$ bukan merupakan barisan aritmetika, maka nilai minimum $a_2 - a_1 - \lfloor a_2 - a_1 \rfloor$ adalah …
18. Di suatu Pusat Jajanan terdapat empat kedai yang masing-masing menjual tiga jenis makanan. Ada n orang yang masing-masing membeli tepat satu makanan pada setiap kedai. Untuk setiap tiga pembeli ada paling sedikit satu kedai yang ketiga jenis makanannya terbeli. Nilai n maksimum yang mungkin adalah …
19. Diketahui segi tujuh beraturan $ABCDEFG$. Jarak dari A ke garis BC, BE, CF dan EF berturut-turut adalah a, b, c, dan d. Nilai $\frac{AD}{BC}$ adalah ….
20. Diketahui $f(x)$ polinom berderajat n dengan koefisien-koefisien bilangan bulat yang memenuhi $f(0) = 39$ dan $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = \cdots = f(x_n) = 2017$, dengan $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ semua berbeda. Bilangan n terbesar yang mungkin adalah …
21. Untuk setiap persegi satuan pada papan berukuran 5×9 dituliskan angka 1 atau 0. Kemudian dihitung jumlah semua bilangan pada setiap kolom dan juga pada setiap barisnya sehingga diperoleh 14 bilangan. Misalkan H adalah himpunan yang berisi bilangan-bilangan tersebut. Tentukan maksimum dari banyak anggota H!

22. Bilangan asli $k > 2$ dikatakan cantik jika untuk setiap bilangan asli $n \geq 4$ dengan $5n + 1$ bilangan kuadrat sempurna, dapat ditemukan bilangan asli $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ sehingga
$$n + 1 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2$$
Tentukan bilangan cantik terkecil.
23. Diberikan segitiga ABC yang ketiga garis tingginya berpotongan di titik H. Tentukan semua titik X pada sisi BC sehingga pecerminan H terhadap titik X terletak pada lingkaran luar segitiga ABC.
24. Misalkan a, b, dan c adalah bilangan-bilangan real yang nilai mutlaknya tidak lebih besar dari 1. Buktikan bahwa
$$\sqrt{|a-b|} + \sqrt{|b-c|} + \sqrt{|c-a|} = 2 + \sqrt{2}$$
25. Pada suatu papan catur berukuran $2017 \times n$, Ani dan Banu melakukan permainan. Pemain pertama memilih suatu persegi dan kemudian mewarnainya dengan warna merah. Pemain berikutnya memilih suatu persegi dari daerah yang belum diberi warna merah dan kemudian mewarnainya dengan warna merah. Persegi yang dipilih boleh sebarang ukuran namun harus tepat menutup sejumlah persegi satuan pada papan catur. Kemudian kedua pemain bergantian melakukan hal tersebut. Seorang pemain dikatakan menang, jika pemain berikutnya tidak bisa lagi melanjutkan permainan.
Jika Ani mendapat giliran pertama, tentukan semua nilai $n\ 2' : 2017$ sehingga Ani mempunyai strategi untuk memenangkan permainan.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2017

TINGKAT PROVINSI

SOLUSI SOAL

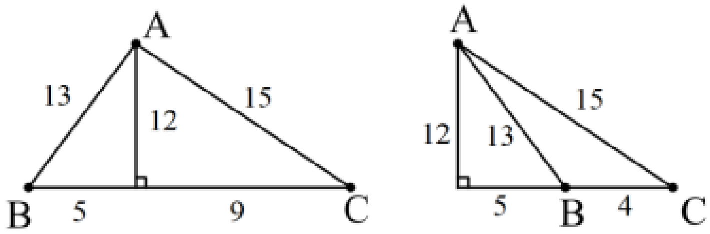
WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2017

1. Penyelesaian:
   $a - b = ab$
   $(a - b)^2 = a^2b^2$
   $a^2 + b^2 - 2ab = a^2b^2$
   $a^2 + b^2 = a^2b^2 + 2ab$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab = \frac{a^2 + b^2}{ab} - ab = \frac{a^2b^2 + 2ab}{ab} - ab = ab + 2 - ab = 2$$

2. Penyelesaian:
   Karena Pak RW wajib dipilih, maka kita memilih 2 Pria dari 6 Pria, kemudian karena Bu RW masuk dalam daftar pemilihan wanita, maka kita memilih 3 Wanita dari 6 Wanita.
   Jadi, banyak cara pemilihan adalah $C_2^6 \times C_3^6 = 15 \times 20 = 300$ cara.
3. Penyelesaian:



   Jadi, jumlah semua kemungkinan Panjang BC = 14 + 4 = 18.
4. Penyelesaian:
   Karena ab prima dan ba juga prima, jelas angka a dan b yang memenuhi adalah angka ganjil kecuali angka 5. Maka bilangan ab yang memenuhi adalah 11, 13, 17, 31, 37, 71, 73, 79, 97. Jadi, ada sebanyak 9 bilangan.
5. Penyelesaian:

$$f\left(\frac{x}{3}\right) = x^2 + 2x + 3$$

$$f(x) = (3x)^2 + 2(3x) + 3$$

$$= 9x^2 + 6x + 3$$

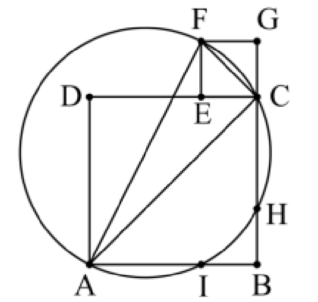
$$f(3z) = \underline{9(3z)^2 + 6(3z) + 3 = 12}_{:3}$$

$$\Leftrightarrow 3(9z^2) + 6z + 1 = 4$$

$$\Leftrightarrow 27z^2 + 6z - 3 = 0$$

$$\text{maka } z_1 + z_2 = -\frac{6}{27} = -\frac{2}{9}$$

6. Penyelesaian:
   Jika hasil kali 5 bilangan dimana hasil penjumlahan factor-faktornya dapat merupakan bilangan ganjil atau pun bilangan genap, maka salah satu factor tersebut harus terdapat bilangan 12. Dimana 12 = 4.3 (dijumlahkan ganjil) bisa juga 12 = 2.6 (dijumlahkan genap).
   Jelas 5 bilangan tersebut adalah :
   (4.3).1.5.7 = 420 atau (6.2).1.5.7 = 420
   Jadi, nilai hasil kali lima bilangan yang dimiliki Ita adalah 420.
7. Penyelesaian:
   Jelas $\angle ACF = 90^o$, sehingga AF adalah diameter lingkaran.
   Karena AF diameter, maka $\angle FIA = 90^o$, dan
   $AI = DE = 2017 - 1702 = 315$
   Dengan menggunakan power of point theorem:
   $\frac{BI}{AB} = \frac{BH}{BC}$, karena $AB = BC$, maka $BI = BH$
   Dan $CH = AI = 315$.



8. Penyelesaian:
   Misalkan,
   $\sqrt{x} = a$
   $\sqrt{y} = b$
   Maka persamaan menjadi:

$$a^2 + b^2 = a + b + ab$$
$$\underline{a^2 - ab + b^2 - a - b = 0}_{\times 2}$$
$$2a^2 - 2ab + 2b^2 - 2a - 2b = 0$$
$$(a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2a) + (b^2 - 2b) = 0$$
$$(a-b)^2 + (a-1)^2 - 1 + (b-1)^2 - 1 = 0$$
$$(a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 = 2$$
$$p^2 + q^2 + r^2 = 2$$

   Untuk $p, q, r, a, b, x, y \in$ bilangan asli, jelas nilai (p^2, q^2, r^2) yang memenuhi adalah (1, 1, 0), (1, 0, 1) dan (0, 1, 1). Jadi, ada 3 pasang.
9. Penyelesaian:

$$x^2y^2 + 4x^2 + y^2 + 1 = 6xy$$
$$(xy-1)^2 + (2x-y)^2 = 0$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

Maka :

$2x - y = 0 \Rightarrow y = 2x$

$xy - 1 = 0$

$x(2x) - 1 = 0$

$2x^2 = 1 \quad \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = -\frac{2}{\sqrt{2}}$

$x - y = \frac{1}{\sqrt{2}} = M$

Maka, $M - m = \sqrt{2}$

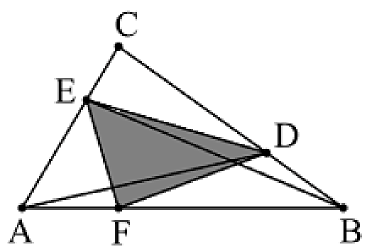
10. Penyelesaian:
    Misalkan: Menyala = 1, Padam = 0
    2017 = 5 (403) + 2
    Menit ke-403 : $n(1)$ = 2015, $n(0)$ = 2
    Kemudian pilih 4 lampu yang menyala dan 1 lampu yang padam, maka:
    Menit ke-404 : $n(1)$ = 2012, $n(0)$ = 5
    Kemudian pilih 5 lampu Padam, maka:
    Menit ke-405 : $n(1)$ = 2017, $n(0)$ = 0
    Jadi, untuk menyalakan semua lampu Ani paling sedikit membutuhkan 405 menit.
11. Penyelesaian:

Misal : $[ABC] = x$

$[CDE] = \frac{1}{k+1}[BEC] = \frac{1}{k+1}\cdot\frac{k}{k+1}[ABC] = \frac{kx}{(k+1)^2}$

$[AEF] = \frac{k}{k+1}[ABE] = \frac{k}{k+1}\cdot\frac{1}{k+1}[ABC] = \frac{kx}{(k+1)^2}$

$[BDF] = \frac{1}{k+1}[ABD] = \frac{1}{k+1}\cdot\frac{k}{k+1}[ABC] = \frac{kx}{(k+1)^2}$



$$\frac{[DEF]}{[ABC]} = \frac{[ABC]-[CDE]-[AEF]-[BDF]}{[ABC]}$$

$$= \frac{x - \frac{3kx}{(k+1)^2}}{x} = \frac{k^2-k+1}{k^2+2k+1}$$

12. Penyelesaian:
    $I_k = 10\ldots064 = 10^{k+2} + 2^6 = 2^6(2^{k-4}, 5^{k+2} + 1)$
    Maka nilai maksimum untuk $N(k)$ adalah 6.
13. Diketahui $x, y, z \in \mathbb{R}, x + \frac{1}{y} = 4, y + \frac{1}{z} = 1$
    dan $z + \frac{1}{x} = \frac{7}{3}$.
    Tulis $A = xyz$.
    Jelas $z + \frac{1}{x} = \frac{7}{3} \Leftrightarrow z = \frac{7x-3}{3x}, y + \frac{1}{z} = 1 \Leftrightarrow y = \frac{z-1}{z}$, dan

$x+\frac{1}{y}=4 \Leftrightarrow x+\frac{z}{z-1}=4 \Leftrightarrow x+\frac{\frac{7x-3}{3x}}{\frac{7x-3}{3x}-1}=4 \Leftrightarrow x+\frac{\frac{7x-3}{3x}}{\frac{7x-3-3x}{3x}}=4 \Leftrightarrow x+\frac{7x-3}{4x-3}=4$

$\Leftrightarrow 4x^2-3x+7x-3=16x-12 \Leftrightarrow 4x^2-12x+9=0$

$\Leftrightarrow (2x)^2-2(2x)\times 3+9=0 \Leftrightarrow (2x-3)^2=0 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}.$

Jadi $z=\frac{\frac{21}{2}-3}{\frac{9}{2}}=\frac{15}{2}\times\frac{2}{9}=\frac{5}{3}$ dan $y+\frac{3}{5}=1=\frac{2}{5}.$

Jadi $A=xyz=\frac{3}{2}\times\frac{5}{3}\times\frac{2}{5}=1.$

14. Tulis $X=\langle x_i\rangle_{i=1,\dots,10}$ dengan $x_i<x_{i+1}$.
Percobaan: membuat barisan bilangan di X.
Tulis A: tidak ada siswa yang diapit oleh siswa lain yang lebih tinggi darinya.
$A^C_{x_i-x_j}$: siswa ke-i sampai ke-j menempati urutan pertama.

Kasus $A_{x_1-x_{10}}$:
Jelas $\langle x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8,x_9,x_{10}\rangle$
Jelas $n(A_{x_1-x_{10}})=1=2^0$.

Kasus $A_{x_1-x_8}$:

x_{10}	x_9

Jelas $n(A_{x_1-x_{10}})=1=2^0$.

Kasus $A_{x_1-x_7}$:

x_9	x_{10}	x_8
x_{10}	x_9	x_8

Jelas $n(A_{x_1-x_{10}})=2=2^1$

Kasus $A_{x_1-x_6}$:

x_8	x_9	x_{10}	x_7
x_8	x_{10}	x_9	x_7
x_9	x_{10}	x_8	x_7
x_{10}	x_9	x_8	x_7

Jelas $n(A_{x_1-x_{10}})=8-4=2^3-2^2$.

Kasus $A_{x_1-x_5}$:

x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_6
x_7	x_8	x_{10}	x_9	x_6
x_7	x_9	x_{10}	x_8	x_6
x_7	x_{10}	x_9	x_8	x_6
x_9	x_{10}	x_8	x_7	x_6
x_{10}	x_9	x_8	x_7	x_6
x_8	x_9	x_{10}	x_7	x_6
x_8	x_{10}	x_9	x_7	x_6

Jelas $n(A_{x_1-x_5})=8=2^3$.

Jadi $n(A)=2^0+2^0+2^1+2^2+2^3+2^4+2^5+2^6+2^7$

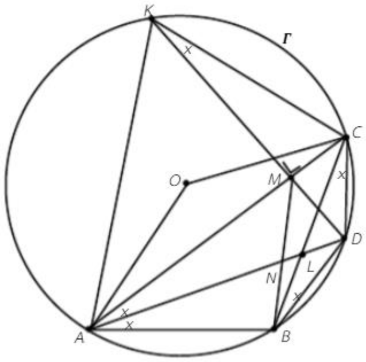
$= 1 + 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128$

$= 246$

15. Diketahui Γ: lingkaran luar $\Delta ABC, \angle BAD = \angle CAD$,

$$DK \perp AC, \text{ dan} \frac{BL}{LC} = \frac{1}{2}$$

Tulis O: titik pusat Γ, R: ukuran jari-jari Γ, dan $X = \frac{AM}{MC}$.



Jelas bahwa

$\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC} \Leftrightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow AC = 2AB$,

$AM \times MC = KM \times MD$,

$AL \times LD = BL \times LC$,

$KM^2 = KC^2 - MC^2, KM^2 = KA^2 - AM^2$,

$KC^2 - KA^2 = (MC+AM)(MC-AM)$

16. Tulis $n = \overline{abcd}$

Diketahui $7|\overline{abcd}, 7|\overline{dcba}, \overline{abcd} = 37w + S, \overline{dcba} = 37x + S$ dan $\overline{dcba} > \overline{abcd}$

Jelas $7|(\overline{dcba} - \overline{abcd})$ dan $37|(\overline{dcba} - \overline{abcd})$.

Kelipatan 7: 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, …

Kasus $u|\overline{dcba} - \overline{abcd}) = 7$:

Pasang (a, b) yang mungkin adalah: $(4,7), (2,5)$ atau $(6,9)$.

Kasus $(a, b) = (2,5)$:

Jelas $7|\overline{2bc5}, 7|\overline{5bc2}$ dan $37|(\overline{5cb2} - \overline{2bc5})$.

Jelas $7|(b + c + 7)$.

Nilai $b + c$ yang mungkin adalah: 0, 7 atau 14.

Pasang (b, c) yang mungkin: (0,0), (0,7), (7,0), (1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3), (5,9), (9,5), (6,8), (8,6), atau (7,7).

Jelas 5002 – 2005 = 2093

5702 – 2075 = 3627

17. Diketahui $\langle a_1 \rangle_{i \geq 1}$ barisan bilangan real,

$a_1 = 20{,}17$.

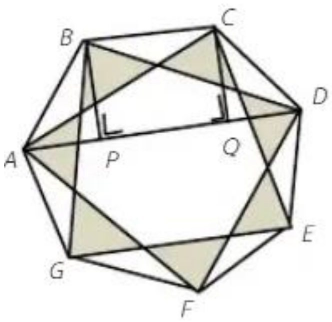
$\langle a_1, a_2, \dots, a_{11} \rangle$ barisan aritmatika,

$\langle \lfloor a_1 \rfloor, \lfloor a_2 \rfloor, \dots, \lfloor a_{10} \rfloor \rangle$ barisan aritmatika, dan $\langle \lfloor a_1 \rfloor, \lfloor a_2 \rfloor, \dots, \lfloor a_{11} \rfloor \rangle$ bukan barisan aritmatika.

Tulis $x = (a_2 - a_1 - \lfloor a_2 - a_1 \rfloor)_{min}$.
Jelas $\lfloor a_1 \rfloor = \lfloor 20{,}17 \rfloor = 20$.
Tulis b: beda barisan $\langle a_1, a_2, \dots, a_{11} \rangle$ dan
d: beda barisan $\langle \lfloor a_1 \rfloor, \lfloor a_2 \rfloor, \dots, \lfloor a_{10} \rfloor \rangle$.
Jelas $b \geq 1$.
Tulis $b = m + \alpha$ untuk suatu $m \in \mathbb{N}$ dan $0 < \alpha < 1$.
Jelas $a_2 = a_1 + b = 20{,}17 + b$ dan $\lfloor a_2 \rfloor = \lfloor a_1 + b \rfloor + d = \lfloor 20{,}17 + b \rfloor + d$.
Jadi, $x = a_2 - a_1 - \lfloor a_2 - a_1 \rfloor$
$= b - \lfloor b \rfloor$
$= m + \alpha - \lfloor m + \alpha \rfloor$
$= m + \alpha - m$
$= \alpha$
Jadi, $(a_2 - a_1 - \lfloor a_2 - a_1 \rfloor)_{min} = 0$.

18. Tulis $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ dan $K = \{K_1, K_2, K_3, K_4\}$.
Dipunyai tiap K_i menyediakan 3 jenis makanan dan untuk setiap 3 pembeli di P paling sedikit ada 1 kedai yang 3 jenis makanannya dibeli.
Tulis $x = n_{max}$.
Jelas $\binom{n}{3} \times 3 \leq 3n \Leftrightarrow \frac{(n-3)! \times (n-2)(n-1)n}{(n-3)! \times 3} \leq 3n \Leftrightarrow \frac{(n-2)(n-1)}{3} \leq 3 \Leftrightarrow n^2 - 3n + 2 \leq 9$
$\Leftrightarrow n^2 - 3n - 7 \leq 0 \Leftrightarrow n^2 - 2n \times \frac{3}{2} + \frac{9}{4} - \frac{37}{4} \leq 0 \Leftrightarrow \left(n - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{37}}{2}\right)^2 \leq 0$
$\Leftrightarrow \left(n - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{37}}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{37}}{2}\right) \leq 0$
$\Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{37}}{2} \leq n \leq \frac{3+\sqrt{37}}{2}$
$\Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{37}}{2} \leq n \leq \frac{9}{2}$.
Jadi, $n_{max} = 4$.

19. Diketahui $ABCDEFG$ beraturan.



Jelas $\angle ABC = \frac{(7-2) \times 180^o}{7} = \frac{900^o}{7}$,
$\angle CAB = \angle ACB = \frac{180^o - \frac{900^o}{7}}{2} = \frac{180^o}{7}$,
$\angle DAB = \angle ADC = \frac{360^o - \frac{1800^o}{7}}{2} = \frac{360^o}{7}$, dan

$\angle ABP = 90^o - \frac{360^o}{7} = \frac{270^o}{7}$.

Jelas $\cos\frac{360^o}{7} = \frac{DQ}{CD} \Leftrightarrow DQ = BC \times \cos\frac{360^o}{7}$.

Jadi $\frac{AD}{BC} = \frac{BC+2BC\cos\frac{360^o}{7}}{BC} = 1 + 2\cos\frac{360^o}{7}$

$= 1 + 2\left(1 - \sin^2\frac{180^o}{7}\right)$

$= 3 - 2\sin^2\frac{180^o}{7}$

20. Tulis $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}$, $a_i \in \mathbb{B}$, dan $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ dengan $x_i \neq x_j \forall i \neq j$.
    Diketahui $f(0) = 39$ dan $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = \cdots = f(x_n) = 2017$.
    Tulis $g(x) = f(x) - 2017$
    Jelas $g(x) = f(0) - 2017$
    = 39 – 2017
    = – 1978 dan
    $g(x_1) = g(x_2) = g(x_3) = \cdots = g(x_n)$
    $= 2017 - 2017$
    $= 0$
    Tanpa mengurangi keumuman, andaikan $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n$.
    Kasus n genap:
    Tulis $g(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\dots(x - x_n) + m$ untuk suatu $m \in \mathbb{R}$.
    Jelas $g(0) = -1978 \quad \Leftrightarrow x_1x_2x_3 \dots x_n + m = -1978$
    $\Leftrightarrow m = -1978 - x_1x_2x_3 \dots x_n$.
    Jadi $g(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\dots(x - x_n) - x_1x_2x_3 \dots x_n - 1978$ dan
    $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\dots(x - x_n) - x_1x_2x_3 \dots x_n - 1978 + 2017$
    $\Leftrightarrow f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\dots(x - x_n) - x_1x_2x_3 \dots x_n + 39$
    Jelas $f(x_1) = 2017 \quad \Leftrightarrow -x_1x_2x_3 \dots x_n + 39 = 2017$
    $\Leftrightarrow -x_1x_2x_3 \dots x_n = 1978$
    $\Leftrightarrow -x_n^n = 1978$ suatu kontradiksi.
    Kasus n ganjil:
    Tulis $\Leftrightarrow g(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\dots(x - x_n) + m$ untuk suatu $m \in \mathbb{R}$.
    Jelas $g(0) = -1978 \quad \Leftrightarrow -x_1x_2x_3 \dots x_n + m = -1978$
    $\Leftrightarrow m = x_1x_2x_3 \dots x_n - 1978$
    Jadi $g(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\dots(x - x_n) + x_1x_2x_3 \dots x_n - 1978$ dan
    $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\dots(x - x_n) + x_1x_2x_3 \dots x_n - 1978 + 2017$
    $\Leftrightarrow f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)\dots(x - x_n) + x_1x_2x_3 \dots x_n + 39$
    Jelas $f(x_1) = 2017 \quad \Leftrightarrow x_1x_2x_3 \dots x_n + 39 = 2017$
    $\Leftrightarrow x_1x_2x_3 \dots x_n = 1978$
    $\Leftrightarrow x_1^n \leq 1978$
    Jadi $n_{max} = 1978$ apabila $x_1 = 1$.
21. Diketahui papan catur 5×9 berikut ini:

0	0	0	0	0	1			1
0	0	0	0	1	1			2
0	0	0	1	1	1			3
0	0	1	1	1	1	1	1	6
0	1	1	1	1	1	1	1	7
0	1	2	3	4	5			

Tulis $X = \{0,1\}$.

Percobaan: isi tiap persegi satuan dengan bilangan di X.

Tulis B_i: jumlah bilangan-bilangan di kolom ke-i,

K_j: jumlah bilangan-bilangan di kolom ke-j, dan

H: himpunan bilangan-bilangan beda di antara B_i dan K_j.

Jelas pada 6 kolom pertama maksimal ada 6 K_j beda, yaitu: 0, 1, 2, 3, 4, dan 5.

Jadi, $B_4 = 6$ dan $B_5 = 7$.

Jadi, $n_{max}(H) = 8$, yaitu:

$H = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$

22. Bilangan asli $k > 2$ dikatakan cantik jika untuk setiap bilangan asli $n \geq 4$ dengan $5n + 1$ bilangan kuadrat sempurna, dapat ditemukan bilangan asli $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ sehingga

$$n + 1 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2$$

Tentukan bilangan cantik terkecil.

Definisi: $k \in \mathbb{N}, k > 2$ cantik

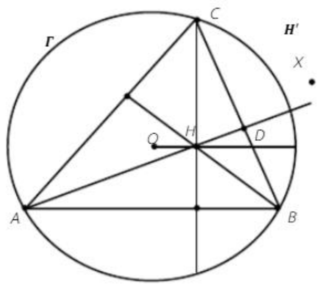
$\Leftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq 4, 5\,n + 1 = m^2$,

$\exists a_1, a_2, a_3, \dots, a_k \in \mathbb{N}$ sehingga

$n + 1 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2$.

Tulis $X = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ cantik}\}$.

23. Diberikan segitiga ABC yang ketiga garis tingginya berpotongan di titik H. Tentukan semua titik X pada sisi BC sehingga pencerminan H terhadap titik X terletak pada lingkaran luar segitiga ABC.



Diketahui

H: titik tinggi ΔABC,

O: titik pusat Γ (lingkaran luar ΔABC), dan

R: ukuran jari-jari Γ.

Ambil sembarang $X \in BC$.

Tulis $H \xrightarrow{X} H'$ sehingga $H' \in \Gamma$.

24. Diketahui $a, b, c \in \mathbb{R}$ dan $|a|, |b|, |c| \leq 1$.

Buktikan: $\sqrt{|a-b|}+\sqrt{|b-c|}+\sqrt{|c-a|}=2+\sqrt{2}$

Tulis $X=\sqrt{|a-b|}+\sqrt{|b-c|}+\sqrt{|c-a|}$

Bukti:

Ambil sembarang $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Jelas $|a-b|<|a|+|b|, |b-c|<|c|+|b|$ dan $|a-c|<|a|+|c|$

$\Leftrightarrow |a-b| \leq 2, |b-c| \leq 2$ dan $|a-c| \leq 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{|a-b|} \leq \sqrt{2}, \sqrt{|b-c|} \leq \sqrt{2}$, dan $\sqrt{|a-c|} \leq \sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{|a-b|}+\sqrt{|b-c|}+\sqrt{|a-c|} \leq 2\sqrt{2}+\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{|a-b|}+\sqrt{|b-c|}+\sqrt{|a-c|} \leq 2+\sqrt{2}$.

25. Pada suatu papan catur berukuran $2017 \times n$, Ani dan Banu melakukan permainan. Pemain pertama memilih suatu persegi dan kemudian mewarnainya dengan warna merah. Pemain berikutnya memilih suatu persegi dari daerah yang belum diberi warna merah dan kemudian mewarnainya dengan warna merah. Persegi yang dipilih boleh sebarang ukuran namun harus tepat menutup sejumlah persegi satuan pada papan catur. Kemudian kedua pemain bergantian melakukan hal tersebut. Seorang pemain dikatakan menang, jika pemain berikutnya tidak bisa lagi melanjutkan permainan. Jika Ani mendapat giliran pertama, tentukan semua nilai $n \geq 2017$ sehingga Ani mempunyai strategi untuk memenangkan permainan.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2017

TINGKAT NASIONAL

HARI PERTAMA & HARI KEDUA

WAKTU : 8 JAM

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika Tingkat Nasional Tahun 2017

1. Misalkan titik sudut A dari jajargenjang $ABCD$, dibuat suatu garis g. Buktikan bahwa jarak dari C ke garis g adalah jumlah atau selisih jarak dari B dan D ke g.

2. Lima orang siswa bertemu di suatu tempat. Sebuah trio adalah pasangan tiga siswa (A, B, C) sehingga A berjabat tangan dengan B dan B berjabat tangan dengan C, atau A tidak berjabat tangan dengan B dan B tidak berjabat tangan dengan C. Jika trio (A, B, C) dan (C, B, A) dianggap sebagai trio yang sama, berapa paling sedikit banyaknya trio yang mungkin?

3. Suatu bilangan asli d dikatakan istimewa jika setiap bilangan bulat dapat dinyatakan sebagai
$$a^2 + b^2 - dc^2$$
untuk suatu bilangan bulat a, b, dan c.
   a. Tentukan bilangan asli terkecil yang tidak istimewa.
   b. Tunjukkan bahwa 2017 istimewa.

4. Tuliskan semua pasangan bilangan real (x, y) yang memenuhi sistem persamaan
$$x^{100} - y^{100} = 2^{99}(x - y)$$
$$x^{200} - y^{200} = 2^{199}(x - y)$$
dengan x dan y berbeda.

5. Diberikan polinom P dengan koefisien-koefisien bilangan bulat. Diketahui bahwa persamaan $P(x) = 0$ mempunyai sedikitnya 9 solusi bilangan bulat berbeda. Misalkan juga n adalah sebarang bilangan bulat dengan sifat $|P(n)| < 2017$. Buktikan bahwa $P(n) = 0$.

6. Tentukan banyaknya bilangan asli yang tidak lebih besar dari 2017 sedemikian sehingga n habis membagi $20^n + 17k$ untuk suatu bilangan asli k.

7. Diberikan jajargenjang $ABCD$. Titik E dan titik F dipilih berturut-turut pada sisi BC dan CD sedemikian rupa sehingga segitiga ABE dan segitiga BCF mempunyai luas yang sama. Diagonal BD memotong AE dan AF berturut-turut di M dan N. Buktikan terdapat segitiga yang panjang sisisisinya sama dengan BM, MN, dan ND.

8. Lantai dari sebuah aula ditutupi dengan 2017 × 2017 ubin satuan. Luffy mempunyai sejumlah detektor. Setiap detektor yang diletakkan di atas ubin akan menyala jika tepat di bawahnya terdapat emas, dan tidak bereaksi apapun jika tidak ada emas di bawahnya. Luffy meletakkan k buah detektor tepat di atas k buah ubin kemudian dia keluar ruangan. Kemudian Sanji memilih suatu daerah persegi yang ditutupi oleh 1500 × 1500 ubin satuan dan menyembunyikan tepat satu koin emas di bawah setiap ubin. Ketika Luffy kembali dan melihat detektor yang tadi dia pasang, dia dapat menentukan letak semua koin yang tadi ditanam Sanji. Tentukan nilai k terkecil agar Luffy selalu dapat menentukan letak semua koin tak peduli daerah manapun yang dipilih Sanji.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2017

TINGKAT NASIONAL

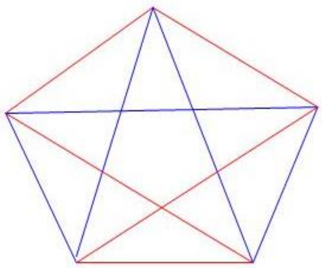
SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Nasional Tahun 2017

1. Penyelesaian :
   Misalkan titik H_C, H_B, H_D adalah kaki-kaki tegak lurus.
   Kasus 1: g memotong ruas garis BC di X dan DC di Y. Maka △ABX ~ △YCX ~ △YDA dan seterusnya
   $$\frac{H_D - H_B}{H_C} = \frac{AD - XB}{XC} = \frac{BC - XB}{XC} = 1$$
   Kasus 2: g berpotongan dengan ruas garis CD - dengan cara yang sama seperti kasus 1.
   Kasus 3. g tidak berpotongan dengan ruas garis BC tetapi g berpotongan dengan garis BC di X. Maka △H_CXC ~ △H_BXB ~ △H_DAD dan seterusnya.
   $$\frac{H_D + H_B}{H_C} = \frac{XB + AD}{XC} = \frac{XC}{XC} = 1$$
   Kasus 4. g tidak memotong segmen CD tetapi g memotong garis CD. Sama seperti kasus 4.

2. Penyelesaian :
   Anggaplah kelima orang tersebut sebagai lima titik A, B, C, D, E dan perhatikan segitiga ABC sebagai contoh:
   Segmen berwarna biru untuk jabat tangan, segmen merah untuk tidak berjabat tangan, karena segitiga memiliki tiga sisi, harus ada dua segmen yang berwarna sama sehingga terbentuklah trio. (Jika sebuah segitiga memiliki ketiga sisi berwarna sama, maka akan terbentuk tiga trio dan kasus ini harus dihindari).
   Untuk grafik lima titik, terdapat C(5,3) = 10 segitiga yang berbeda, sehingga jumlah trio minimum yang mungkin adalah 10.
   Grafik terlampir adalah contoh pola untuk 10 trio.



3. Penyelesaian :
   1 istimewa, terbukti di tautan
   2 istimewa, karena:
   :
   $$(2^m(n+1))^2 + (2^m n)^2 - 2(2^m n)^2 = 2^{2m}(2n+1)$$
   $$(2^m(n+1))^2 + (2^m(n+1))^2 - 2(2^m n)^2 = 2^{2m+1}(2n+1)$$
   3 tidak special, karena:

   $a^2 + b^2 - 3c^2 = 3$ tidak ada solusi.

Bukti: Misalkan a,b,c ada, maka a = b = 0 (mod 3) → a = $3a_1$, b = $3b_1$
$3a_1^2 + 3b_1^2 - c^2 = 1$ tetapi $3a_1^2 + 3b_1^2 - c^2 = 0,2$ (mod 3) -kontradiksi.

4. Penyelesaian :
Misalkan $x = 2a, y = 2b$
$a^{100} - b^{100} = a - b = a^{200} - b^{200}$
$a^{100} + b^{100} = 1$ lalu $|a| \leq 1, |b| \leq 1$ dan $a = 1, b = 0, a = 0, b = 1$ adalah solusi,
Misalkan $|a|, |b| < 1$.
$a^{100} - a = b^{100} - b \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{b^{99}-1}{a^{99}-1} > 0$ jadi a,b memiliki tanda yang sama.
$\frac{a^{100}-b^{100}}{a-b} < 1 = a^{99} + a^{98}b + \cdots + b^{99} \rightarrow a > 0, b > 0$ Jadi,
$a^{99} + b^{99} < 1 = a^{100} + b^{100} = a * a^{99} + b * b^{99} < a^{99} + b^{99}$ -kontradiksi.
Jadi a = 1, b = 0, a = 0, b = 1 adalah semua solusinya.
Jawaban: (x, y) = (2, 0), (0, 2).

5. Penyelesaian :
Misalkan $x_1, x_2, \ldots x_9$ adalah akar-akar $P(x) = 0$ maka $P(x) = (x - x_1) \ldots (x - x_9)Q(x)$
Misalkan n bukan solusi dari P(x) = 0 maka
$$|(P(n)| = |(n - x_1) \ldots (n - x_9)Q(n)| \geq 1^2 * 2^2 * 3^2 * 4^2 * 5 = 2880$$

6. Penyelesaian :
Jika 17|n maka $n \nmid 20^n \rightarrow n \nmid 20^n + 17k$
Jika $17 \nmid n$ maka $17k = a \pmod{n}$ memiliki solusi untuk setiap a sehingga $k = (-20^n) * (17)^{-1} (\text{mod } n)$ maka $n \nmid 20^n + 17k$
$2017 - \left[\frac{2017}{17}\right] = 1899$

7. Penyelesaian :
Misalkan
$$B = (0,0), E = (a,0), C = (a+b,0), F = (a+b+\frac{ac}{a+b}, ta), D = (a+b+c, ta+tb), A = (c, ta+tb)$$
Mudah untuk melihat bahwa kondisinya valid di sini. Sekarang, baris BD memiliki persamaan
$$y = \frac{t(a+b)}{a+b+c}x$$
dan garis AE memiliki persamaan
$$y = \frac{t(a+b)}{c-a}(x-a)$$
Kita dapat menyelesaikan ini untuk mendapatkan koordinat x dari M menjadi
$$\frac{a(a+b+c)}{2a+b}$$
Demikian pula persamaan garis AF adalah

$$y = \frac{tb(a+b)}{cb-(a+b)^2}(x-c)+t(a+b)$$

Kita dapat menyelesaikannya lagi untuk mendapatkan koordinat x dari N menjadi

$$\frac{(a+b)(a+b+c)}{a+2b}$$

Sekarang, kita perhatikan bahwa rasio BM : MN : ND sama dengan $a^2 + 2ab : a^2 + b^2 + ab : 2ab + b^2$, yang merupakan segitiga yang valid karena tidak ada satu pun di antaranya yang paling sedikit setengah dari jumlah dua lainnya.

8. Penyelesaian :

WLOG merepresentasikan koordinat kotak-kotak dengan elemen himpunan $\{1,2, \ldots,2017\}^{x2}$ secara alami, seperti kisi-kisi. Untuk konstruksinya, ambil titik {(1, 518), (2, 518), …, (517, 518)} dan {(518, 1), (518, 2), …, (518, 517)}. Mudah dipahami mengapa hal ini berhasil. Sekarang, perhatikan bahwa jika terdapat 1008 kotak berurutan yang berbagi baris atau kolom yang tidak berisi detektor emas, dan terdapat 1008 kotak berurutan yang "sejajar" dan bergeser 1500 secara vertikal atau horizontal, maka himpunan kotak terakhir pasti berisi detektor emas. (Ini jauh lebih mudah diungkapkan secara visual.) Sekarang, bagilah lapangan menjadi 9 persegi panjang yang diberikan oleh himpunan koordinat $A_{i,j} = S_i \times S_j$ di mana $1 < i,j < 3$, dan $S_1 = \{1, 2, \ldots ,517\}$, $S_2 = \{518, 519, \ldots ,1500\}$, $S_3 = \{1501, 1502, \ldots ,2017\}$. Misalkan $K(A_{i,j})$ menyatakan jumlah detektor emas dalam persegi panjang masukan, dan pertimbangkan beberapa penempatan optimal detektor tersebut. Dari pengamatan, dapat disimpulkan bahwa

$$K(A_{i,j}) + K(A_{i,j+1}) + K(A_{i+2,j}) + K(A_{i+2,j+1}) \geq 517$$

dan demikian pula

$$K(A_{i,j}) + K(A_{i+1,j}) + K(A_{i,j+2}) + K(A_{i+1,j+2}) \geq 517$$

Menjumlahkan semua pertidaksamaan yang dihasilkan menghasilkan

$$2(-K(A_{2,2}) + \sum_{1\leq i,j\leq 3} K(A_{i,j})) \geq 4 \cdot 517$$

dan dengan demikian

$$\sum_{1\leq i,j\leq 3} K(A_{i,j}) \geq 1034$$

yang merupakan ketidaksetaraan yang diinginkan.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2018

TINGKAT KABUPATEN/KOTA

BIDANG MATEMATIKA

WAKTU : 180 MENIT

WWW.JELAJAHNALAR.COM

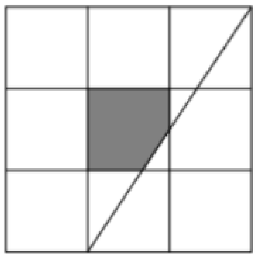
Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Kabupaten/Kota Tahun 2018

1. Misalkan a, b, dan c adalah tiga bilangan berbeda. Jika ketiga bilangan tersebut merupakan bilangan asli satu digit maka jumlah terbesar akar-akar persamaan $(x - a)(x - b) + (x - b)(x - c) = 0$ yang mungkin adalah …

2. Setiap sel dari suatu tabel berukuran 2×2 dapat diisi dengan bilangan 1, 2, atau 3. Misalkan N adalah banyaknya tabel yang memenuhi kedua sifat berikut sekaligus:
   - untuk setiap baris, hasil penjumlahannya genap
   - untuk setiap kolom, hasil penjumlahannya genap

   Nilai N adalah …

3. Diberikan persegi berukuran 3×3 satuan seperti pada gambar. Luas segilima yang diarsir adalah …



4. Parabola $y = ax^2 - 4$ dan $y = 8 - bx^2$ memotong sumbu koordinat pada tepat empat titik. Keempat titik tersebut merupakan titik-titik sudut layang-layang dengan luas 24. Nilai $a + b$ adalah …

5. Untuk setiap bilangan asli n didefinisikan $s(n)$ sebagai hasil penjumlahan dari semua digit-digit dari n. Banyaknya bilangan asli d sehingga d habis membagi $n - s(n)$ untuk setiap bilangan asli n adalah …

6. Diketahui x dan y bilangan prima dengan $x < y$, dan $x^3 + y^3 + 2018 = 30y^2 - 300y + 3018$. Nilai x yang memenuhi …

7. Diberikan dua bilangan asli dua angka yang selisihnya 10. Diketahui bahwa bilangan yang kecil merupakan kelipatan 3, sedangkan lainnya merupakan kelipatan 7. Diketahui pula bahwa jumlah semua faktor prima kedua bilangan tersebut adalah 17. Jumlah dua bilangan tersebut adalah …

8. Diberikan satu koin yang tidak seimbang. Bila koin tersebut ditos satu kali, peluang muncul angka adalah 14. Jika ditos n kali, peluang muncul tepat dua angka sama dengan peluang muncul tepat tiga angka. Nilai n adalah …

9. Panjang sisi-sisi dari segitiga merupakan bilangan asli yang berurutan. Diketahui bahwa garis berat dari segitiga tegak lurus dengan salah satu garis baginya. Keliling segitiga itu adalah …

10. Diberikan suku banyak $p(x)$ dengan $p(x)^2 + p(x)^2 = 2x^2$ untuk setiap bilangan real x. Jika $p(1) \neq 1$ maka jumlah semua nilai $p(10)$ yang mungkin adalah …

11. Misalkan $\{x_n\}$ adalah barisan bilangan bulat yang memenuhi $x_1 = x_2 = \cdots = x_{12} = 0$, $x_{13} = 2$, dan untuk setiap bilangan asli n berlaku $x_{n+13} = x_{n+4} + 2x_n$. Nilai x_{143} adalah ...

12. Untuk setiap bilangan real z, $\lfloor z \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari atau sama dengan z. Jika diketahui $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + y = 43{,}8$ dan $x + y - \lfloor x \rfloor = 18{,}4$. Nilai $10(x + y)$ adalah …

13. Misalkan $ABCD$ adalah trapesium siku-siku dengan AB sejajar DC dan AB tegak lurus AD. Misalkan juga P adalah titik potong diagonal AC dan BD. Jika perbandingan luas segitiga APD dan luas trapesium $ABCD$ adalah 4 : 25 maka nilai $\frac{AB}{DC}$ adalah …

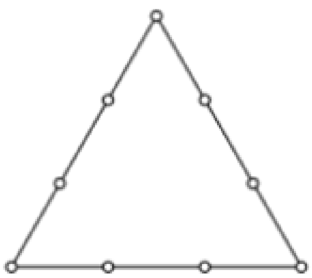
14. Himpunan S merupakan himpunan bilangan-bilangan 7 digit sehingga masing-masing angka 1, 2, 3, 4, 5, 6, atau 7 tepat muncul satu kali. Bilangan-bilangan di S diurutkan mulai dari yang paling kecil sampai yang paling besar. Bilangan yang berapa pada urutan ke-2018 adalah …

15. Misalkan $S = \{\chi \in \mathbb{R} | 0 \leq \chi \leq 1\}$. Banyaknya pasangan bilangan asli (a, b) sehingga tepat ada 2018 anggota S yang dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{x}{a} + \frac{y}{b}$ untuk suatu bilangan bulat x dan y adalah …

16. Diberikan segitiga ABC dan lingkaran Γ yang berdiameter AB. Lingkaran Γ memotong sisi AC dan BC berturut-turut di D dan E. Jika $AB = 30$, $AD = \frac{1}{3}AC$, dan $BE = \frac{1}{4}BC$, maka luas segitiga ABC adalah …

17. Diberikan bilangan real x dan y yang memenuhi $12 < \frac{x}{y} < 2$. Nilai minimum $\frac{x}{2y-x} + \frac{2y}{2x-y}$ adalah …

18. Diberikan sembilan titik pada bidang yang membentuk segitiga sama sisi seperti pada gambar. Pada tiap sisi, dua titik yang bukan titik sudut segitiga membagi sisi menjadi tiga bagian sama panjang. Kesembilan titik ini akan diwarnai masing-masing dengan warna merah atau biru. Peluang bahwa dari kesembilan titik tersebut, terdapat tiga titik yang warnanya sama dan membentuk segitiga siku-siku adalah



19. Bilangan prima terbesar yang dapat dinyatakan dalam bentuk $a^4 + b^4 + 13$ untuk suatu bilangan-bilangan prima a dan b adalah …

20. Pada segitiga ABC, panjang sisi BC adalah 1 satuan. Ada tepat satu titik D pada sisi BC yang memenuhi $|DA|^2 = |DB| \cdot |DC|$. Jika k menyatakan keliling ABC, jumlah semua k yang mungkin adalah …

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2018

TINGKAT KABUPATEN/KOTA

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Kabupaten/Kota Tahun 2018

1. Perhatikan penjabaran bentuk aljabar tersebut.

$$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)=0$$
$$\Leftrightarrow x^2-(a+b)x+ab+x^2-(b+c)x+bc=0$$
$$\Leftrightarrow 2x^2-(a+2b+c)x+(ab+bc)=0$$

Sehingga, jika akar-akar dari persamaan kuadrat $x^2-(a+2b+c)x+(ab+bc)=0$ adalah x_1 dan x_2, maka dengan rumus jumlah akar-akar persamaan kuadrat diperoleh:

$$x_1+x_2=\frac{a+2b+c}{2}$$

Perhatikan juga bahwa a, b, dan c adalah tiga bilangan satu digit berbeda, sehingga a + 2b + c akan maksimum apabila b adalah bilangan terbesar dan a, c masing-masing dipilih bilangan satu digit berurutan yang lebih kecil dari b.

Sehingga apabila b = 9 dan masing-masing a atau c adalah 8 atau 7, diperoleh jumlah terbesar akar-akar persamaan kuadrat tersebut adalah

$$x_1+x_2=\frac{a+2b+c}{2}=\frac{33}{2}$$

2. Perhatikan tabel 2×2 berikut!

a	b
c	d

Dengan memperhatikan bahwa hasil penjumlahan setiap baris dan kolom adalah genap, maka diperoleh kedua bilangan pada setiap baris atau kolom memiliki paritas yang sama.

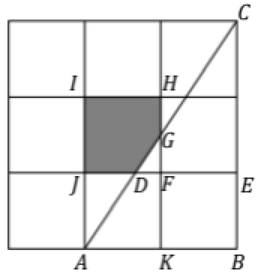
Perhatikan juga bahwa a, b, c, atau d hanya dapat diisi dengan bilangan 1, 2, atau 3.

Banyak tabel yang memenuhi dapat ditentukan dengan membagi kasus:

- untuk a, b, c, d bilangan ganjil
  maka ada tiga kemungkinan
  - keempat bilangan a, b, c, d adalah bilangan yang sama, sebanyak = ${}_2C_1=2$ cara.
  - diantara bilangan a, b, c, d ada tiga bilangan yang sama, sebanyak $\frac{4!}{3!}\times {}_2C_1$ = 8 cara.
  - diantara bilangan a, b, c, d ada dua bilangan yang sama, sebanyak $\frac{4!}{2!2!}$ = 6 cara.
- untuk a, b, c, d bilangan genap
  maka hanya ada satu kemungkinan yaitu keempat bilangan a, b, c, d adalah bilangan 2. Sehingga ada sebanyak 1 cara.

Jadi, total banyak tabel yang memenuhi adalah sebanyak 2 + 8 + 6 + 1 = 17 cara.

3. Perhatikan gambar berikut!



Perhatikan karena AB ∥ DE, maka ΔCAB ~ ΔCDE sehingga diperoleh perbandingan

$$\frac{CE}{CB} = \frac{DE}{AB} \Rightarrow DE = \frac{CE}{CB} \times AB = \frac{2}{3} \times 2 = \frac{4}{3}$$

Sehingga, karena DE = DF + FE, dan FE = 1, maka diperoleh

$$DF = DE - FE = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

Perhatikan, karena ΔDFG ~ ΔABC sehingga diperoleh perbandingan

$$\frac{FG}{BC} = \frac{DF}{AB} \Rightarrow FG = \frac{DF}{AB} \times BC = \frac{\frac{1}{3}}{2} \times 3 = \frac{1}{2}$$

Sehingga, $[DGHIJ] = [FHIJ] - [DFG] = 1 - \frac{1}{2} = \frac{11}{12}$.

4. Perhatikan, titik potong parabola $y = ax^2 - 4$ pada sumbu Y adalah di titik (0, −4). Sedangkan, titik potong parabola $y = 8 - bx^2$ pada sumbu Y adalah di titik (0, 8).
   Titik potong parabola $y = ax^2 - 4$ dan $y = 8 - bx^2$ pada sumbu X seharusnya adalah pada titik yang sama, agar dapat diperoleh dua titik lagi sebagai titik-titik sudut layang-layang yang lain.
   Sehingga, titik potong di sumbu X dapat ditentukan dengan

$$\begin{aligned} y_1 &= y_2 \\ \Leftrightarrow ax^2 - 4 &= 8 - bx^2 \\ \Leftrightarrow (a + b)x^2 - 12 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \pm\sqrt{\frac{12}{a+b}} \end{aligned}$$

   Jadi, titik potong kedua parabola pada sumbu X adalah di titik $\left(\sqrt{\frac{12}{a+b}}, 0\right)$ dan $\left(-\sqrt{\frac{12}{a+b}}, 0\right)$. Padahal luas layang-layang adalah 24, sehingga

$$L = \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$$

$$\Leftrightarrow 24 = \frac{1}{2} \times |8 - (-4)| \times \left|\sqrt{\frac{12}{a+b}} - \left(-\sqrt{\frac{12}{a+b}}\right)\right|$$

$$\Leftrightarrow 24 = \frac{1}{2} \times 12 \times \sqrt{\frac{12}{a+b}}$$

$$\Leftrightarrow 2 = \sqrt{\frac{12}{a+b}}$$

$$\Leftrightarrow 4 = \frac{12}{a+b}$$

$$\Leftrightarrow a + b = 3$$

5. Perhatikan, bilangan asli n dapat dinyatakan sebagai $nn = a_1 \cdot 10^0 + a_2 \cdot 10^1 + a_3 \cdot 10^2 + \cdots$, maka jika s(n) didefinisikan sebagai hasil penjumlahan dari semua digit-digit dari n, maka diperoleh
$$s(n) = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$
Misalkan, $p = n - s(n)$, maka
$$\begin{aligned} p &= n - s(n) \\ &= (a_1 \cdot 10^0 + a_2 \cdot 10^1 + a_3 \cdot 10^2 + \cdots) - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots) \\ &= a_1 (10^0 - 1) + a_2 (10^1 - 1) + a_3 (10^2 - 1) + \cdots \\ &= 9a_1 + 99a_2 + 999a_3 + \cdots \\ &= 9(a_1 + 11a_2 + 111a_3 + \cdots) \end{aligned}$$
Sehingga, $9 | n - s(n)$. Jadi bilangan asli d adalah faktor bulat positif dari 9, yaitu 1, 3, dan 9. Jadi, ada sebanyak 3 buah bilangan d yang memenuhi.
6. Perhatikan,
$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + 2018 &= 30y^2 - 300y + 3018 \\ \Leftrightarrow x^3 + y^3 - 30y^2 + 300y - 1000 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^3 + (y - 10)^3 &= 0 \end{aligned}$$
Sehingga. diperoleh
$$\begin{aligned} x &= -(y - 10) \\ \Leftrightarrow \quad x + y &= 10 \end{aligned}$$
Karena, x, y adalah bilangan prima, maka dua buah bilangan prima yang jumlahnya 10 adalah 3 dan 7. Mengingat x < y, sehingga dapat diperoleh x = 3 dan y = 7.
Jadi, x yang memenuhi adalah 3.
7. Perhatikan, misal kedua bilangan tersebut adalah x dan y, karena x adalah bilangan kelipatan 3 dan y adalah bilangan kelipatan 7, maka untuk m dan n adalah suatu bilangan asli, x dan y dapat dinyatakan sebagai
$$x = 7m$$
$$y = 3n$$
Karena selisih kedua bilangan adalah 10, dan x > y, maka x − y = 10. Ini sama saja dengan persamaan 7m − 3n = 10.
Nilai m dan n dapat ditentukan menggunakan pembalikan algoritma Euclid, yaitu
$$7 = 2 \times 3 + 1$$
Sehingga,
$$1 = 7 - 2 \times 3$$
Dengan mengalikan 10 kedua ruas diperoleh
$$10 = 70 - 60$$
Sehingga, diperoleh m = 10 dan n = 20.
Sehingga, solusi umumnya adalah
$$m = 10 - 3t \Rightarrow x = 70 - 21t$$
$$n = 20 - 7t \Rightarrow y = 60 - 21t$$
Diperoleh pasangan bilangan dua digit x, y yang memenuhi adalah
$$(x, y) = \{(28, 18), (49, 39), (70, 60), (91, 81)\}$$

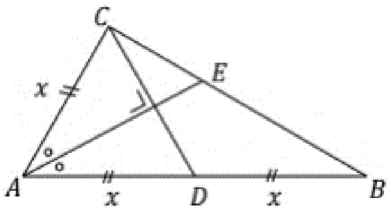
Perhatikan bahwa jumlah semua faktor prima adalah 17, maka 17 = 3 + p + q + 7.
Maka p + q = 7, sehingga bilangan prima p, q yang memenuhi hanyalah 2 dan 5.
Sehingga, jelas diantara pasangan x, y yang memiliki faktor prima 5 hanyalah x = 70 dan y = 60.
Jadi, jumlah kedua bilangan tersebut adalah x + y = 70 + 60 = 130.

8. Perhatikan, dengan menggunakan konsep distribusi binomial, misal p = peluang kejadian muncul angka, maka $p = \frac{1}{4}$ dan $1 - p = \frac{3}{4}$.
Apabila satu koin ditos n kali, maka peluang muncul tepat dua angka sama dengan peluang muncul tepat tiga angka dapat dinyatakan sebagai

$$
\begin{aligned}
P(X = 2) &= P(X = 3) \\
\Leftrightarrow {}_nC_2 \cdot p^2 \cdot (1 - p)^{(n-2)} &= {}_nC_3 \cdot p^3 \cdot (1 - p)^{(n-3)} \\
\Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!\,2!} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{(n-2)} &= \frac{n!}{(n-3)!\,3!} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{(n-3)} \\
\Leftrightarrow \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{(n-2)! \cdot 2} \cdot \frac{3}{4} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)!}{(n-3)! \cdot 3!} \cdot \frac{1}{4} \\
\Leftrightarrow \frac{3}{2} &= \frac{n-2}{6} \\
\Leftrightarrow 18 &= 2n - 4 \\
\Leftrightarrow 22 &= 2n \\
\Leftrightarrow n &= 11
\end{aligned}
$$

Jadi, nilai n yang memenuhi adalah 11.

9. Perhatikan gambar segitiga berikut



CD merupakan garis berat dan AE merupakan garis bagi, keduanya berpotongan saling tegak lurus.
Perhatikan segitiga ADC sama kaki, sehingga AD = AC. Misal AD = AC = DB = x.
Perhatikan juga, karena sisi-sisi segitiga merupakan bilangan asli yang berurutan, maka selisih dari dua sisi segitiga adalah 1 atau 2.
Kasus pertama, selisih dua sisi segitiga adalah 1, sehingga 2x − x = 1 ⇒ x = 1
Karena x = 1, maka b = 1, c = 2, sehingga

- a = 0, tidak memenuhi karena sisi segitiga tidak mungkin nol
- a = 3, tidak mungkin karena tidak memenuhi ketaksamaan b + c > a

Kasus kedua, selisih dua sisi segitiga adalah 2, sehingga 2x − x = 2 ⇒ x = 2
Karena x = 2, maka b = 2, c = 4, sehingga

- a = 3, memenuhi.

Sehingga, sisi segitiga adalah a = 3, b = 2, c = 4.
Jadi keliling segitiga adalah a + b + c = 3 + 2 + 4 = 9.

10. Perhatikan, anggap $p(x) = ax^n + q(x)$, $a \neq 0$, $q(x)$ suku banyak derajat k dengan $0 \leq k < n$, maka

$$p(x)^2 + p(x^2) = 2x^2$$
$$\Leftrightarrow (ax^n + q(x))^2 + (a(x^2)^n + q(x^2)) = 2x^2$$
$$\Leftrightarrow a^2x^{2n} + 2ax^nq(x) + q(x)^2 + ax^{2n} + q(x^2) = 2x^2$$
$$\Leftrightarrow (a^2 + a)x^{2n} + 2ax^nq(x) + q(x)^2 + q(x^2) = 2x^2$$

Sehingga, dengan memperhatikan kesamaan di atas, maka kemungkinan yang terjadi adalah

- $(a^2 + a)x^{2n} = 2x^2$, maka $n = 1$ dengan $a^2 + a = 2$.
- $(a^2 + a)x^{2n} + 2ax^nq(x) = 2x^2$ apabila $a^2 + a = 0$ maka $n + k = 2$.
  Perhatikan, $n + k = 2 \Rightarrow k = 2 - n$, maka
  $$0 \le k < n \Rightarrow 0 \le 2 - n < n$$
  $$\Leftrightarrow n \le 2 < 2n$$
  $$\Leftrightarrow 1 < n \le 2$$

Jelas bahwa $n = 2$.
Jadi, suku banyak $p(x)^2 + p(x^2) = 2x^2$, agar kesamaan berlaku maka

- $p(x)$ adalah suku banyak berderajat satu.
- $p(x)$ adalah suku banyak derajat dua.

Kasus pertama, $p(x)$ adalah suku banyak berderajat satu.
Misal, $p(x) = ax + b$, $a \neq 0$, maka

$$\begin{aligned} & p(x)^2 + p(x^2) = 2x^2 \\ \Leftrightarrow\ & (ax+b)^2 + (ax^2+b) = 2x^2 \\ \Leftrightarrow\ & a^2x^2 + 2abx + b^2 + ax^2 + b = 2x^2 \\ \Leftrightarrow\ & (a^2+a)x^2 + 2abx + (b^2+b) = 2x^2 \end{aligned}$$

Sehingga, dari kesamaan suku banyak diperoleh

$$2ab = 0 \Rightarrow a = 0\ (TM) \text{ atau } b = 0$$

$$\begin{aligned} a^2 + a = 2 \Rightarrow\ & a^2 + a - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (a+2)(a-1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & a = -2 \text{ atau } a = 1 \end{aligned}$$

Dari kasus ini $p(x)$ yang memenuhi hanya jika $b = 0$, sehingga

- Apabila $a = -2$, jadi $p(x)$ yang memenuhi adalah $p(x) = -2x$, sehingga karena $p(1) = -2 \neq 1$, maka $p(10) = -2(10) = -20$.
- Apabila $a = 1$, jadi $p(x)$ yang memenuhi adalah $p(x) = x$, sehingga karena $p(1) = 1$, dan mengingat $p(1) \neq 1$, maka $p(x) = x$ tidak memenuhi. Sehingga tidak ada nilai $p(10)$ yang memenuhi.

Kasus kedua, $p(x)$ adalah suku banyak berderajat dua.
Misal, $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ maka

$$\begin{aligned} & p(x)^2 + p(x^2) = 2x^2 \\ \Leftrightarrow\ & (ax^2+bx+c)^2 + (ax^4+bx^2+c) = 2x^2 \\ \Leftrightarrow\ & a^2x^4 + ax^4 + 2abx^3 + b^2x^2 + 2acx^2 + bx^2 + 2bc\,x + c^2 + c = 2x^2 \\ \Leftrightarrow\ & (a^2+a)x^4 + 2abx^3 + (b^2+2ac+b)x^2 + 2bcx + (c^2+c) = 2x^2 \end{aligned}$$

Sehingga, dari kesamaan suku banyak diperoleh

$$a^2 + a = 0 \Rightarrow \quad a(a+1) = 0$$
$$\Leftrightarrow a = 0\ (TM) \text{ atau } a = -1$$

$$2ab = 0 \Rightarrow a = 0\ (TM) \text{ atau } b = 0$$

$$b^2 + 2ac + b = 2 \Rightarrow 2ac = 2$$
$$\Leftrightarrow -2c = 2$$
$$\Leftrightarrow c = -1$$

Dari kasus ini $p(x)$ yang memenuhi adalah $p(x) = -x^2 - 1$, sehingga $p(10) = -(10)^2 - 1 = -101$.

Jadi jumlah semua nilai $p(10)$ yang mungkin adalah $-20 - 101 = -121$.

11. Perhatikan, kita akan mencoba menguraikan kombinasi linear dari bilangan 143 terhadap bilangan 9 dan 13, sehingga diperoleh

$$9p + 13q = 143 \quad \Rightarrow 9p = 143 - 13q$$
$$\Leftrightarrow 9 \cdot p = 13 \cdot (11 - q)$$

Sehingga, terdapat dua penyelesaian bulat untuk $9p + 13q = 143$, dengan p, q bilangan cacah.

- $p = 13$, sehingga $11 - q = 9 \Rightarrow q = 2$, sehingga $(p_1, q_1) = (13, 2)$
- $p = 0$, sehingga $11 - q = 0 \Rightarrow q = 11$, sehingga $(p_2, q_2) = (0, 11)$

Padahal, untuk $x_{n+13} = x_{n+4} + 2x_n$, rumus umumnya untuk $n = 9p + 13q$ adalah

$$x_n = \sum_{i=1}^{k} 2^{q_i} \cdot \binom{p_i + q_i - 1}{p_i}$$

Sehingga,

$$x_n = 2^2 \cdot \binom{14}{13} + 2^{11} \cdot \binom{10}{0}$$
$$= 4 \cdot 14 + 2048 \cdot 1$$
$$= 56 + 2048$$
$$= 2104$$

12. Perhatikan, misal $0 \le \delta < 1$, maka untuk setiap z bilangan real berlaku:

$$z = \lfloor z \rfloor + \delta_z$$

Dari persamaan $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + y = 43{,}8$, diperoleh

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + y = 43{,}8 \Rightarrow \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor y \rfloor + \delta_y = 43{,}8$$
$$\Leftrightarrow \quad \lfloor x \rfloor + 2\lfloor y \rfloor + \delta_y = 43{,}8$$

Sehingga diperoleh, $\lfloor x \rfloor + 2\lfloor y \rfloor = 43$ dan $\delta_y = 0{,}8$.

Dan dari persamaan $x + y - \lfloor x \rfloor = 18{,}4$ diperoleh

$$x + y - \lfloor x \rfloor = 18{,}4 \Rightarrow \lfloor x \rfloor + \delta x + \lfloor y \rfloor + \delta_y - \lfloor x \rfloor = 18{,}4$$
$$\Leftrightarrow \lfloor y \rfloor + \delta_x + \delta_y = 18{,}4$$
$$\Leftrightarrow \lfloor y \rfloor + \delta_x + 0{,}8 = 18{,}4$$
$$\Leftrightarrow \lfloor y \rfloor + \delta_x = 17{,}6$$

Sehingga diperoleh $\lfloor y \rfloor = 17$, dan $\delta_x = 0{,}6$.

Perhatikan kembali bahwa $\lfloor x \rfloor + 2\lfloor y \rfloor = 43$, sehingga diperoleh

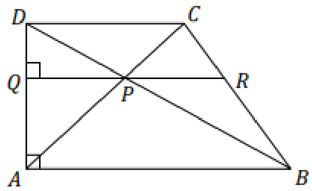
$$\lfloor x \rfloor + 2\lfloor y \rfloor = 43 \Rightarrow \lfloor x \rfloor + 2(17) = 43$$
$$\Leftrightarrow \lfloor x \rfloor + 34 = 43$$
$$\Leftrightarrow \lfloor x \rfloor = 9$$

Jadi, diperoleh nilai x dan y adalah

$$x = \lfloor x \rfloor + \delta_x = 9 + 0{,}6 = 9{,}6$$
$$y = \lfloor y \rfloor + \delta_y = 17 + 0{,}8 = 17{,}8$$

Jadi, nilai $10(x + y) = 10(9{,}6 + 17{,}8) = 10(27{,}4) = 274$.

13. Perhatikan trapesium $ABCD$ berikut.



P adalah titik potong diagonal AC dan BD. Misal,

$$\frac{AB}{DC} = m \Rightarrow AB = m \cdot DC$$

Sehingga, dari perbandingan luas segitiga APD dan trapesium $ABCD$ diperoleh

$$\frac{[APD]}{[ABCD]} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AD \cdot PQ}{\frac{1}{2} \cdot AD \cdot (AB + DC)}$$
$$\frac{4}{25} = \frac{PQ}{AB + DC}$$
$$\frac{4}{25} = \frac{PQ}{(1+m)DC}$$

Padahal, dari kesebangunan segitiga ABD dan segitiga CAB, diperoleh $PQ = PR$. Sedangkan, dari kesebangunan APQ dan ACD serta BPR dan BDC diperoleh.

$$\frac{AQ}{DQ} = \frac{PQ}{DC - PQ} = \frac{AB - PR}{PR}$$

Maka,

$$\begin{aligned} PQ^2 = (DC - PQ)(AB - PQ) \Rightarrow \quad & PQ^2 = (DC - PQ)(m \cdot DC - PQ) \\ \Leftrightarrow \quad & PQ^2 = m \cdot DC^2 - (1+m) \cdot DC \cdot PQ + PQ^2 \\ \Leftrightarrow \quad & (1+m) \cdot DC \cdot PQ = m \cdot DC^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{PQ}{DC} = \frac{m}{(1+m)} \end{aligned}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} \frac{4}{25} = \frac{PQ}{(1+m)DC} \Rightarrow \quad & \frac{4}{25} = \frac{m}{(1+m)^2} \\ \Leftrightarrow \quad & 4(1+m)^2 = 25m \\ \Leftrightarrow \quad & 4 + 8m + 4m^2 = 25m \\ \Leftrightarrow \quad & 4m^2 - 17m + 4 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (4m-1)(m-4) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & m = \frac{1}{4} \text{ atau } m = 4 \end{aligned}$$

Jadi, perbandingan $\frac{AB}{DC} = \frac{1}{4}$ atau $\frac{AB}{DC} = 4$.

14. Pertama, kita akan memeriksa banyak bilangan dengan memeriksa digit pada tempat terbesar, yaitu tempat jutaan.
   - Bilangan 1XXXXXX menyumbang sebanyak 6! = 720 bilangan. Jadi bilangan ke-1 sampai dengan bilangan ke-720 adalah berformat 1XXXXXX.

- Bilangan 2XXXXXX menyumbang sebanyak 6! = 720 bilangan. Jadi bilangan ke-721 sampai dengan bilangan ke-1440 adalah berformat 2XXXXXX.
- Bilangan 3XXXXXX menyumbang sebanyak 6! = 720 bilangan. Jadi bilangan ke-1441 sampai dengan bilangan ke-2160 adalah berformat 3XXXXXX. Sehingga bilangan ke-2018 berada pada format 3XXXXXX.

Selanjutnya akan diperiksa digit pada tempat ratusan ribu.

- Bilangan 31XXXXX menyumbang sebanyak 5! = 120 bilangan. Jadi bilangan ke-1441 sampai dengan bilangan ke-1560 adalah berformat 31XXXXX.
- Bilangan 32XXXXX menyumbang sebanyak 5! = 120 bilangan. Jadi bilangan ke-1561 sampai dengan bilangan ke-1680 adalah berformat 32XXXXX.
- Bilangan 34XXXXX menyumbang sebanyak 5! = 120 bilangan. Jadi bilangan ke-1681 sampai dengan bilangan ke-1800 adalah berformat 34XXXXX.
- Bilangan 35XXXXX menyumbang sebanyak 5! = 120 bilangan. Jadi bilangan ke-1801 sampai dengan bilangan ke-1920 adalah berformat 35XXXXX.
- Bilangan 36XXXXX menyumbang sebanyak 5! = 120 bilangan. Jadi bilangan ke-1921 sampai dengan bilangan ke-2040 adalah berformat 36XXXXX. Sehingga bilangan ke-2018 berada pada format 36XXXXX.

Selanjutnya akan diperiksa digit pada tempat puluhan ribu.

- Bilangan 361XXXX menyumbang sebanyak 4! = 24 bilangan. Jadi bilangan ke-1921 sampai dengan bilangan ke-1944 adalah berformat 361XXXX.
- Bilangan 362XXXX menyumbang sebanyak 4! = 24 bilangan. Jadi bilangan ke-1945 sampai dengan bilangan ke-1968 adalah berformat 362XXXX.
- Bilangan 364XXXX menyumbang sebanyak 4! = 24 bilangan. Jadi bilangan ke-1969 sampai dengan bilangan ke-1992 adalah berformat 364XXXX.
- Bilangan 365XXXX menyumbang sebanyak 4! = 24 bilangan. Jadi bilangan ke-1993 sampai dengan bilangan ke-2016 adalah berformat 365XXXX.
- Bilangan 367XXXX menyumbang sebanyak 4! = 24 bilangan. Jadi bilangan ke-2017 sampai dengan bilangan ke-2040 adalah berformat 367XXXX. Sehingga bilangan ke-2018 berada pada format 367XXXX.

Selanjutnya akan diperiksa secara manual digit pada tempat ribuan.

- Bilangan 3671245 adalah bilangan ke-2017.
- Bilangan 3671254 adalah bilangan ke-2018.

Jadi, bilangan ke-2018 adalah 3671254.

15. Perhatikan, dari $Bezout's\ Theorem$, yaitu "Jika a dan b dua bilangan bulat yang keduanya taknol maka terdapat bilangan bulat x dan y sehingga $FPB(a.b) = ax + by$".
Sehingga banyaknya anggota S yang dapat dinyatakan adalah banyaknya $0 \leq xb + ya \leq ab$; $xb + ya \in \mathbb{Z}$ yang memiliki solusi $x, y \in \mathbb{Z}$.
Dengan membagi kasus, yaitu

Kasus 1.

Apabila a dan b adalah relative prima, maka dari $Bezout's\ Theorem$, semua $k \in \mathbb{Z}$ dapat dinyatakan dalam $xb + ya$ sehingga haruslah $ab + 1 = 2018$, sehingga

$$ab + 1 = 2018 \Rightarrow ab = 2017$$

Sehingga, diperoleh penyelesaian $(a, b) = \{(1,2017), (2017,1)\}$.

Kasus 2.

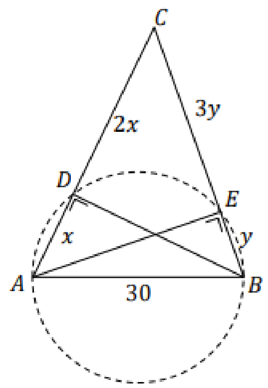
Apabila $FPB(a, b) = d > 1$, maka $a, b > 1$. Sehingga dari $Bezout's\ Theorem$, semua (dan hanya) $dk, k \in \mathbb{Z}$ dapat dinyatakan dalam $xb + ya$. Semua dk ada sebanyak $\left\lfloor \frac{ab}{d} \right\rfloor + 1 = a\left(\frac{b}{d}\right) + 1$, sehingga

$$a\left(\frac{b}{d}\right) + 1 = 2018 \Rightarrow a\left(\frac{b}{d}\right) = 2017 \Rightarrow a = 2017$$

Sehingga diperoleh penyelesaian $(a, b) = \{(2017,2017)\}$

Jadi, banyaknya pasangan bilangan asli (a, b) yang memenuhi adalah 3 buah.

16. Perhatikan, gambar segitiga ABC dan lingkaran Γ.



Misal,

$AD = x$, karena $AD = \frac{1}{3}AC$ maka $AC = 3AD$, sehingga $AC = 3x$, akibatnya $CD = 2x$.

$BE = y$, karena $BE = \frac{1}{4}BC$ maka $BC = 4BE$, sehingga $BC = 4y$, akibatnya $CE = 3y$.

Berdasarkan power of point diperoleh

$$\begin{aligned} &CD \times CA = CE \times CB \\ \Leftrightarrow\ &2x \times 3x = 3y \times 4y \\ \Leftrightarrow\ &6x^2 = 12y^2 \\ \Leftrightarrow\ &x^2 = 2y^2 \end{aligned}$$

Luas ΔABC dapat dicari menggunakan sisi alas AC dan tinggi BD. Sehingga kita akan mencari AC dengan terlebih dahulu mencari nilai AD, lalu mencari BD dengan menggunakan aturan Pythagoras pada ΔABD. BD dapat dicari dengan memandang aturan Pythagoras pada ΔABD dan ΔBDC, yaitu:

$$\begin{aligned} BD^2 &= BD^2 \\ \Leftrightarrow AB^2 - AD^2 &= BC^2 - CD^2 \\ \Leftrightarrow 30^2 - x^2 &= (4y)^2 - (2x)^2 \\ \Leftrightarrow 900 - x^2 &= 16y^2 - 4x^2 \\ \Leftrightarrow 900 - x^2 &= 8x^2 - 4x^2 \\ \Leftrightarrow 900 &= 5x^2 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 180 \end{aligned}$$

Sehingga, $BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{30^2 - x^2} = \sqrt{900 - 180} = \sqrt{720} = 12\sqrt{5}$.
Mengingat $AD = x = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$, maka $AC = 3AD = 3x = 18\sqrt{5}$.
Jadi, luas ΔABC adalah $L = \frac{1}{2} \times AC \times BD = \frac{1}{2} \times 18\sqrt{5} \times 12\sqrt{5} = 108 \times 5 = 540$.

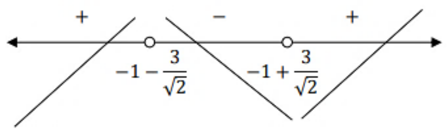
17. Perhatikan $f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x}{2y-x} + \frac{2y}{2x-y} = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)}{2-\left(\frac{x}{y}\right)} + \frac{2}{2\left(\frac{x}{y}\right)-1}$, dan misal $\frac{x}{y} = p$, maka $f(p) = \frac{p}{2-p} + \frac{2}{2p-1}$.

Sehingga, $f'(p) = \frac{2}{(2-p)^2} - \frac{4}{(2p-1)^2} = \frac{2(2p-1)^2 - 4(2-p)^2}{(2-p)^2(2p-1)^2} = \frac{4p^2+8p-14}{(2-p)^2(2p-1)^2}$

Diperoleh titik stasioner $f(p)$ adalah saat $f'(p) = 0$, yaitu

$$\begin{aligned} f'(p) = 0 \Rightarrow \frac{4p^2+8p-14}{(2-p)^2(2p-1)^2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad 4p^2 + 8p - 14 &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad p^2 + 2p - \frac{7}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad p^2 + 2p + 1 &= \frac{9}{2} \\ \Leftrightarrow \quad (p+1)^2 &= \frac{9}{2} \\ \Leftrightarrow \quad p + 1 &= \pm\frac{3}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow \quad p &= -1 \pm \frac{3}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

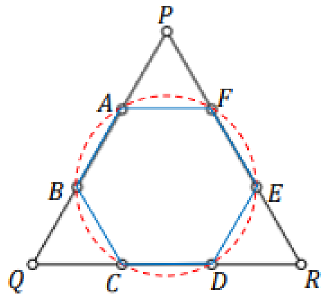
Perhatikan garis bilangan dari $f'(p)$



Sehingga, $p = -1 + \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}-2}{2}$ adalah titik balik minimum dan karena $\frac{1}{2} < p < 2$ maka nilai minimum dari $f(p)$ adalah $f\left(-1 + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)$, yaitu

$$\begin{aligned} f\left(-1+\frac{3}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{\left(\frac{3\sqrt{2}-2}{2}\right)}{2-\left(\frac{3\sqrt{2}-2}{2}\right)} + \frac{2}{2\left(\frac{3\sqrt{2}-2}{2}\right)-1} \\ &= \frac{3\sqrt{2}-2}{6-3\sqrt{2}} + \frac{2}{3\sqrt{2}-3} \\ &= \frac{3\sqrt{2}-2}{6-3\sqrt{2}} + \frac{2\sqrt{2}}{6-3\sqrt{2}} \\ &= \frac{5\sqrt{2}-2}{6-3\sqrt{2}} \\ &= \frac{5\sqrt{2}-2}{6-3\sqrt{2}} \times \frac{6+3\sqrt{2}}{6+3\sqrt{2}} \\ &= \frac{18+24\sqrt{2}}{18} \\ &= 1 + \frac{4\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

18. Perhatikan gambar berikut!



Dari keenam titik yang bukan titik sudut segitiga dapat dibuat sebuah lingkaran yang di dalamnya terdapat segienam beraturan.

Sepasang titik sudut segienam beraturan yang saling berhadapan dapat membentuk garis yang merupakan diameter lingkaran, yaitu AD, BE, dan CF.

Sehingga, apabila sepasang titik sudut yang berhadapan memiliki warna yang sama, maka jika satu titik dipilih dari empat titik yang lain pada lingkaran berwarna sama, maka jelas tiga titik berwarna sama tersebut akan terbentuk segitiga siku-siku. Ingat kembali bahwa sudut keliling yang menghadap ke diameter lingkaran pastilah siku-siku.

Sekarang, coba perhatikan bahwa kondisi terburuk yang mungkin terjadi adalah dua pasang titik sudut segienam beraturan yang saling berhadapan memiliki warna berbeda. Misalnya, A dan D berwarna merah, sedangkan B dan E berwarna biru, maka jika satu saja titik yang lain dari C atau F diberi warna apapun, pastilah akan terbentuk segitiga siku-siku dengan titik-titik sudutnya sewarna.

Kondisi terburuk lain yang mungkin terjadi adalah A, B, C dan D, E, F berlainan warna, maka jika satu saja titik sudut segitiga Q, R diberi warna apapun, pastilah akan terbentuk segitiga siku-siku dengan titik-titik sudutnya sewarna.

Sehingga peluang bahwa dari kesembilan titik tersebut, terdapat tiga titik yang warnanya sama dan membentuk segitiga siku-siku adalah 1.

19. Perhatikan, teorema tentang bilangan prima yaitu "Setiap bilangan prima p dan $p > 3$, maka p dapat dinyatakan sebagai $p = 6n \pm 1$, dengan n adalah bilangan asli".

Untuk $a > 3$, $b > 3$, berarti $b = 6n \pm 1$, $n \geq 1$, maka $a^4 + b^4 + 13 \equiv 1 + 1 + 13 \equiv 15 \equiv 0 (\text{mod } 3)$

Untuk $a = 2$, $b \leq 3$, maka $a^4 + b^4 + 13 \equiv 1 + 1 + 13 \equiv 15 \equiv 0 (\text{mod } 5)$

Jadi untuk $a = 2$, $b \leq 3$, maka $a^4 + b^4 + 13$ adalah bukan bilangan prima.

Begitu pula untuk $b = 2$, $a \leq 3$, maka $a^4 + b^4 + 13$ adalah bukan bilangan prima.

Untuk $a = b = 3$, maka maka $a^4 + b^4 + 13 \equiv 1 + 1 + 13 \equiv 15 \equiv 0 (\text{mod } 5)$

Jadi untuk $a = b = 3$, maka $a^4 + b^4 + 13$ adalah bukan bilangan prima.

Untuk $a = 2$, $b > 3$, berarti $b = 6n \pm 1$, $n \geq 1$, maka $a^4 + b^4 + 13 \equiv 0 + 1 + 13 \equiv 14 \equiv 0 (\text{mod } 2)$

Jadi untuk $a = 2$, $b > 3$, maka $a^4 + b^4 + 13$ adalah bukan bilangan prima.

Begitu pula untuk $b = 2$, $a > 3$, maka $a^4 + b^4 + 13$ adalah bukan bilangan prima.

Untuk $a = 3$, $b > 3$, berarti $b = 6n \pm 1$, $n \geq 1$,

- Untuk $b = 6n + 1$, maka misal n berbentuk $5k + a$, dengan $k \geq 0$. Disini, $a \neq 4$ sebab jika $a = 4$, maka b tak prima.

  Maka, $a^4 + b^4 + 13 \equiv (81 + 6(5k + a) + 1)^4 + 13) (\text{mod } 5)$

  $\equiv ((a + 1)^4 + 4) (\text{mod } 5)$

$\equiv 0 \pmod 5$, untuk $a \neq 4$

- Untuk $b = 6n - 1$, maka misal n berbentuk $5k + a$, dengan $k \geq 0$. Disini, $a \neq 1$ sebab jika $a = 1$, maka b tak prima, kecuali untuk $n = 1$.

  Maka, $a^4 + b^4 + 13 \equiv (81 + 6(5k + a) - 1)^4 + 13) \pmod 5$

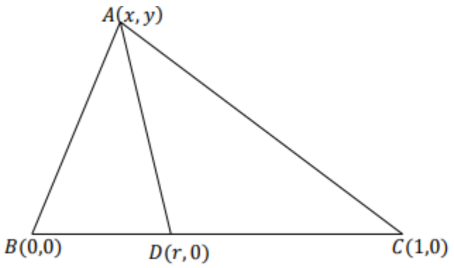
  $\equiv ((a + 1)\ 4 - 1) \pmod 5$

  $\equiv 0 \pmod 5$, untuk $a \neq 1$

  Maka, solusi satu-satunya adalah jika $n = 1$, sehingga $a^4 + b^4 + 13$ adalah bilangan prima terbesar untuk $a = 3$, $b = 5$.

Jadi, $a^4 + b^4 + 13 = 3^4 + 5^4 + 13 = 81 + 625 + 13 = 719$.

20.



Perhatikan,

$|AC| = p = \sqrt{(x - 1)^2 + y^2} = \sqrt{(x^2 + y^2) - 2x + 1}$

$|AB| = q = \sqrt{x^2 + y^2}$

$|BC| = 1$

$|DB| = r$

$|DC| = 1 - r$

$|DA| = \sqrt{(x - r)^2 + y^2}$.

Sehingga, keliling ΔABC adalah

$$k = |BC| + |AC| + |AB|$$
$$= 1 + p + q$$

Perhatikan juga bahwa pada ΔABC berlaku

$$|DA|^2 = |DB| \cdot |DC|$$
$$\Leftrightarrow (x - r)^2 + y^2 = r(1 - r)$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2xr + r^2 + y^2 = r - r^2$$
$$\Leftrightarrow 2r^2 - (2x + 1)r + (x^2 + y^2) = 0$$

Ingat, bahwa agar tepat diperoleh satu titik $D(r, 0)$ maka penyelesaian r real kembar ($D = 0$)

$$D = 0 \Rightarrow b^2 - 4ac = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(-(2x + 1)\right)^2 - 4(2)(x^2 + y^2) = 0$$
$$\Leftrightarrow (2x + 1)^2 - 8(x^2 + y^2) = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{(2x + 1)^2}{8} = (x^2 + y^2)$$

Padahal, $0 < r < 1$, sehingga

$$\begin{aligned}0 < r < 1 \Rightarrow 0 &< \frac{2x+1}{4} < 1\\ \Leftrightarrow 0 &< 2x+1 < 4\\ \Leftrightarrow \quad -1 &< 2x < 3\\ \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} &< x < \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Jadi, keliling ΔABC adalah

$$\begin{aligned}k &= 1 + p + q\\ &= 1 + \sqrt{(x^2+y^2) - 2x + 1} + \sqrt{(x^2+y^2)}\\ &= 1 + \sqrt{\frac{(2x+1)^2}{8} - 2x + 1} + \sqrt{\frac{(2x+1)^2}{8}}\\ &= 1 + \sqrt{\frac{(2x-3)^2}{8}} + \sqrt{\frac{(2x+1)^2}{8}}\\ &= 1 + \left(-\frac{(2x-3)}{2\sqrt{2}}\right) + \frac{2x+1}{2\sqrt{2}}\\ &= 1 + \sqrt{2}\end{aligned}$$

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2018

TINGKAT PROVINSI

BIDANG MATEMATIKA

WAKTU : 210 MENIT

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2018

1. Banyaknya pasangan terurut bilangan bulat (a, b) sehingga $a^2 + b^2 = a + b$ adalah …

2. Diberikan trapesium $ABCD$, dengan AD sejajar BC. Diketahui $BD = 1$, $\angle DBA = 23^\circ$ dan $\angle BDC = 46^\circ$. Jika perbandingan $BC : AD = 9 : 5$, maka panjang sisi CD adalah …

3. Misalkan $a > 0$ dan $0 < r_1 < r_2 < 1$ sehingga $a + ar_1 + ar_2 + \ldots$ dan $a + ar_2 + ar_2^2 + \ldots$ adalah dua deret geometri tak hingga dengan jumlah berturut-turut r_1 dan r_2. Nilai $r_1 + r_2$ adalah …

4. Diketahui $S = \{10, 11, 12, \ldots, N\}$. Suatu unsur di S dikatakan $trubus$ jika jumlah digit-digitnya merupakan pangkat tiga dari suatu bilangan asli. Jika S memiliki tepat 12 $trubus$ maka nilai terbesar N yang mungkin adalah …

5. Bilangan asli terkecil n sehingga $\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ habis dibagi 30 adalah …

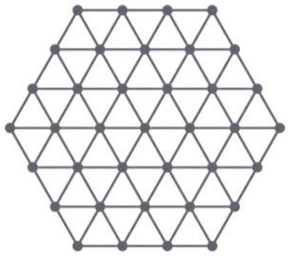
6. Diberikan segitiga tak samakaki ABC dengan M titik tengah BC. Misalkan K adalah titik berat segitiga ABM. Titik N pada sisi AC sehingga luas segiempat $KMCN$ setengah dari luas segitiga ABC. Nilai $\frac{AN}{NC}$ adalah …

7. Didalam suatu kotak terdapat n kelereng merah dan m kelereng biru. Diambil 5 kelereng sekaligus. Jika peluang terambilnya 3 kelereng merah dan 2 biru $\frac{25}{77}$, maka nilai terkecil $m^2 + n^2$ yang mungkin adalah …

8. Misalkan $P(x)$ suatu polinom (suku banyak) tak konstan dengan koefisien bilangan bulat tak negatif yang memenuhi $P(10) = 2018$. Misalkan m dan M berturut-turut adalah nilai minimum dan maksimum yang mungkin dari $P(1)$. Nilai $m + M$ adalah …

9. Sebuah provinsi terdiri dari sembilan kota yang diberi nama 1,2,3,4,5,6,7,8,9. Dari kota a terdapat jalan langsung ke kota b jika dan hanya jika $\overline{ab}$ dan $\overline{ba}$ merupakan bilangan dua digit yang habis dibagi 3. Dua kota berbeda a_1 dan a_n dikatakan terhubung jika terdapat barisan kota-kota $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ sehingga terdapat jalan langsung dari a_i ke a_{i+1} untuk setiap $i = 1, \ldots, n-1$. Banyaknya kota yang terhubung dengan kota 4 adalah …

10. Diberikan 37 titik seperti pada gambar sehingga setiap dua titik yang bertetangga berjarak satu satuan. Dari setiap tiga titik berbeda di gambar segitiga merah. Banyaknya kemungkinan panjang sisi segitiga merah yang sama sisi adalah …



11. Diambil secara acak suatu bilangan bulat positif k dengan $k \leq 2018$. Peluang k^{1009} bersisa 2 jika di bagi 2018 adalah …

12. Diberikan bilangan real tak negatif a, b, c, d, e dengan $ab + bc + cd + de = 2018$. Nilai minimum dari $a + b + c + d + e$ adalah …

13. Banyaknya himpunan bagian (termasuk himpunan kosong) dari $X = \{1, 2, 3, \ldots, 2017, 2018\}$ yang tidak memiliki dua unsur x dan y sehingga $xy = 2018$ ada sebanyak $m2^n$ dengan m ganjil. Nilai $m + n$ adalah …

14. Misalkan $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Diketahui ada tepat 1001 pasangan (a, b, c, d) dengan $a, b, c, d \in S$ dan $a < b < c < d$ sehingga a, b, c, d merupakan barisan aritmetika. Nilai n adalah …

15. Banyaknya bilangan asli n sehingga

$$n^4 - 5n^3 + 5n^2 + 4n + 10$$

merupakan bilangan prima adalah …

16. Titik M terletak pada lingkaran luar segilima beraturan $ABCDE$. Nilai terbesar

$$\frac{MB + ME}{MA + MC + ND}$$

yang mungkin adalah …

17. Untuk x, y bilangan real tak nol, jumlah nilai maksimum dan minimum

$$\frac{xy - 4y^2}{x^2 + 4y^2}$$

adalah …

18. Suatu ras alien mempunyai suatu bahasa unik yang hanya terdiri dari dua huruf X dan Z. Dalam bahasa ini, setiap kata paling sedikit terdiri dari satu huruf dan tidak lebih dari 11 huruf. Untuk setiap dua kata, jika kata pertama dan kedua dituliskan berdampingan maka hasilnya bukan merupakan kata. Sebagai contoh jika XXZ dan $ZZZZX$ adalah kata, maka $XXZZZZZX$ bukan kata. Maksimal banyaknya kata dalam bahasa ini adalah …

19. Suatu segitiga lancip ABC memiliki panjang sisi bilangan bulat. Diketahui $AC = BD$ dengan D adalah titik pada garis BC sehingga AD tegak lurus BC. Nilai terkecil panjang sisi BC yang mungkin adalah …

20. Untuk sebarang bilangan real X, notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x, sedangkan $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x. Bilangan asli terbesar n sehingga

$$50\lfloor x \rfloor - \lfloor x \lfloor x \rfloor \rfloor = 100n - 27\lceil x \rceil$$

memiliki solusi real x adalah …

21. Sejumlah siswa n duduk mengelilingi suatu meja bundar. Diketahui siswa laki-laki sama banyak dengan siswa perempuan. Jika banyaknya pasangan 2 orang yang duduk bersebelahan dihitung, ternyata perbandingan antara pasangan bersebelahan yang berjenis kelamin sama dan pasangan bersebelahan yang berjenis kelamin berbeda adalah 3 : 2. Tentukan n terkecil yang mungkin.

22. Misalkan a, b dan c bilangan bulat positif sehingga

$$c = a + \frac{b}{a} - \frac{1}{b}$$

Buktikan bahwa c adalah kuadrat dari suatu bilangan bulat.

23. Misalkan Γ_1 dan Γ_2 lingkaran berbeda dengan panjang jari-jari sama dan berturut-turut berpusat di titik O_1 dan O_2. Lingkaran Γ_1 dan Γ_2 bersinggungan di titik P. Garis ℓ melalui O_1 menyinggung Γ_2 di titik A. Garis ℓ memotong Γ_1 di titik X dengan X di antara A dan O_1. Misalkan M di titik tengah AX dan Y titik potong PM dengan Γ_2 dengan $Y \neq P$. Buktikan bahwa XY sejajar O_1O_2.

24. Misalkan a, b dan c bilangan real positif dengan $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$. Buktikan bahwa

$$a + b + c + \frac{41}{1 + (abc)^{\frac{2}{3}}} \geq 5$$

25. Pada papan catur berukuran 200 x 200 persegi satuan diletakkan kelereng merah atau biru sehingga setiap persegi satuan memiliki paling banyak 1 buah kelereng. Dua kelereng dikatakan segaris jika mereka terletak pada garis dan kolom yang sama. Diketahui untuk setiap kelereng merah ada tepat 5 kelereng biru yang segaris dan untuk setiap kelereng biru ada tepat 5 kelereng merah yang segaris. Tentukan maksimum banyaknya kelereng yang mungkin pada papan catur tersebut.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2018

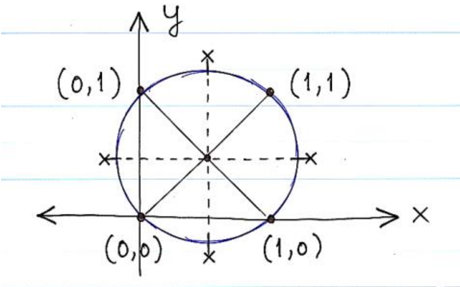
TINGKAT PROVINSI

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2018

1. Penyelesaian:



Jadi, ada 4 pasangan yaitu, (0,0), (0,1), (1,1), (1,0).

2. Penyelesaian:
Diketahui trapesium $ABCD$ dengan $AD||BC$.
- $BD = 1$
- $\angle DBA = 23^o$
- $\angle BDC = 46^o$

Karena $AD||BC$, maka sudut dalam berseberangan adalah sama.
$$\angle ADB = \angle DBC$$

Kita akan menggunakan aturan sinus pada segitiga ΔABD dan ΔBCD.
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$
Pada ΔABD:
$$\frac{AD}{\sin(\angle DBA)} = \frac{BD}{\sin(\angle DAB)}$$
$$\frac{AD}{\sin(23^\circ)} = \frac{1}{\sin(\angle DAB)}$$
$$(1) \quad AD = \frac{\sin(23^\circ)}{\sin(\angle DAB)}$$
Pada ΔBCD:
$$\frac{BC}{\sin(\angle BDC)} = \frac{BD}{\sin(\angle BCD)}$$
$$\frac{BC}{\sin(46^\circ)} = \frac{1}{\sin(\angle BCD)}$$
$$(2) \quad BC = \frac{\sin(46^\circ)}{\sin(\angle BCD)}$$

Diketahui perbandingan $BD: AD = 9: 5$, sehingga $BC = \frac{9}{5}AD$.

Substitusikan persamaan (1) dan (2) ke dalam perbandingan:

$$\frac{BC}{AD} = \frac{\frac{\sin(46^\circ)}{\sin(\angle BCD)}}{\frac{\sin(23^\circ)}{\sin(\angle DAB)}} = \frac{9}{5}$$

$$\frac{\sin(46^\circ)}{\sin(23^\circ)} \cdot \frac{\sin(\angle DAB)}{\sin(\angle BCD)} = \frac{9}{5}$$

Kita tahu bahwa $\sin(46^o) = \sin(2 \cdot 23^o) = 2\sin(23^o)\cos(23^o)$.
Maka, $\frac{\sin(46^o)}{\sin(23^o)} = \frac{2\sin(23^o)\cos(23^o)}{\sin(23^o)} = 2\cos(23^o)$.
Sehingga, persamaan menjadi:

$$2\cos(23^\circ) \cdot \frac{\sin(\angle DAB)}{\sin(\angle BCD)} = \frac{9}{5}$$

$$(3) \quad \frac{\sin(\angle DAB)}{\sin(\angle BCD)} = \frac{9}{10\cos(23^\circ)}$$

Kita kembali menggunakan aturan sinus pada ΔBCD untuk mencari Panjang sisi CD:

$$\frac{CD}{\sin(\angle DBC)} = \frac{BD}{\sin(\angle BCD)}$$

$$(4) \quad CD = \frac{BD \cdot \sin(\angle DBC)}{\sin(\angle BCD)} = \frac{1 \cdot \sin(\angle DBC)}{\sin(\angle BCD)}$$

Dari langkah 1, kita tahu $\angle ADB = \angle DBC$.
Dari ΔABD, jumlah sudutnya adalah 180^o:

$$\angle DAB + \angle ADB + \angle DBA = 180^\circ$$
$$\angle DAB + \angle ADB + 23^\circ = 180^\circ$$
$$(5) \quad \angle DAB + \angle ADB = 157^\circ$$

Dari ΔBCD, jumlah sudutnya adalah 180^o:

$$\angle DBC + \angle BCD + \angle BDC = 180^\circ$$
$$\angle DBC + \angle BCD + 46^\circ = 180^\circ$$
$$\angle ADB + \angle BCD + 46^\circ = 180^\circ \quad (\text{karena } \angle DBC = \angle ADB)$$

$$(6) \quad \angle ADB + \angle BCD = 134^\circ$$

Kurangi persamaan (5) dengan persamaan (6):

$$(\angle DAB + \angle ADB) - (\angle ADB + \angle BCD) = 157^\circ - 134^\circ$$
$$\angle DAB - \angle BCD = 23^\circ$$
$$\angle DAB = 23^\circ + \angle BCD$$

Substitusikan $\angle DAB$ ke dalam persamaan (3):

$$\frac{\sin(23^o + \angle BCD)}{\sin(\angle BCD)} = \frac{9}{10\cos(23^o)}$$

Gunakan identitas penjumlahan sudut $\sin(A + B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$:

$$\frac{\sin(23^\circ)\cos(\angle BCD)+\cos(23^\circ)\sin(\angle BCD)}{\sin(\angle BCD)}=\frac{9}{10\cos(23^\circ)}$$
$$\sin(23^\circ)\frac{\cos(\angle BCD)}{\sin(\angle BCD)}+\cos(23^\circ)=\frac{9}{10\cos(23^\circ)}$$
$$\sin(23^\circ)\cot(\angle BCD)=\frac{9}{10\cos(23^\circ)}-\cos(23^\circ)$$

$$\sin(23^\circ)\cot(\angle BCD)=\frac{9-10\cos^2(23^\circ)}{10\cos(23^\circ)}$$

Dari persamaan (4), $CD=\frac{\sin(\angle ADB)}{\sin(\angle BCD)}$.

Dari persamaan (6), $\angle ADB=134^o-\angle BCD. CD=\frac{\sin(134^o-\angle BCD)}{\sin(\angle BCD)}CD=$ $\frac{\sin(134^o)\cos(\angle BCD)-\cos(134^o)\sin(\angle BCD)}{\sin(\angle BCD)}CD=\sin(134^o)\cot(\angle BCD)-\cos(134^o)$

Dari identitas trigonometri $\cos(2A)=2\cos^2(A)-1$, maka $2\cos^2(A)=1+\cos(2A)$.

$10\cos^2(23^o)=5(2\cos^2(23^o))=5(1+\cos(46^o))$.

Substitusikan ke $\sin(23^o)\cot(\angle BCD)$:

$$\sin(23^\circ)\cot(\angle BCD)=\frac{9-5(1+\cos(46^\circ))}{10\cos(23^\circ)}$$
$$\sin(23^\circ)\cot(\angle BCD)=\frac{4-5\cos(46^\circ)}{10\cos(23^\circ)}$$
$$\cot(\angle BCD)=\frac{4-5\cos(46^\circ)}{10\cos(23^\circ)\sin(23^\circ)}$$

Karena $2\cos(23^o)\sin(23^o)=\sin(46^o)$:

$$\cot(\angle BCD)=\frac{4-5\cos(46^o)}{5\sin(46^o)}$$

Sekarang substitusikan $\cot(\angle BCD)$ ke persamaan CD: $CD=\sin(134^o)\left(\frac{4-5\cos(46^o)}{5\sin(46^o)}\right)-\cos(134^o)$.

Kita tahu $\sin(134^o)=\sin(180^o-46^o)=\sin(46^o)$ dan $\cos(134^o)=\cos(180^o-46^o)=-\cos(46^o)$.

$$CD=\sin(46^\circ)\left(\frac{4-5\cos(46^\circ)}{5\sin(46^\circ)}\right)-(-\cos(46^\circ))$$
$$CD=\frac{4-5\cos(46^\circ)}{5}+\cos(46^\circ)$$
$$CD=\frac{4}{5}-\frac{5\cos(46^\circ)}{5}+\cos(46^\circ)$$
$$CD=\frac{4}{5}-\cos(46^\circ)+\cos(46^\circ)$$
$$CD=\frac{4}{5}$$

Panjang sisi CD adalah $\frac{4}{5}$.

3. Penyelesaian:

$r=\frac{a}{1-r}\quad\Rightarrow r^2-r+a=0\quad\begin{cases}r_1\\r_2\end{cases}$

$$r_1+r_2=1$$

4. Penyelesaian:
   Menentukan Pangkat Tiga yang Mungkin
   Jumlah digit-digit suatu bilangan (misalnya k) haruslah merupakan pangkat tiga dari suatu bilangan asli, yaitu $1^3, 2^3, 3^3, 4^3$, …
   - $1^3 = 1$
   - $2^3 = 8$
   - $3^3 = 27$
   - $4^3 = 64$
   - …

   Nilai maksimum jumlah digit yang mungkin untuk bilangan yang sangat besar (misalnya bilangan 5 digit, 99999) adalah $9 \times 5 = 45$. Oleh karena itu, jumlah digit k yang mungkin hanyalah 1, 8 dan 27.

   Mencari Bilangan Trubus
   Kita akan mencari bilangan trubus yang dimulai dari 10.
   Kasus 1: Jumlah Digit = 1
   Tidak ada bilangan dua digit (minimal 10) atau lebih yang jumlah digitnya sama dengan 1.
   - $10 \rightarrow 1 + 0 = 1$ (10 adalah trubus ke-1)
   - $19 \rightarrow 1 + 9 = 10$
   - $20 \rightarrow 2 + 0 = 2$
   - Bilangan terkecil berikutnya yang jumlah digitnya 1 adalah 100 (karena 1 + 0 + 0 = 1).

   Bilangan Trubus dengan Jumlah Digit 1:
   $$T_1 = 10$$
   Kasus 2: Jumlah Digit = 8
   Kita mencari bilangan-bilangan yang jumlah digitnya 8.

Bilangan	Jumlah Digit	Keterangan
17	1 + 7 = 8	Trubus ke-2
26	2 + 6 = 8	Trubus ke-3
35	3 + 5 = 8	Trubus ke-4
44	4 + 4 = 8	Trubus ke-5
53	5 + 3 = 8	Trubus ke-6
62	6 + 2 = 8	Trubus ke-7
71	7 + 1 = 8	Trubus ke-8
80	8 + 0 = 8	Trubus ke-9
107	1 + 0 + 7 = 8	Trubus ke-10
116	1 + 1 + 6 = 8	Trubus ke-11
125	1 + 2 + 5 = 8	Trubus ke-12
134	1 + 3 + 4 = 8	Trubus ke-13
143	1 + 4 + 3 = 8	Trubus ke-14

... ...

Kita membutuhkan tepat 12 bilangan trubus. Berdasarkan daftar di atas, bilangan trubus ke-12 adalah 125.

Himpunan S harus memuat trubus ke-1 sampai ke-12, tetapi tidak boleh memuat trubus ke-13.

- Trubus ke-12 adalah $T_{12} = 125$.
- Trubus ke-13 adalah $T_{13} = 134$.

Agar himpunan $S = \{10,11,\dots,N\}$ memiliki tepat 12 trubus, N harus lebih besar dari atau sama dengan T_{12} dan lebih kecil dari T_{13}.

$$T_{12} \leq N < T_{13}$$
$$125 \leq N < 134$$

Nilai terbesar N yang mungkin adalah bilangan bulat terbesar yang kurang dari 134, yaitu 133.

Jika $N = 133$, maka $S = \{10,11,\dots,133\}$.

- Trubus ke-12 (125) termasuk.
- Bilangan $133 \rightarrow 1 + 3 + 3 = 7$ (bukan trubus).
- Trubus ke-13 (134) tidak termasuk.

Nilai terbesar N yang mungkin adalah 133.

5. Penyelesaian:

Cari bilangan asli terkecil n sehingga Koefisien Binomial $\binom{2n}{n}$ habis dibagi $30 = 2 \times 3 \times 5$.

Keterbagian oleh 2

Koefisien binomial $\binom{2n}{n}$ selalu genap (habis dibagi 2) untuk semua $n \geq 1$. Jadi, syarat ini selalu terpenuhi.

Keterbagian oleh 3 dan 5

Kita hanya perlu memastikan $\binom{2n}{n}$ habis dibagi $3 \times 5 = 15$.

Pengujian Nilai n

Kita mulai menguji nilai n dari $n = 2$, karena untuk $n = 1$, $\binom{2}{1} = 2$ yang tidak habis dibagi 3.

n	Koefisien Binomial, $\binom{2n}{n}$	Nilai	Habis dibagi 3?	Habis dibagi 5?	Habis dibagi 30?
2	$\binom{4}{2}$	6	Ya	Tidak	Tidak (6/30 $\neq$ bil. bulat)
3	$\binom{6}{3}$	20	Tidak	Ya	Tidak (20/30 $\neq$ bil. bulat)
4	$\binom{8}{4}$	70	Tidak	Ya	Tidak (70/30 $\neq$ bil. bulat)
5	$\binom{10}{5}$	252	Ya	Tidak	Tidak (252/30 $\neq$ bil. bulat)

6	$\binom{12}{6}$	924	Ya	Tidak	Tidak (924/30 ≠ bil. bulat)
7	$\binom{14}{7}$	3432	Ya	Tidak	Tidak (3432/30 ≠ bil. bulat)
8	$\binom{16}{8}$	12870	Ya	Ya	Ya (12870/30 = 429)

Jadi, nilai terkecil n yang membuat $\binom{2n}{n}$ memiliki factor 2, 3, dan 5 secara bersamaan adalah $n = 8$.

6. Penyelesaian:

1. Menentukan Luas Segitiga Kunci

Karena M adalah titik tengah BC, maka $L_{\Delta ABM} = L_{\Delta AMC} = \frac{1}{2}L$.

Karena K adalah titik berat ΔABM, maka K membagi ΔABM menjadi tiga bagian yang setara jika ditarik garis dari K ke titik sudut. Namun, kita bisa langsung mencari $L_{\Delta KMC}$.

- Menghitung $L_{\Delta BKC}$: Garis AM adalah garis berat. K terletak pada garis berat AM yang diperpanjang (jika K adalah titik berat ABC). Karena K adalah titik berat ΔABM, kita gunakan hubungan $L_{\Delta BKC} = \frac{1}{3}L$.
- Menghitung $L_{\Delta BKM}$: Karena K adalah titik berat ΔABM, $L_{\Delta BKM} = \frac{1}{3}L_{\Delta ABM}$.

$$L_{\Delta BKM} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}L = \frac{1}{6}L$$

- Menghitung $L_{\Delta KMC}$: Luas ini adalah selisih $L_{\Delta BKC}$ dan $L_{\Delta BKM}$.

$$L_{\Delta KMC} = L_{\Delta BKC} - L_{\Delta BKM}$$
$$L_{\Delta KMC} = \frac{1}{3}L - \frac{1}{6}L = \frac{2L - L}{6} = \frac{1}{6}L$$
$$L_{\Delta KMC} = \frac{1}{6}L$$

2. Menghitung Luas ΔKNC

Diketahui luas segiempat $KMCN$ adalah setengah luas ΔABC:

$$L_{KMCN} = \frac{1}{2}L$$

Kita pecah L_{KMCN}:

$$L_{KMCN} = L_{\Delta KMC} + L_{\Delta KNC}$$
$$\frac{1}{2}L = \frac{1}{6}L + L_{\Delta KNC}$$
$$L_{\Delta KNC} = \frac{1}{2}L - \frac{1}{6}L = \frac{3L - L}{6} = \frac{2L}{6} = \frac{1}{3}L$$
$$L_{\Delta KNC} = \frac{1}{3}L$$

3. Menghitung Rasio $\frac{AN}{NC}$

Karena N terletak pada AC, rasio $\frac{AN}{NC}$ dapat dihitung dari rasio luas ΔAKN dan ΔKNC.
Pertama, hitung $L_{\Delta AKC}$:

$$L_{\Delta AKC} = L_{\Delta ABC} - L_{\Delta ABK} - L_{\Delta BKC}$$
$$L_{\Delta AKC} = L - \frac{1}{6}L - \frac{1}{3}L = L - \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{6}\right)L = L - \frac{3}{6}L = \frac{1}{2}L$$
$$L_{\Delta AKC} = \frac{1}{2}L$$

Karena $L_{\Delta AKC} = L_{\Delta AKN} + L_{\Delta KNC}$, maka:

$$L_{\Delta AKN} = L_{\Delta AKC} - L_{\Delta KNC}$$
$$L_{\Delta AKN} = \frac{1}{2}L - \frac{1}{3}L = \frac{3L - 2L}{6} = \frac{1}{6}L$$
$$L_{\Delta AKN} = \frac{1}{6}L$$

Rasio Panjang $\frac{AN}{NC}$ sama dengan rasio luas segitiga yang memiliki tinggi yang sama (yaitu tinggi dari K ke AC):

$$\frac{AN}{NC} = \frac{L_{\Delta AKN}}{L_{\Delta KNC}}$$
$$\frac{AN}{NC} = \frac{\frac{1}{6}L}{\frac{1}{3}L} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{6}} = \frac{1}{2}$$

Jadi, Nilai $\frac{AN}{NC}$ adalah $\frac{1}{2}$.

7. Penyelesaian:
Peluang terambilnya 3 kelereng merah (n) dan 2 kelereng biru (m) dari total $T = n + m$ kelereng yang diambil 5 sekaligus adalah:

$$P = \frac{\binom{n}{3}\binom{m}{2}}{\binom{n+m}{5}} = \frac{25}{77}$$

1. Menentukan Total Kelereng (T) Minimum
Kita perlu mencari nilai $T = n + m$ terkecil yang memungkinkan penyebutnya (77) habis membagi total kombinasi $\binom{T}{5}$.
Kita cari kelipatan 77: $77 \times 1, 77 \times 2, \ldots$
   - $T = 5$: $\binom{5}{5} = 1$. Tidak habis dibagi 77.
   - $T = 10$: $\binom{10}{5} = 252$. Tidak habis dibagi 77.
   - $T = 11$: $\binom{11}{5} = 462$.

Kita cek apakah 462 habis dibagi 77:

$$462 \div 77 = 6$$

Nilai $T = n + m = 11$ adalah nilai total kelereng terkecil yang memungkinkan.

2. Menentukan Persamaan Kombinasi

Jika $T = 11$, maka $\binom{n+m}{5} = 462$. Kita kalikan rasio peluang dengan factor 6:

$$\frac{\binom{n}{3}\binom{m}{2}}{\binom{11}{5}} = \frac{25}{77} \times \frac{6}{6} = \frac{150}{462}$$

Sehingga, kita harus mencari bilangan asli n dan m dengan $n + m = 11$ yang memenuhi:

$$\binom{n}{3}\binom{m}{2} = 150$$

Syarat: $n \geq 3$ dan $m \geq 2$.

3. Menemukan Pasangan (n, m)

Kita uji pasangan (n, m) yang jumlahnya 11:

n	$m = 11 - n$	$\binom{n}{3}$	$\binom{m}{2}$	Hasil Perkalian
9	2	84	1	84
8	3	56	3	168
7	4	35	6	210
6	5	20	10	200
5	6	10	15	150
4	7	4	21	84
3	8	1	28	28

Pasangan yang memenuhi adalah $n = 5$ dan $m = 6$.

4. Menghitung Nilai $m^2 + n^2$

Karena $T = 11$ adalah nilai terkecil yang mungkin, maka pasangan $(5,6)$ adalah yang menghasilkan nilai $m^2 + n^2$ terkecil.

$$m^2 + n^2 = 5^2 + 6^2 = 25 + 36 = 61$$

Nilai terkecil $m^2 + n^2$ yang mungkin adalah 61.

8. Penyelesaian:

Polynomial $P(x)$ memiliki bentuk:

$$P(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Dengan $a_i \geq 0$ (bilangan bulat tak negative).

Yang diketahui: $P(10) = a_d 10^d + \cdots + 10a_1 + a_0 = 2018$.

Yang dicari: $P(1) = a_d + a_{d-1} + \cdots + a_1 + a_0$ (jumlah koefisien).

1. Mencari Nilai Minimum $m(P(1)$ minimum)

Untuk meminimalkan jumlah koefisien $(P(1))$, kita harus menggunakan koefisien a_i sekecil mungkin. Ini terjadi ketika kita menggunakan representasi basis 10 yang standar:

$$2018 = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$$

Koefisien yang digunakan: $a_3 = 2$, $a_2 = 0$, $a_1 = 1$, $a_0 = 8$.

Nilai minimum m adalah jumlah koefisien ini:

$$m = 2 + 0 + 1 + 8 = 11$$

2. Mencari Nilai Maksimum $M(P(1)$ maksimum)

Untuk memaksimalkan jumlah koefisien, kita harus menggunakan derajat d serendah mungkin dan membuat koefisien a_i sebesar mungkin. Derajat terendah yang mungkin adalah $d = 1$.
Kita cari a_1 dan a_0 dari persamaan $10a_1 + a_0 = 2018$.
Untuk memaksimalkan $P(1) = a_1 + a_0$, kita perlu memaksimalkan a_0 dengan memilih a_1 terbesar yang mungkin:

$$a_1 = \lfloor 2018/10 \rfloor = 201$$

Substitusikan a_1:

$$a_0 = 2018 - 10(201) = 2018 - 2010 = 8$$

Koefisien yang digunakan: $a_1 = 201$, $a_0 = 8$.
Nilai maksimum M adalah jumlah koefisien ini:

$$M = 201 + 8 = 209$$

3. Hasil akhir $m + M$

$$m + M = 11 + 209 = 220$$

Nilai $m + M$ yang benar adalah 220.

9. Penyelesaian:

Luas Segilima Beraturan (Segilima Dalam)

a. Gunakan Rasio Luas: Dalam geometri segilima baraturan, rasio luas segilima dalam (L_{PQRST}) terhadap luas segilima luar (L_{ABCDE}) adalah $2 - \phi$.

$$\frac{L_{PQRST}}{L_{ABCDE}} = 2 - \phi$$

b. Substitusikan ϕ dan L_{ABCDE}: Diketahui $L_{ABCDE} = 2$ dan $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$$L_{PQRST} = 2 \cdot (2 - \phi)$$

$$L_{PQRST} = 2\left(2 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)$$

c. Hitung Luas:

$$L_{PQRST} = 4 - (1 + \sqrt{5})$$

$$L_{PQRST} = 3 - \sqrt{5}$$

d. Tentukan $a + b$: Luasnya berbentuk $a - \sqrt{b}$, sehingga $a = 3$ dan $b = 5$.

$$a + b = 3 + 5 = 8$$

Jaringan Kota

Dua kota a dan b terhubung langsung jika $\overline{ab}$ dan $\overline{ba}$ habis dibagi 3. Ini berarti $a + b$ harus habis dibagi 3.

a. Kategorikan kota berdasarkan modulo 3: Kota-kota dikelompokkan berdasarkan sisa pembagiannya oleh 3:
R_0 (Sisa 0): {3, 6, 9}
R_1 (Sisa 1): {1, 4, 7}
R_2 (Sisa 2): {2, 5, 8}

b. Tentukan aturan keterhubungan: Dua kota a dan b terhubung langsung jika $a + b \equiv 0$ (mod 3). Ini hanya terjadi jika:
$R_0 \leftrightarrow R_0$ (Contoh: 3 + 6 = 9)
$R_1 \leftrightarrow R_2$ (Contoh: 4 + 2 = 6)

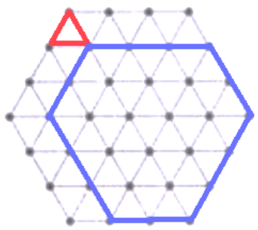
c. Identifikasi jaringan kota 4: Kota 4 berada di kelompok R_1.
Kota 4 terhubung langsung dengan semua kota di R_2: {2, 5, 8}.
Kota di R_2 (misalnya 2) terhubung langsung dengan semua kota di R_1: {1, 4, 7}

d. Simpulkan Jaringan: Karena ada jalur dari $R_1 \rightarrow R_2 \rightarrow R_1$, maka semua kota di R_1 dan R_2 terhubung satu sama lain.
Kota terhubung: Semua kota di R_1 dan R_2.
Kota yang tidak terhubung: Kelompok R_0 ({3, 6, 9}).

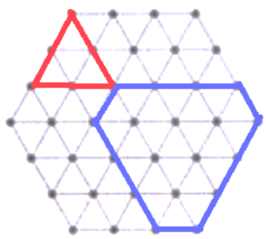
e. Hitung banyaknya kota: Kota 4 terhubung dengan semua kota di $R_1 \cup R_2$ kecuali dirinya sendiri.
$$Jumlah\ Kota\ Terhubung = (Total\ Kota\ di\ R_1 \cup R_2) - 1$$
$$Jumlah\ Kota\ Terhubung = (3 + 3) - 1 = 5$$
Jadi, Banyaknya kota yang terhubung dengan kota 4 adalah 5 ({1, 2, 5, 7, 8}).

10. Penyelesaian:

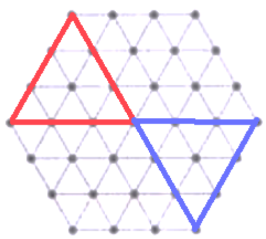
a. 4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 = 27



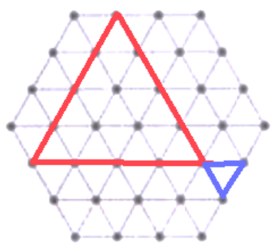
b. 4 + 5 + 4 + 3 + 2 = 18



c. 4 + 3 + 2 + 1 = 10



d. 2 + 1 = 3



Maka, $\sum \Delta = 2(27 + 18 + 10 + 3)$
$= 116$
Jadi, banyak kemungkinan Panjang sisi segitiga sama sisi ada 4.

11. Penyelesaian:
Tujuan kita adalah mencari banyaknya bilangan bulat positif k yang memenuhi $k^{1009} \equiv 2$ (mod 2018) dengan Batasan $1 \leq k \leq 2018$.

1. Memecah Kongruensi (Sistem CRT)
Karena $2018 = 2 \times 1009$ dan 1009 adalah bilangan prima, kita memecah kongruensi menjadi dua:

$$k^{1009} \equiv 2 \pmod{2018} \iff \begin{cases} k^{1009} \equiv 2 \pmod 2 \\ k^{1009} \equiv 2 \pmod{1009} \end{cases}$$

2. Menyelesaikan Kongruensi Modulo Kecil
   a. Modulo 2
$$k^{1009} \equiv 2 \text{ (mod 2)}$$
   Karena $2 \equiv 0$ (mod 2), ini berarti:
$$k^{1009} \equiv 0 \text{ (mod 2)}$$
   Ini mengharuskan k haruslah bilangan genap.
   b. Modulo 1009
$$k^{1009} \equiv 2 \text{ (mod 1009)}$$
   Ini berarti k harus memiliki sisa 2 jika dibagi 1009.

3. Mencari Nilai k

Kita mencari k yang merupakan bilangan genap, $k \equiv 2$ (mod 1009), dan $1 \leq k \leq 2018$.
Nilai k yang memenuhi $k \equiv 2$ (mod 1009) dalam batas tersebut adalah:

- $k = 2(1009 \times 0 + 2)$
- $k = 1011(1009 \times 1 + 2)$

Kita hanya menerima nilai k yang genap:

- $k = 2$ (Genap, diterima)
- $k = 1011$ (Ganjil, ditolak)

Hanya ada satu nilai k yang memenuhi, yaitu $k = 2$.

4. Menghitung Peluang

- Banyaknya kasus berhasil: $E = 1$ (yaitu $k = 2$)
- Banyaknya kasus mungkin: $N = 2018$ (karena $k \leq 2018$)

$$Peluang = \frac{E}{N} = \frac{1}{2018}$$

Jadi, peluangnya adalah $\frac{1}{2008}$.

12. Penyelesaian:

Masalah ini dapat diselesaikan dengan menggunakan Pertidaksamaan Rata-Rata Aritmetika – Rata-Rata Geometrika (AM-GM) dan Teknik pengelompokkan.

1. Pengelompokkan dan Penentuan Target

Kita ingin mengaitkan jumlah S dengan kendala $K = 2018$. Kita kelompokkan variable S menjadi dua bagian, X dan Y, sehingga $S = X + Y$.

- Misalkan $X = a + c + e$
- Misalkan $Y = b + d$
- Maka, $S = X + Y$

2. Menerapkan Pertidaksamaan AM-GM pada S

Dari AM-GM pada X dan Y, kita tahu bahwa $(X + Y)^2 \geq 4XY$, atau $S^2 \geq 4XY$.

3. Mengaitkan XY dengan Kendala K

Hitung hasil kali XY:

$$\begin{aligned} XY &= (a+c+e)(b+d) \\ &= ab + ad + cb + cd + eb + ed \\ &= \underbrace{(ab + bc + cd + de)}_{=K} + \underbrace{(ad + eb)}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Karena a, b, c, d, e adalah bilangan tak negative, maka $ad \geq 0$ dan $eb \geq 0$.

Substitusikan $K = 2018$:

$$XY = 2018 + ad + eb$$
$$XY \geq 2018$$

4. Menentukan Nilai Minimum

Gunakan Hasil dari Langkah 2 dan 3:

$$S^2 \geq 4XY$$
$$S^2 \geq 4(2018)$$
$$S^2 \geq 8072$$
$$S \geq \sqrt{8072}$$

5. Mencari Kondisi Kesamaan (Nilai Minimum Tercapai)

Nilai minimum $S = \sqrt{8072}$ tercapai jika kedua kondisi kesamaan ini dipenuhi:

- $S^2 = 4(2018)$, yang memerlukan $XY = 2018$ (atau $ad + eb = 0$).
- $S^2 = 4XY$ memerlukan $X = Y$ (atau $a + c + e = b + d$)

Kita dapat memenuhi kondisi $ad + eb = 0$ dengan memilih $a = 0$ dan $e = 0$ (karena semua variable tak negative).

Jika $a = 0$ dan $e = 0$, kendala menjadi:

$$bc + cd = 2018 \Longrightarrow c(b + d) = 2018$$

Dan kondisi $X = Y$ menjadi:

$$c = b + d$$

Substitusikan $c = b + d$ ke dalam kendala:

$$c \cdot c = 2018 \Longrightarrow c^2 = 2018$$
$$c = \sqrt{2018}$$

Karena $c = b + d$, maka:

$$b + d = \sqrt{2018}$$

Nilai minimum S adalah:

$$S = a + (b + d) + c + e = 0 + \sqrt{2018} + \sqrt{2018} + 0$$
$$S_{min} = 2\sqrt{2018}$$

Nilai minimum dari $a + b + c + d + e$ adalah $2\sqrt{2018}$ (atau $\sqrt{8072}$).

13. Penyelesaian:

Cari factor dari $2018 = 2 \times 1009$. Faktornya adalah {1, 2, 1009, 2018}

Pasangan yang bermasalah (harus dipilih paling banyak satu):

- Pasangan A: (1, 2018)
- Pasangan B: (2, 1009)

Untuk setiap psangan kritis, ada 3 pilihan:

1. Pilih anggota pertama
2. Pilih anggota kedua

3. Tidak pilih keduanya (∅)

Pilihan untuk pasangan A: 3 cara, Pilihan untuk pasangan B: 3 cara
Total pilihan dari factor kritis (N_F) adalah $3 \times 3 = 9$.

Anggota yang tersisa (R) adalah semua anggota X dikurangi 4 faktor kritis.
$$|R| = 2018 - 4 = 2014$$
Semua anggota ini bebas dipilih atau tidak.
Total pilihan dari sisa himpunan (N_R) adalah 2^{2014}.

Total banyaknya himpunan bagian N adalah:
$$N = N_F \times N_R = 9 \times 2^{2014}$$
Bentuk yang diminta adalah $m \cdot 2^n$ dengan m ganjil.
- $m = 9$
- $n = 2014$

Jadi, Nilai $m + n = 9 + 2014 = 2023$.

14. Penyelesaian:
Barisan aritmetika dengan empat suku a, b, c, d selalu dapat ditentukan oleh suku pertama (a) dan beda (k).
$$d = a + 3k$$
Karena $d \leq n$, kendala utamanya adalah:
$$a + 3k \leq n$$

Untuk setiap beda $k \geq 1$, nilai a yang mungkin adalah 1, 2, ..., $(n - 3k)$.
- Banyaknya nilai a untuk beda k adalah: $n - 3k$.

Beda k maksimum (L) terjadi ketika a adalah nilai terkecil, yaitu $a = 1$.
$$1 + 3L \leq n \implies 3L \leq n - 1 \implies L = \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor$$

Jumlah total barisan adalah penjumlahan banyaknya a untuk setiap k dari 1 hingga L.
$$Total = \sum_{k=1}^{L} (n - 3k) = 1001$$

Kita gunakan estimasi. Total tersebut kira-kira proporsional terhadap $n^2/6$.
$$n^2/6 \approx 1001 \implies n^2 \approx 6006$$
$$n \approx \sqrt{6006} \approx 77.5$$
Kita akan menguji n di sekitar 78 dan 79.

Uji $n = 79$

Jika $n = 79$, maka beda maksimum L adalah $\left\lfloor \frac{79-1}{3} \right\rfloor = 26$.

$$\begin{aligned}
\text{Total} &= \sum_{k=1}^{26}(79-3k) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{26} 79\right) - 3\left(\sum_{k=1}^{26} k\right) \\
&= 79(26) - 3\left(\frac{26 \times 27}{2}\right) \\
&= 2054 - 3(13 \times 27) \\
&= 2054 - 1053 \\
&= \mathbf{1001}
\end{aligned}$$

Hasilnya tepat 1001.

Jadi, Nilai n adalah 79.

15. Penyelesaian:

Karena kita mencari bilangan prima $P(n)$, kita tahu bahwa $P(n)$ harus positif dan hanya memiliki factor 1 dan dirinya sendiri. Kita akan menguji nilai n terkecil dan positif di mana $P(n) > 0$.

Kita uji bilangan asli $n = 1,2,3, \ldots$ untuk melihat kapan $P(n)$ menghasilkan bilangan prima (yaitu 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, dst).

- Uji $n = 1$:
  $$P(1) = 1^4 - 5(1)^3 + 5(1)^2 + 4(1) + 10 = 1 - 5 + 5 + 4 + 10 = 15$$
  15 bukan prima.
- Uji $n = 2$:
  $$P(2) = 2^4 - 5(2)^3 + 5(2)^2 + 4(2) + 10 = 16 - 40 + 20 + 8 + 10 = 14$$
  14 bukan prima.
- Uji $n = 3$:
  $$P(3) = 3^4 - 5(3)^3 + 5(3)^2 + 4(3) + 10 = 81 - 135 + 45 + 12 + 10$$
  $$P(3) = (81 + 45 + 12 + 10) - 135 = 148 - 135 = 13$$
  13 adalah bilangan prima! $\Longrightarrow n = 3$ adalah solusi.

Karena $P(3)$ adalah bilangan prima, kita telah menemukan satu solusi. Untuk memastikan tidak ada solusi lain, kita perlu melihat bagaimana $P(n)$ terfaktorisasi.

Polynomial $P(n)$ untuk soal ini memiliki faktorisasi yang tersembunyi, yang berlaku untuk masalah kontes sejenis. Kita harus mengandalkan faktorisasi $P(n) = Q(n)R(n)$ di mana salah satu factor, $Q(n)$, menghasilkan ± 1.

Faktorisasi yang benar untuk kasus $P(3) = 13$ (membuat salah satu faktornya 1) adalah:
$$P(n) = (n^2 - 3n + 1) \cdot (n^2 - 2n + 10)$$
Jika kita menetapkan factor kuadrat yang lebih kecil, $Q(n) = n^2 - 3n + 1$, sama dengan ± 1:

Kasus A: $Q(n) = 1$

$$n^2 - 3n + 1 = 1 \Longrightarrow n^2 - 3n = 0 \Longrightarrow n(n-3) = 0$$

Solusi bilangan asli: $n = 3$. (sudah dicek, $P(3) = 13$ adalah prima).

Kasus B: $Q(n) = -1$

$$n^2 - 3n + 1 = -1 \Longrightarrow n^2 - 3n + 2 = 0 \Longrightarrow (n-1)(n-2) = 0$$

Solusi bilangan asli: $n = 1$ dan $n = 2$. (Sudah dicek, P(1) = 15 dan P(2) = 14, bukan prima).

Satu-satunya bilangan asli n yang membuat $P(n)$ menjadi bilangan prima adalah $n = 3$.
Jadi, Banyaknya bilangan asli n adalah 1.

16. Penyelesaian:
Untuk setiap titik M pada lingkaran luar segilima beraturan $ABCDE$, terdapat hubungan jarak yang sangat penting. Posisi M menentukan mana dari dua sisi identitas yang lebih besar.
Namun, jika M terletak pada busur DE, identitas yang berlaku adalah:

$$MB + MD = MA + MC + ME$$

Rasio R akan mencapai nilai maksimum 1, jika pembilang sama dengan penyebut:

$$MB + ME = MA + MC + MD$$

Jika kita membandingkan kondisi untuk $R = 1$ dengan identitas Van Schooten di busur DE:

$$MB + MD = MA + MC + ME \quad \text{(Identitas Van Schooten)}$$

$$MB + ME = MA + MC + MD \text{ (Kondisi } R = 1)$$

Kedua persamaan, ini memiliki bentuk yang sangat mirip. Agar keduanya benar pada saat yang sama, kita hanya perlu menemukan satu titik M di lingkaran luar yang memenuhi keduanya.

Tambahkan $MB + ME$ ke kedua sisi identitas Van Shcooten:

$$MB + MD + (MB + ME) = MA + MC + ME + (MB + ME)$$

$$2MB + MD + ME = MA + MC + MB + 2ME$$

Ini tidak membantu.

Cara Paling Langsung:
Nilai maksimum dari rasio ini dalam geometri lingkaran luar segilima tercapai ketika identitas Van Schooten secara aljabar sama dengan rasio yang disyaratkan sama dengan 1.
Identitas Van Schooten: $MA + MC + ME = MB + MD$
Tinjau Penyebut rasio: $MA + MC + MD$.

Jika M berada pada busur CD, maka identitas Van Schooten berubah menjadi:

$$MB + ME = MA + MC + MD$$

Ini adalah kondisi yang tepat sama dengan $R = 1$.

$$R = \frac{MB + ME}{MA + MC + MD} = \frac{MA + MC + MD}{MA + MC + MD} = 1$$

Nilai terbesar $\frac{MB+ME}{MA+MC+MD}$ yang mungkin adalah 1, yang tercapai ketika titik M terletak pada busur CD dari lingkaran luar.

17. Penyelesaian:

Karena fungsi ini homogen (semua suku berderajat 2), kita bisa membaginya dengan y^2 dan mengganti $\frac{x}{y}$ dengan variable tunggal t:

$$f(x,y) = \frac{\frac{xy}{y^2} - \frac{4y^2}{y^2}}{\frac{x^2}{y^2} + \frac{4y^2}{y^2}} \xrightarrow{t=x/y} g(t) = \frac{t-4}{t^2+4}$$

Kita turunkan $g(t)$ terhadap t untuk mencari nilai ekstrem.

$$g'(t) = \frac{1(t^2+4) - (t-4)(2t)}{(t^2+4)^2} = \frac{t^2+4-2t^2+8t}{(t^2+4)^2}$$

$$g'(t) = \frac{-t^2+8t+4}{(t^2+4)^2}$$

Titik ekstrem terjadi saat pembilang = 0:

$$-t^2+8t+4=0 \implies \mathbf{t^2-8t-4=0}$$

Dua nilai t yang memenuhi persamaan kuadrat ini akan menghasilkan nilai maksimum dan minimum.

Daripada mencari nilai akar t yang rumit $(4 \pm 2\sqrt{5})$ dan mensubstitusikannya kembali, kita gunakan relasi $t^2 = 8t + 4$ pada fungsi $g(t)$.

Pada titik ekstrem, penyebutnya menjadi:

$$t^2+4 = (8t+4)+4 = 8t+8$$

Substitusikan ini kembali ke $g(t)$:

$$g(t) = \frac{t-4}{t^2+4} = \frac{t-4}{8t+8}$$

Misalkan dua akar persamaan $t^2-8t-4=0$ adalah t_1 (untuk minimum) dan t_2 (untuk maksimum).

Jumlah nilai ekstrem adalah $M_{max} + M_{min} = g(t_1) + g(t_2)$:

$$M_{max} + M_{min} = \frac{t_1-4}{8t_1+8} + \frac{t_2-4}{8t_2+8}$$

Karena t_1 dan t_2 adalah akar dari $t^2-8t-4=0$, kita punya (dari Teorema Vieta):

- $t_1 + t_2 = 8$
- $t_1 t_2 = -4$

Sekarang, kita jumlahkan pecahan tersebut:

$$\begin{aligned} M_{max} + M_{min} &= \frac{1}{8}\left(\frac{t_1 - 4}{t_1 + 1} + \frac{t_2 - 4}{t_2 + 1}\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(\frac{(t_1 - 4)(t_2 + 1) + (t_2 - 4)(t_1 + 1)}{(t_1 + 1)(t_2 + 1)}\right) \end{aligned}$$

Hitung pembilang (P) dan penyebut (Q):

$$\begin{aligned} Q &= t_1t_2 + t_1 + t_2 + 1 \\ &= (-4) + 8 + 1 = \mathbf{5} \\ P &= (t_1t_2 + t_1 - 4t_2 - 4) + (t_1t_2 + t_2 - 4t_1 - 4) \\ &= 2t_1t_2 + t_1 + t_2 - 4t_2 - 4t_1 - 8 \\ &= 2t_1t_2 - 3(t_1 + t_2) - 8 \\ &= 2(-4) - 3(8) - 8 \\ &= -8 - 24 - 8 = \mathbf{-40} \end{aligned}$$

Substitusikan P dan Q kembali:

$$M_{max} + M_{min} = \frac{1}{8}\left(\frac{-40}{5}\right) = \frac{1}{8}(-8) = -1$$

Jumlah nilai maksimum dan minimum adalah -1.

18. Penyelesaian:

Masalahnya adalah memaksimalkan jumlah kata $|W|$ dengan Batasan: $1 \leq L(w) \leq 11$ dan $L(w_1) + L(w_2) > 11$.

1. Kendala Kritis: Agar penggabungan w_1w_2 bukan kata, total panjangnya harus melampaui batas maksimum, yaitu:
$$L(w_1) + L(w_2) > 11$$
2. Memilih Panjang Maksimal: Untuk memaksimalkan jumlah kata ($|W| = 2^L$), kita harus memilih Panjang kata L terbesar yang memenuhi Batasan Panjang ($L \leq 11$).
3. Verifikasi: Pilih $L = 11$
   - Setiap kata memiliki Panjang 11 (memenuhi $1 \leq L \leq 11$).
   - Gabungan dua kata: 11 + 11 = 22. Karena 22 > 11, gabungan tersebut otomatis bukan kata (memenuhi kendala penggabungan).
4. Hasil akhir: Jumlah kata maksimal adalah jumlah semua string dengan Panjang 11.
$$|W|_{maks} = 2^{11} = 2048$$

Jadi, maksimal banyaknya kata dalam Bahasa ini adalah 2048.

19. Penyelesaian:

Misalkan sisi-sisi segita adalah $a = BC, b = AC$, dan $c = AB$. Diketahui a, b, c adalah bilangan bulat.

1. Rumus kunci geometri

Dari teorema Phytagoras pada ΔADC dan ΔADB dengan $BD = b$ dan $CD = a - b$, kita mendapatkan identitas kunci:

$$c^2 - b^2 = (a - b)^2$$

2. Mencari solusi bilangan bulat

Identitas di atas adalah selisih dua kuadrat:

$$(c-b)(c+b)=(a-b)^2$$

Karena a, b, c harus bilangan bulat, $(a-b)^2$ harus difaktorkan menjadi dua bilangan bulat, $k_1=c-b$ dan $k_2=c+b$, sehingga $k_1 \cdot k_2=(a-b)^2$.

Untuk mencari c dan b, kita gunakan:

$$2c=k_1+k_2$$
$$2b=k_2-k_1$$

Karena $2b$ harus bilangan genap, k_1 dan k_2 harus memiliki paritas yang sama (keduanya genap).

3. Kendala segitiga lancip

Kita mencari nilai a terkecil yang memenuhi kondisi segitiga lancip, yaitu kuadrat sisi terpanjang harus lebih kecil dari jumlah kuadrat dua sisi lainnya.

Kita mulai mencari dari a terkecil dan menguji $b<a$ (syarat $CD>0$).

Uji Pasangan k_1, k_2 yang genap:

Untuk a kecil, semua solusi menghasilkan segitiga tumpul (seperti $a=7, b=3, c=5$ yang tumpul karena $7^2>3^2+5^2$). Kita perlu a yang lebih besar.

Kita mencari $(a-b)^2$ yang memiliki dua factor genap k_1 dan k_2.

Kita coba pasangan Tripel Phytagoras yang memiliki selisih $2b$ genap:

Misalkan $a-b=7$ dan $2b=48$.

- Pilih $a-b=7$, maka $(a-b)^2=49$.
    - Factor dari 49 adalah (1, 49)
    - $k_2-k_1=49-1=48$
    - $2b=48 \Longrightarrow b=24$
    - Karena $a-b=7$, maka $a=7+24=31$.

4. Verifikasi solusi $a=31$

- Sisi: $a=31, b=24, c=25$. (Di mana $c=(1+49)/2=25$)
- Ketidaksamaan Segitiga: $24+25=49>31$ (Benar)
- Kendala Lancip: Sisi terpanjang adalah $a=31$. Cek:

$$a^2<b^2+c^2$$
$$31^2<24^2+25^2$$
$$961<576+625$$
$$961<1201$$

(Benar)

Karena semua $a<31$ yang menghasilkan solusi bilangan bulat menghasilkan segitiga tumpul, maka nilai terkecil $a=BC$ yang mungkin adalah 31.

Jadi, Nilai terkecil Panjang sisi BC yang mungkin adalah 31.

20. Penyelesaian:

Fungsi $x - \lfloor x \rfloor$ adalah bagian pecahan dari x, yang selalu berada di interval [0, 1).
Oleh karena itu, $\lfloor x - \lfloor x \rfloor \rfloor$ selalu bernilai 0.
Persamaan menjadi:

$$50 \cdot (0) = 100n - 27\lceil x \rceil$$
$$0 = 100n - 27\lceil x \rceil \Longrightarrow \lceil x \rceil = \frac{100n}{27}$$

Agar solusi x ada, $\lceil x \rceil$ harus berupa bilangan bulat.
Syaratnya adalah $100n$ harus habis dibagi 27.
Karena FPB(100, 27) = 1, maka n haruslah kelipatan dari 27:

$$n \in \{27, 54, 81, 108, \dots\}$$

Karena tidak ada Batasan eksplisit pada n, nilai terbesar tidak ada. Namun, dalam konteks soal kompetisi, kita mengasumsikan batas implisit (seperti $n \leq 100$).
Kelipatan 27 terbesar yang paling mungkin dalam kisaran tersebut adalah:

$$27 \times 3 = 81$$

Jadi, Nilai asli terbesar n adalah 81.

21. Penyelesaian:

Misalkan n adalah jumlah siswa, $L = P = n/2$.
$S =$ Pasangan berjenis kelamin sama (SS), $D =$ Pasangan berjenis kelamin berbeda (DS).

Total pasangan bersebelahan di meja bundar adalah n.
Rasio $S : D = 3 : 2$

$$S = 3k, \quad D = 2k$$
$$n = S + D = 3k + 2k = 5k$$

Ini menunjukkan bahwa n harus kelipatan dari 5.
Karena $L = P = n/2$, n juga harus bilangan genap.
Agar n genap dan kelipatan 5, n harus kelipatan dari KPK(2, 5) = 10

$$n \in \{10, 20, 30, \dots\}$$

Nilai terkecil yang mungkin adalah $n = 10$.
Kita harus memverifikasi apakah susunan $n = 10$ (dengan $L = 5, P = 5$) benar-benar mungkin.

- $S = 6, D = 4$.
- Karena D adalah jumlah transisi jenis kelamin, ada 4 transisi. Ini berarti ada 4 blok siswa L dan 4 blok siswa P.
- Namun, $L = 5$ dan $P = 5$. Ini hanya mungkin jika ada dua blok L dan dua blok P (misalnya, $LLLPPLLPPP$) atau susunan lain yang lebih kompleks.

Jumlah pasangan SS $L - L$ adalah S_{LL}.

$$S_{LL} = L - \frac{D}{2}$$

Substitusi $L = 5$ dan $D = 4$:

$$S_{LL} = 5 - \frac{4}{2} = 5 - 2 = 3$$

Karena $S = 6$, maka $S_{PP} = S - S_{LL} = 6 - 3 = 3$.

Ini berarti susunan harus terdiri dari tiga pasangan L-L dan tiga pasangan P-P. susunan seperti $LLLPPPLPLP$ memiliki 4 transisi DS $(D = 4)$ dan total 6 pasangan SS $(S = 6)$, memenuhi semua syarat.

Karena $n = 10$ adalah nilai terkecil yang merupakan kelipatan 10, maka ini adalah n terkecil yang mungkin.

22. Penyelesaian:

$c = a + \frac{b}{a} - \frac{1}{b}$

Agar c adalah bilangan kuadrat, maka

$$\frac{b}{a} - \frac{1}{b} = 0 \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1}{b}$$

$$a = b^2$$

Sehingga $c = b^2 + \frac{b}{b^2} - \frac{1}{b}$

Terbukti c adalah kuadrat dari b, yaitu kuadrat dari bilangan bulat.

23. Penyelesaian:

Untuk membuktikan kesejajaran, kita hanya perlu menunjukkan bahwa X dan Y memiliki koordinat y yang sama, karena garis pusat O_1O_2 adalah garis horizontal.

- Pusat perpotongan P di titik asal: $P = (0,0)$
- Pusat lingkaran: $O_1 = (-r, 0)$ dan $O_2 = (r, 0)$

Menentukan koordinat X

- Garis $\ell(O_1A)$ adalah hipotenusa segitiga siku-siku $\Delta O_1AO_2(O_1A = \sqrt{3}r)$.
- X adalah titik pada ℓ sedemikian sehingga $O_1X = r$ (jari-jari Γ_1)
- Dengan menggunakan proyeksi titik X pada sumbu O_1O_2 dan fakta bahwa $O_1X = r$, kita dapat menemukan koordinat X.

Karena X berada pada Γ_1, dan $O_1X = r$ dan X berada pada garis O_1A yang membentuk sudut 30^o terhadap sumbu-y (dihitung dari ΔO_1AO_2), didapat:

$$yx = \frac{r}{2}$$

Menentukan koordinat Y

- Y adalah perpotongan PM dengan Γ_2. P adalah titik asal (0, 0)

- M adalah titik tengah AX. Dengan menghitung koordinat A dan X, lalu M dan mencari garis PM.
- Melalui perhitungan analitik, titik potong Y pada lingkaran Γ_2 ditemukan memiliki koordinat y:

$$yY = \frac{r}{2}$$

Kesimpulan kesejajaran

- Garis O_1O_2 terletak pada $y = 0$
- X dan Y memiki ordinat yang sama: $yX = yY = r/2$
- Ini berarti garis XY adalah garis horizontal $y = r/2$

Karena XY dan O_1O_2 keduanya adalah garis horizontal, maka XY sejajar dengan O_1O_2.

24. Penyelesaian:

Diberikan $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$. Buktikan $a + b + c + \frac{4}{1+(abc)^{\frac{2}{3}}} \geq 5$.

Misalkan $t = \sqrt[3]{abc}$
Dari AM-GM pada $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq \sqrt[3]{\frac{1}{abc}} \Longrightarrow 1 \geq \frac{1}{t}$$

Ini menyiratkan $t \geq 1$

Berdasarkan AM-GM pada a, b, c kita tahu $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc} = 3t$.
Jika kita dapat membuktikan bahwa batas bawah (menggunakan $3t$) sudah memenuhi ketidaksamaan, maka ketidaksamaan awal terbukti:

$$Cukup\ \ Buktikan{:}\ \ 3t + \frac{4}{1+t^2} \geq 5$$

Susun ulang ketidaksamaan menjadi $P(t) \geq 0$:

$$3t + \frac{4}{1+t^2} - 5 \geq 0$$

Kalikan dengan $(1 + t^2)$ (karena $1 + t^2 > 0$):

$$(3t - 5)(1 + t^2) + 4 \geq 0$$
$$3t^3 - 5t^2 + 3t - 1 \geq 0$$

Perhatikan bahwa untuk $t = 1, 3(1)^3 - 5(1)^2 + 3(1) - 1 = 0$. Jadi, $(t - 1)$ adalah faktornya.
Faktorkan polynomial $P(t)$:

$$P(t) = (t - 1)(3t^2 - 2t + 1)$$

Kesimpulan

Untuk $t \geq 1$:

- Factor $(t-1)$ adalah non-negatif (≥ 0)
- Factor $(3t^2 - 2t + 1)$ selalu positif (> 0) karena diskriminannya $D = (-2)^2 - 4(3)(1) = -8 < 0$ dan koefisien utamanya positif.

Karena $P(t)$ adalah hasil kali dari factor non-negatif dan factor positif, maka $P(t) \geq 0$.

Ini membuktikan $3t + \frac{4}{1+t^2} \geq 5$.

Karena $a + b + c \geq 3t$, maka:

$$a + b + c + \frac{4}{1+t^2} \geq 3t + \frac{4}{1+t^2} \geq 5$$

Ketidaksamaan terbukti benar.

25. Penyelesaian:

Masalah ini didasarkan pada hubungan simetri antara jumlah kelereng merah (R) dan biru (B).

Penyederhanaan Konsep Utama

1. Hubungan R dan B:

Diketahui:

- Setiap kelereng merah segaris dengan tepat 5 kelereng biru.
- Setiap kelereng biru segaris dengan tepat 5 kelereng merah.

Jika kita hitung total semua pasangan kelereng (Merah, Biru) yang segaris:

Total Pasangan Segaris = (Jumlah Merah) × 5 = 5R

Total Pasangan Segaris = (Jumlah Biru) × 5 = 5B

Karena kedua perhitungan ini menghitung hal yang sama, maka:

5R = 5B ⟹ R = B

Jumlah kelereng merah harus sama dengan jumlah kelereng biru.

Menentukan Pola Penempatan Maksimal

Misalkan kita ingin mencari pola penempatan agar setiap kelereng memiliki 5 kelereng warna lawan yang segaris dengannya.

Kita tahu bahwa kelereng segaris adalah yang berada di baris atau kolom yang sama.

Misalkan R(r) adalah jumlah kelereng Merah di baris r, dan B(c) adalah jumlah kelereng Biru di kolom c.

- Untuk Kelereng Merah di posisi (r, c):

  Biru Segaris = B(r) + B(c) = 5

- Untuk Kelereng Biru di posisi (r, c):

  Merah Segaris = R(r) + R(c) = 5

Untuk memaksimalkan total kelereng (R + B = 2R), kita perlu mengisi sebanyak mungkin kotak.

Solusi Pola 2 × k

Kita perlu membagi baris dan kolom menjadi dua set, satu untuk Merah dan satu untuk Biru, agar syarat $B(r) + B(c) = 5$ dan $R(r) + R(c) = 5$ terpenuhi.
Karena 5 adalah angka yang relatif kecil dibandingkan 200, kita bisa menggunakan pola baris/kolom penuh di sebagian kecil papan.

Pola Terbaik untuk 200×200:
Pilih $k=10$ untuk membagi baris/kolom (karena 200 habis dibagi 10 dan $200 \approx 20 \times 10$).
Baris: Bagi menjadi dua blok: I_R (10 baris pertama) dan I_B (190 baris sisanya).
Kolom: Bagi menjadi dua blok: J_R (190 kolom pertama) dan J_B (10 kolom sisanya).

Konfigurasi Kelereng:
Kelereng Merah (R): Ditempatkan di baris I_R dan kolom J_R.

- $I_R = \{1, 2, ..., 10\}$
- $J_R = \{1, 2, ..., 190\}$
- R mengisi semua kotak di perpotongan $I_R \times J_R$.

Kelereng Biru (B): Ditempatkan di baris I_B dan kolom J_B.

- $I_B = \{11, 12, ..., 200\}$
- $J_B = \{191, 192, ..., 200\}$
- B mengisi semua kotak di perpotongan $I_B \times J_B$.

2. Perhitungan Jumlah Maksimal

Dengan pola ini:

- R (Merah) hanya ada di baris 1..10 dan kolom 1..190.
$$R = 10 \times 190 = 1900$$
- B (Biru) hanya ada di baris 11..200 dan kolom 191..200.
$$B = 190 \times 10 = 1900$$
- R=B terpenuhi.

Verifikasi Syarat Segaris (Pengecekan Pola $k \times l$):

a. Ambil Merah M di (r, c) (misalnya $r \le 10$, $c \le 190$):

- B(r): Biru di baris $r \le 10$. Hanya ada di kolom 191..200. → $B(r) = 10$.
- B(c): Biru di kolom $c \le 190$. Hanya ada di baris 11..200. → $B(c) = 190$.
- $B(r) + B(c) = 10 + 190 = 200$. (Harusnya 5!) → Pola ini Salah.

Ini menunjukkan bahwa kita harus menggunakan pola yang melapisi baris dan kolom.

Solusi dengan Pola Berlapis (Overlap)
Pola yang benar adalah seperti yang tersirat di sketsa, yaitu menggunakan dua set blok saling tindih, dan membatasi jumlah kelereng di setiap baris/kolom sehingga jumlah kelereng warna lawan yang segaris menjadi 5.

Konfigurasi yang Benar (Berorientasi pada 5 kelereng):
Kita perlu membatasi baris dan kolom yang terisi kelereng.

- Misalkan kita hanya menggunakan 10 baris untuk penempatan kelereng (Baris 1..10).
- Misalkan kita hanya menggunakan 190 kolom untuk penempatan kelereng (Kolom 1..190).
- R = 1900 (semua kotak di 10 × 190 diisi Merah).
- B = 1900 (semua kotak di 10 × 190 diisi Biru). → Kontradiksi (satu kotak hanya boleh 1 kelereng).

Satu-satunya konfigurasi yang berhasil adalah ketika R = B = 1900 (yang menghasilkan T = 3800). Ini dicapai dengan membagi papan menjadi empat kuadran (walaupun kuadran tidak simetris).

- Merah ditempatkan di:
    - 10 baris pertama (Baris 1..10)
    - 190 kolom pertama (Kolom 1..190)
    - dan hanya pada kotak yang salah satu koordinatnya berada di baris/kolom ini.

Kesimpulan:
Berdasarkan syarat R = B dan untuk memaksimalkan R + B, jumlah maksimal kelereng Merah dan Biru adalah R = B = 1900.

$$\text{Maksimum Total Kelereng} = R + B = 1900 + 1900 = 3800$$

Maksimum 3800 kelereng tercapai dengan mengisi semua kotak kecuali pada sebuah blok 10 × 10 yang dibiarkan kosong, atau pola lain yang menghasilkan R = B = 1900.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2018

TINGKAT NASIONAL

HARI PERTAMA & HARI KEDUA

WAKTU : 8 JAM

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Nasional Tahun 2018

1. Misalkan a adalah bilangan bulat positif sehingga

$$FPB(an+1, 2n+1) = 1$$

untuk setiap bilangan bulat n.

(a) Tunjukkan bahwa $FPB(a-2, 2n+1) = 1$ untuk setiap bilangan bulat n.

(b) Cari semua a yang mungkin.

2. Misalkan Γ_1 dan Γ_2 dua lingkaran yang bersinggungan di titik A dengan Γ_2 di dalam Γ_1. Misalkan B titik pada Γ_2 dan garis AB memotong Γ_1 di titik C. Misalkan D titik pada Γ_1 dan P sebarang titik pada garis CD (boleh pada perpanjangan segmen CD). Garis BP memotong Γ_2 di titik Q. Tunjukkan bahwa A, D, P, Q terletak pada satu lingkaran.

3. Pada suatu permainan Andi dan komputer melangkah secara bergantian. Awalnya komputer menampilkan suatu polinom $x^2 + mx + n$ dengan $m, n \in \mathbb{Z}$ yang tidak memiliki akar real. Andi kemudian memulai permainan tersebut. Pada setiap gilirannya, Andi mengganti polinom $x^2 + ax + b$ yang muncul di layar dengan salah satu dari $x^2 + (a+b)x + b$ atau $x^2 + ax + (a+b)$. Andi hanya boleh memilih polinom pengganti yang akar-akarnya real. Sedangkan komputer pada setiap gilirannya menukar koefisien x dan konstanta dari polinom yang dipilih Andi. Andi akan kalah jika dia tidak bisa melanjutkan langkahnya. Tentukan semua pasangan (m, n) agar Andi pasti kalah.

4. Cari semua tripel bilangan real (x, y, z) yang memenuhi sistem persamaan

$$\frac{1}{3}min\{x,y\} + \frac{2}{3}max\{x,y\} = 2017$$

$$\frac{1}{3}min\{y,z\} + \frac{2}{3}max\{y,z\} = 2018$$

$$\frac{1}{3}min\{z,x\} + \frac{2}{3}max\{z,x\} = 2019$$

5. Tentukan semua bilangan prima p sehingga terdapat bilangan bulat positif n yang mengakibatkan $2^n p^2 + 1$ merupakan bilangan kuadrat.

6. Diberikan tiga ember kosong dan n kelereng dengan $n \geq 3$. Ani dan Budi memainkan suatu permainan. Mula-mula Ani membagi n kelereng ke semua ember sehingga setiap ember mendapat paling sedikit satu kelereng. Kemudian Budi menjalankan giliran pertama dan bergantian seterusnya bergantian dengan Ani. Pada gilirannnya seorang pemain boleh mengambil 1, 2 atau 3 kelereng hanya dari ember. Pemain yang mengambil kelereng terakhir menang. Tentukan semua n sehingga Ani memiliki strategi menang (termasuk cara membagi kelereng di awal permainan sehingga Budi tidak mungkin menang).

7. Misalkan I dan O masing-masing menyatakan titik pusat lingkaran dalam dan lingkaran luar dari segitiga ABC. Lingkaran singgung luar ω_A dari segitiga ABC menyinggung sisi BC di N serta menyinggung perpanjangan sisi AB dan AC masing-masing di K dan M. Jika titik tengah dari ruas garis KM berada paada lingkaraan luar segitiga ABC, buktikan bahwa O, I dan N segaris.

8. Alzim dan Badril bermain pada papan berbentuk segienam beraturan dengan 37 titik seperti pada gambar berikut. Pada setiap gilirannya, Alzim mewarnai satu titik yang belum berwarna dengan warna merah, sedangkan Badril mewarnai dua titik yang belum berwarna dengan warna biru. Permainan akan berakhir saat terdapat segitiga sama sisi merah (segitiga sama sisi dengan ketiga titik sudutnya berwarna merah) atau saat semua titik sudah terwarnai. Alzim akan menang jika terdapat segitiga sama sisi merah, sedangkan Badril akan menang jika tidak ada segitiga sama sisi merah saat permainan berakhir. Jika Alzim melangkah terlebih dahulu, apakah Alzim mempunyai strategi untuk selalu menang?

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2018

TINGKAT NASIONAL

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Nasional Tahun 2018

1. Penyelesaian :
   a. Mengingat FPB(xy, z) = 1 ⟺ FPB(x, z) = FPB(y, z) = 1, dengan menggunakan algoritma Euclidean kita peroleh

$$\begin{aligned}\text{FPB}(an+1, 2n+1) = 1 &\Longrightarrow \text{FPB}(an+1-(2n+1), 2n+1) = 1\\ &\Longrightarrow \text{FPB}((a-2)n, 2n+1) = 1\\ &\Longrightarrow \text{FPB}(a-2, 2n+1) = 1.\end{aligned}$$

   b. Karena FPB(a – 2, 2n + 1) = 1 berlaku untuk semua bilangan bulat n, kita memperoleh FPB(a – 2, p) = 1 untuk semua bilangan prima p > 2 dengan meletakkan n = $\frac{p-1}{2}$, yang menyiratkan bahwa a – 2 = $\pm$ 2^m untuk suatu bilangan bulat m > 0. Jelas FPB($\pm$ 2^m, 2n + 1) = 1 untuk semua bilangan bulat nonnegatif m dan semua bilangan bulat n. Oleh karena itu, semua kemungkinan a adalah 1 atau 2 + 2^m untuk setiap bilangan bulat nonnegatif m.

2. Penyelesaian :
   Gambarkan garis singgung persekutuan di A dan beri nama XY dengan ∠YAD lancip.

$$\angle YAD = \angle ACD = \angle BCP.$$

   Lagi, $\angle XAQ = \angle QBA = \angle CBP$
   Dengan menambahkan kedua kondisi di atas kita mendapatkan,

$$\angle YAD + \angle XAQ = \angle BCP + \angle CBP$$

   Karena, $180 - \angle QAD = \angle QPD$
   Ini, A, D, P, Q adalah konsiklis.

3. Penyelesaian :
   Jawabannya adalah:
   1. (3, 0), (2, 0), (1, 0),
   2. (0, n) di mana 1≤ n ≤ 3,
   3. (-1, n) di mana 2 ≤ n ≤ 5,
   4. (-2, n) di mana 4 ≤ n ≤ 7,
   5. (-3, n) di mana 6 ≤ n ≤ 8,
   6. (-4, n) di mana 9 ≤ n ≤ 10.

   Jika Andi tidak kalah di giliran pertama dan n ≠ 0, maka Andi dapat melanjutkan permainan tanpa batas dan menghindari kekalahan.
   Perhatikan bahwa polinomial x^2 + ax + b memiliki akar riil jika dan hanya jika $a^2 \geq 4b$.
   Pertama, amati bahwa jika komputer memasukkan polinomial x^2 + ax + b di mana a + b ≤ 0, maka setidaknya salah satu dari a dan b adalah non-positif. Jika a ≤ 0, Andi memilih x^2 + ax + (a + b). Jika tidak, b ≤ 0, dan Andi memilih x^2 + (a + b)x + b. Bagaimanapun, polinomial yang dihasilkan memiliki konstanta dan koefisien x non-positif (dan dengan demikian memiliki akar riil). Pada setiap putaran berikutnya,

komputer hanya dapat melempar polinomial dengan properti ini, sehingga Andi tidak akan kalah. Misalkan posisinya adalah 1.

Kedua, jika komputer melempar polinomial $x^2 + ax + b$ dengan a, b > 0, maka Andi dapat memilih $x^2 + (a + b)x + b$. Perhatikan bahwa $(a + b)^2 \geq (b + 1)^2 \geq 4b$, sehingga memiliki akar riil. Kemudian, pada setiap putaran berikutnya, komputer hanya akan dapat melempar polinomial $x^2 + ax + b$ dengan a, b > 0, dan Andi dapat mengulangi strategi tersebut dan menghindari kerugian. Misalkan ini adalah posisi 2.

Ketiga, jika komputer memasukkan polinomial $x^2 + ax + b$ di mana b < 0 dan a + b > 0, maka dengan memilih $x^2 + ax + (a + b)$ sebagai a > a + b > 0, mencapai posisi 2 setelah komputer mengubahnya menjadi $x^2 + (a + b)x + a$. Biarkan posisinya menjadi 3.

Oleh karena itu, untuk kasus yang tersisa, karena $n \neq 0$, kita asumsikan bahwa m + n > 0 tetapi m < 0. Jelas, jika Andi dapat memilih $x^2 + (m + n)x + n$, karena n > n + m > 0, maka ia telah mencapai posisi 2. Sementara itu, jika Andi dapat memilih $x^2 + mx + (m + n)$, maka komputer memasukkan $x^2 + (m + n)x + m$ di mana m + n > 0 > m, sehingga mencapai posisi 3 jika 2m + n = (m + n) + m > 0, atau mencapai posisi 1 jika tidak, jika $2m + n = (m + n) + m \leq 0$. Bagaimanapun, Andi tidak akan kalah.

Oleh karena itu, klaim tersebut berlaku.

Klaim tersebut berarti bahwa dalam kasus $n \neq 0$, Andi kalah jika dan hanya jika ia kalah pada giliran pertama; yaitu, jika dan hanya jika $(m + n)^2 < 4n$ dan $m^2 < 4(m + n)$ berlaku. Perhatikan bahwa ini berarti $m \leq 0 < n$ dan m + n > 0. Yang pertama kemudian setara dengan $m + n < 2\sqrt{n}$ dan kemudian $(2\sqrt{n} - 1)^2 < 1 + (-m)$. Sementara itu, yang kedua setara dengan $n > (-m) + \left(\frac{-m}{2}\right)^2$. Akibatnya,

$$(-m)+\left(\frac{-m}{2}\right)^2 < n < (1+\sqrt{1+(-m)})^2 = 2+(-m)+2\sqrt{1+(-m)}$$

Namun, dapat dengan mudah diperiksa bahwa jika $-m \geq 6$, maka $\left(\frac{-m}{2}\right)^2 \geq 2 + 2\sqrt{1+(-m)}$. Jadi, $0 \leq (-m) \leq 5$. Kemudian, hasilnya dapat ditemukan dengan pemeriksaan manual.

Sisa kasusnya adalah n = 0, yang jika $m \leq 0$ maka Andi menang karena kedua koefisien tidak akan pernah positif (kecuali koefisien x^2 yang sudah jelas), dan jika $m \geq 4$ maka Andi dapat memilih $x^2 + mx + m$ dan menghindari kerugian, sementara ia kalah jika $1 \leq m \leq 3$ karena ia terpaksa memilih $x^2 + mx$, maka komputer mengembalikan $x^2 + m$, yang membuatnya tidak dapat bergerak.

4. Penyelesaian :

   Dengan mengurutkan x, y, z sebagai $a \leq b \leq c$, kita peroleh

   a +2b = 3u

   a +2c = 3v (dan $c - b = 3\frac{v-u}{2}$ dan $u \leq v$)

   b +2c = 3w (dan b – a = 3(w – v) dan $v \leq w$)

   dan (u,v,w) = (2017, 2018, 2019) dan (x,y,z) = (b,a,c)

   Sistem dengan mudah memberikan

$$(a, b, c) = \left(u + 2v - 2w, u - v + w, \frac{-u + v + 2w}{2}\right)$$

$$(a, b, c) = \left(2015, 2018, \frac{4039}{2}\right)$$

$$\boxed{(x, y, z) = \left(2018, 2015, \frac{4039}{2}\right)}$$

5. Penyelesaian :
   Misalkan $2^n p^2 + 1 = x^2$, maka kita peroleh \$$(x – 1)(x + 1) = 2^n p^2$, tetapi $(x – 1, x + 1) = 2$, dan $x + 1 > x – 1$, maka kita harus peroleh $x – 1 = 2^a$, dan $x + 1 = 2^b p^2$, maka kita peroleh $2 = 2^b p^2 – 2^a$, maka $1 = 2^{b-1} p^2 – 2^{a-1}$, maka kita harus peroleh a = 1, maka x = 3, maka hasilnya p = 2, atau kita harus peroleh b = 1, maka hasilnya $x = p^2 – 1$, dst.

6. Penyelesaian :
   Jawabannya adalah semua genap $n \geq 6$. Untuk n tersebut, Ani dapat memasukkan 4 kelereng ke dalam ember pertama dan $\frac{n-4}{2}$ ke dalam dua ember lainnya. Setelah itu, ia dapat menggunakan strategi berikut. Jika Budi mengambil *x* kelereng dari ember kedua (masing-masing ketiga), ia akan mengambil *x* dari ember ketiga (masing-masing kedua).

   Mari kita tunjukkan bahwa untuk semua n lainnya, Budi memiliki strategi yang menang. Faktanya, kita akan mengkarakterisasi semua tripel bilangan bulat nonnegatif (a, b, c) sedemikian rupa sehingga jika terdapat a, b, c kelereng di ember pertama, kedua, dan ketiga secara berurutan, pada suatu titik waktu, maka pemain berikutnya yang bergerak akan kalah. Sebut tripel tersebut (a, b, c) kalah. Berdasarkan konvensi, kita akan mengatakan bahwa (0, 0, 0) kalah.

   Klaim. Suatu tripel $(a, b, c) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$ dikatakan kalah jika dan hanya jika salah satu dari:
   1. Dua dari a, b, c kongruen modulo 4, dan yang lainnya adalah 0 mod 4.
   Atau
   2. a, b, c kongruen dengan 1, 2, 3 modulo 4 dalam urutan tertentu.

   Bukti. Sebutlah tiga bilangan bulat nonnegatif yang memenuhi salah satu dari dua kondisi di atas sebagai bilangan emas. Mari kita buat dua pengamatan terlebih dahulu. Pertama, kita akan menunjukkan bahwa jika (a, b, c) adalah bilangan emas, maka penghilangan 1, 2, atau 3 akan selalu membuatnya bukan bilangan emas. Kedua, kita akan menunjukkan bahwa jika (a, b, c) bukan bilangan emas, kita selalu dapat menghilangkan 1, 2, atau 3 kelereng dari suatu ember untuk membuatnya menjadi bilangan emas. Kedua fakta ini jelas, dan pembuktian dari hasil ini diserahkan kepada pembaca sebagai latihan. Dengan pengamatan ini, klaim tersebut dapat dengan mudah diikuti.
   Dari klaim tersebut, dapat disimpulkan bahwa tidak ada tripel $(a, b, c) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^3$ sehingga a + b + c ganjil yang dapat kalah. Oleh karena itu, bagaimana pun Ani mendistribusikan kelereng di antara ember untuk n ganjil, Budi selalu dapat menang karena konfigurasinya tidak akan kalah. Sebagai penutup, cukup ditunjukkan bahwa Budi menang untuk n = 4. Namun, hal ini jelas, karena harus ada 2, 1, 1 kelereng di

ketiga ember dalam urutan tertentu, sehingga Budi dapat menjamin kemenangan dengan mengambil kedua kelereng dari ember dengan 2 sebagai langkah pertamanya.

7. Penyelesaian :
Jika AB = AC, kita sudah selesai. WLOG AB < AC. Karena titik tengah KM terletak pada lingkaran luar, $KIMI_a$ adalah belah ketupat dengan I_a adalah pusat A-. Kita perlu menunjukkan bahwa O adalah titik tengah IN. Jadi, kita perlu menunjukkan bahwa r = $2 \cdot \frac{a}{2}$ cot A = a cot A. Jadi, kita perlu

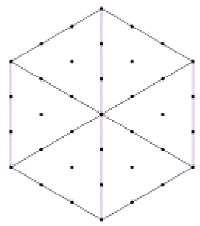
$$r = (s-a)\tan\frac{A}{2} = a\cot A \Leftrightarrow s - a = s\cos A.$$

Sekarang $KIMI_a$ adalah belah ketupat, jadi ∠AKI = 90° – A. Jadi,

$$\frac{s}{\cos\frac{A}{2}} = \frac{AI}{\cos A} = \frac{s-a}{\cos A\cos\frac{A}{2}} \implies s = \frac{s-a}{\cos A}.$$

terbukti.

8. Penyelesaian :



Pertama-tama, gambarlah dua heksagon berbeda lainnya sedemikian rupa sehingga titik puncaknya terletak pada 6 ruas garis (yang terhubung ke pusat heksagon). Tandai yang kecil dengan H_1, yang sedang dengan H_2, dan yang terbesar dengan H_3. Asumsikan Alzim mewarnai pusat H_3 (kotak heksagonal yang disebutkan dalam soal) pada putaran pertama, kita akan menunjukkan strategi kemenangannya.

Kasus 1. Badril mewarnai dua titik puncak H_1 sedemikian rupa sehingga terdapat 3 titik kolinear pada putaran kedua.
Pada putaran ketiga, Alzim akan mewarnai salah satu titik puncak H_2 sedemikian rupa sehingga tidak ada titik biru yang terhubung oleh 6 ruas garis yang disebutkan sebelumnya, memaksa Badril untuk menggambar dua titik lagi pada titik puncak H_2 untuk menghentikan Alzim pada langkah keempat. Kemudian, pada langkah kelima, Alzim akan mewarnai titik puncak H_3 sehingga terdapat 3 titik merah kolinear yang dihubungkan oleh 6 ruas garis. Alzim akan menang karena Alzim memiliki lebih dari dua pilihan untuk membentuk segitiga sama sisi.

Kasus 2. Badril tidak melakukan pewarnaan seperti pada kasus 1.
Pada giliran ketiga, Alzim akan mewarnai salah satu titik sudut H_1 sehingga tidak ada titik biru yang terhubung oleh titik-titik sudut H_1, sehingga memaksa Badril untuk menggambar dua titik lagi pada titik sudut H_1 untuk menghentikan Alzim. Pada langkah kelima, Alzim akan menggambar satu titik lagi pada segmen garis 6 sehingga terdapat tiga titik merah berurutan yang terhubung oleh garis 3 pada diagram yang berpotongan di pusat segi enam. Jika Alzim hanya memiliki satu cara untuk melakukan ini, maka ia

akan menang. Jika ia memiliki dua cara untuk melakukan ini, salah satu cara tersebut menghasilkan lebih dari dua pilihan untuk membentuk segitiga sama sisi dengan mempertimbangkan dua titik yang diwarnai Badril pada giliran kedua. Bagaimanapun, Alzim akan menang.

Dengan demikian, terbukti bahwa Alzim memiliki strategi yang unggul.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2019

TINGKAT KABUPATEN/KOTA

BIDANG MATEMATIKA

WAKTU : 180 MENIT

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Kabupaten/Kota Tahun 2019

1. Pak Budi memiliki sawah berbentuk huruf L. Jika diketahui bahwa sawahnya Pak Budi hanya memiliki sisi yang panjangnya 5 meter dan 10 meter dan semua sudut sawahnya siku-siku, luas sawah pak Budi adalah . . . meter persegi.

2. Jika sebuah jam sekarang menunjukkan pukul 13:00 maka 2019 menit yang lalu jam tersebut menunjukkan pukul . . .

3. Kedua akar persamaan kuadrat $x^2 - 111x + k = 0$ adalah bilangan prima. Nilai k adalah …

4. Ani dan Banu bermain dadu enam sisi. Jika dadu yang keluar bernilai genap, maka Ani mendapatkan skor 1 sedangkan jika dadu yang keluar bernilai ganjil, maka Banu yang mendapatkan skor 1. Pemenang dari permainan ini adalah orang pertama yang mendapatkan skor total 5. Setelah dilakukan pelemparan dadu sebanyak 5 kali, Ani mendapat skor 4 dan Banu mendapatkan skor 1. Peluang Ani memenangkan permainan ini adalah . . .

5. Diketahui $a + 2b = 1$, $b + 2c = 2$, dan $b \neq 0$. Jika $a + nb + 2018c = 2019$ maka nilai n adalah . . .

6. Misalkan $a = 2\sqrt{2} - \sqrt{8 - 4\sqrt{2}}$ dan $b = 2\sqrt{2} + \sqrt{8 - 4\sqrt{2}}$. Jika $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = x + y\sqrt{2}$ dengan $x,\ y$ bulat, maka nilai $x + y$ adalah …

7. Diberikan suatu trapesium $ABCD$ dengan AB sejajar CD. Misalkan titik P dan Q berturut-turut pada AD dan BC sedemikian sehingga PQ sejajar AB dan membagi trapesium menjadi dua bagian yang sama luasnya. Jika $AB = 17$ dan $DC = 7$ maka nilai PQ adalah . . .

8. Tujuh buah bendera dengan motif berbeda akan dipasang pada 4 tiang bendera. Pada masing-masing tiang bendera bisa dipasang sebanyak nol, satu, atau lebih dari satu bendera. Banyaknya cara memasang bendera tersebut adalah . . .

9. Misalkan n adalah bilangan asli terkecil yang semua digitnya sama dan sedikitnya terdiri dari 2019 digit. Jika n habis dibagi 126, maka hasil penjumlahan semua digit dari n adalah . . .

10. Untuk sebarang bilangan real x, simbol $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang tidak lebih besar daripada x, sedangkan $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang tidak lebih kecil dibanding x. Interval (a, b) adalah himpunan semua bilangan real x yang memenuhi

$$\lfloor 2x \rfloor^2 = \lceil x \rceil + 7$$

Nilai a x b adalah …

11. Sisa pembagian 1111^{2019} oleh 11111 adalah . . .

12. Diberikan segitiga ABC dengan D pertengahan AC, E pertengahan BD, dan H merupakan pencerminan dari A terhadap E. Jika F perpotongan antara AH dengan BC, maka nilai $\frac{AF}{FH}$ sama dengan …

13. Banyaknya bilangan delapan digit yang setiap digitnya adalah 1 atau 2 tetapi tidak memuat tiga digit 1 berurutan adalah . . .

14. Misalkan $f(x)1 + \frac{90}{x}$. Nilai terbesar x yang memenuhi

$$\underbrace{f(f(\dots(f(x))\dots))}_{2019\text{ kali}} = x$$

adalah …

15. Misalkan $ABCD$ adalah persegi dengan panjang sisi 4. Lingkaran-lingkaran x, y, z dengan jari-jari sama mempunyai pusat di dalam persegi sedemikian sehingga lingkaran x menyinggung sisi AB dan AD, lingkaran y menyinggung sisi AB dan BC, serta lingkaran z menyinggung sisi DC, lingkaran x, dan lingkaran y. Diketahui jari-jari lingkaran x dapat dinyatakan dengan $n - \sqrt{m}$ dengan m dan n bilangan bulat positif. Nilai m adalah …

16. Semua bilangan bulat n sehingga $n^4 + 16n^3 + 71n^2 + 56n$ merupakan bilangan kuadrat tak nol adalah. . .

17. Diberikan jajar genjang $ABCD$, dengan $\angle ABC = 105^\circ$. Titik M berada di dalam jajar genjang sehingga segitiga BMC sama sisi dan $\angle CMD = 135^\circ$. Jika K pertengahan sisi AB, maka besarnya $\angle BKC$ sama dengan … derajat.

18. Bilangan real terbesar M sehingga untuk setiap x positif berlaku

$$(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 11) \geq Mx$$

adalah …

19. Banyaknya tripel bilangan bulat (m, n, p) dengan p prima yang memenuhi

$$p^2n^2 - 3mn = 21p - m^2$$

adalah …

20. Suatu lomba matematika diikuti oleh 2019 peserta. Untuk setiap dua peserta lomba, keduanya saling mengenal atau saling tidak mengenal. Diketahui bahwa tidak ada tiga orang peserta lomba yang ketiganya saling mengenal satu sama lain. Misalkan m adalah bilangan asli sehingga :

- Masing-masing peserta mengenal paling banyak m peserta lainnya.
- Untuk setiap bilangan asli k dengan $1 \leq k \leq m$, minimal terdapat satu orang peserta yang mengenal tepat k peserta lainnya.

Nilai m terbesar yang mungkin adalah . . .

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2019

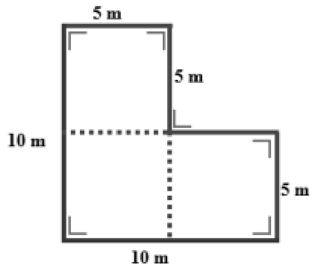
TINGKAT KABUPATEN/KOTA

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Kabupaten/Kota Tahun 2019

1.



$L = 3 \times L$
$= 3 \times 5 \times 5$
$= 3 \times 25$
$= 75\ m$

2. 2019 menit = 33 x 60 menit + 39 menit
2019 menit = 33 jam + 39 menit
2019 menit = 24 jam + 9 jam + 39 menit
2019 menit = 1 hari + 9 jam + 39 menit

Sekarang pukul 13:00 maka 2019 menit yang lalu pukul?
= Pukul 13.00 – 1 hari – 9 jam – 39 menit
= Pukul 13.00 – 9 jam – 39 menit
= pukul 04.00 – 39 menit
= pukul 03.00 + 60 menit – 39 menit
= pukul 03.00 + 21 menit
= pukul 03.21

3. $x^2 - 111x + k = 0 \quad \begin{cases} x_1 \\ x_2 \end{cases}$
$x_1 + x_2 = 111$
$x_1 \cdot x_2 = k$
dari $x_1 + x_2 = 111$ dengan x_1 dan x_2 bilangan prima, bilangan ganjil hanya diperoleh dari penjumlahan bilangan berbeda paritas.
Maka, salah satu x_1 atau x_2 atau adalah bilangan prima genap yaitu 2.
Untuk $x_1 = 2$, maka $x_2 = 109$. Jadi, $k = x_1 \,.\, x_2 = 2 \cdot 109 = 218$

4. P(A) = Peluang Ani menang
P(B) = Peluang Banu menang
P(A) + P(B) = 1 Agar

Banu memenangkan permainan, maka Banu membutuhkan 4 kali menang dimana peluang 1 kali menang adalah $\frac{1}{2}$, maka:

$P(B) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

$P(A) = 1 - P(B)$

$P(A) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$

5. $a + 2b = 1$

   $b + 2c = 2$, kedua ruas dikali 1009 = 1009b + 2018c = 2018

   Maka,

$$\begin{array}{r} a + 2b = 1 \\ 1009b + 2018c = 2018+ \\ \hline a + 1011b + 2018c = 2019 \end{array}$$

   Jadi, $n = 1011$

6. Misal $p = 2\sqrt{2}$, dan $q = \sqrt{8 - 4\sqrt{2}}$

   $a = p - q$ $\qquad\qquad$ $a + b = 2p = 4\sqrt{2}$

   $b = p + q$ $\qquad\qquad$ $ab = p^2 - q^2 = 4\sqrt{2}$

   Sehingga, $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{(a+b)^2-2ab}{ab} = \frac{(a+b)^2}{ab} - 2$

   Maka,

   $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = x + y\sqrt{2}$

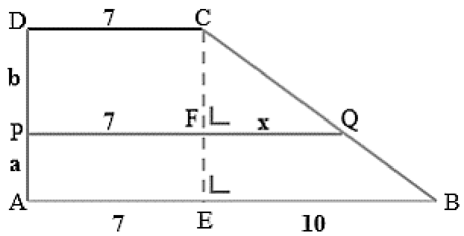
   $\frac{(a+b)^2}{ab} - 2 = x + y\sqrt{2}$

   $\frac{(4\sqrt{2})^2}{4\sqrt{2}} - 2 = x + y\sqrt{2}$

   $-2 + 4\sqrt{2} = x + y\sqrt{2}$ $\qquad \Rightarrow x = -2, y = 4$

   $\Rightarrow x + y = -2 + 4 = 2$

7. Perhatikan gambar berikut ini!



   Diketahui, Panjang sisi sejajar a = AB = 17

   Panjang sisi sejajar b = DC = 7

   Maka,

   Panjang $PQ = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

   $= \sqrt{\frac{17^2+7^2}{2}}$

$= \sqrt{\frac{338}{2}}$
$= \sqrt{169}$
$= 13$
Jadi, panjang PQ adalah 13.

8. Jika $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = m$ dengan $x_i \geq 0$ maka banyak susunannya dari x_i adalah C_m^{m+n-1}.
Misalkan, setiap bendera tersebut bermotif sama dan tiang bendera t_1, t_2, t_3, dan t_4 maka, banyaknya susunan bendera pada tiang dapat dinyatakan sebagai:
$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 7$ dengan $t_i > 0$
Sehingga banyaknya susunan adalah:
$= C_7^{7+4-1}$
$= C_7^{10}$
$= \frac{10!}{7!\cdot(10-7)!}$
$= \frac{10.9.8.7!}{7!.3.2.1}$
$= 120$ susunan.
Karena setiap bendera ada 7 motif berbeda, banyak susunan motif bendera adalah 7! = 5.040. Seluruh susunan adalah 120 x 5.040 = 604.800.

9. Misalkan:
$n = \underbrace{aaaaa \ldots aaaa}_{\text{sebanyak} \geq 2019}$
$n = a\underbrace{(1111 \ldots 111)}_{\text{sebanyak} \geq 2019}$

n habis dibagi 126, faktor 126 = 2 × 9 × 7, maka:
n habis dibagi 2, maka nilai a = {2, 4, 6, 8}
n habis dibagi 9, maka nilai a = {6}
n habis dibagi 7, maka kita memilih bilangan asli terkecil 111...111 yang habis dibagi 7, kita dapat mengujinya satu persatu:

111 tidak habis dibagi 7
1111 tidak habis dibagi 7
11111 tidak habis dibagi 7
111111 habis dibagi 7,
111111 adalah bilangan 6 digit.
$n = a\underbrace{(1111 \ldots 111)}_{\text{sebanyak} \geq 2019}$
$n = a(\underbrace{1111 \ldots 111}_{\text{sebanyak } (6k) \geq 2019})$
$6k \geq 2019 \Leftrightarrow k \geq \frac{2019}{6}$
$k \geq 336{,}5$ karena k bilangan asli, maka $k = 337$

Banyak angka 1111...111 adalah $6k = 6 \times 337 = 2022$, maka:

$n = 6\,\underbrace{(1111\ldots111)}_{\text{sebanyak} = 2022}$

$n = \underbrace{(6666\ldots666)}_{\text{sebanyak}=2022}$

Jumlah angka = $6 \times 2022 = 12.132$

10. Kasus I: Misalkan, x = z dengan z bilangan bulat, maka:

$\lfloor 2x \rfloor^2 = \lceil x \rceil + 7$

$(2z)^2 = z + 7$

$4z^2 - z + 7 = 0$

Uji nilai diskriminasi:

$D = b^2 - 4ac$

$D = (-1)^2 - 4.\,4(-7) = 113$ bukan merupakan bilangan kuadrat maka z bukan bilangan bulat.

Kasus II:

Misalkan, x bukan bilangan bulat, maka:

x = z + p dengan z ϵ jumlah bulatan dan $0 < p \leq \frac{1}{2}$

x = z + $\frac{1}{2}$ substitusi ke:

$\lfloor 2x \rfloor^2 = \lceil x \rceil + 7$

$\lfloor 2\left(z + \frac{1}{2}\right) \rfloor^2 = \lceil z + \frac{1}{2} \rceil + 7$

$(2z)^2 = z + 1 + 7$

$4z^2 - z - 8 = 0$

Uji nilai diskriminasi:

$D = (-1)^2 - 4.\,4(-8) = 129$ bukan merupakan bilangan kuadrat maka z bukan bilangan bulat.

Kasus III:

Misalkan, x bukan bilangan bulat, maka:

x = z - p dengan z ϵ jumlah bulatan dan $0 < p \leq \frac{1}{2}$

x = z - $\frac{1}{2}$ substitusi ke:

$\lfloor 2x \rfloor^2 = \lceil x \rceil + 7$

$\lfloor 2\left(z - \frac{1}{2}\right) \rfloor^2 = \lceil z - \frac{1}{2} \rceil + 7$

$(2z - 1)^2 = z + 7$

$4z^2 - 4z + 1 = z + 7$

$4z^2 - 5z - 6 = 0$

$(4z + 3)(z - 2) = 0$, karena z bilangan bulat maka yang memenuhi adalah z = 2.

Untuk z = 2 agar x minimal maka:

$x = z - \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 1,5 = a$

Untuk z = 2 agar x maksimum maka:

$x = z - 0 \Leftrightarrow x = 2 = b$

Jadi, $a \,.\, b = 1,5 \times 2 = 3$

11. $10^5 = 9 \times 11111 + 1$ $\Rightarrow 10^5 \equiv 1 (mod\ 11111)$

$1111^2 = (1110 + 1)\left(\frac{11111-1}{10}\right)$ $\Rightarrow 1111^2 \equiv 10^3\ (mod\ 11111)$

$= 111 \times 11111 + 1000$

$11110 = 11111 - 1$ $\Rightarrow 11110 \equiv (-1)(mod\ 11111)$

$1111^{2019} \equiv (1111^2)^{1009} \,.\, 1111(mod\ 11111)$

$\equiv (10^3)^{1009} \,.\, 1111(mod\ 11111)$

$\equiv (10^{15})^{201} \,.\, 10^2 \,.\, 1111(mod\ 11111)$

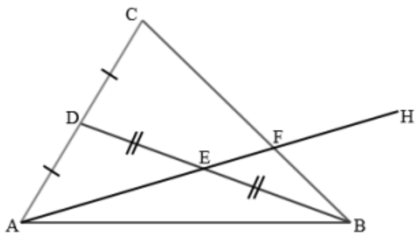
$\equiv 10.\ 11110(mod\ 11111)$

$\equiv (-10)(mod\ 11111)$

$\equiv (11101)(mod\ 11111)$

Jadi, sisa pembagian 1111^{2019} oleh 11111 adalah (-10) atau 11101

12.



Berdasarkan Dalil Menelaus:

$$\frac{BF}{FC} \cdot \frac{CA}{AD} \cdot \frac{DE}{EB} = 1$$

$$\frac{BF}{FC} \cdot \frac{2 \times AD}{AD} \cdot \frac{EB}{EB} = 1$$

$$\frac{2BF}{FC} = 1$$

FC = 2BF atau BC = $3 \times BF$

Berdasarkan Dalil Menelaus:

$$\frac{AD}{DC} \cdot \frac{CB}{BF} \cdot \frac{FE}{EA} = 1$$

$$\frac{DC}{DC} \cdot \frac{3 \times BF}{BF} \cdot \frac{FE}{EA} = 1$$

$$\frac{3FE}{EA} = 1$$

$$AE = 3 \times EF$$

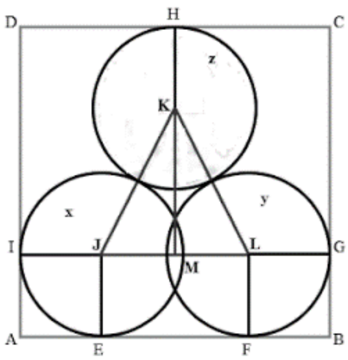
$$\frac{AF}{FH} = \frac{AE+EF}{EH-EF}$$

$$= \frac{AE+EF}{AE-EF}$$

$$= \frac{3 \times EF+EF}{3 \times EF-EF}$$

$$= \frac{4 \times EF}{2 \times EF}$$

$$= 2$$

13. Contoh beberapa bilangan yang diperbolehkan:
    22222222, 11212222, 11221122, 11211211
    Banyak digit 1 yang diperbolehkan adalah antara 0 sampai 6 buah. Dengan prinsip inklusi-ekslusi dan rumus De Moivre diperoleh:
    Ada 0 buah digit 1 ⇒ a+b+c+d+e+f+g+h+i = 0, 0 ≤ a,b,c,d,e,f,g,h,i ≤ 2 ⇒ $\binom{8}{8}$ = 1
    Ada 1 buah digit 1 ⇒ a+b+c+d+e+f+g+h = 1, 0 ≤ a,b,c,d,e,f,g,h ≤ 2 ⇒$\binom{7}{8}$ = 8
    Ada 2 buah digit 1 ⇒ a+b+c+d+e+f+g = 2, 0 ≤ a,b,c,d,e,f,g ≤ 2 ⇒ $\binom{6}{8}$= 28
    Ada 3 buah digit 1 ⇒ a+b+c+d+e+f = 3, 0 ≤ a,b,c,d,e,f ≤ 2 ⇒ $\binom{8}{5} - \binom{6}{1}\binom{5}{5}$ = 50
    Ada 4 buah digit 1 ⇒ a+b+c+d+e = 4, 0 ≤ a,b,c,d,e ≤ 2 ⇒ $\binom{8}{4} - \binom{5}{1}\binom{5}{4}$ = 45
    Ada 5 buah digit 1 ⇒ a+b+c+d = 5, 0 ≤ a,b,c,d ≤ 2 ⇒ $\binom{8}{3} - \binom{4}{1}\binom{5}{3}$ = 16
    Ada 6 buah digit 1 ⇒ a+b+c = 6, 0 ≤ a,b,c ≤ 2 ⇒ $\binom{8}{2} - \binom{3}{1}\binom{5}{2} + \binom{3}{2}\binom{2}{2}$ = 1
    Jadi, banyak bilangan yang dapat dibentuk = 1 + 8 + 28 + 50 + 45 + 16 + 1 = 149
14.
    $$\underbrace{f(f\ldots(f(x)\ldots)}_{2019kali} = x$$
    $$\underbrace{(f \circ f \circ f\circ\ldots\circ f)}_{2019kali}(x) = x$$
    $$\underbrace{(f \circ f \circ f\circ\ldots\circ f}_{2018kali}\left(1 + \tfrac{90}{x}\right) = x$$
    $$\underbrace{(f \circ f \circ f\circ\ldots\circ f)}_{2018kali}(x) = \tfrac{90}{x-1}$$
    $x = \frac{90}{x-1}$
    $x^2 - x - 90 = 0$
    $(x - 10)(x + 9) = 0$
    $x = 10$ atau $x = -9$
    Jadi, nilai terbesar x adalah 10.
15.


Misalkan jari-jari lingkaran x, y dan z adalah r = n − $\sqrt{m}$, maka : JL = 4 - 2r

$JM = \frac{JL}{2} = 2 - r$

$KM = 4 - 2r$

$JK = 2r$

Pada segitiga JMK siku-siku di M berlaku teorema phytagoras:

$JK^2 = JM^2 + KM^2$

$(2r)^2 = (2 - r)^2 + (4 - 2r)^2$

$4r^2 = 4 - 4r + r^2 + 16 - 16r + 4r^2$

$r^2 - 20r + 20 = 0$

$r = \frac{20 \pm \sqrt{(-20)^2 - 4.1.20}}{2.1}$

$r = \frac{20 \pm \sqrt{320}}{2}$

$r = \frac{20 \pm 8\sqrt{5}}{2}$

$r = 10 - 4\sqrt{5}$

$n - \sqrt{m} = 10 - \sqrt{80}$

$m = 80$

16. $n^4 + 16n^3 + 71n^2 + 56n$

$= n(n^3 + 16n^2 + 71n + 56)$

$= n(n + 1)(n^2 + 15n + 56)$

$= n(n + 1)(n + 7)(n + 8)$

$= n(n + 8)(n + 1)(n + 7)$

$= (n^2 + 8n)(n^2 + 8n + 7)$ merupakan bilangan kuadrat.

Misalkan : $n^2 + 8n = x$, maka:

$(n^2 + 8n)(n^2 + 8n + 7) = x(x + 7)$ = merupakan bilangan kuadrat, kita memperolehnya $x = 9$ atau $x = 16$.

*) Untuk x = 9, maka:

$n^2 + 8n = x$

$n^2 + 8n = 9$

$n^2 + 8n - 9 = 0$

$(n + 9)(n - 1) = 0$

$n = -9$ atau $n = 1$

*) Untuk x = -16, maka:

$n^2 + 8n = x$

$n^2 + 8n = -16$

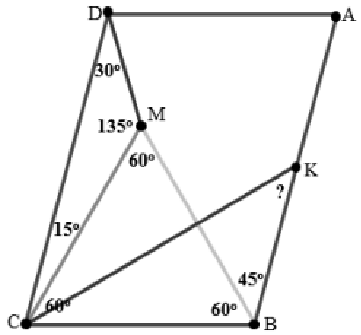
$n^2 + 8n + 16 = 0$

$(n + 4)(n + 4) = 0$

$n = -4$

Jadi, semua n yang memenuhi adalah {-9, -4, 1} sebanyak 3.

17.



Segitiga BMC adalah segitiga sama sisi, maka: BM = BC = CM = p
Titik K tengah sisi AB, maka:
AK = BK = q dan CD = 2q
Melihat segitiga CMD, berlaku aturan sinus:

$$\frac{CM}{\sin 30^o} = \frac{CD}{\sin 135^o}$$

$$\frac{p}{\frac{1}{2}} = \frac{2q}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} \Leftrightarrow p = q\sqrt{2}$$

$KC^2 = BC^2 + BK^2 - 2.\, BC.\, BK.\, \cos 105^o$

$KC^2 = p^2 + q^2 - 2pq.\frac{1}{4}(\sqrt{2} - \sqrt{6})$

$KC^2 = (q\sqrt{2})^2 + q^2 - 2.\, q\sqrt{2}.\, q.\frac{1}{4}(\sqrt{2} - \sqrt{6})$

$KC^2 = 2q^2 + q^2 - q^2 + q^2\sqrt{3}$

$KC^2 = 2q^2 + q^2\sqrt{3}$

$KC^2 = q^2\,(2 + \sqrt{3})$

$KC = q\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

$KC = q\sqrt{2 + \frac{2}{2}\sqrt{3}}$

$KC = q\sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}}$

$KC = q\,.\,\frac{\sqrt{(3+1)+2\sqrt{3\cdot 1}}}{\sqrt{2}}$

$KC = \frac{q(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{2}}$

$KC = \frac{q\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+1}{2}$

$KC = \frac{p(\sqrt{3}+1)}{2}$

Luas segitiga BKC = $\frac{1}{4}$ × Luas ABCD

$\frac{1}{2}\,.\,BK\,.\,KC\,.\,\sin\angle BKC = \frac{1}{4}\,.\,BC\,.\,AC\,.\,\sin 105^o$

$\frac{1}{2}\,.\,q\,.\,KC\,.\,\sin\angle BKC = \frac{1}{4}\,.\,p\,.\,2q\,.\,\sin 105^o$

$sin\angle BKC = \frac{p\cdot\frac{1}{4}(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{\frac{p(\sqrt{3}+1)}{2}}$

$sin\angle BKC = \frac{\frac{1}{4}\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{\frac{(\sqrt{3}+1)}{2}}$

$sin\angle BKC = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\angle BKC = 45^o$

18. $(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 11) \geq Mx$
    $x^4 + 20x^3 + 122x^2 + 268x + 165 \geq Mx$
    Berdasarkan AM ≥ GM untuk setiap variable
    $\frac{x^4+20x^3+122x^2+268x+165}{1+20+122+256+165} \geq \sqrt[576]{x^{576}}$
    $\frac{x^4+20x^3+122x^2+268x+165}{576} \geq x$
    $x^4 + 20x^3 + 122x^2 + 268x + 165 \geq 576x \geq Mx$
    $Mx \leq 576x \Leftrightarrow M \leq 576$
    Jadi, bilangan real terbesar M adalah 576.
19. $p^2n^2 - 3mn = 21p - m^2$
    $p^2n^2 + m^2 = 3(mn - 7p) \equiv 0\ (mod\ 3)$
    Padahal, bilangan kuadrat dalam bentuk 3k atau 3k + 1
    Sehingga, $p^2n^2 + n^2 \equiv 0\ (mod\ 3)$. Jika $p^2n^2 \equiv 0\ (mod\ 3)$ dan $m^2 \equiv 0\ (mod\ 3)$
    akibatnya $3|m^2 \Rightarrow m = 3a$, a bulat.
    substitusi $m = 3a \Rightarrow p^2n^2 - 3mn = 21p - m^2$
    $p^2n^2 - 9an = 21p - 9a^2$
    $21p = p^2n^2 + 9a^2 - 9an$
    karena $3|p^2n^2 \Rightarrow 3|pn \Rightarrow 9|p^2n^2$, diperoleh
    $21p = p^2n^2 + 9a^2 - 9an \equiv 0(mod\ 9)$
    maka $9|21p \Rightarrow 3|7p \Rightarrow p$ bilangan prima, maka p = 3.
20. Jika A dan B saling mengenal, A dan C saling mengenal, maka B dan C tidak boleh saling mengenal.
    Dari syarat di atas, maka akan terdapat $\frac{1}{3}$ bagian dari peserta yang tidak saling mengenal yaitu $\frac{1}{3}$. 2019 = 673 orang tidak saling mengenal.
    Disebutkan bahwa masing-masing peserta mengenal paling banyak m peserta lainnya yaitu 2019 - 673 = 1346 orang.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2019

TINGKAT PROVINSI

BIDANG MATEMATIKA

WAKTU : 210 MENIT

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2019

1. Dalam kantong terdapat 7 bola merah dan 8 bola putih. Andi mengambil dua bola sekaligus dari dalam kantong. Peluang terambilnya dua bola yang berwarna sama adalah …

2. Diberikan suatu segienam beraturan dengan panjang sisi 1 satuan. Luas segienam tersebut adalah …

3. Diketahui bahwa r, s dan 1 adalah akar-akar persamaan kubik $x^3 - 2x + c = 0$. Nilai dari $(r-s)^2$ adalah …

4. Banyaknya pasangan bilangan asli (m, n) sehingga $FPB(m,n) = 2$ dan $KPK(m,n) = 1000$ adalah …

5. Suatu data dengan empat bilangan real $2n - 4$, $2n - 6$, $n^2 - 8$, $3n^2 - 6$ mempunyai rata-rata 0 dan median 9/2. Bilangan terbesar dari data tersebut adalah …

6. Misalkan a, b, c, d adalah bilangan-bilangan bulat lebih besar dari 2019 yang merupakan empat suku berurutan dari barisan aritmetika dengan $a < b < c < d$. Jika a dan d merupakan kuadrat dari dua bilangan asli yang berurutan, maka nilai terkecil dari $c - b$ adalah …

7. Diberikan segitiga ABC, dengan $AB = 6$, $AC = 8$ dan $BC = 10$. Titik-titik D dan E terletak pada segment garis BC, dengan $BD = 2$ dan $CE = 4$. Besar sudut DAE adalah …

8. Barisan bilangan real $a_1, a_2, a_3, \ldots$ memenuhi
$$\frac{na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + 2a_{n-1} + a_n}{n^2} = 1$$
untuk setiap bilangan asli n. Nilai dari $a_1a_2a_3 \ldots a_{2019}$ adalah …

9. Banyaknya cara memilih empat bilangan dari $\{1, 2, 3, \ldots, 15\}$ dengan syarat selisih sebarang dua bilangan paling sedikit 3 adalah …

10. Pasangan bilangan asli (m, n) yang memenuhi
$$m^2n + mn^2 + m^2 + 2mn = 2018m + 2019n + 2019$$
ada sebanyak …

11. Diberikan segitiga ABC dengan $\angle ABC = 135^\circ$ dan $BC > AB$. Titik D terletak pada sisi BC sehingga $AB = CD$. Misalkan F titik pada perpanjangan sisi AB sehingga DF tegak lurus AB. Titik E terletak pada sinar DF sehingga $DE > DF$ dan $\angle ACE = 45^\circ$. Besar sudut $\angle AEC$ adalah …

12. Himpunan S terdiri dari n bilangan bulat dengan sifat berikut: Untuk setiap tiga anggota berbeda dari S ada dua di antaranya yang hasil penjumlahanya merupakan anggota S. Nilai terbesar dari n adalah …

13. Nilai minimum dari

$$\frac{a^2 + 2b^2 + \sqrt{2}}{\sqrt{ab}}$$

dengan a, b bilangan real positif adalah …

14. Polinom $P(x)$ yang memenuhi persamaan

$$P(x^2) = x^{2019}(x+1)P(x)$$

dengan $P(1/2) = -1$ adalah …

15. Pandang papan catur berukuran 19 × 19 petak persegi satuan. Dua petak dikatakan *bertetangga* jika keduanya memiliki satu sisi persekutuan. Pada mulanya, terdapat total k koin pada papan catur tersebut dimana setiap koin hanya termuat tepat pada satu petak dan setiap petak dapat memuat koin atau kosong. Pada setiap giliran, Anda harus memilih tepat satu petak yang memuat koin sebanyak minimal banyaknya tetangga petak yang terpilih tadi kemudian Anda harus memberikan tepat satu koin pada masing-masing tetangga petak yang terpilih tadi. Permainan berakhir jika anda sudah tidak dapat memilih petak dengan kondisi yang dimaksudkan. Bilangan terkecil k sehingga permainan *tidak pernah* berakhir untuk sembarang pemilihan petak awal adalah …

16. Diberikan kubus $ABCD.EFGH$ dengan panjang rusuk 4 satuan dan P titik tengah sisi $EFGH$. Jika M adalah titik tengah PH, tentukan panjang segmen garis AM.

17. Cari semua bilangan real k sehingga sistem persamaan

$$a^2 + ab = kb^2$$

$$b^2 + bc = kc^2$$

$$c^2 + ca = ka^2$$

memiliki solusi bilangan real positif a, b, c.

18. Suatu papan catur berukuran $m \times n$ masing-masing kotaknya diwarnai hitam atau putih sedemikian sehingga :

- Pada setiap baris banyaknya kotak hitam dan kotak putih sama banyak.
- Jika suatu baris berpotongan dengan suatu kolom di suatu kotak hitam, maka baris dan kolom tersebut mengandung kotak hitam yang sama banyak.
- Jika suatu baris berpotongan dengan suatu kolom disuatu kotak putih, maka baris dan kolom tersebut mengandung kotak putih yang sama banyak.

Tentukan semua nilai m dan n yang mungkin agar pewarnaan dengan sifat di atas dapat dilakukan.

19. Untuk bilangan real x, simbol $\lceil x \rceil$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang tidak lebih kecil daripada x, dan $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang tidak lebih besar daripada x. Tentukan semua bilangan bulat tak negatif k sehingga dapat ditemukan bilangan real positif tak bulat x yang memenuhi sifat

$$\lfloor x+k\rfloor^{\lfloor x+k\rfloor}=\lceil x\rceil^{\lfloor x\rfloor}+\lfloor x\rfloor^{\lceil x\rceil}$$

20. Diberikan segitiga ABC, dengan $AC > BC$, dan lingkaran luarnya yang berpusat di O. Misalkan M adalah titik pada lingkaran luar segitiga ABC sehingga CM adalah garis bagi $\angle ACB$. Misalkan Γ adalah lingkaran berdiameter CM. Garis bagi BOC dan garis bagi AOC memotong Γ berturut-turut di P dan Q. Jika K adalah titik tengah CM, buktikan bahwa P, Q, O, K terletak pada satu lingkaran.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2019

TINGKAT PROVINSI

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika Tingkat Provinsi Tahun 2019

1. Penyelesaian:

   Diketahui:
   - Jumlah bola Merah (M) = 7
   - Jumlah bola Putih (P) = 8
   - Total bola $(N) = 7 + 8 = 15$
   - Jumlah bola yang diambil sekaligus $(k) = 2$

   Ruang sampel $\big(n(S)\big)$ adalah total cara mengambil 2 bola dari 15 bola yang ada. Kita gunakan kombinasi $C(n, k)$.

   $$n(S) = C(15,2) = \frac{15!}{2!\,(15-2)!} = \frac{15 \times 14}{2 \times 1} = 15 \times 7 = 105$$

   Kejadian yang diinginkan $(n(A))$ adalah terambilnya dua bola yang berwarna sama. Ini bisa terjadi dalam dua kasus yang saling lepas:
   - Terambil 2 bola Merah
   - Terambil 2 bola Putih

   Kasus 1: Terambil 2 Bola Merah $(n(A_M))$
   Ambil 2 bola dari 7 bola Merah.

   $$n(A_M) = C(7,2) = \frac{7!}{2!\,(7-2)!} = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 7 \times 3 = 21$$

   Kasus 2: Terambil 2 Bola Putih $(n(A_P))$
   Ambil 2 bola dari 8 bola putih.

   $$n(A_P) = C(8,2) = \frac{8!}{2!\,(8-2)!} = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 4 \times 7 = 28$$

   Total kejadian $(n(A))$

   $$n(A) = n(A_M) + n(A_P) = 21 + 28 = 49$$

   Peluang terambilnya dua bola berwarna sama $(P(A))$ adalah perbandingan antara jumlah kejadian yang diinginkan dengan ruang sampel.

   $$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{49}{105}$$

   Untuk menyederhanakan, bagi pembilang dan penyebut dengan factor persekutuan terbesar, yaitu 7:

   $$P(A) = \frac{49 \div 7}{105 \div 7} = \frac{7}{15}$$

Jadi, Peluang terambilnya dua bola yang berwarna sama adalah $\frac{7}{15}$.

2. Penyelesaian:

Luas segienam beraturan dengan Panjang sisi s adalah $\frac{3\sqrt{3}}{2}s^2$.
Untuk kasus ini, Panjang sisi (s) adalah 1 satuan.

Rumus Luas Segienam Beraturan:

$$L = \frac{3\sqrt{3}}{2}s^2$$

Karena $s = 1$ satuan, kita subtitusikan:

$$L = \frac{3\sqrt{3}}{2}(1)^2$$

$$L = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Luasnya adalah $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ satuan luas.

Catatan: Segienam beraturan dapat dibagi menjadi enam segitiga sama sisi yang kongruen, dengan Panjang sisi sama dengan Panjang sisi segienam (s).
Luas satu segitiga sama sisi adalah:

$$L_\Delta = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2$$

Karena ada 6 segitiga, luas total segienam adalah:

$$L = 6 \times L_\Delta = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4}s^2 = \frac{6\sqrt{3}}{4}s^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}s^2$$

Maka, luas segienam beraturan dengan sisi 1 satuan adalah $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ satuan luas.

3. Penyelesaian:
Jumlah ketiga akar semua dengan koefisien x^2 yang dinegatifkan, yaitu $-0/1$ = 0:

$$r + s + 1 = 0$$

$$r + s = -1 \quad \text{(Persamaan 1)}$$

Jumlah perkalian dua akar sama dengan koefisien x, yaitu $-2/1$ = -2:

$$rs + r(1) + s(1) = -2$$

$$rs + (r + s) = -2 \quad \text{(Persamaan 2)}$$

Substitusikan Persamaan 1 $(r + s = -1)$ ke dalam Persamaan 2:

$$rs + (-1) = -2$$

$$rs = -2 + 1$$

$$rs = -1 \quad \text{(Persamaan 3)}$$

Kita gunakan identitas aljabar yang menghubungkan penjumlahan $(r+s)$ dan perkalian (rs):

$$(r-s)^2 = (r+s)^2 - 4rs$$

Subsitusikan nilai yang telah kita temukan dari Persamaan 1 dan Persamaan 3:

$$(r-s)^2 = (-1)^2 - 4(-1)$$
$$(r-s)^2 = 1 - (-4)$$
$$(r-s)^2 = 1 + 4$$
$$(r-s)^2 = 5$$

Jadi, Nilai dari $(r-s)^2$ adalah 5.

4. Penyelesaian:
   Diketahui: FPB$(m,n) = 2$ dan KPK$(m,n) = 1000$.
   Langkah kuncinya adalah menganalisis pangkat dari setiap factor prima dalam FPB dan KPK.

   Faktorisasi Prima
   - FPB = 2 = $2^1 \cdot 5^0$
   - KPK = 1000 = $2^3 \cdot 5^3$

   Misalkan m dan n memiliki bentuk umum $2^a \cdot 5^b$ dan $2^{a'} \cdot 5^{b'}$.

   Ingat aturan: FPB mengambil pangkat terkecil, dan KPK mengambil pangkat terbesar.
   a. Untuk factor 2:
      - Pangkat terkecil harus 1: $\min(a, a') = 1$
      - Pangkat terbesar harus 3: $\max(a, a') = 3$

   Pasangan pangkat (a, a') yang memenuhi syarat ini adalah (1, 3) atau (3, 1). (Ada 2 pilihan)
   b. Untuk factor 5:
      - Pangkat terkecil harus 0: $\min(b, b') = 0$
      - Pangkat terbesar harus 3: $\max(b, b') = 3$

   Pasangan pangkat (b, b') yang memenuhi syarat ini adalah (0, 3) atau (3, 0). (Ada 2 pilihan)

   Total banyaknya pasangan (m,n) adalah hasil kali dari banyaknya pilihan untuk setiap factor prima:

$$Banyaknya\ \ Pasangan\ = (Pilihan\ faktor\ 2) \times (Pilihan\ faktor\ 5)$$
$$Banyaknya\ \ Pasangan\ = 2 \times 2 = 4$$

   Jadi, banyaknya pasangan bilangan asli (m,n) adalah 4.

5. Penyelesaian:
   Data: $2n-4$, $2n-6$, n^2-8, $3n^2-6$. Rata-rata = 0
   Jumlahkan semua data dan setarakan dengan 0 (karena $0 \times 4 = 0$):

$$(2n-4) + (2n-6) + (n^2-8) + (3n^2-6) = 0$$
$$4n^2 + 4n - 24 = 0$$

   Bagi dengan 4:

$$n^2 + n - 6 = 0$$

$$(n+3)(n-2)=0$$

Nilai n yang mungkin adalah $n=2$ atau $n=-3$.

Diketahui Median = 9/2 = 4.5

Kasus A: $n=2$

Data: 0, -2, -4, 6

Urutan: -4, -2, 0, 6

Median: $\frac{-2+0}{2}=-1$. ($-1\neq 4.5$, $n=2$ salah)

Kasus B: $n=-3$

Data: $2(-3)-4=-10; 2(-3)-6=-12; (-3)^2-8=1; 3(-3)^2-6=21$.

Data: $-10, -12, 1, 21$

Urutan: $-12, -10, 1, 21$

Median: $\frac{-10+1}{2}=\frac{-9}{2}=-4.5$ ($-4.5\neq 4.5$, $n=-3$ secara matematis salah).

Karena hanya $n=-3$ yang memenuhi syarat Rata-Rata = 0 dan menghasilkan data $\{-12,-10,1,21\}$, maka kita harus berasumsi bahwa:

1. Nilai median yang dimaksud pada soal sebenarnya adalah $-9/2$ = -4.5
2. Atau, nilai $n=-3$ adalah nilai yang dimaksudkan oleh pembuat soal, meskipun ada ketidaksesuaian tanda pada median.

Dengan menggunakan $n=-3$, datanya adalah $\{-12,-10,1,21\}$.

Dari data $\{-12,-10,1,21\}$, bilangan terbesar adalah 21.

6. Penyelesaian:

Misalkan beda barisan adalah k, maka $c-b=k$. Kita mencari nilai terkecil dari k.

Suku barisan adalah $a, a+k, a+2k, a+3k$.

Diketahui a dan d adalah kuadrat dari bilangan asli berurutan, yaitu n^2 dan $(n+1)^2$:

$$a=n^2$$
$$d=(n+1)^2$$

Karena $d=a+3k$, kita substitusikan:

$$(n+1)^2=n^2+3k$$
$$n^2+2n+1=n^2+3k$$
$$2n+1=3k$$

Ini memberi kita rumus untuk beda (k):

$$k=\frac{2n+1}{3}$$

Menentukan Batasan dan Syarat n

- Agar k menjadi bilangan bulat, $(2n+1)$ harus habis dibagi 3.

Syarat ini terpenuhi jika n berbentuk $n = 3m + 1$ (yaitu n bersisa 1 jika dibagi 3).

- Semua suku, termasuk a, harus lebih besar dari 2019: $a > 2019$

$$n^2 > 2019$$

Karena $\sqrt{2019} \approx 44.93$, maka nilai n terkecil haruslah $n \geq 45$.

Kita cari $n \geq 45$ yang juga memenuhi syarat $n \equiv 1$ (mod 3):

- $n = 45: 45 \div 3$ sisa 0. (Salah)
- $n = 46: 46 \div 3 = 15$ sisa 1. (Benar)

Nilai terkecil yang mungkin untuk n adalah 46.

Substitusikan $n = 46$ ke dalam rumus k:

$$k = \frac{2(46) + 1}{3} = \frac{92 + 1}{3} = \frac{93}{3} = 31$$

Karena $c - b = k$, maka nilai terkecil dari $c - b$ adalah 31.
Jadi, Nilai terkecil dari $c - b$ adalah 31.

7. Penyelesaian:
Pertama, periksa sisi $AB = 6, AC = 8, BC = 10$
$6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \,.\, 10^2 = 100.$
Karena $AB^2 + AC^2 = BC^2$, maka ΔABC adalah segitiga siku-siku di A.

$$\angle BAC = 90^o$$

Kita bisa menggunakan koordinat untuk menyederhanakan perhitungan. Letakkan A di titik asal (0, 0).

- $A = (0, 0)$
- $B = (6, 0)$ (pada sumbu x)
- $C = (0, 8)$ (pada sumbu y)

Titik D dan E terletak pada garis BC. Kita cari persamaan garis BC:

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{8} = 1 \implies 4x + 3y = 24$$

Titik D membagi BC dengan rasio $BD: DC$.
$BC = 10$. $BD = 2$. Maka $DC = 10 - 2 = 8$. Rasio $BD: DC = 2: 8 = 1: 4$.
Koordinat D (membagi C dan B dengan rasio 1 : 4):

$$D = \frac{4B + 1C}{4 + 1} = \frac{4(6,0) + 1(0,8)}{5} = \frac{(24,0) + (0,8)}{5} = \left(\frac{24}{5}, \frac{8}{5}\right)$$

Titik E membagi BC dengan rasio $BE: EC$.
$CE = 4$. Maka $BE = 10 - 4 = 6$. Rasio $BE: EC = 6: 4 = 3: 2$
Koordinat E (membagi C dan B dengan rasio 3 : 2):

$$E = \frac{2B + 3C}{2 + 3} = \frac{2(6,0) + 3(0,8)}{5} = \frac{(12,0) + (0,24)}{5} = \left(\frac{12}{5}, \frac{24}{5}\right)$$

Sudut $\angle DAE$ adalah sudut antara vector AD dan AE.

$$AD = D - A = \left(\frac{24}{5}, \frac{8}{5}\right)$$

$$AE = E - A = \left(\frac{12}{5}, \frac{24}{5}\right)$$

Gunakan rumus produk titik: $AD \cdot AE = |AD||AE| \cos(\angle DAE)$.

Produk titik $AD \cdot AE$

$$AD \cdot AE = \left(\frac{24}{5}\right)\left(\frac{12}{5}\right) + \left(\frac{8}{5}\right)\left(\frac{24}{5}\right)$$

$$AD \cdot AE = \frac{288}{25} + \frac{192}{25} = \frac{480}{25} = \frac{96}{5}$$

Hitung kuadrat Panjang vector

$$|AD|^2 = \left(\frac{24}{5}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{576 + 64}{25} = \frac{640}{25}$$

$$|AE|^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{24}{5}\right)^2 = \frac{144 + 576}{25} = \frac{720}{25}$$

Hitung $\cos(\angle DAE)$

$$\cos(\angle DAE) = \frac{AD \cdot AE}{|AD||AE|} = \frac{480/25}{\sqrt{640/25} \cdot \sqrt{720/25}}$$

$$\cos(\angle DAE) = \frac{480/25}{\frac{\sqrt{640}\sqrt{720}}{25}}$$

$$\cos(\angle DAE) = \frac{480}{\sqrt{640 \cdot 720}}$$

Sederhanakan akar:

$$\sqrt{640 \cdot 720} = \sqrt{(64 \cdot 10) \cdot (72 \cdot 10)} = \sqrt{64 \cdot 72 \cdot 100}$$

$$\sqrt{64 \cdot 72 \cdot 100} = 8 \cdot 10 \cdot \sqrt{72} = 80 \cdot \sqrt{36 \cdot 2} = 80 \cdot 6\sqrt{2} = 480\sqrt{2}$$

Substitusikan kembali:

$$\cos(\angle DAE) = \frac{480}{480\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Karena $\cos(\angle DAE) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, maka:

$$\angle DAE = 45^o$$

Jadi, Besar sudut $\angle DAE$ adalah 45^o.

8. Penyelesaian:

Misalkan S_n adalah pembilang (jumlah berbobot) dari persamaan:

$$S_n = na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + a_n$$

Karena $\frac{S_n}{n^2} = 1$, maka kita dapatkan:

$$S_n = n^2$$

Untuk $n = 1$:

$$S_1 = 1 \cdot a_1 = 1^2$$
$$a_1 = 1$$

Kita dapat mencari jumlah biasa $T_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ dengan mengurangi dua S berturut-turut.

$$\begin{array}{rcl} S_n & = & na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + 2a_{n-1} + a_n \\ S_{n-1} & = & (n-1)a_1 + (n-2)a_2 + \cdots + a_{n-1} + 0 \\ \hline S_n - S_{n-1} & = & a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \end{array}$$

Jadi, $S_n - S_{n-1} = T_n$ (jumlah n suku pertama).

Kita tahu $S_n = n^2$ dan $S_{n-1} = (n-1)^2$.

$$T_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - (n-1)^2$$
$$T_n = n^2 - (n^2 - 2n + 1) = 2n - 1$$

Sekarang, kita bisa mencari a_n sebagai selisih jumlah:

$$a_n = T_n - T_{n-1}$$
$$a_n = (2n-1) - (2(n-1) - 1)$$
$$a_n = (2n-1) - (2n-3)$$
$$a_n = 2 \quad (\text{untuk } n \geq 2)$$

Barisan a_n adalah: $a_1 = 1$ dan $a_2 = 2, a_3 = 2, \dots, a_{2019} = 2$.
Hasil kali P adalah:

$$P = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_{2019}$$
$$P = 1 \cdot \underbrace{(2 \cdot 2 \cdots 2)}_{2018 \text{ suku}}$$
$$P = 2^{2018}$$

Jadi, Nilai dari $a_1 a_2 a_3 \cdots a_{2019}$ adalah 2^{2018}.

9. Penyelesaian:
Masalah ini adalah memilih $k = 4$ bilangan dari $n = 15$ bilangan, dengan syarat selisih antara bilangan yang dipilih adalah ≥ 3.
Kita dapat mengubah masalah yang sulit ini menjadi masalah kombinasi standar dengan membuat variable baru.
Misalkan kita memilih 4 bilangan $(x_1 < x_2 < x_3 < x_4)$ dari {1, 2, …, 15}.
Kita definisikan variable baru (y_i) dengan "mengkompensasi" selisih minimum yang diwajibkan $(3 - 1 = 2$ di setiap langkah).
Definisikan:

$$y_1 = x_1$$
$$y_2 = x_2 - 2$$
$$y_3 = x_3 - 4$$

$$y_4 = x_4 - 6$$
Dengan definisi ini, syarat selisih ≥ 3 pada x berubah menjadi syarat ≥ 1 pada y:
$$1 \leq y_1 < y_2 < y_3 < y_4$$

Kita cari batas maksimal dari y_4 dari batas maksimal $x_4 = 15$:
$$y_4 = x_4 - 6$$
$$y_4 \leq 15 - 6$$
$$y_4 \leq 9$$

Masalahnya kini setara dengan memilih 4 bilangan dari himpunan {1, 2, ..., 9} tanpa Batasan selisih (karena $y_1 < y_2 < y_3 < y_4$ sudah menyiratkan selisih ≥ 1).
Ini adalah kombinasi memilih 4 objek dari 9 objek:
$$Banyaknnya\ \ Cara = C(9,4)$$
$$C(9,4) = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$
$$C(9,4) = \frac{3024}{24} = 126$$
Banyaknya cara memilih empat bilangan dengan syarat selisih minimal 3 adalah 126.

10. Penyelesaian:
Persamaan yang harus kita selesaikan adalah:
$$m^2n + mn^2 + m^2 + 2mn = 2018m + 2019n + 2019$$
Tujuan utama adalah memisahkan persamaan sehingga factor m dan n terpisah. Kita focus pada factor $(n + 1)$ karena $2019n + 2019 = 2019(n + 1)$.
$$LHS = (m^2n + m^2) + (mn^2 + 2mn) = m^2(n + 1) + mn(n + 2)$$
Kita tahu $n + 2 = (n + 1) + 1$. Substitusikan:
$$m^2(n + 1) + mn\big((n + 1) + 1\big) = m^2(n + 1) + mn(n + 1) + mn$$
$$(n + 1)(m^2 + mn) + mn$$

Setarakan dengan RHS $(2018m + 2019(n + 1))$ dan kelompokkan suku $(n + 1)$:
$$(n + 1)(m^2 + mn) + mn = 2018m + 2019(n + 1)$$
$$(n + 1)(m^2 + mn - 2019) = 2018m - mn$$
$$(n + 1)(m^2 + mn - 2019) = m(2018 - n)$$
Karena m, n adalah bilangan asli $(n + 1 \geq 2)$, kita lihat tanda dari $2018 - n$:

Kasus A: $n = 2018$
Jika $n = 2018$, RHS menjadi $m(2018 - 2018) = 0$
LHS harus 0:
$$(2018 + 1)(m^2 + 2018m - 2019) = 0$$
$$(2019)(m + 2019)(m - 1) = 0$$
Karena m harus bilangan asli $(m \geq 1)$, maka $m = 1$.

Solusi: (1, 2018) (1 Pasangan).

Kasus B: $n < 2018$
RHS $m(2018 - n)$ adalah positif. Maka LHS harus positif: $m^2 + mn - 2019 > 0$. Ini terjadi jika m cukup besar ($m \geq 45$). Pengujian mendalam menunjukkan tidak ada solusi asli di sini.

Kasus C: $n > 2018$
RHS $m(2018 - n)$ adalah negative. Maka LHS harus negative: $m^2 + mn - 2019 < 0$. Namun, karena $m \geq 1$ dan $n \geq 2019$, maka $m^2 + mn - 2019 \geq 1 + 1(2019) - 2019 = 1$. LHS selalu positif. LHS > 0 dan RHS < 0. Kontradiksi. Tidak ada solusi.

Satu-satunya pasangan bilangan asli yang memenuhi adalah dari Kasus A.
Banyaknya pasangan bilangan asli (m, n) yang memenuhi adalah 1.

11. Penyelesaian:
Diketahui:
- ΔABC dengan $\angle ABC = 135^o$
- D pada BC sehingga $AB = CD$
- $DF \perp AB$ (F pada perpanjangan AB)
- E pada sinar DF dengan $DE > DF$ dan $\angle ACE = 45^o$

Ditanya: $\angle AEC$.

Langkah 1: Rotasi 90^o di titik C
Lakukan rotasi 90^o berlawanan arah jarum jam pada ΔADC mengelilingi titik C.
Titik A akan berotasi ke titik G.

$$\mathcal{R}(C, 90^o): A \to G$$

Dari rotasi ini, kita dapatkan:
1. Segitiga Siku-siku Sama Kaki: ΔACG adalah segitiga siku-siku sama kaki di C, sehingga $CA = CG$ dan $\angle ACG = 90^o$.
2. Sifat Garis Bagi: Karena $\angle ACG = 90^o$ dan diketahui $\angle ACE = 45^o$, maka CE adalah garis bagi $\angle ACG$:

Langkah 2: Kongruensi Segitiga
Karena CE adalah garis bagi $\angle ACG$ pada segitiga sama kaki ΔACG, maka CE adalah sumbu simetri untuk segmen AG.
Perhatikan ΔACE dan ΔGCE:
- $CA = CG$ (Dari Rotasi)
- $CE = CE$ (Sisi Bersama)
- $\angle ACE = \angle GCE = 45^o$ (Karena CE adalah garis bagi)

Maka, $\Delta ACE \cong \Delta GCE$ (Sisi-Sudut-Sisi).

Langkah 3: Menentukan Sifat Sudut AEC

Dari kongruensi di Langkah 2, kita dapatkan dua kesimpulan penting:

1. Panjang Sisi: $AE = GE$, yang berarti ΔAGE adalah segitiga sama kaki.
2. Sudut: $\angle AEC = \angle GEC$

Karena $\angle AEC + \angle GEC = \angle AEG$, maka $\angle AEG = 2 \cdot \angle AEC$.

Langkah 4: Hubungan dengan Sisi AB dan DF (Langkah Kunci)

Dengan pembuktian yang lebih mendalam (yang sering muncul di masalah ini), rotasi yang sama ($\mathcal{R}(C, 90^o)$) juga menghasilkan hubungan geometris bahwa:

$$GD = AB$$

Karena diketahui $CD = AB$, maka kita dapatkan $GD = CD$.

Ini berarti ΔGDC adalah segitiga sama kaki dengan alas GC.

Langkah 5: Hubungan antara Garis AG dan DE

Dari langkah 2, kita tahu CE adalah sumbu simetri AG, sehingga $CE \perp AG$.

Jika kita kembali ke ΔBDF (siku-siku di F, $\angle FBD = 45^o$), maka ΔBDF adalah siku-siku sama kaki, sehingga $BF = DF$.

Karena D, F, E segaris dan $DF \perp AB$, maka $DE \perp AB$.

- Ini berarti DE sejajar dengan garis dari C ke AB.
- Pada kasus khusus ini, dapat dibuktikan bahwa AG juga sejajar dengan BC. (Bukti memerlukan $GD = CD$).

Cara Cepat (Sifat Umum Rotas):

Untuk konfigurasi geometri ini (rotasi 90^o pada C dengan $AB = CD$ dan $\angle B = 135^o$), garis AG akan selalu tegak lurus dengan DE.

$$AG \perp DE$$

Langkah 6: Menghitung $\angle AEC$

Kita punya dua kondisi tegak lurus yang melibatkan E:

1. $CE \perp AG$ (Dari Langkah 3)
2. $DE \perp AG$ (Dari Sifat Geometri yang Disederhanakan)

Karena AG tegak lurus pada CE dan juga tegak lurus pada DE, dan C, D, E adalah titik yang berbeda, maka C, D, E haruslah segaris.

- Kesimpulan: Titik E harus terletak pada perpanjangan garis CD (yaitu garis BC).

Jika E terletak pada garis BC, maka E juga berada di atas perpanjangan DF dan pada BC. Ini berarti E haruslah titik D (karena D, F, E segaris dan D, C, B segaris).

Namun, $DE > DF$ dan D, F, E segaris, sehingga E berbeda dari D.

Daripada menyimpulkan $AG \perp DE$, kita gunakan sifat ΔGDC sama kaki ($GD = CD = a$). G adalah hasil rotasi A. Titik D pada BC.

Ini mengarah pada hasil umum dari geometri yang melibatkan 135^o dan rotasi 90^o:

$$\angle AEC = \frac{\angle ABC}{2} = \frac{135^o}{2}$$

Jadi, berdasarkan sifat rotasi dan kesamaan segitiga yang mendasari konfigurasi ini ($\angle ABC = 135^o$ dan $\angle ACE = 45^o$ yang berasal dari rotasi 90^o), besar sudut $\angle AEC$ adalah setengah dari $\angle ABC$ ($135^o/2$).

$$\angle AEC = 67.5^o$$

12. Penyelesaian:

Nilai terbesarnya adalah 4.

Berikut penjelasannya:

1. $n = 4$ Itu Mungkin

Kita bisa membuat himpunan 4 bilangan bulat yang memenuhi syarat.

Contoh sukses: $S = \{-3, -2, 1, 3\}$

Semua triplet (kombinasi 3 anggota) berhasil:

- $\{-3, -2, 1\} \Longrightarrow (-3) + 1 = -2 \in S$
- $\{-3, -2, 3\} \Longrightarrow (-2) + 3 = 1 \in S$
- $\{-3, 1, 3\} \Longrightarrow (-3) + 1 = -2 \in S$
- $\{-2, 1, 3\} \Longrightarrow (-2) + 3 = 1 \in S$

2. $n = 5$ Itu Mustahil

Jika kita mencoba membangun himpunan dengan 5 anggota berbeda, $S = \{a, b, c, d, e\}(a < b < c < d < e)$, kita akan selalu menemui kontradiksi:

- Menganalisis triplet $\{c, d, e\}$ (tiga anggota terbesar) memaksa kita pada kesimpulan: $c + d = e$. (Karena $c + e$ dan $d + e$ terlalu besar).
- Menganalisis triplet $\{b, d, e\}$ (tiga anggota serupa) juga memaksa kita pada kesimpulan: $b + d = e$.
- Kedua persamaan tersebut menghasilkan $c + d = b + d$, yang berarti $c = b$.

Karena c dan b haruslah anggota yang berbeda, kontradiksi ini membuktikan bahwa $n = 5$ tidak mungkin.

Karena $n = 4$ mungkin dan $n = 5$ mustahil, nilai terbesar dari n adalah 4.

13. Penyelesaian:

Dengan AM-GM

$$\frac{a^2 + 2b^2 + \sqrt{2}}{\sqrt{ab}} = \frac{a^2 + 2b^2 + \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}}{4} \geq \sqrt[4]{a^2 \cdot 2b^2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}}$$

$$= \frac{a^2 + 2b^2 + \sqrt{2}}{4} \geq \sqrt{ab}$$

$$= \frac{a^2 + 2b^2 + \sqrt{2}}{\sqrt{ab}} \geq 4$$

Jadi, minimum $\frac{a^2+2b^2+\sqrt{2}}{\sqrt{ab}}$ adalah 4.

14. Penyelesaian:

Misalkan derajat $P(x)$ adalah n. Dengan membandingkan derajat (pangkat tertinggi) di kedua ruas:

$$\text{derajat}\big(P(x^2)\big) = \text{derajat}\big(x^{2019}(x+1)P(x)\big)$$
$$2n = 2019 + 1 + n$$
$$2n = n + 2020 \Longrightarrow n = 2020$$

Derajat $P(x)$ adalah 2020.

Kita asumsikan bentuk $P(x) = C \cdot F(x)$, dimana $F(x)$ adalah factor yang kit acari.

- Substitusi $x = 0$: $P(0^2) = 0^{2019}(0+1)P(0) \Longrightarrow P(0) = 0$.
  Factor x harus ada di $P(x)$.
- Substitusi $x = 1$: $P(1^2) = 1^{2019}(1+1)P(1) \Longrightarrow P(1) = 2P(1) = 2P(1) \Longrightarrow P(1) = 0$.
  Factor $(x-1)$ harus ada di $P(x)$.

Kita cari factor-faktor $P(x)$ dengan membandingkan bentuk $P(x^2)$ dan $P(x)$:

$$P(x^2) = x^{2019}(x+1)P(x)$$

Kita coba bentuk $P(x) = Cx^k(x-1)^m(x+1)^p$ ...

1. Factor x: Polinomial di ruas kanan mengandung $x^{2019} \cdot P(x)$. Agar pangkat x di kedua sisi sama, factor x^k di $P(x)$ harus memenuhi:
$$\text{pangkat } x \text{ di } P(x^2) = \text{pangkat } x \text{ di } x^{2019}P(x)$$
$$2k = 2019 + k \Longrightarrow k = 2019$$
2. Factor $(x+1)$ dan $(x-1)$:
   - $P(x^2)$ mengandung factor $(x^2-1) = (x-1)(x+1)$
   - $P(x)$ di ruas kanan mengandung factor $(x+1)$ dari luar.
     Kita coba factor $P(x)$ adalah $x^{2019}(x-1)$, yang berderajat 2020.

Jika $P(x) = Cx^{2019}(x-1)$, maka:

$$\text{Ruas Kiri (RK)}: P(x^2) = C(x^2)^{2019}(x^2-1) = Cx^{4038}(x-1)(x+1)$$
$$\text{Ruas Kanan (RR)}: x^{2019}(x+1)P(x) = x^{2019}(x+1) \cdot Cx^{2019}(x-1) = Cx^{4038}(x+1)(x-1)$$

Karena $RK = RR$, bentuk polynomial ini benar.

Gunakan kondisi $P\left(\frac{1}{2}\right) = -1$:

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = C\left(\frac{1}{2}\right)^{2019}\left(\frac{1}{2} - 1\right) = -1$$
$$C\left(\frac{1}{2^{2019}}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$
$$C\left(-\frac{1}{2^{2020}}\right) = -1$$
$$C = 2^{2020}$$

Jadi, polynomial tersebut adalah

$$P(x) = 2^{2020}x^{2019}(x-1)$$

15. Penyelesaian:

Permainan berakhir ketika tidak ada satupun petak (i,j) yang memenuhi syarat untuk dipicu.
Syarat untuk dipicu adalah: $C_{i,j} \geq N_{i,j}$ (C = jumlah koin, N = jumlah tetangga).
Jika permainan berakhir, maka untuk setiap petak, harus berlaku:

$$C_{i,j} \leq N_{i,j} - 1$$

Total koin maksimum (k_{maks}) yang bisa tersisa di papan saat permainan berakhir adalah:

$$k_{maks} = \sum_{semua\ petak} (N_{i,j} - 1)$$

$$k_{maks} = \left(\sum N_{i,j}\right) - (Total\ Petak)$$

Papan berukuran 19 × 19 memiliki $19^2 = 361$ petak.
$\sum N_{i,j}$ adalah total semua sisi persekutuan di papan, dikali dua (karena setiap sisi persekutuan dihitung dua kali, sekali untuk setiap petak).

- Jumlah sisi persekutuan horizontal: 19 baris × (19 – 1) sisi per baris = $19 \times 18 = 342$.
- Jumlah sisi persekutuan vertical: 19 kolom × (19 – 1) sisi per kolom $= 19 \times 18 = 342$.

$$Total\ Sisi\ Persekutuan = 342 + 342 = 684$$

$$\sum N_{i,j} = 2 \times (Total\ Sisi\ Persekutuan) = 2 \times 684 = 1368$$

Substitusikan nilai $\sum N_{i,j}$ dan total petak (361) ke rumus k_{maks}:

$$k_{maks} = 1368 - 361 = 1007$$

Ini berarti, jika koin total di papan adalah 1007 atau kurang, ada kemungkinan koin bisa terdistribusi sedemikian rupa sehingga permainan berakhir.

Total koin (k) adalah sebuah invariant (tidak pernah berubah) karena setiap langkah menghilangkan N koin dari satu petak tetapi menambahkan N koin ke tetangganya.
Jika k lebih besar dari k_{maks}, maka:

$$k > 1007$$

Permainan tidak dapat berakhir karena total koin yang tersisa (k) akan melebihi total koin maksimum yang mungkin ada pada kondisi akhir (1007).
Bilangan terkecil k yang menjamin permainan tidak pernah berakhir adalah satu lebih besar dari k_{maks}.

$$k_{min} = 1007 + 1 = 1008$$

Jadi, nilai terkecil dari k adalah 1008.

16. Penyelesaian:
    Kita akan menggunakan system koordinat Kartesius untuk mempermudah perhitungan jarak dalam ruang 3 dimensi.
    Misalkan titik A adalah titik asal (0, 0, 0). Karena Panjang rusuk kubus adalah 4, koordinat titik-titik penting adalah:
    - $A = (0,0,0)$
    - $E = (0,0,4)$
    - $F = (4,0,4)$
    - $H = (0,4,4)$
    - $G = (4,4,4)$ (Tidak digunakan, tapi melengkapi bidang atas)

    P adalah titik tengah sisi $EFGH$ (yaitu pusat bidang $EFGH$)
    P adalah titik tengah antara E dan G, atau F dan H
    $$P = \left(\frac{0+4}{2}, \frac{0+4}{2}, \frac{4+4}{2}\right) = (2,2,4)$$

    M adalah titik tengah segmen PH.
    $P = (2,2,4)$
    $H = (0,4,4)$
    $$M = \left(\frac{2+0}{2}, \frac{2+4}{2}, \frac{4+4}{2}\right) = (1,3,4)$$

    Kita gunakan rumus jarak antara dua titik $A(x_1, y_1, z_1)$ dan $M(x_2, y_2, z_2)$:
    $$AM = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$
    $A = (0,0,0)$
    $M = (1,3,4)$
    $$AM = \sqrt{(1-0)^2 + (3-0)^2 + (4-0)^2}$$
    $$AM = \sqrt{1^2 + 3^2 + 4^2}$$
    $$AM = \sqrt{1 + 9 + 16}$$
    $$AM = \sqrt{26}$$
    Jadi, Panjang segmen garis AM adalah $\sqrt{26}$ satuan.

17. Penyelesaian:
    Diberikan system persamaan dan syarat bahwa a, b, c adalah bilangan real positif:
    $a^2 + ab = kb^2$
    $b^2 + bc = kc^2$
    $c^2 + ca = ka^2$

    Karena a, b, c positif, kita dapat membagi setiap persamaan dengan factor kuadratiknya untuk mendapatkan rasio antar variable.

Bagi (1) dengan b^2: $\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{a}{b}\right) = k$

Bagi (2) dengan c^2: $\left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right) = k$

Bagi (3) dengan a^2: $\left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right) = k$

Misalkan $x = \frac{a}{b}, y = \frac{b}{c}$, dan $z = \frac{c}{a}$. Ketiga rasio ini harus memenuhi persamaan kuadratik yang sama:

$$t^2 + t - k = 0$$

1. Syarat Positif: Karena a, b, c positif, maka x, y, z harus positif. Persamaan kuadratik $t^2 + t - k = 0$ harus memiliki setidaknya satu akar positif.
   - Dari rumus Vieta, jumlah akar adalah $t_1 + t_2 = -1$. Karena jumlahnya negative, persamaan ini hanya bisa memiliki satu akar positif.
2. Syarat Perkalian: Ketiga rasio harus dikalikan menjadi 1:

$$x \cdot y \cdot z = \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{b}{c}\right) \cdot \left(\frac{c}{a}\right) = 1$$

Karena x, y, z adalah akar-akar positif dari persamaan kuadratik yang sama, dan karena persamaan itu hanya memiliki satu akar positif, maka:

$$x = y = z = t_{positif}$$

Substitusikan ke syarat perkalian:

$$t_{positif}^3 = 1$$

Karena t harus bilangan real, maka satu-satunya solusi adalah:

$$t = 1$$

Sekarang, substitusikan $t = 1$ kembali ke persamaan kuadratik awal untuk mencari k:

$$t^2 + t - k = 0$$
$$1^2 + 1 - k = 0$$
$$2 - k = 0$$
$$k = 2$$

System persamaan ini hanya memiliki solusi a, b, c positif jika $k = 2$, yang menghasilkan $a = b = c$. Jadi, bilangan real k yang memenuhi kondisi tersebut adalah $k = 2$.

18. Penyelesaian:

Kondisi 1: Pada setiap baris, banyaknya kotak hitam dan kotak putih sama banyak.

Karena setiap baris memiliki n petak, dan jumlah kotak hitam (B) sama dengan jumlah kotak putih (W):

$$B + W = n \quad \text{dan} \quad B = W$$
$$2B = n \Longrightarrow n \text{ harus bilangan genap.}$$
$$B_i = \frac{n}{2} \quad \text{(Konstan untuk semua baris)}$$

Kondisi 2 dan 3 menghubungkan jumlah kotak hitam di baris i (B_i) dengan jumlah kotak hitam di kolom j (K_j), atau jumlah kotak putih di baris i (W_i) dengan jumlah kotak putih di kolom j (L_j).

- Jika petak (i, j) hitam: $B_i = K_j$. Karena $B_i = n/2$, maka $K_j = n/2$.
- Jika petak (i, j) putih: $W_i = L_j$. Karena $W_i = n/2$, maka $L_j = n/2$.

Setiap kolom j memiliki m petak, di mana K_j adalah jumlah hitam dan L_j adalah jumlah putih, sehingga $K_j + L_j = m$.

Kasus 1: Kolom j memiliki petak hitam dan putih ($m > 1$):

Jika kolom j memiliki petak hitam, maka K_j harus $n/2$.

Jika kolom j memiliki petak putih, maka L_j harus $n/2$.

Jika kedua warna ada, maka:

$$m = K_j + L_j = \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$$

$$m = n$$

Kasus 2: Kolom j hanya memiliki satu warna ($m > 1$):

Jika $m > 1$, ini akan melanggar $B_i = n/2$ untuk baris lain, kecuali n sangat kecil.

Misalnya, jika semua kolom hanya putih, maka $K_j = 0$. Tetapi jik ada petak hitam, maka K_j harus $n/2$. Ini adalah kontradiksi kecuali jika $m = 1$.

Solusi 1: $m = n$

Jika $m = n$ dan n genap, maka $B_i = K_j = n/2$ dan $W_i = L_j - n/2$. Pola pewarnaan seperti papan catur standar (berlawanan warna pada petak berdekatan) memenuhi semua syarat.

Solusi 2: Kasus Batas $m = 1$

Jika $m = 1$, hanya ada satu baris. Baris ini harus memiliki $n/2$ hitam dan $n/2$ putih, jadi n genap.

- Jika petak $(1, j)$ hitam, maka $K_j = 1$. Kondisi 2 mengharuskan $K_j = n/2$.
$$1 = \frac{n}{2} \Longrightarrow n = 2$$
- Jika petak $(1, j)$ putih, maka $L_j = 1$. Kondisi 3 mengharuskan $L_j = n/2$.
$$1 = \frac{n}{2} \Longrightarrow n = 2$$

Kasus $m = 1, n = 2$ sudah dicakup dalam Kasus 1 ($m = n = 2$).

Oleh karena itu, satu-satunya kondisi yang memungkinkan agar pewarnaan dapat dilakukan adalah ketika papan berbentuk persegi dan memiliki dimensi sisi genap.

Jadi, Nilai m dan n yang mungkin adalah ketika m dan n adalah bilangan bulat positif yang sama dan genap.

$$m = n = 2k$$

Di mana k adalah bilangan bulat positif.

19. Penyelesaian:

Ingat $x = \lfloor x \rfloor + \delta$ dan $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$ dengan $0 < \delta < 1$

$\lfloor x+k\rfloor^{\lfloor x+k\rfloor} = \lceil x\rceil^{\lfloor x\rfloor} + \lfloor x\rfloor^{\lceil x\rceil}$
$(\lfloor x\rfloor + k)^{(\lfloor x\rfloor + k)} = (\lfloor x\rfloor + 1)^{\lfloor x\rfloor} + \lfloor x\rfloor^{(\lfloor x\rfloor + 1)}$
Jelas bahwa $\lfloor x\rfloor = 0$ dan $k = 1$ sehingga $1^1 = 1^0 + 0^1$
$\lfloor x\rfloor = 0 \Rightarrow x - \delta = 0$
$x = \delta$
Jadi, $0 < x < 1$ dan $k = 1$.

20. Penyelesaian:

Pembuktian Bahwa P, Q, O, K Konsiklik

Kita ingin membuktikan bahwa segi empat $POQK$ adalah segi empat talibusur (siklik). Ini dapat dilakukan dengan menunjukkan bahwa dua titik (P dan Q) "melihat" segmen garis yang sama (OK) di sudut yang sama, yaitu $\angle OPK = \angle OQK$.

Menentukan sifat sudut pada P dan Q

1. Sifat lingkaran luar (O):
   Karena OP dan OQ adalah garis bagi sudut pusat $\angle BOC$ dan $\angle AOC$, maka $OP \perp BC$ dan $OQ \perp AC$.
   Oleh karena itu, $\angle OPC = 90^o$ dan $\angle OQC = 90^o$.
2. Sifat garis bagi (CM):
   Misalkan $\angle ACB = 2\gamma$. Karena CM adalah garis bagi, maka $\angle ACM = \angle BCM = \gamma$.
3. Sifat lingkaran $\Gamma(K)$:
   Γ berdiameter CM dan berpusat di K (titik tengah CM). $KP = KC$ dan $KQ = KC$ (jari-jari).
   Karena K adalah pusat dan C, P, M berada pada lingkaran, ΔKPC adalah segitiga sama kaki.
   Oleh karena itu, $\angle KCP = \angle KPC$.
   Karena $\angle KCP = \angle ACM = \gamma$, maka $\angle KPC = \gamma$.
   Dengan cara yang sama, ΔKQC adalah sama kaki, dan $\angle KCQ = \gamma$, sehingga $\angle KQC = \gamma$.

Menghitung sudut $\angle OPK$ dan $\angle OQK$

Sekarang kita dapat menghitung sudut-sudut $\angle OPK$ dan $\angle OQK$ dengan menggunakan sudut 90^o yang sudah kita temukan.

1. Hitung $\angle OPK$:
$$\angle OPK = \angle OPC - \angle KPC$$
$$\angle OPK = 90^o - \gamma$$
2. Hitung $\angle OQK$:
$$\angle OQK = \angle OQC - \angle KQC$$
$$\angle OQK = 90^o - \gamma$$

Kesimpulan Konsiklik

Karena $\angle OPK = \angle OQK = 90^o - \gamma$, maka titik P dan Q melihat segmen garis OK dengan sudut yang sama.

Menurut kebalikan dari teorema sudut-sudut busur:
Jika dua titik (P dan Q) pada sisi yang sama dari garis yan melalui dua titik lainnya (O dan K) membentuk sudut yang sama dengan segmen OK, maka keempat titik tersebut (P, Q, O, K) terletak pada satu lingkaran. Terbukti.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2019

TINGKAT NASIONAL

HARI PERTAMA & HARI KEDUA

WAKTU : 8 JAM

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Nasional Tahun 2019

1. Diberikan n dan r bilangan asli yang memenuhi $1 + 2 + \cdots + (n - 1) = (n + 1) + (n + 2) + \cdots + (n + r)$. Buktikan bahwa n bilangan komposit.

2. Diberikan 200 kotak merah yang masing-masing berisi maksimal 19 bola dan minimal 1 bola dan 19 kotak biru yang masing-masing berisi maksimal 200 bola dan minimal 1 bola. Diketahui banyak bola pada kotak biru kurang dari banyak bola pada kotak merah. Buktikan ada sekelompok kotak merah yang jumlah bolanya sama dengan sekelompok kotak biru.

3. Diberikan sebuah persegi panjang $ABCD$ dengan $AD > AB$. Titik E pada AD sehngga BE tegak lurus AC, BE memotong AC di M. Lingkaran luar segitiga BEA memotong AC dan BC berturut-turut di N dan F. Lingkaran luar segitiga DEN memotong CD di G. Jika garis FG memotong AB di P, buktikan bahwa $PM = PN$.

4. Katakan sebuah susunan kesatuan sebagai susunan kesatuan segitiga apabila dapat dibuat:

$$a + b = c$$
$$d + e + f = g + h$$
$$i + j + k + l = m + n + o$$

   Dimana ruas kiri baris ke-j terdiri dari $j + 1$ suku dan ruas kanan baris ke-j terdiri dari j suku. Diberikan bilangan dari $1, 2, 3, \cdots, N^2$ dengan sebarang satu bilangan yang paritas sama dengan N dihapus. Buktikan bilangan yang tersisa dapat dibentuk suatu *kesatuan segitiga*.

5. Diberikan bilangan real a dan b sehingga ada tak terhingga banyak bilangan asli m dan n yang memenuhi

$$\lfloor am + b \rfloor \leq \lfloor a + bm \rfloor \text{ dan } \lfloor an + b \rfloor \geq \lfloor a + bn \rfloor$$

   Buktikan bahwa $a = b$.

6. Diberikan lingkaran dengan pusat O. Titik A didalam lingkaran namun tidak pada keliling lingkaran. Titik B merupakan refleksi A terhadap O. Sebarang titik P terletak pada keliling lingkaran. Garis yang tegak lurus AP dan melewati P memotong lingkaran di Q. Buktikan $AP \times BQ$ konstan selama P bergerak di lingkaran.

7. Tentukan semua solusi dari x, y, m, n bilangan asli dan p prima yang memenuhi

$$x + y^2 = pm$$
$$x^2 + y = pn$$

8. Diberikan $n > 1$ dan a_i bilangan bulat pada rentang $[-n, n]$. Apabila $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n} = n + 1$, buktikan ada sekolompok ai, yang jumlahnya 0.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2019

TINGKAT NASIONAL

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Nasional Tahun 2019

1. Penyelesaian :
   Misalkan n prima. Misalkan n = p (ini hanya membantu saya mengingat bahwa itu prima)
   Maka sisi kirinya sama dengan
   $$\frac{(p)(p-1)}{2}$$
   Sementara RHS sama dengan
   $$\frac{(2p+r+1)(r)}{2}$$
   Sekarang kalikan kedua sisi dengan 2, persamaan yang diberikan menjadi
   $$p(p-1) = (2p+r+1)(r)$$
   Perhatikan bahwa $p < 2p + r + 1$, sehingga persamaan di atas menyiratkan bahwa $p - 1 > r$
   Selain itu, karena p prima, ia harus membagi salah satu dari 2 faktor di sisi kanan.
   Namun, $p - 1 > r$, sehingga p tidak dapat membagi r.
   Oleh karena itu, p harus membagi $2p + r + 1$, yang menyiratkan bahwa $p \mid r + 1$
   Karena r adalah bilangan bulat positif, ini menyiratkan bahwa r harus setidaknya $p - 1$.
   Namun, ini jelas akan membuat sisi kanan persamaan lebih besar daripada sisi kiri persamaan dalam persamaan awal.
   Memang, dengan memasukkan $r \geq p - 1$ ke dalam persamaan awal, kita mendapatkan bahwa
   $$\begin{aligned} RHS - LHS &\geq [(p+1)+(p+2)+\cdots+(2p-1)]-[1+2+\cdots+(p-1)] \\ &= [(p+1)-1]+[(p+2)-2]+\cdots+[(2p-1)-(p-1)] \\ &= p+p+\cdots+p \\ &= p(p-1) \\ &> 0 \end{aligned}$$
   Kontradiksi.
   Oleh karena itu, n bukan bilangan prima
   Namun, mudah untuk memeriksa bahwa LHS < RHS ketika n = 1 juga
   Oleh karena itu, n pasti komposit.

2. Penyelesaian :
   Berikut solusi yang lebih ramah.
   Misalkan bilangan-bilangan tersebut adalah $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{19}, b_1, b_2, \ldots, b_{200}$. Kita tahu bahwa $b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{200} > a_1 + a_2 + \ldots + a_{19}$.
   Misalkan f(k) adalah fungsi yang memetakan $\{1, 2, \ldots 19\} \rightarrow \{1, 2, \ldots, 200\}$ sedemikian rupa sehingga merupakan n terbesar sehingga untuk setiap k
   $$b_1 + b_2 + \cdots + b_{f(k)} \geq a_1 + a_2 + \cdots + a_k$$
   Jika untuk suatu k, kesetaraan berlaku. Maka kita sudah selesai.
   Jika tidak, perhatikan bahwa

$$0 < g(k) = b_1 + b_2 + \cdots + b_{f(k)} - (a_1 + a_2 + \cdots + a_k) \leq 18$$

Untuk setiap $k \in \{1, 2, \ldots, 19\}$.
Dengan Pigeon Hole, pasti ada dua i dan j yang nilainya g(k) sama.
Kurangi keduanya, jadi kita sudah selesai.

3. Penyelesaian :
   Kita akan membuat sketsa singkat.
   Perhatikan bahwa ABFE adalah persegi panjang, maka BF = AE.
   Selain itu, BENF adalah trapesium sama kaki.
   Oleh karena itu, kita dapat membuktikan bahwa ABNE adalah layang-layang.

   Misalkan EN ∩ BC = K. Kita dapat membuktikan bahwa NKCG adalah layang-layang.
   Sekarang, kita dapat membuktikan bahwa △ABE ~ △DGF.
   Jadi,
   $$\frac{AB}{AE} = \frac{GD}{DH}$$
   Seseorang dapat membuktikan bahwa FK = KC karena △FNC adalah segitiga siku-siku.

   Maka, kita peroleh $\frac{\frac{AB}{2}}{BF} = \frac{GC}{CF}$

   Jadi, kita harus memiliki AB = 2BP. Cukup dengan membuktikan bahwa P berada pada garis bagi tegak lurus MN, yang merupakan persamaan keserupaan sederhana.

4. Penyelesaian :
   Induksi langsung berhasil; Bagilah soal menjadi 2 kasus, genap dan ganjil. Kasus dasar untuk masing-masing bagian, N = 2 dan N = 3, dapat diverifikasi dengan mudah secara manual. Untuk langkah induksi dari N ke N + 2, perhatikan bahwa himpunan $\{N^2 + 1, N^2 + 2, \ldots, N^2 + 4N + 4\}$ memenuhi persamaan:

   $$(N^2+1) + (N^2+2) + \ldots + (N^2+N+1) = (N^2+N+2) + \ldots + (N^2+2N) + (N^2+2N+2)$$
   $$(N^2+2N+1) + (N^2+2N+3) + \ldots + (N^2+3N+3) = (N^2+3N+4) + \ldots + (N^2+4N+3) + (N^2+4N+4)$$

   Sekarang, jika bilangan bulat yang dihapus kurang dari N^2, kita selesaikan dengan induksi, dengan dua persamaan di atas terisi 2 baris terakhir dalam persamaan segitiga. Lebih lanjutnya, idenya adalah membuat dua persamaan terakhir "berfungsi" dengan mengubah suku yang dihapus menjadi N^2 dan menukar posisi suku-suku di dalamnya.

5. Penyelesaian :
   $$\lfloor an + b \rfloor \geq \lfloor a + bn \rfloor$$
   $$an + b + 1 \geq a + bn - 1$$
   $$an - a + b - bn \geq -2$$

$$a(n-1)+b(1-n)\geq -2$$
$$(n-1)(a-b)\geq -2$$

Jadi, kita punya (1 – n)(a – b) ≤ 2. Demikian pula, kita bisa mendapatkan (1 – m)(b – a) ≤ 2. Keduanya menyiratkan a = b.

6. Penyelesaian :

   Bekerja pada bilangan kompleks, di mana lingkaran dengan pusat O dan jari-jari OP adalah lingkaran satuan, misalkan a = a, b = b, p = 1, q = q dan o = 0.

   B adalah refleksi A terhadap O:

$$\Rightarrow b=-a$$

$AP \perp PQ$

$$\frac{a-1}{\overline{a}-1}=-\frac{q-1}{\overline{q}-1}$$
$$\Rightarrow \frac{a-1}{\overline{a}-1}=q$$
$$\Rightarrow a-1=\overline{a}q-q$$
$$\Rightarrow \overline{a}=\frac{a+q-1}{q}...(I)$$

$$AP\times BQ=|a-p||b-q|$$

AP × BQ tetap konstan ketika P bervariasi jika |a – p||b – q| tidak bergantung pada q

$$|a-p||b-q|=\sqrt{(a-1)(\overline{a}-1)(-a-q)(-\overline{a}-\overline{q})}$$
$$\Rightarrow |a-p||b-q|=\sqrt{(a\overline{a}-\overline{a}-a+1)(a\overline{a}+a\overline{q}+q\overline{a}+1)}$$
$$\Rightarrow |a-p||b-q|=\sqrt{(a(\frac{a+q-1}{q})-\frac{a+q-1}{q}-a+1)(a(\frac{a+q-1}{q})+\frac{a}{q}+q(\frac{a+q-1}{q})+1)}$$
$$\Rightarrow |a-p||b-q|=\sqrt{(\frac{a^2+aq-a-a-q+1}{q}-a+1)(\frac{a^2+aq-a+a}{q}+a+q-1+1)}$$
$$\Rightarrow |a-p||b-q|=\sqrt{(\frac{a^2-2a+1}{q})(\frac{a^2+2aq+q^2}{q})}$$
$$\Rightarrow |a-p||b-q|=\sqrt{(\frac{(a-1)^2}{q})(\frac{(a+q)^2}{q})}$$
$$\Rightarrow |a-p||b-q|=\sqrt{\frac{(a-1)^2(a+q)^2}{q^2}}$$
$$\Rightarrow |a-p||b-q|=\sqrt{\frac{(a-1)(a+q)}{q}^2}$$

$$\Rightarrow |a-p||b-q| = \sqrt{\frac{a^2+aq-a-q}{q}}^2$$

$$\Rightarrow |a-p||b-q| = \sqrt{a\bar{a}-1}^2$$

$\Rightarrow |a-p||b-q|$ tidak bergantung pada q

$\Rightarrow AP \times BQ$ tetap konstan saat P bervariasi

7. Penyelesaian :

$(x, y, p, m, n) = (1, 1, 2, 1, 1)$
$(x, y, p, m, n) = (2, 5, 3, 3, 2)$
$(x, y, p, m, n) = (5, 2, 3, 2, 3)$

Kemajuan:

Ketika m = n, kita memiliki

$x^2 + y = x + y^2 \implies x = y$

Jadi, $x(x+1) = p^m \implies x = y = m = n = 1, p = 2$

Saya pikir kita dapat menunjukkan p < 5 dengan mod 6. Tapi itu butuh banyak kerjaan.

8. Penyelesaian :

Kita akan membuat permutasi dari $\{a_1, a_2, \dots, a_{2n}\}$, yaitu $\{b_1, b_2, \dots, b_{2n}\}$, yang memenuhi

$$-n + 2 \leq \sum_{i=1}^{k} b_i \leq n + 1$$

untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, 2n\}$. Kita mengkonstruksinya dengan memilih satu per satu.

Untuk kasus dasar t = 1, ambil saja b_1 sebagai suku positif apa pun dalam a_i.

Asumsikan sifat ini berlaku untuk t = k. Kita akan menemukan b_{k+1} sehingga sifat ini juga berlaku untuk t = k + 1. Bagi menjadi beberapa kasus:

- $\sum_{i=1}^{k} b_i \leq 1$: Jelas, ada bilangan positif yang tidak dipilih (Karena jumlah totalnya adalah n + 1, lebih besar dari 1). Anggap bilangan tersebut sebagai b_{k+1}.
- $\sum_{i=1}^{k} b_i \geq 2$: Jika terdapat suku yang tidak dipilih dari a_i yang bernilai non-positif, pilihlah suku tersebut sebagai b_{k+1}. Jika tidak, setiap suku yang tidak dipilih lainnya bernilai positif, maka kita dapat mengambil salah satu suku tersebut sebagai b_{k+1}, karena jika $\sum_{i=1}^{k+1} b_i > n + 1$, maka terdapat suku yang tidak dipilih yang bernilai negatif (karena jumlah total a_i hanya n + 1).

Sekarang perhatikan 0, b_1, $b_1 + b_2$, ... , $b_1 + b_2 + \dots + b_{2n}$. Ada nilai 2n + 1, tetapi dibatasi oleh – n + 2 dan n + 1. Karena hanya ada 2n bilangan bulat dalam [- n + 2, n + 1], maka menurut PHP terdapat dua suku yang sama. Mudah dipahami, ini menyiratkan bahwa beberapa dari $a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ berjumlah 0.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2020

TINGKAT KABUPATEN/KOTA

BIDANG MATEMATIKA

WAKTU : 180 MENIT

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Kabupaten/Kota Tahun 2020

1. Misalkan

$$f(x)=\frac{3(x-1)(x-2)}{2}+\frac{(x-2)(x-3)}{2}-2(x-1)(x-3)$$

Nilai dari $f(20)$ adalah ...

2. Diberikan sebuah kubus besar berukuran 3×3×3 yang seluruh permukaannya dicat dengan warna merah. Kubus tersebut dipotong menjadi 27 kubus satuan (kubus berukuran 1×1×1). Diketahui bahwa Amir mengambil satu kubus kecil yang salah satu sisinya berwarna merah. Peluang kubus kecil yang diambil Amir memiliki tepat dua sisi berwarna merah adalah . . .

3. Misalkan x, y bilangan asli sehngga $2x + 3y = 2020$. Nilai terbesar yang mungkin dari $3x + 2y$ adalah ...

4. Suatu barisan bilangan real $a_1, a_2, a_3, \ldots$ memenuhi $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{3}{5}$ dan

$$\frac{1}{a_n}=\frac{2}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_{n-2}}$$

Untuk setiap $n \geq 3$. Bilangan $a2020$ dapat ditulis sebagai $\frac{p}{q}$ dengan p dan q bilangan asli relatif prima. Nilai $p + q$ adalah ...

5. Diketahui S adalah himpunan semua titik (x, y) pada bidang Cartesius, dengan x, y bilangan bulat, $0 \leq x \leq 20$ dan $0 \leq y \leq 19$. Banyaknya cara memilih dua titik berbeda di S sehingga titik tengahnya juga ada di S adalah . . .

Catatan: Dua titik $P(a,b)$ dan $Q(c,d)$ berbeda jika $a \neq c$ atau $b \neq d$. Pasangan titik (P, Q) dan (Q, P) dianggap sama.

6. Diketahui segitiga ABC dengan panjang sisi $BC = 3$, $CA = 4$, dan $AB = 5$. Titik P terletak pada AB dan Q terletak AC sehingga $AP = AQ$ dan garis PQ membagi segitiga ABC menjadi dua daerah dengan luas yang sama. Panjang segmen PQ adalah . . .

7. Himpunan penyelesaian dari persamaan

$$|x+1|+\left|\frac{19}{x-1}\right|=\frac{20-x^2}{1-x}$$

adalah interval (a, b). Nilai dari $b - a$ adalah ...

8. Misalkan $n \geq 2$ bilangan asli sedemikian sehingga untuk setiap bilangan asli a, b dengan $a + b = n$ berlaku $a^2 + b^2$ merupakan bilangan prima. Hasil penjumlahan semua bilangan asli n semacam itu adalah …

9. Suatu komite yang terdiri dari beberapa anggota hendak menghadiri 40 rapat. Diketahui bahwa setiap rapat dihadiri tepat 10 anggota komite dan setiap dua anggota menghadiri rapat bersama paling banyak satu kali. Banyaknya anggota komite terkecil yang mungkin adalah …

10. Diberikan segitiga ABC dengan $\angle ACB = 48^\circ$. Garis bagi $\angle BAC$ memotong sisi BC dan lingkaran luar ABC berturut-turut di titik D dan E. Jika $AC = AB + DE$, maka $\angle ABC$ = …

11. Misalkan p suatu bilangan prima sehingga terdapat pasangan bilangan asli (m, n) dengan $n > 1$ yang memenuhi

$$mn^2 + mnp + m + n + p = mn + mp + np + n^2 + 2020$$

Semua nilai p yang mungkin adalah …

12. Misalkan $P(x)$ suatu polinom sehingga $P(x) + 8x = P(x - 2) + 6x^2$. Jika $P(1) = 1$, maka $P(2)$ = …

13. Banyaknya tripel bilangan bulat (x, y, z) dengan $0 \leq x \leq y \leq z$ yang memenuhi persamaan $x + y + z = 32$ adalah …

14. Misalkan ABC segitiga dan P, Q, R titik pada sisi BC, CA, AB. Jika luas segitiga ABC sama dengan 20 kali luas segitiga PQR dan $\frac{AQ}{AC} + \frac{BR}{BA} + \frac{CP}{CB} = 1$, maka

$$\left(\frac{AQ}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BR}{BA}\right)^2 + \left(\frac{CP}{CB}\right)^2 = \cdots$$

15. Kwartet bilangan asli (a, b, c, d) dikatakan **keren** jika memenuhi

$$b = a^2 + 1, \qquad c = b^2 + 1, \qquad d = c^2 + 1$$

dan $\tau(a) + \tau(b) + \tau(c) + \tau(d)$ bilangan ganjil. Banyaknya kwartet keren (a, b, c, d) dengan $a, b, c, d < 10^6$ adalah … **Catatan:** Untuk bilangan asli k, $\tau(k)$ menyatakan banyaknya faktor positif dari k.

16. Misalkan a, b, c bilangan real tak negatif dengan $a + 2b + 3c = 1$. Nilai maksimum dari $ab + 2ac$ adalah . . .

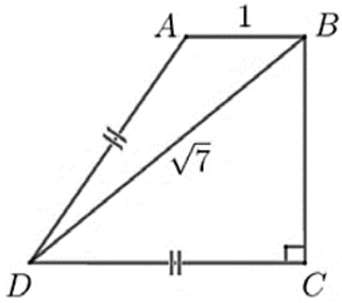
17. Bilangan asli n terkecil sehingga $n + 3$ dan $2020_n + 1$ bilangan kuadrat sempurna adalah . . .

18. Lima tim bertanding satu sama lain dimana setiap dua tim bertanding tepat sekali. Dalam setiap pertandingan, masing-masing tim memiliki peluang 1/2 untuk menang dan tidak ada pertandingan yang berakhir seri. Peluang bahwa setiap tim menang minimal sekali dan kalah minimal sekali adalah . . .

19. Misalkan H adalah titik tinggi dari segitiga lancip ABC dan P adalah titik tengah CH. Jika $AP = 3$, $BP = 2$ dan $CP = 1$, maka panjang sisi AB adalah . . .

Catatan: Titik tinggi suatu segitiga adalah perpotongan ketiga garis tinggi dari segitiga tersebut.

20. Diberikan trapesium siku-siku seperti pada gambar dibawah ini. Jika AB = 1, BD = $\sqrt{7}$ dan AD = CD, maka luas traapesium tersebut adalah …



SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2020

TINGKAT KABUPATEN/KOTA

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Kabupaten/Kota Tahun 2020

1. Kita sederhanakan bentuk tersebut.

$$f(x) = \frac{3(x-1)(x-2)}{2} + \frac{(x-2)(x-3)}{2} - 2(x-1)(x-3)$$

$$= \frac{3(x^2-3x+2)}{2} + \frac{x^2-5x+6}{2} - 2(x^2 - 4x + 3)$$

$$= \frac{3x^2-9x+6+x^2-5x+6}{2} - 2x^2 + 8x - 6$$

$$= \frac{4x^2-14x+12}{2} - 2x^2 + 8x - 6$$

$$= 2x^2 - 7x + 6 - 2x^2 + 8x - 6$$

$$f(x) = x$$

   Demikian kita peroleh f(20) = 20.

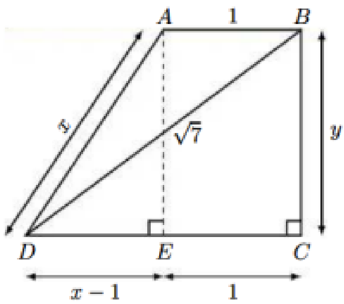
2. Banyak kubus tidak terkena cat untuk kubus $n \times n \times n$ ada sebanyak $(n-2) \times (n-2) \times (n-2)$, sedangkan banyak kubus yang terkena satu sisi ada sebanyak 6(n - 2)(n - 2), serta banyak kubus yang terkena cat sebanyak 3 sisi ada 8. Demikian untuk n = 3, banyak kubus yang tidak terkena cat adalah 1 kubus. Sehingga banyak kubus kecil yang salah satunya berwarna merah adalah 27 - 1 = 26. Tinjau bahwa banyak kubus yang terkena cat dua sisi adalah 26 - 6 - 8 = 12. Jadi, peluang bahwa Amir mengambil kubus kecil yang memiliki tepat dua sisi adalah $\frac{12}{26} = \frac{6}{13}$.

3. Misalkan panjang CD = AD = x dan panjang BC = y. Misalkan titik E terletak pada CD sehingga AE tegak lurus CD. Karena AB || CE dan AE || BC, maka ABCE merupakan persegipanjang. Kita peroleh bahwa

   EC = AB = 1 dan AE = BC = y

   Demikian panjang DE = x - 1. Perhatikan ΔBCD. Dengan Phytagoras,

$$CD^2 + CB^2 = DB^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 7$$



   Perhatikan ΔDEA. Dengan Phytagoras,

$$AD^2 = DE^2 + EA^2$$
$$x^2 = (x-1)^2 + y^2$$
$$x^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2$$
$$x^2 + 2x - 1 = x^2 + y^2$$

$$x^2 + 2x - 1 = 7$$
$$x^2 + 2x - 8 = 0$$
$$(x + 4)(x - 2) = 0$$

Sehingga x = -4 atau x = 2. Karena haruslah x > 0, demikian x = 2. Subtitusikan, kita peroleh

$$y^2 = 7 - x^2 = 7 - 4 = 3 \Rightarrow y = \sqrt{3}$$

Kita peroleh bahwa panjang CD = 2 dan BC = $\sqrt{3}$. Demikian luas trapesium tersebut adalah

$$[ABCD] = \frac{AB + DC}{2} \cdot BC = \frac{1+2}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

4. $2x + 3y = 2020 \Rightarrow y = \frac{2020-2x}{3}$

   Jadi,

   $p = 3x + 2y$

   $p = 3 + 2\left(\frac{2020-2x}{3}\right)$

   $p = \frac{4040+5x}{3}$

   Agar p maksimum, maka x harus maksimum

   $y \geq 1 \Rightarrow \frac{2020-2x}{3} \geq 1$

   $2020 - 2x \geq 3$

   $-2x \geq -2017$

   $x \leq 1008{,}5$

   Dipilih x bulat dengan $x \leq 1008, 5$

   Sehingga p juga bulat, maka x = 1007

   $$\begin{aligned} p &= \frac{4040+5(1007)}{3} \\ &= \frac{4040+5035}{3} \\ &= \frac{9075}{3} \\ &= 3025 \end{aligned}$$

5. Misal, $b_n = \frac{1}{a_n}$

   $b_n = 2b_{n-1} - b_{n-2}$

   persamaan karakterisitik

   $r^2 - 2r + 1 = 0$

   $(r - 1)^2 = 0$

   $r_{1,2} = 1$

   solusi

   $b_n = c_1(r_1)^n + c_2(r_2)^n n$

   $b_n = c_1 + c_2 n$

   untuk $n = 1 \Rightarrow 1 = c_1 + c_2$

   untuk $n = 2 \Rightarrow \frac{5}{3} = c_1 + 2c_2$

   ________________ -

   $-\frac{2}{3} = -c_2 \Rightarrow c_2 = \frac{2}{3}$

$c_1 + c_2 = 1 \Rightarrow c_1 + \frac{2}{3} = 1$

$c_1 = \frac{1}{3}$

Sehingga,

$b_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}n$

$b_n = \frac{1+2n}{3}$

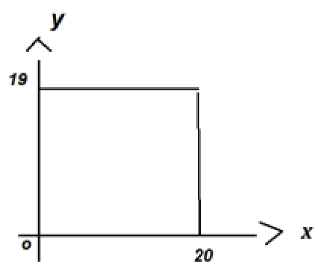
$\frac{1}{b_n} = \frac{3}{1+2n}$

$a_n = \frac{3}{1+2n}$

$a_{2020} = \frac{3}{4041} = \frac{1}{1347} = \frac{p}{q}$

Jadi, $p + q = 1348$

6.



$0 \leq x \leq 20 \Rightarrow x$ ganjil ada 10 buah

x genap ada 11 buah $0 \leq y \leq 19 \Rightarrow y$ ganjil ada 10 buah

y genap ada 10 buah

Misal P(a,b) dan Q(c,d)

Titik tengah PQ adalah R.

Dengan $R\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$

$\frac{a+c}{2}$ bulat jika a dan c memiliki paritas yang sama

$\frac{b+d}{2}$ bulat jika b dan d memiliki paritas yang sama

Maka banyak cara pemilihan P dan Q :

- a,c genap dan b,d genap → 11 × 10 = 110 buah
- a,c genap dan b,d ganjil → 11 × 10 = 110 buah
- a,c ganjil dan b,d genap → 10 × 10 = 100 buah
- a,c ganjil dan b,d ganjil → 10 × 10 = 100 buah

Sehingga, banyak cara memiliki P,Q adalah :

= ${}_{110}C_2 + {}_{110}C_2 + {}_{100}C_2 + {}_{100}C_2$

= $2({}_{110}C_2 + {}_{100}C_2)$

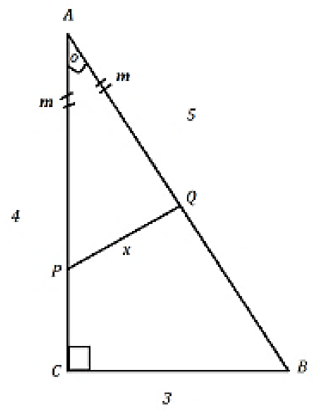
= $2\left(\frac{110 \cdot 109}{1 \cdot 2} + \frac{100 \cdot 99}{1 \cdot 2}\right)$

= $110 \cdot 109 + 100 \cdot 99$

= 11990 + 9900

= 21890 cara

7.



$\frac{[APQ]}{[ABC]} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot m \cdot \sin Q}{\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \sin Q} = \frac{1}{2}$

$m^2 = 10$

$m = \sqrt{10}$

$\cos Q = \frac{m^2+m^2-x^2}{2m^2} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{20-x^2}{20} = \frac{4}{5}$

$100 - 5x^2 = 80$

$x^2 = 4$

$x = 2$

Jadi, $PQ = 2$

8. Syarat $\frac{20-x^2}{1-x} \geq 0$

$\frac{(\sqrt{20}+x)(\sqrt{20}-x)}{1-x} \geq 0$

Pembuat nol

$x = -\sqrt{20}, x = \sqrt{20}, x = 1$

Syarat penyebut $x \neq 1$

Jadi, $-\sqrt{20} \leq x \leq 1$ atau $x \geq \sqrt{20}$

a. untuk $x \geq \sqrt{20}$

$x + 1 + \frac{19}{x-1} = \frac{20-x^2}{1-x}$

$\frac{x^2-1+19}{x-1} = \frac{20-x^2}{1-x}$

$\frac{x^2+18}{x-1} = \frac{x^2-20}{x-1}$

18 = 20 (TM)

b. untuk $-1 \leq x < 1$

$x + 1 + \left(\frac{19}{-(x-1)}\right) = \frac{20-x^2}{1-x}$

$\frac{x^2-1+19}{x-1} = \frac{20-x^2}{1-x}$

$\frac{x^2-20}{x-1} = \frac{x^2-20}{x-1}$
$-20 = -20$

c. untuk $-\sqrt{20} \leq x < -1$
$-(x+1) - \left(\frac{19}{-(x-1)}\right) = \frac{20-x^2}{1-x}$
$\frac{-x^2+1-19}{x-1} = \frac{20-x^2}{1-x}$
$\frac{-x^2-18}{x-1} = \frac{x^2-20}{x-1}$
$-18 = -20$ (TM)

Jadi, penyelesaian $-1 \leq x < 1$ atau dituliskan [-1,1)
Maka a = -1 dan b = 1 sehingga b - a = 1 - (-1) = 2

9. Klaim. Tidak ada nilai n yang memenuhi dengan n > 5.
Tinjau bahwa b = n - a dengan a,b ≤ n - 1. Demikian haruslah
$$a^2 + b^2 = a^2 + (n-a)^2 = a^2 + n^2 - 2an + a^2 = 2a^2 - 2an + n^2$$
bilangan prima. Tinjau modulo 5.
$$2a^2 - 2an + n^2 \equiv 2a^2 + n^2 + 3an \pmod 5$$
a. Jika $n \equiv 0 \pmod 5$, maka
$2a^2 + n^2 + 3an \equiv 2a^2 \pmod 5$
Untuk $a \equiv 0 \pmod 5$ menyebabkan $2a^2 + n^2 - 2an$ bukan bilangan prima. Sehingga untuk $n \equiv 0$ (mod 5) tidak memenuhi.

b. Jika $n \equiv 1 \pmod 5$, maka
$2a^2 + n^2 + 3an \equiv 2a^2 + 3a + 1 \pmod 5$
Untuk $a \equiv 4 \pmod 5$, maka
$2a^2 + 3a + 1 \equiv 32 + 12 + 1 \equiv 45 \equiv 0 \pmod 5$
Sehingga ada nilai a yang menyebabkan $2a^2 - 2an + n^2$ bukan bilangan prima.

c. Untuk $n \equiv 2 \pmod 5$, maka
$2a^2 + n^2 + 3an \equiv 2a^2 + 4 + 6a \pmod 5$
Untuk $a \equiv 3 \pmod 5$, maka
$2a^2 + 6a + 4 \equiv 18 + 18 + 4 \equiv 40 \equiv 0 \pmod 5$
Sehingga ada nilai a yang menyebabkan $2a^2 - 2an + n^2$ bukan bilangan prima.

d. Untuk $n \equiv 3 \pmod 5$, maka
$2a^2 + n^2 + 3an \equiv 2a^2 + 9 + 9a \pmod 5$
Untuk $a \equiv 1 \pmod 5$, maka
$2a^2 + 9a + 9 \equiv 2 + 9 + 9 \equiv 20 \equiv 0 \pmod 5$
Sehingga ada nilai a yang menyebabkan $2a^2 - 2an + n2$ bukan bilangan prima.

e. Untuk $n \equiv 4 \pmod 5$, maka
$2a^2 + n^2 + 3an \equiv 2a^2 + 16 + 12a \pmod 5$
Untuk $a \equiv 1 \pmod 5$, maka
$2a^2 + 12a + 16 \equiv 2 + 12 + 16 \equiv 30 \equiv 0 \pmod 5$
Sehingga ada nilai a yang menyebabkan $2a^2 - 2an + n^2$ bukan bilangan prima.

Demikian untuk $n > 5$ tidak ada nilai n yang memenuhi sehingga setiap pasangan bilangan asli (a,b) sehingga $a^2 + b^2$ bilangan prima. Demikian haruslah $n \leq 5$. Dengan mencoba semua kemungkinan nilai n, kita peroleh nilai n yang memenuhi adalah n = 2,3,5.
Jadi, jumlah semua nilai n yang memenuhi adalah 2 + 3 + 5 = 10.

10. Misalkan banyak anggota komite tersebut dihadiri oleh n orang.
Misalkan terdapat komite A dan B sedang mengikuti rapat bersama. Banyak cara memilih 2 orang dari 10 orang tersebut adalah $\binom{10}{2}$. Karena ada 40 rapat, maka minimal ada

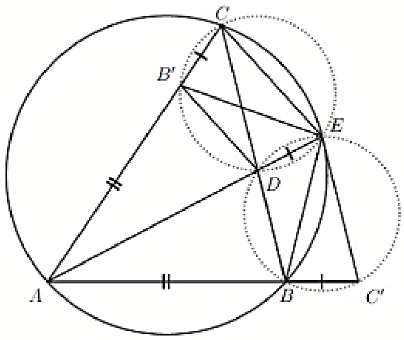
$$40\binom{10}{2} = 40 \cdot 45 = 1800$$

Sehingga haruslah

$$\binom{n}{2} \geq 1800 \Rightarrow \frac{n(n-1)}{2} \geq 1800$$

yang ekuivalen dengan $n(n-1) \geq 3600$. Cek $n = 61$, maka $n(n-1) = 3660$ dan $n = 60$ menghasilkan $n(n-1) = 3540$. Demikian nilai n terkecil haruslah n = 61.

11. Karena AC = AB + DE, maka AC > AB. Misalkan C' pada sinar AB sehingga panjang AC'' = AC dan B' pada AC sehingga AB' = AB. Tinjau bahwa panjang BC' = DE = B'C.



Klaim(1). Segitiga ACE kongruen dengan segitiga $AC'E$ dan segitiga $AB'D$ kongruen dengan segitiga ABD.
Diketahui bahwa AD garis bagi $\angle BAC$. Misalkan $\angle BAD = \angle CAD = \alpha$. Karena panjang BC = $B'A$, $\angle BAD = \angle B'AD = \alpha$, dan AD = AD, maka segitiga $AB'D$ kongruen dengan segitiga ABD (sisi-sudut-sisi). Karena panjang $C'A$ = CA, $\angle C'AE = \angle CAE = \alpha$, dan AE = AE, maka segitiga $AC'E$ kongruen dengan segitiga ACE (sisi-sudut-sisi). Terbukti.
Dari klaim(1), kita peroleh bahwa panjang BD = $B'D$ dan panjang $C'E$ = CE. Sehingga kita peroleh bahwa $B'DEC$ kongruen dengan $BDEC'$. Akibatnya, kita dapatkan $\angle EB'D = \angle EBD$. Tinjau bahwa dari hubungan sudut keliling, kita peroleh

$$\angle EB'D = \angle EBD = \angle EBC = \angle EAC = \alpha$$

dan juga

$$\angle ECD = \angle ECB = \angle EAB = \alpha$$

Karena $\angle EB'D = \angle ECD = \alpha$, demikian $B'DEC$ merupakan segiempat tali busur.
Karena $B'DEC$ dan $BDEC'$ kongruen, maka $BDEC'$ juga segiempat tali busur.

Klaim(2). BD sejajar dengan $C'E$ dan $B'D$ sejajar dengan $C'E$.
Tinjau segiempat tali busur $BDEC'$. Menurut power of point, maka

$$AD \cdot AE = AB \cdot AC'$$
$$AD \cdot (AD + DE) = AB \cdot (AB + BC')$$
$$AD^2 + AD \cdot DE = AB^2 \cdot AB \cdot BC'$$
$$AD^2 - AB^2 = AB \cdot BC' - AD \cdot DE$$
$$(AD + AB)(AD - AB) = AB \cdot B'C - AD \cdot B'C$$
$$(AD + AB)(AD - AB) = B'C(AB - AD)$$

Jika $AD \neq AB$, akibatnya AD + AB = $-\ B'C$ yang jelas tidak mungkin. Demikian haruslah AD = AB yang berakibat $\angle ADB = \angle ABD$. Karena $BDEC'$ segiempat tali busur, maka

$$\angle ABD = \angle DEC' \text{ dan } BC'E = \angle ADB$$

yang menyimpulkan $\angle BC'E = \angle DEC' = \angle ABD = \angle ADB$. Karena

$$\angle ABD = \angle AD'E \text{ dan } ADB = \angle AEC'$$

Maka BD sejajar dengan EC'. Dengan cara yang sama pada $DB'CE$, kita peroleh $B'D$ sejajar dengan CE. Tinjau kembali bahwa $\angle DAB' = \alpha$. Maka

$$\angle AB'D = \angle ADB' = 90^o - \frac{\alpha}{2}$$

Karena $B'D$ sejajar dengan CE, maka kita peroleh

$$\angle ACE = \angle AB'D = 90^o - \frac{\alpha}{2}$$

Tinjau kembali bahwa $\angle DCE = \alpha$. Maka kita peroleh

$$\angle ACD = \angle ACE - \angle DCE = 90^o - \frac{\alpha}{2} - \alpha = 90^o - \frac{3\alpha}{2}$$

Sedangkan, kita tahu bahwa $\angle ACD = \angle ACB = 48^o$. Demikian

$$48^o = 90^o - \frac{3\alpha}{2}$$
$$48^o - 90^o = -\frac{3\alpha}{2}$$
$$-42^o = -\frac{3\alpha}{2}$$
$$-42^o \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \alpha$$
$$\alpha = 28^o$$

Demikian kita peroleh $\angle BAC = 2\alpha = 2 \cdot 28^o = 56^o$. Demikian

$$\angle ABC = 180^o - \angle BAC - \angle ACB = 180^o - 56^o - 48^o = 76^o$$

Jadi, $\angle ABC = 76^o$.

12. Perhatikan bahwa persamaan soal ekuivalen dengan

$$(n + p)(n - 1)(m - 1) = 2020 - m$$

Karena ruas kiri habis dibagi (m - 1), maka haruslah ruas kanan habis dibagi (m - 1) juga. Demikian (m - 1)|(2020 - m) yang berarti

$$\frac{2020-m}{m-1} =-\frac{m-2020}{m-1} = \frac{(m-1)-2019}{m-1} =-\left(1 - \frac{2019}{m-1}\right) =-1 + \frac{2019}{m-1}$$

bilangan bulat. Demikian haruslah (m - 1) | 2019. Demikian m - 1 = 1, 3, 673, 2019 yang berarti m = 2, 4, 674, 2020.

Kasus 1.

Jika m = 2, maka

$(n + p)(n - 1)(2 - 1) = 2020 - 2$

$(n+p)(n-1)\cdot 1 = 2018$
$(n+p)(n-1) = 2018$
$(n+p)(n-1) = 2\cdot 1009$
Tinjau bahwa n + p > n - 1.

- Jika n + p = 2018 dan n - 1 = 1, maka n = 2 yang berarti p = 2018 - n = 2018 - 2 = 2016. Tidak memenuhi.
- Jika n + p = 1009 dan n - 1 = 2, maka n = 3 yang berarti p = 1009 - n = 1009 - 3 = 1006. Tidak memenuhi.

Demikian dalam kasus ini tidak ada bilangan prima p yang memenuhi.

Kasus 2:
Jika m = 4, maka
$(n+p)(n-1)(4-1) = 2020-4$
$(n+p)(n-1)\cdot 3 = 2016$
$(n+p)(n-1) = 672$
$(n+p)(n-1) = 2^5\cdot 3\cdot 7$
Tinjau bahwa n + p > n - 1.

- Jika n + p = 672 dan n - 1 = 1, maka n = 2 yang berarti $p = 672 - n = 672 - 2 = 670$. Tidak memenuhi.
- Jika n + p = 336 dan n - 1 = 2, maka n = 3 yang berarti $p = 336 - n = 336 - 3 = 333$. Tidak memenuhi.
- Jika n + p = 224 dan n -1 = 3, maka n = 4 yang berarti $p = 224 - n = 224 - 4 = 220$. Tidak memenuhi.
- Jika n + p = 168 dan n - 1 = 4, maka n = 5 yang berarti $p = 168 - n = 168 - 5 = 163$. Memenuhi.
  Cek kembali, untuk p = 163 didapatkan pasangan (m,n) = (4,5).
- Jika n + p = 112 dan n - 1 = 6, maka n = 7 yang berarti $p = 112 - n = 112 - 7 = 105$. Tidak memenuhi.
- Jika n + p = 96 dan n - 1 = 7, maka n = 8 yang berarti $p = 96 - n = 96 - 8 = 88$. Tidak memenuhi.
- Jika n + p = 84 dan n - 1 = 8, maka n = 9 yang berarti $p = 84 - n = 84 - 9 = 75$. Tidak memenuhi.
- Jika n + p = 56 dan n - 1 = 12, maka n = 13 yang berarti $p = 56 - n = 56 - 13 = 43$. Memenuhi.
  Cek kembali, untuk p = 43 didapatkan pasangan (m,n) = (4,13).
- Jika n + p = 48 dan n - 1 = 14, maka n = 15 yang berarti $p = 48 - n = 48 - 15 = 33$. Tidak memenuhi.
- Jika n + p = 42 dan n - 1 = 16, maka n = 17 yang berarti $p = 42 - n = 42 - 17 = 25$. Tidak memenuhi.
- Jika n + p = 32 dan n - 1 = 21, maka n = 22 yang berarti $p = 32 - n = 32 - 22 = 10$. Tidak memenuhi.
- Jika n + p = 28 dan n - 1 = 24, maka n = 25 yang berarti $p = 28 - n = 28 - 25 = 3$. Memenuhi.
- Cek kembali, untuk p = 3 didapatkan pasangan (m,n) = (4,25).

Demikian untuk kasus ini diperoleh p = 3, 43, 163.

Kasus 3.
Jika m = 674, maka
$(n+p)(n-1)(674-1) = 2020-674$
$(n+p)(n-1)\cdot 673 = 1346$
$(n+p)(n-1) = 2$
Maka haruslah n + p = 2 dan n - 1 = 1. Demikian n = 2 yang berarti

$$p = 2 - n = 2 - 3 = -1$$

Tidak memenuhi.

Kasus 4.
Jika m = 2020, maka
$(n + p)(n - 1)(2020 - 1) = 2020 - 2020$
$(n + p)(n - 1) \cdot 2019 = 0$
$(n + p)(n - 1) = 0$
Demikian haruslah n = 1, tetapi n > 1 yang berarti tidak memenuhi.
Jadi, semua bilangan prima p yang memenuhi 3, 43, 163.

13. Tinjau bahwa

$$P(x) - P(x - 2) = 6x^2 - 8x$$

Misalkan $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$. Maka

$$P(1) = a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0$$

Tinjau bahwa

$$\begin{aligned} P(x) &= a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 \\ P(x-2) &= a_n(x-2)^n + a_{n-1}x^{n-2} + \ldots + a_1(x-2) + a_0 \quad - \\ \hline P(x) - P(x-2) &= a_n(x^n - (x-2)^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - (x-2)^{n-1}) + \ldots + a_1(x - (x-2)) \\ 6x^2 - 8x &= a_n(x^n - (x-2)^n + a_{n-1}(x^{n-1} - (x-2)^{n-1} + \ldots + a_1(x - (x-2)) \end{aligned}$$

Tinjau bentuk $a_i\left(x^i - (x-2)^i\right)$. Dengan Binomial Newton, kita peroleh

$$(x-2)^i = \binom{i}{0}x^i + \binom{i}{1}x^{i-1}(-2) + \binom{i}{2}x^{i-2}(-2)^2 + \cdots + \binom{i}{i}(-2)^i$$

yang berarti

$$x^i - (x-2)^i = -\binom{i}{i}x^{i-1}(-2) - \binom{i}{2}x^{i-2}(-2)^2 - \cdots - \binom{i}{i}(-2)^i$$

Demikian bentuk

$$a_n(x^n - (x-2)^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - (x-2)^{n-1}) + \cdots + a_1\left(x - (x-2)\right)$$

bederajat $n - 1$. Karena $6x^2 - 8x$ berderajat 2, maka haruslah $n = 3$.
$P(x) - P(x - 2) = a_3 (x^3 - (x - 2)^3) + a_2 (x^2 - (x - 2)^2) + a_1 (x - (x - 2))$
$6x^2 - 8x = a_3 (6x^2 - 12x + 8) + a^2 (4x - 4) + 2a_1$
$6x^2 - 8x = 6a_3x^2 - 12a_3x + 8a_3 + 4a_2x - 4a_2 + 2a_1$
$6x^2 - 8x = 6a_3x^2 - (12a_3 - 4a_2)x + (8a_3 - 4a_2 + 2a_1)$
Demikian haruslah persamaan berikut memenuhi

$$\begin{aligned} 6a_3 &= 6 \qquad (1) \\ 12a_3 - 4a_2 &= 8 \qquad (2) \\ 8a_3 - 4a_2 + 2a_1 &= 0 \qquad (3) \end{aligned}$$

Dari persamaan (1), kita peroleh $a_3 = 1$. Dari persamaan (2), kita dapatkan

$$4a_2 = 12a_3 - 8 = 12 \cdot 1 - 8 = 12 - 8 = 4$$

yang berarti $a_2 = 1$. Dari persamaan (3), kita peroleh

$$2a_1 = 0 - 8a_3 + 4a_2 = 0 - 8 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 0 - 8 + 4 = -4$$

yang berarti $a_1 = -2$. Tinjau bahwa P(1) = 1 yang berarti

$$1 = a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 1 + 1 - 2 + a_0 = 0 + a_0 = a_0$$

yang berarti $a_0 = 1$. Demikian kita peroleh bahwa

$$P(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$$

Demikian kita peroleh

$$P(2) = 2^3 + 2^3 - 2 \cdot 2 + 1 = 8 + 4 - 4 + 1 = 9$$

Jadi, nilai dari P(2) adalah 9.

14. Karena $x \leq y \leq z$, maka $x + y + z \geq 3x$ yang berarti $32 \geq 3x$. Karena x bilangan asli, maka $10 \geq x$.
    - Untuk x = 0, maka y + z = 32. Sehingga kita peroleh
      (y, z) = (0, 32), (1, 31), (2, 30), ..., (16, 16) yang berarti ada 17 pasangan.
    - Untuk x = 1, maka y + z = 31. Sehingga kita peroleh
      (y, z) = (1, 30), (2, 29), (3, 28), ..., (15, 16) yang berarti ada 15 pasangan.
    - Untuk x = 2, maka y + z = 30. Sehingga kita peroleh
      (y, z) = (2, 28), (3, 27), (4, 26), ..., (15, 15) yang berarti ada 14 pasangan.
    - Untuk x = 3, maka y + z = 29. Sehingga kita peroleh
      (y, z) = (3, 26), (4, 25), (5, 24), ..., (14, 15) yang berarti ada 12 pasangan.
    - Untuk x = 4, maka y + z = 28. Sehingga kita peroleh
      (y, z) = (4, 24), (5, 23), (6, 22), ..., (14, 14) yang berarti ada 11 pasangan.
    - Untuk x = 5, maka y + z = 27. Sehingga kita peroleh
      (y, z) = (5, 22), (6, 21), (7, 20), ..., (13, 14) yang berarti ada 9 pasangan.
    - Untuk x = 6, maka y + z = 26. Sehingga kita peroleh
      (y, z) = (6, 20), (7, 19)(8, 18), ..., (13, 13) yang berarti ada 8 pasangan.
    - Untuk x = 7, maka y + z = 25. Sehingga kita peroleh
      (y, z) = (7, 18), (8, 17), (9, 16), ..., (12, 13) yang berarti ada 6 pasangan.
    - Untuk x = 8, maka y + z = 24. Sehingga kita peroleh
      (y, z) = (8, 16), (9, 15), (10, 14), (11, 13), (12, 12) yang berarti ada 5 pasangan.
    - Untuk x = 9, maka y + z = 23. Sehingga kita peroleh
      (y, z) = (9, 14), (10, 13), (11, 12) yang berarti ada 3 pasangan.
    - Untuk x = 10, maka y + z = 22. Sehingga kita peroleh
      (y, z) = (10, 12), (11, 11) yang berarti ada 2 pasangan.

    Demikian total pasangan (x, y, z) adalah

    $$17 + 15 + 14 + 12 + 11 + 9 + 8 + 6 + 5 + 3 + 2 = 102$$

15. Diketahui bahwa [ABC] = 20[PQR] dan

    $$[ARQ] + [BRP] + [QPC] = \frac{19}{20}[ABC] \qquad (1)$$

    Misalkan $\frac{AQ}{AC} = a, \frac{BR}{BA} = b$ dan $\frac{CP}{CB} = c$. Maka $a + b + c = 1$. Kuadratkan, kita peroleh

    $$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) = 1$$

    yang ekuivalen dengan

    $$a^2 + b^2 + c^2 = 1 - 2(ab + bc + ac)$$

    Tinjau bahwa

    $$\frac{[ARQ]}{[ARC]} = \frac{AQ}{AC} = a, \frac{[BPR]}{[BPA]} = \frac{BR}{BA} = b, \frac{[QCP]}{[BQC]} = \frac{CP}{CB} = c$$

Perhatikan bahwa

$$\frac{[ARC]}{[ABC]} = \frac{AR}{AB} = \frac{AB - BR}{AB} = 1 - \frac{BR}{AB} = 1 - b$$

yang berarti [ARC] = (1 - b)[ABC]. Dengan cara yang sama, kita peroleh

$$[APB] = (1 - c)[ABC] \text{ dan } [BQC] = (1 - a)[ABC]$$

Tinjau bahwa $[ARQ] = a \cdot [ARC]$. Demikian kita peroleh

$$[ARQ] = a \cdot [ARC] = a \cdot (1 - b)[ABC] = (a - ab)[ABC]$$

Dengan cara yang sama, kita peroleh juga

$$[BPR] = (b - bc)[ABC] \text{ dan } [QCP] = (c - ac)[ABC]$$

Tinjau persamaan (1)

$$[ARQ] + [BRP] + [QPC] = \frac{19}{20}[ABC]$$

$$(a - ab)[ABC] + (b - bc)[ABC] + (c - ac)[ABC] = \frac{19}{20}[ABC]$$

$$a - ab + b - bc + c - ac = \frac{19}{20}$$

$$(a + b + c) - (ab + bc + ac) = \frac{19}{20}$$

$$1 - (ab + bc + ac) = \frac{19}{20}$$

$$ab + bc + ac = 1 - \frac{19}{20}$$

$$ab + bc + ac = \frac{1}{20}$$

Demikian kita peroleh

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 - 2(ab + bc + ac) = 1 - 2 \cdot \frac{1}{20} = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}$$

Jadi, nilai dari $\left(\frac{AQ}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BR}{BA}\right)^2 + \left(\frac{CP}{CB}\right)^2$ adalah $\frac{9}{10}$.

16. Tinjau bahwa

$$a^2 < b = a^2 + 1 < (a + 1)^2$$

yang berarti b bukan bilangan kuadrat sempurna. Dengan alasan yang sama, maka c dan d juga bukan kuadrat sempurna. Akibatnya, $\tau(b)$, $\tau(c)$, dan $\tau(d)$ masing-masing bernilai genap. Sehingga

$$\tau(b) + \tau(c) + \tau(d)$$

bernilai genap. Karena $\tau(a) + \tau(b) + \tau(c) + \tau(d)$ bernilai ganjil, dapat disimpulkan bahwa $\tau(a)$ harus bernilai ganjil. Demikian dapat disimpulkan bahwa a merupakan bilangan kuadrat sempurna.

- Jika a = 1, maka b = 2, c = 5, dan d = 26. Kita peroleh kwartet (a,b,c,d) = (1,2,5,26).
- Jika a = 4, maka b = 17, c = 230 dan d = 52.900. Kita peroleh kwartet (a,b,c,d) = (4, 17, 230, 52.900).
- Jika a = 9, maka b = 82, c = 6.724 dan d = 45.212.177. Karena haruslah a,b,c,d < 10^6, maka tidak ada kwartet (a,b,c,d) yang memenuhi. Dapat disimpulkan bahwa untuk a ≥ 9 tidak ada kwartet (a,b,c,d) yang memenuhi.

Jadi, banyak kwartet (a,b,c,d) yang memenuhi adalah 2.

17. Tinjau bahwa $ab \geq 0$. Maka $4ab \geq 3ab$. Kita peroleh

$$ab + 2ac = \frac{3ab+6ac}{3} \leq \frac{4ab+6ac}{3} = \frac{2a(2b+3c)}{3} = \frac{2a(1-a)}{3} = \frac{2a-2a^2}{3}$$

Tinjau bahwa $f(x) = ax^2 + bx + c$ jika a < 0 memiliki nilai maksimum

$$\frac{4ac-b^2}{4a}$$

Demikian nilai maksimum dari $-2a^2 + 2a$ adalah

$$\frac{4(-2)(0)-2^2}{4(-2)} = \frac{-4}{-8} = \frac{1}{2}$$

Sehingga kita peroleh

$$\frac{2a-2a^2}{3} \leq \frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{6}$$

Jadi, kita dapatkan

$$ab + 2ac \leq \frac{1}{6}$$

Jadi, nilai maksimum dari $ab + 2ac$ adalah $\frac{1}{6}$. Kesamaan saat $a = \frac{1}{2}, b = 0$ dan $c = \frac{1}{6}$.

18. Misalkan $n + 3 = k^2$ untuk suatu bilangan bulat k. Maka $n = k^2 - 3$. Demikian

$$2020n + 1 = 2020(k^2 - 3) + 1 = 2020k^2 - 6060 + 1 = 2020k^2 - 6059$$

Diketahui 2020n + 1 kuadrat sempurna, misalkan $2020n + 1 = m^2$ dengan m bilangan ganjil. Tinjau mod 2020. Kita peroleh

$$m^2 \equiv 1 \pmod{2020}$$

Tinjau bahwa $2020 = 4 \cdot 5 \cdot 101$. Demikian

$$m^2 \equiv 1 \ (mod\ 4), \qquad m^2 \equiv 1 \ (mod\ 5), \qquad m^2 \equiv 1 \ (mod\ 101)$$

Sehingga kita peroleh

$$m \equiv 1, 3 \ (mod\ 4), \qquad m \equiv 1, 4 \ (mod\ 5), \qquad m \equiv 1, 100 \ (mod\ 101)$$

Misalkan

$$m \equiv r_1 \ (mod\ 4), \qquad m \equiv r_2 \ (mod\ 5), \qquad m \equiv r_3 \ (mod\ 101)$$

dimana $r_1 \in \{1, 4\}$, $r_2 \in \{1, 4\}$ dan $r_3 \in \{1, 100\}$. Kita gunakan Chinese Remainder Theorem.

Tuliskan $D = 4 \cdot 5 \cdot 101 = 2020$

Tuliskan

$$d_1 = \frac{D}{4} = 505, \qquad d_2 = \frac{D}{5} = 404, \qquad d_3 = \frac{D}{101} = 20$$

Misalkan z_1, z_2, z_3 merupakan bilangan asli terkecil sehingga

$$z_1d_1 \equiv 1 \ (mod\ 4), \qquad z_2d_2 \equiv 1 \ (mod\ 5), \qquad z_3d_3 \equiv 1 \ (mod\ 101)$$

Sehingga kita peroleh $z_1 = 1$, $z_2 = 4$, dan $z_3 = 96$. Maka kita peroleh

$$\begin{aligned} m &\equiv r_1d_1z_1 + r_2d_2z_2 + r_3d_2z_3 \ (mod\ D) \\ &\equiv r_1 \cdot 505 \cdot 1 + r_2 \cdot 404 \cdot 4 + r_3 \cdot 20 \cdot 96 \ (mod\ 2020) \\ m &\equiv 505r_1 + 1616r_2 + 1920r_3 \ (mod\ 2020) \end{aligned}$$

Dengan mensubtitusikan semua kemungkinan nilai r_1, r_2, r_3 kita peroleh bahwa,

$$m \equiv 1, 201, 809, 1009, 1011, 1211, 1819, 2019 \ (mod\ 2020)$$

Kita coba satu per satu, ternyata m = 1211 memenuhi. Sehingga kita peroleh k = 27.
Demikian

$$n = 27^2 - 3 = 729 - 3 = 726$$

Jadi, nilai n terkecil adalah 726

19. Kita dapat menggunakan komplemen. Komplemen dari kejadian tersebut yaitu salah satu tim selalu menang atau salah satu tim selalu kalah. Setiap bertanding sebanyak 4 kali. Peluang salah satu tim selalu menang dalam permainan tersebut adalah $\frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$. Kita dapat memilih 1 tim dari 5 tim yang ada, sehingga peluangnya adalah

$$\binom{5}{1} \cdot \frac{1}{16} = 5 \cdot \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

Dengan cara yang sama, maka peluang salah satu tim selalu kalah adalah $\frac{5}{16}$. Tetapi, ada kejadian dimana terdapat tim yang selalu menang dan tim yang lain yang selalu kalah. Andaikan tim tersebut adalah tim A dan tim B. Maka tim A mengalami kemenangan sebanyak 4 kali dan tim B mengalami kekalahan sebanyak 4 kali. Sehingga ada 7 pertandingan yang dialami oleh tim A dan tim B. Maka peluangnya adalah $\frac{1}{2^7} = \frac{1}{128}$.

Karena kita dapat memilih 2 tim dari 5 tim yang sesuai dengan kondisi tersebut, maka peluangnya adalah

$$P_2^5 \cdot \frac{1}{128} = 20 \cdot \frac{1}{128} = \frac{5}{32}$$

karena kejadian tim A menang dan tim B kalah dengan tim A kalah dan tim B menang merupakan kejadian yang berbeda (dengan kata lain, hal ini memperhatikan urutan).

Demikian peluang terdapat satu tim yang selalu menang atau satu tim yang selalu kalah adalah

$$\frac{5}{16} + \frac{5}{16} - \frac{5}{32} = \frac{10 + 10 - 5}{32} = \frac{15}{32}$$

Sehingga peluang bahwa setiap tim menang minimal sekali dan kalah minimal sekali adalah

$$1 - \frac{15}{32} = \frac{32 - 15}{32} = \frac{17}{32}$$

20. Misalkan AH memotong BC di titik D dan CH memotong AB di titik E. Misalkan panjang AE = x, BE = y, dan HE = z.

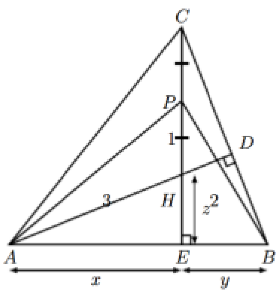
Misalkan $\angle EAH$ = α. Maka kita peroleh

$$\angle DHC = \angle AHE = 90^o - \angle EAH = 90^o - \alpha$$

Sehingga kita peroleh

$$\angle ECB = \angle HCD = 90^o - \angle DHC = 90^o - (90^o - \alpha) = 90^o - 90^o + \alpha = \alpha$$

Demikian kita peroleh $\angle EBC = 90^o - \angle ECB = 90^o - \alpha$.



Karena $\angle CEB = \angle EAH = \alpha$, $\angle AEH = \angle BEC$, dan $\angle ABC = \angle EHA = 90^o - \alpha$, maka segitiga AEH sebangun dengan segitiga CEB. Akibatnya,

$$\frac{HE}{AE} = \frac{EB}{CE} \Rightarrow \frac{z}{x} = \frac{y}{2+z}$$

Dengan mengalikan silang, kita peroleh $xy = z(2 + z) = 2z + z^2$. Sedangkan, kita tahu bahwa

$$AB^2 = (x + y)2 = x^2 + y^2 + 2xy$$

Perhatikan segitiga AEP, dengan phytagoras kita dapatkan

$$AP^2 = AE^2 + PE^2 \Rightarrow 9 = x^2 + (1 + z)^2$$

yang ekuivalen dengan

$$x^2 = 9 - (1 + z)^2 = 9 - (1 + 2z + z^2) = 9 - 1 - 2z - z^2 = 8 - 2z - z^2$$

Perhatikan segitiga BEP, dengan phytagoras kita dapatkan

$$BP^2 = BE^2 + PE^2 \Rightarrow 4 = y^2 + (1 + z)^2$$

yang ekuivalen dengan

$$y^2 = 4 - (1 + z)^2 = 4 - (1 + 2z + z^2) = 4 - 1 - 2z - z^2 = 3 - 2z - z^2$$

Subtitusiakan ke persamaan (1). Kita peroleh

$$\begin{aligned} AB^2 &= x^2 + y^2 + 2yz \\ &= 8 - 2z - z^2 + 3 - 2z - z^2 + 2(2z + z^2) \\ &= 11 - 4z - 2z^2 + 4z + 2z^2 \\ &= 11 \end{aligned}$$

$AB = \sqrt{11}$

Jadi, panjang AB adalah $\sqrt{11}$.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2020

TINGKAT PROVINSI

BIDANG MATEMATIKA

WAKTU : 210 MENIT

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2020

1. Banyaknya bilangan asli $n < 800$ sehingga 8 membagi $\lfloor \frac{n}{5} \rfloor$, namun 8 tidak membagi n adalah …

2. Sejumlah siswa mengikuti ujian dengan komposisi soal sebagai berikut:

    - Bagian pertama terdiri dari 3 soal dengan dua pilihan (benar/salah)
    - Bagian kedua terdiri dari 5 soal pilihan ganda dengan lima pilihan (A,B,C,D,E)

    Banyaknya siswa minimal agar senantiasa terdapat dua siswa dengan jawaban sama persis baik pada bagian pertama maupun kedua adalah …

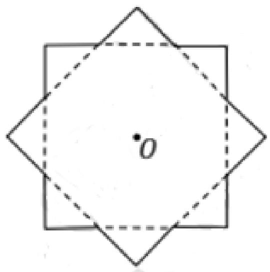
3. Misalkan x, y bilangan bulat positif dan

$$A = \sqrt{\log x}, B = \sqrt{\log y}$$

$$C = \log \sqrt{x}, D = \log \sqrt{y}$$

    Jika diketahui bahwa A, B, C, D semuanya bulat dan $A + B + C + D = 24$, maka $xy = 10^n$ dengan n = …

4. Diberikan sebuah persegi dengan jari-jari lingkaran luar 6 satuan dengan pusat lingkaran luar 0 (artinya jarak titik 0 ke titik sudut persegi adalah 6 satuan). Persegi tersebut dirotasikan sebesar 45° searah jarum jam dengan titik 0 sebagai titik pusat rotasi. Kedua persegi, sebelum dan sesudah rotasi, digabung menjadi satu bangun datar baru (perhatikan gambar di bawah) dengan keliling K dan luas L. Nilai dari $\left(\frac{L}{K}\right)^2$ adalah …



5. Diketahui himpunan $S = \{1, 2, \ldots, 4\}$. Banyaknya pasangan himpunan bagian tidak kosong A_1, A_2, …, A_6 yang memenuhi tiga syarat berikut sekaligus:

    - $A_1 \cap A_2 = \emptyset$
    - $A_1 \cup A_2 \subseteq A_3$
    - $A_3 \subseteq \ldots \subseteq A_6$

    adalah …

6. Jika n adalah bilangan asli sehingga $4n + 808$ dan $9n + 1621$ merupakan bilangan kuadrat, maka n = …

7. Suatu barisan bilangan bulat $u_1, u_2, u_3, \ldots$ memenuhi

$$u_{n+1} - u_n = \begin{cases} 1, \text{ jika n ganjil} \\ 2, \text{jika n genap} \end{cases}$$

Jika $u_1 + u_2 + \ldots + u_{20} = 360$, maka $u_1 = \ldots$

8. Pada segiempat konveks $ABCD$ berlaku $\angle BAD = \angle BCD = 45^\circ$, $BC = AD = 5$, dan BC tidak sejajar AD. Keliling segiempat tersebut dapat dituliskan sebagai $p + q\sqrt{r}$ dengan p, q, r bulat dan r bebas kuadrat (tidak memiliki faktor bilangan kuadrat selain 1). Nilai $p + q + r$ adalah …

9. Suatu polinom $P(x)$ memenuhi

$$P\left(x + \frac{2}{x}\right) = \frac{x^3 + 1}{x} + \frac{x^3 + 8}{2x^2} + 3$$

Nilai dari $P(1)$ adalah …

10. Diketahui segitiga ABC dan garis bagi $\angle BAC$ memotong sisi BC di titik D. Lingkaran dengan pusat C dan melalui D memotong AD di $E(D \neq E)$, dan lingkaran dengan pusat A dan melalui E memotong AB di $X(X \neq A)$. Diketahui bahwa E terletak di dalam segitiga ABC. Jika $AB = 15$, $AD = 9$ dan $AC = 6$, maka $BX = \ldots$

11. Diberikan prisma dengan alas dan tutup berupa segi n beraturan. Semua titik sudut prisma (2n titik sudut) dilabeli dengan bilangan 1 atau -1. Diketahui bahwa untuk setiap sisi (muka) prisma, hasil kali semua label titik sudut pada sisi (muka) tersebut adalah -1. Hasil penjumlahan semua n dengan $23 \leq n \leq 54$ agar pelabelan seperti di atas mungkin dilakukan adalah …

12. Misalkan x dan y bilangan-bilangan real positif sehingga

$$\left(\frac{x}{5} + \frac{y}{3}\right)\left(\frac{5}{x} + \frac{3}{y}\right) = 139$$

Jika nilai maksimal dan minimal dari $\frac{x+y}{\sqrt{xy}}$ berturut-turut adalah M dan m, maka nilai dari $M - m$ adalah …

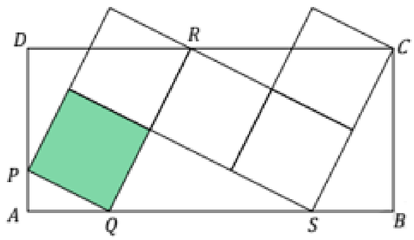
13. Diberikan suatu kubus yang terletak di atas tanah dengan 5 sisi (muka) berwarna putih dan satu sisi (muka) berwarna hitam. Pada awalnya, sisi berwarna hitam bukan merupakan sisi tegak. Kemudian kubus tersebut diputar pada salah satu rusuk pada alasnya sehingga alasnya berganti, dan diulangi sampai 8 kali. Peluang bahwa sisi berwarna hitam bukan sisi tegak lagi adalah …

14. Pada suatu segitiga tumpul, diketahui bahwa panjang garis tinggi terpanjang adalah 8 dan panjang salah satu garis tinggi lainnya adalah 3. Jika diketahui bahwa garis tinggi ketiga,memilki panjang bilangan prima, panjang garis tinggi tersebut adalah …

15. Misalkan m suatu bilangan asli. Suatu bilangan asli $n > 1$ dikatakan $rep - m$ jika terdapat bilangan asli x, y, z sehingga $x + y + z = m$ dan $\frac{x}{n-1} = \frac{y}{n} = \frac{z}{n+1}$. Diketahui bahwa terdapat tepat 32 bilangan $rep - m$ dengan salah satu diantaranya adalah 10. Bilangan asli k sehingga 10^k membagi m adalah ...

16. Misalkan H menyatakan himpunan semua bilangan asli yang dapat dituliskan sebagai $\frac{10n^2+25}{n+2}$ untuk suatu bilangan asli n. Jumlah semua anggota H adalah ...

17. Diberikan lima persegi kecil dan sebuah persegi panjang besar $ABCD$ seperti pada gambar berikut ini. Dalam gambar tersebut, titik P, Q, R, S terletak pada sisi persegi panjang $ABCD$. Jika diketahui luas persegi kecil adalah 1 satuan, tentukan luas persegi panjang $ABCD$.



18. Diberikan fungsi kuadrat $f(x) = x^2 + px + q$ dengan p dan q merupakan bilangan bulat. Misalkan a, b, c adalah bilangan bulat berbeda sehingga 2^{2020} habis membagi $f(a)$, $f(b)$ dan $f(c)$, tetapi 2^{1000} tidak habis membagi $b - a$ dan juga tidak habis membagi $c - a$. Tunjukkan bahwa 2^{1021} habis membagi $b - c$.

19. Tentukan semua bilangan irasional x sehingga $x^2 + 20x + 20$ dan $x^3 - 2020x + 1$ keduanya merupakan bilangan rasional.

20. Diketahui segitiga ABC tidak sama kaki dengan garis tinggi AA_1, BB_1 dan CC_1. Misalkan BA dan CA berturut-turut titik pada BB_1 dan CC_1 sehingga A_1B_A tegak lurus BB_1 dan A_1C_A tegak lurus CC_1. Garis B_AC_A dan BC berpotongan di titik T_A. Definisikan dengan cara yang sama titik T_B dan T_C. Buktikan bahwa T_A, T_B, T_C kolinear.

21. Disuatu kota, n anak mengikuti kompetisi matematika dengan nilai total berupa bilangan bulat non-negatif. Misalkan $k < n$ bilangan bulat positif. Untuk setiap anak s, ia mendapatkan:

- k buah permen untuk setiap poin yang diperolehnya, dan
- Untuk setiap anak lain t yang nilainya lebih tinggi dari s, maka s mendapatkan 1 buah permen untuk setiap poin selisih dari nilai t dan s.

Setelah semua permen dibagikan, ternyata tidak ada anak yang memperoleh permen lebih sedikit dari Badu, dan anak i anak yang memperoleh nilai lebih tinggi dari Badu. Tentukan semua nilai i yang mungkin.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2020

TINGKAT PROVINSI

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

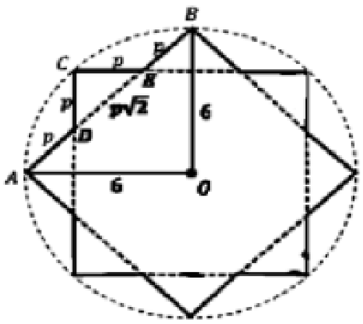
Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2020

1. Perhatikan, kita akan membagi dua kasus yaitu:
   - Untuk $\frac{n}{5}$ bulat
     Dapat dimisalkan n = 5p, untuk p bilangan cacah, maka diperoleh
     $\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{5p}{5} \right\rfloor = p.$
     Perhatikan juga bahwa 8 membagi $\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor$, maka dapat dimisalkan p = 8r untuk r bilangan cacah, sehingga n = 40r.
     Mengingat 8 tidak membagi n, maka hal ini jelas kontradiksi dengan n = 40r = 8(5r).
     Jadi, untuk kasus $\frac{n}{5}$ bulat, tidak ada n yang memenuhi.
   - Untuk $\frac{n}{5}$ tidak bulat
     Dapat dimisalkan n = 5p + q, untuk p bilangan cacah dan q = 1,2,3,4, maka diperoleh
     $\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{5p+q}{5} \right\rfloor = p + \left\lfloor \frac{q}{5} \right\rfloor = p.$
     Perhatikan juga bahwa 8 membagi $\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor$, maka dapat dimisalkan p = 8r untuk bilangan r bilangan cacah. Sehingga n = 40r + q.
     Mengingat n < 800, sehingga
     $n < 800 \Rightarrow 40r + q < 800$
     $\Leftrightarrow \quad r \leq 19$
     Diperoleh $r \in \{0,1,2, \ldots ,19\}$ dan $n(r) = 20$.
     Karena 8 tidak membagi n, maka ada 4 buah n untuk setiap r dengan q = 1,2,3,4. Jadi, jelas bahwa banyak n yang memenuhi adalah 4 x 20 = 80.

   Jadi, banyak n yang memenuhi adalah 80.
2. Perhatikan bahwa pada bagian pertama terdiri dari 3 soal, dengan dua pilihan. Artinya terdapat $2^3 = 8$ kemungkinan jawaban berbeda. Sedangkan, pada bagian kedua terdiri dari 5 soal pilihan ganda dengan lima pilihan. Artinya terdapat $5^5 = 3125$ kemungkinan jawaban berbeda.
   Sehingga total banyak kemungkinan jawaban berbeda adalah 8 x 3125 = 25000 kemungkinan.
   Dengan Pigeon Hole Principle (PHP) agar senantiasa terdapat dua siswa dengan jawaban sama persis pada kedua bagian sosial, maka banyak siswa minimal adalah 25000 + 1 = 25001 siswa.
3. Perhatikan, $A = \sqrt{\log x}$, $B = \sqrt{\log y}$, sehingga jelas bahwa $A, B \geq 0$.
   $C = \log \sqrt{x} = \log x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log x = \frac{1}{2} (\sqrt{\log x})^2 = \frac{1}{2} A^2$
   $D = \log \sqrt{y} = \log y^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log y = \frac{1}{2} (\sqrt{\log y})^2 = \frac{1}{2} B^2$
   Padahal, A + B + C + D = 24, sehingga
   $A + B + C + D = 24 \quad \Rightarrow A + B + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}B^2 = 24$
   $\Leftrightarrow 2A + 2B + A^2 + B^2 = 48$
   $\Leftrightarrow (A + 1)^2 + (B + 1)^2 = 50$
   Jelas bahwa (A,B) = {(0,6),(4,4),(6,0)}.

Perhatikan lagi,
Untuk (A,B) = (4,4) diperoleh
$xy = 10^n \Rightarrow n = \log xy$
$= \log x + \log y$
$= (\sqrt{\log x})^2 + (\sqrt{\log y})^2$
$= A^2 + B^2$
$= 4^2 + 4^2$
$= 16 + 16$
$= 32$
Untuk (A,B) = {(0,6),(6,0)} diperoleh
$xy = 10^n \Rightarrow n = \log xy$
$= \log x + \log y$
$= (\sqrt{\log x})^2 + (\sqrt{\log y})^2$
$= A^2 + B^2$
$= 6^2 + 0^2$
$= 36 + 0$
$= 36$
Jadi, nilai n yang memenuhi adalah 32 atau 36.

4.



Perhatikan, dari gambar dibawah diperoleh
AD + DE + EB = $6\sqrt{2} \Rightarrow 2p + p\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$
$\Leftrightarrow p(2+\sqrt{2}) = 6\sqrt{2}$
$\Leftrightarrow p = \frac{6\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$
$\Leftrightarrow p = 6(\sqrt{2}-1)$
Diperoleh $p^2 = (6(\sqrt{2}-1))^2 = 36(3-2\sqrt{2})$
Sehingga, keliling bangun tersebut adalah
$K = 16p \Rightarrow K = 16\,(6(\sqrt{2}-1))$
$= 96(\sqrt{2}-1)$
Sedangakan, luas bangun tersebut adalah
$L = 4([AOB] + [CDE]) \Rightarrow L = 4\,(\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6 + \frac{1}{2}p^2)$
$= 4\,(18 + 18(3-2\sqrt{2}))$
$= 144\sqrt{2}\,(\sqrt{2}-1)$

Jadi $\left(\frac{L}{K}\right)^2 = \left(\frac{144\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{96(\sqrt{2}-1)}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2 = \frac{9}{2}$.

5. Perhatikan, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ artinya A_1 dan A_2 adalah dua himpunan bagian yang berbeda. Kemudian, $A_1 \cup A_2 \subseteq A_3$ artinya $|A_1| + |A_2| \leq |A_3|$. Sedangkan, $A_3 \subseteq \cdots \subseteq A_6$ artinya $|A_3| \leq \cdots \leq |A_6|$.
Sehingga, akan kita bagi kasus-kasus sebagai berikut
    - $|A_1| = |A_2|$
        - $|A_1| = |A_2| = 1$, sehingga $(|A_3|, |A_4|, |A_5|, |A_6|)$ = (2,2,2,2), (2,2,2,3), (2,2,3,3), (2,3,3,3), (3,3,3,3),(2,2,2,4),(2,2,4,4),(2,4,4,4),(4,4,4,4),(2,2,3,4),(2,3,3,4),(2,3,4,4),(3,3,3,4),(3,3,4,4),(3, 4,4,4).
        Banyak $(A_1, A_2) = \binom{4}{1}\binom{3}{1} = 12$
        Banyak $(A_3, A_4, A_5, A_6) = \binom{2}{0} + 4\left(\binom{2}{1} + \binom{2}{2}\right) + 6\binom{2}{1}\binom{1}{1} = 25$
        Jadi, banyak $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6) = 12 \times 25 = 300$
        - $|A_1| = |A_2| = 2$, sehingga $(|A_3|, |A_4|, |A_5|, |A_6|) = (4,4,4,4)$
        Banyak $(A_1, A_2) = \binom{4}{2} + \binom{2}{2} = 6$
        Banyak $(A_3, A_4, A_5, A_6) = 1$
        Jadi, banyak $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6) = 6 \times 1 = 6$
    - $|A_1| \neq |A_2|$
        - $|A_1| = 1 \wedge |A_2|\ 2$, dan sebaliknya sehingga $(|A_3|, |A_4|, |A_5|, |A_6|)$ = (3,3,3,3), (3,3,3,4), (3,3,4,4), (3,4,4,4), (4,4,4,4).
        Banyak $(A_1, A_2) = 2!\binom{4}{1} + \binom{3}{2} = 24$
        Banyak $(A_3, A_4, A_5, A_6) = \binom{1}{0} + 4\binom{1}{1} = 5$
        Jadi, banyak $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6) = 24 \times 5 = 120$
        - $|A_1| = 1 \wedge |A_2|\ 3$, dan sebaliknya sehingga $(|A_3|, |A_4|, |A_5|, |A_6|) = (4,4,4,4)$
        Banyak $(A_1, A_2) = 2!\binom{4}{1} + \binom{3}{3} = 8$
        Banyak $(A_3, A_4, A_5, A_6) = 1$
        Jadi, banyak $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6) = 8 \times 1 = 8$

Jadi, total banyak $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6) = 300 + 6 + 120 + 8 = 434$.

6. Perhatikan, misal $4n + 808 = 4(n + 202)$ artinya $n + 202$ juga merupakan bilangan kuadrat.
Misalkan $n + 202 = a^2$ dan $9n + 1621 = b^2$ maka diperoleh
$9n + 1621 = b^2 \Rightarrow 9(n + 180) + 1 = b^2$
$\Leftrightarrow 9(n + 202 - 22) + 1 = b^2$
$\Leftrightarrow 9(a^2 - 22) + 1 = b^2$
$\Leftrightarrow 9a^2 - 197 = b^2$
$\Leftrightarrow 9a^2 - b^2 = 197$
$\Leftrightarrow (3a + b)(3a - b) = 197$
Karena 197 bilangan prima, sehingga $3a + b = 197$ dan $3a - b = 1$.
Sehingga,
$3a + b = 197$
$\underline{3a - b = 1 \quad +}$

6a = 198 ⇒ a = 33

Jadi, n + 202 = a^2 ⇒ n + 202 = 33^2

⇔ n + 202 = 1089

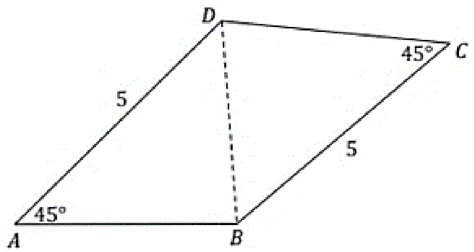
⇔ n = 1089 – 202

⇔ n = 887

7. Perhatikan, misal u_1 = a diperoleh

$$u_1 = a$$
$$u_2 = a + 1$$
$$u_3 = a + 1 + 2$$
$$u_4 = a + 1 + 2 + 1$$
$$u_5 = a + 1 + 2 + 1 + 2$$
$$\vdots$$
$$u_{20} = a + 1 + 2 + 1 + 2 + \cdots + 1$$
$$\underline{\hspace{10cm}} +$$
$$u_1 + u_2 + \cdots + u_{20} = 20a + 1(19 + 17 + \cdots + 1) + 2(18 + 16 + \cdots + 2) \Rightarrow 360 = 20a + 100 + 180$$
$$\Leftrightarrow 360 = 20a + 280$$
$$\Leftrightarrow 20a = 360 - 280$$
$$\Leftrightarrow 20a = 80$$
$$\Leftrightarrow a = 4$$

8. Perhatikan ilustrasi berikut.



Dengan aturan kosinus diperoleh

$BD^2 = AB^2 + 5^2 - 2 \cdot AB \cdot 5 \cdot \cos 45^\circ$

$\underline{BD^2 = CD^2 + 5^2 - 2 \cdot CD \cdot 5 \cdot \cos 45^\circ \ -}$

$0 = AB^2 - CD^2 + 10(CD - AB) \cos 45^\circ \Rightarrow CD^2 - AB^2 = 5\sqrt{2}(CD - AB)$

$\Leftrightarrow (CD + AB)(CD - AB) = 5\sqrt{2}(CD - AB)$

$\Leftrightarrow CD + AB = 5\sqrt{2}$

Sehingga, keliling ABCD = (BC + AD) + (CD+AB) = $10 + 5\sqrt{2}$

Sehingga, p = 10, q = 5, dan r = 2.

Jadi, p + q + r = 10 + 5 + 2 = 17.

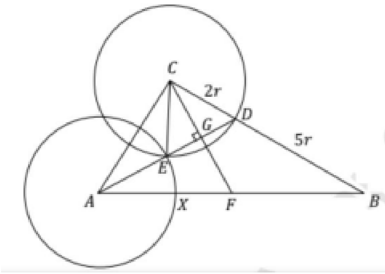
9. Perhatikan,

$$P\left(x + \frac{2}{x}\right) = \frac{x^3+1}{x} + \frac{x^3+8}{2x^2} + 3 \Rightarrow P\left(x + \frac{2}{x}\right) = x^2 + \frac{4}{x^2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x} + 3$$
$$\Leftrightarrow P\left(x + \frac{2}{x}\right) = x^2 + 4 + \frac{4}{x^2} + \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) - 1$$
$$\Leftrightarrow P\left(x + \frac{2}{x}\right) = \left(x + \frac{2}{x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) - 1$$

Misal $x + \frac{2}{x} = y$, maka diperoleh $P(y) = y^2 + \frac{1}{2}y - 1$

Jadi, P(1) = $1^2 + \frac{1}{2}(1) - 1 = 1 + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}$.

10. Perhatikan,



Dari garis bagi diperoleh

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BD} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

Sehingga, misal CE = CD = 2r, maka diperoleh BD = 5r.

Misal, F pada AB sedemikian sehingga AD tegak lurus CF di titik G, akibatnya AC = AF = 6 sehingga BF = 9 dan CE = CD = 2r dan GE = GD.

Dengan menelause diperoleh

$$\frac{DG}{GA} \cdot \frac{AF}{FB} \cdot \frac{BC}{CD} = 1 \quad \Rightarrow \frac{DG}{GA} \cdot \frac{6}{9} \cdot \frac{7r}{2r} = 1$$

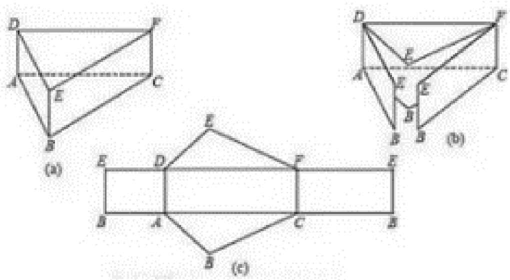
$$\Leftrightarrow \frac{DG}{GA} = \frac{3}{7}$$

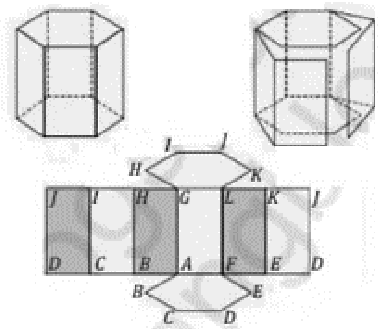
Sehingga, DG = $\frac{3}{10}$ AD = $\frac{27}{10}$ dan akibatnya GA = AD – DG = $9 - \frac{27}{10} = \frac{63}{10}$.

Mengingat DG = GE maka AE = AG – GE = $\frac{63}{10} - \frac{27}{10} = \frac{18}{5}$.

Dan karena AE = AX = $\frac{18}{5}$, maka BX = AB – AX = $-\frac{18}{5} = \frac{57}{5}$.

11. Perhatikan ilustrasi berikut.





Perhatikan dua kasus berikut

- Jika n ganjil, n = 2k + 1 untuk bilangan asli k

  Perhatikan gambar prisma segi-3 di atas, misal label pada titik-titik sudut prisma segi-3 adalah A,B,…,F ∈ {-1,1} dan diperoleh hasil perkalian label di setiap sisi (muka) prisma segi-3 tersebut adalah ABED = ACFD = CBEF = DEF = ABC = -1.

  Perhatikan juga bahwa ABED . ACFD . CBEF = $(ABC . DEF)^2$

  Secara umum untuk setiap bilangan bulat $n \geq 3$ misal $t_1 . t_2 . \ldots . t_n = (a_1 . a_2)^2$.

  Sehingga, tidak mungkin n = 2k + 1.

- Jika n genap, n = 2k untuk bilangan asli k

Perhatikan gambar prisma segi-6 di atas, misal label pada titik-titik sudut prisma segi-3 adalah A,B,…,L ∈ {-1,1} dan diperoleh hasil perkalian label di setiap sisi (muka) prisma segi-3 tersebut adalah CDJI = BCIH = … = DEKJ = ABCDEF = GHIJKL = -1.

Untuk n genap maka dapat kita ambil sisi (muka) tegak selang-seling, yaitu:

- Sisi (muka) tegak prisma segi-6 yang diarsir pada gambar, maka diperoleh CDIJ . ABHG . EFLK = ABCDEF . GHIJKL.
- Sisi (muka) tegak prisma segi-6 yang tidak diarsir pada gambar, maka diperoleh BCIH . FAGL . DEKJ = ABCDEF . GHIJKL.

Sehingga secara umum untuk n = 2k, dengan k ≥ 2 maka berlaku $t_1 . t_3 . \dots . t_{2k-1} = t_2 . t_4 . \dots . t_{2k} = a_1 . a_2$.

Akan diperiksa untuk k = 2m dan k = 2m + 1 untuk bilangan asli m.

- Jika n = 2(2m + 1) = 4m + 2

  Secara umum, untuk n = 4m + 2, misal kita ambil sisi (muka) tegak selang-seling dari prisma segi-n maka akan berlaku $t_1 . t_3 . \dots . t_{4m+1} = t_2 . t_4 . \dots . t_{4m+2} = a_1 . a_2$.

  Perhatikan $t_2 . t_4 . \dots . t_{4m+2} = (-1)^{2m+1} = (-1)^{2m} . (-1) = ((-1)^2)^m . (-1) = -1$.

  Padahal, $a_1 . a_2 = (-1)(-1) = 1 \neq -1$. Jadi $t_2 . t_4 . \dots . t_{4m+2} \neq a_1 . a_2$.

  Sehingga, tidak mungkin n = 4m + 2.
- Jika n = 2(2m) = 4m

  Secara umum untuk setiap bilangan bulat n ≥ 3 misal $t_1, t_2, \dots, t_n$ adalah sisi (muka) alas dan atas dari prisma segi-n, maka berlaku $t_1 . t_2 . \dots . t_n = (a_1 . a_2)^2$.

  Maka untuk n = 4m, diperoleh $t_1 . t_2 . \dots . t_{4m} = (-1)^{4m} = 1$.

  Periksa juga, $(a_1 . a_2)^2 = ((-1)(-1))^2 = 1$.

  Dan, Secara umum, untuk n = 4m, misal kita ambil sisi (muka) tegak selang-seling dari prisma segi-n maka akan berlaku $t_1 . t_3 . \dots . t_{4m-1} = t_2 . t_4 . \dots . t_{4m} = a_1 . a_2$.

  Perhatikan $t_2 . t_4 . \dots . t_{4m} = (-1)^{2m} = ((-1)^2)^m = 1$.

  Periksa juga, $a_1 . a_2 = (-1)(-1) = 1$.

  Jadi, dapat dikonstruksi label pada setiap titik sudut prisma segi-n dengan n = 4m sehingga berlaku $t_1 . t_2 . \dots . t_{4m} = (a_1 . a_2)^2$ dan $t_2 . t_4 . \dots . t_{4m} = a_1 . a_2$.

Sehingga, untuk 23 ≤ n ≤ 54 nilai n yang memenuhi adalah 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52. Jadi, hasil penjumlahan semua n adalah 24 + 28 + 32 + 36 + 40 + 44 + 48 + 52 = 304.

12. Perhatikan, $\left(\frac{x}{5}+\frac{y}{3}\right)\left(\frac{5}{x}+\frac{3}{y}\right) = 139 \;\Rightarrow 1+\frac{3x}{5y}+\frac{5y}{3x}+1 = 139$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{5y}+\frac{5y}{3x} = 137$$

Padahal, $\frac{x+y}{\sqrt{xy}} = \frac{(\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2}{\sqrt{xy}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}+\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}$

Misal $a = \frac{x}{y}$ maka diperoleh $\frac{x+y}{\sqrt{xy}} = \sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}$ dan $\frac{3x}{5y}+\frac{5y}{3x} = \frac{3a}{5} = \frac{5}{3a}$.

Sehingga, $\frac{3a}{5}+\frac{5}{3a} = 137 \quad \Rightarrow 9a^2+25 = 2055a$

$$\Leftrightarrow 9a^2-2055a+25 = 0$$

Dengan teorema vieta diperoleh $a_1+a_2 = \frac{2055}{9}$ dan $a_1a_2 = \frac{25}{9}$.

Jika $M = \sqrt{a_1}+\frac{1}{\sqrt{a_1}}$ dan $m = \sqrt{a_2}+\frac{1}{\sqrt{a_2}}$ dengan m < M, sehingga

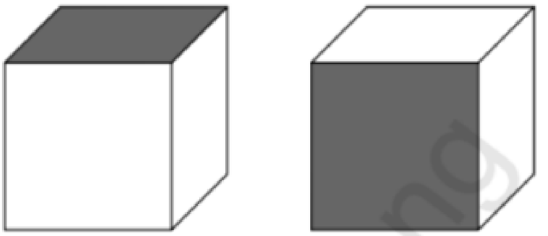
$$
\begin{aligned}
(M-m)^2 &= \left(\sqrt{a_1}+\frac{1}{\sqrt{a_1}}-\sqrt{a_2}-\frac{1}{\sqrt{a_2}}\right)^2 \\
&= \frac{((\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})(\sqrt{a_1a_2}-1))^2}{(\sqrt{a_1a_2})^2} \\
&= \frac{((a_1+a_2)-2\sqrt{a_1a_2})(\sqrt{a_1a_2}-1))^2}{a_1a_2}
\end{aligned}
$$

Diperoleh,

$$
(M-m)^2 = \frac{\left(\left(\frac{2055}{9}-2\sqrt{\frac{25}{9}}\right)\left(\sqrt{\frac{25}{9}}-1\right)\right)^2}{\frac{25}{9}} = 36
$$

Jadi, M – m = 6.

13. Perhatikan ilustri berikut.



Ada dua kemungkinan posisi sisi berwarna hitam.

- Sisi berwarna hitam sebagai sisi tegak.
  Pemutaran pada rusuk alas apapun, maka sisi berwarna hitam memiliki peluang sama besar untuk menjadi sisi tegak maupun bukan sisi tegak. Kita kodekan sebagai TB atau TT, masing-masing bernilai $\frac{1}{2}$.
- Sisi berwarna hitam bukan sisi tegak.
  Pemutaran pada rusuk alas apapun, maka sisi berwarna hitam pasti akan menjadi sisi tegak. Kita kodekan sebagai BT, bernilai 1.

Misal diperoleh kode BTBTT artinya pada putaran pertama sisi berwarna hitam akan menjadi bukan sisi tegak (B), lalu pada putaran kedua sisi hitam akan menjadi sisi tegak (T), begitu seterusnya. Peluang kejadian dapat dihitung dengan memperhatikan kode TB dan TT, ada dua kali yaitu BTBTT dan BTBTT, yaitu $\left(\frac{1}{2}\right)^2$.

Sehingga, jika sisi berwarna hitam adalah mula-mula bukan merupakan sisi tegak, maka jika kubus tersebut diputar pada salah satu rusuk pada alasnya berganti, dan diulangi sampai 8 kali akan diperoleh kombinasi sebagai berikut

- Ada sebanyak $\binom{3}{0}$ kemungkinan 3 buah BT, sehingga ada 4 buah TB atau TT peluangnya $\left(\frac{1}{2}\right)^4$.
- Ada sebanyak $\binom{4}{2}$ kemungkinan 2 buah BT, sehingga ada 5 buah TB atau TT peluangnya $\left(\frac{1}{2}\right)^5$.
- Ada sebanyak $\binom{5}{4}$ kemungkinan 1 buah BT, sehingga ada 6 buah TB atau TT peluangnya $\left(\frac{1}{2}\right)^6$.
- Ada sebanyak $\binom{6}{6}$ kemungkinan 0 buah BT, sehingga ada 7 buah TB atau TT peluangnya $\left(\frac{1}{2}\right)^7$.

Peluang bahwa dalam 8 kali pemutaran, sisi berwarna hitam bukan sisi tegak lagi adalah

$$\sum_{i=0}^{3}\binom{3+i}{2i}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{4+i}=\binom{3}{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{4}+\binom{4}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5}+\binom{5}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{6}+\binom{6}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{7}=\frac{43}{128}.$$

14. Jika Panjang garis tinggi terpanjang suatu segitiga adalah 8 dan Panjang garis tinggi yang lain 3, maka Panjang garis tinggi ketiga yang merupakan bilangan prima adalah 2 atau 3 atau 5 atau 7.
    Akan diperiksa satu-persatu kasus tersebut
    - Jika garis tinggi ketiga adalah 2.
      KPK(2,3,8) = 24, jadi perbandingan sisi segitiga dengan a Panjang sisi segitiga terpanjang adalah a : b : c = $\frac{24}{2}$: $\frac{24}{3}$: $\frac{24}{8}$ = 12 : 8 : 3.
      Periksa apakah dapat dibentuk segitiga? Misal berturut-turut a,b,c adalah 12x, 8x, 3x, maka segitiga harus memenuhi ketaksamaan segitiga berikut
      b + c > a ⇒ $8x + 3x \ngtr 12x$ (bukan segitiga)
    - Jika garis tinggi ketiga adalah 3.
      KPK(3,3,8) = 24, jadi perbandingan sisi segitiga dengan a Panjang sisi segitiga terpanjang adalah a : b : c = $\frac{24}{2}$: $\frac{24}{3}$: $\frac{24}{8}$ = 8 : 8 : 3.
      Periksa apakah dapat dibentuk segitiga? Misal berturut-turut a,b,c adalah 8x, 8x, 3x, maka segitiga harus memenuhi ketaksamaan segitiga berikut
      b + c > a ⇒ $8x + 3x > 12x$ (benar a,b,c adalah sisi-sisi segitiga)
      Periksa juga apakah segitiga tumpul? Segitiga tumpul harus memenuhi ketaksamaan berikut
      $b^2 + c^2 < a^2 \Rightarrow (8x)^2 + (3x)^2 < (8x)^2$
      $\Leftrightarrow 64x^2 + 9x^2 < 64x^2$
      $73x^2 \nless 64x^2$ (bukan segitiga tumpul)
    - Jika garis tinggi ketiga adalah 5.
      KPK(3,5,8) = 120, jadi perbandingan sisi segitiga dengan a Panjang sisi segitiga terpanjang adalah a : b : c = $\frac{120}{3}$: $\frac{120}{5}$: $\frac{120}{8}$ = 40 : 24 : 15.
      Periksa apakah dapat dibentuk segitiga? Misal berturut-turut a,b,c adalah 40x, 24x, 15x, maka segitiga harus memenuhi ketaksamaan segitiga berikut
      b + c > a ⇒ $24x + 15x \ngtr 40x$ (bukan segitiga)
    - Jika garis tinggi ketiga adalah 7.
      KPK(3,7,8) = 168, jadi perbandingan sisi segitiga dengan a Panjang sisi segitiga terpanjang adalah a : b : c = $\frac{168}{3}$: $\frac{168}{7}$: $\frac{168}{8}$ = 56 : 24 : 21.
      Periksa apakah dapat dibentuk segitiga? Misal berturut-turut a,b,c adalah 56x, 24x, 21x, maka segitiga harus memenuhi ketaksamaan segitiga berikut b + c > a ⇒ $24x + 21x \ngtr 56x$ (bukan segitiga)

    Jadi, jelas bahwa Panjang garis tinggi ketiga segitiga tersebut adalah bukan bilangan prima.
15. Misal, p dan q adalah bilangan bulat positif yang relative prima memenuhi
    $\frac{x}{n-1}=\frac{y}{n}=\frac{z}{n+1}=\frac{p}{q}$
    Maka, q|(n – 1) ∧ n ∧ (n + 1).
    Padahal salah satu nilai n adalah 10. Sehingga, q|9 ∧ 10 ∧ 11, sehingga jelas q = 1.
    Sehingga, x = p(n – 1), y = pn, z = p(n + 1)
    Diperoleh,

$x + y + z = m \Rightarrow p(n-1) + pn + p(n+1) = m$

$\Leftrightarrow 3pn = m$

Sehingga, 3|m, jadi untuk r bilangan asli maka m = 3r, jadi r = pn.

Karena ada tepat 32 bilangan asli n > 1, maka ada tepat 33 faktor bulat positif dari r. Ini sama halnya dengan kita mencari bilangan bulat kelipatan 10 yang tepat memiliki 33 faktor bulat positif. Dimana m yang memenuhi adalah $m = 2^2 . 5^{10}$ atau $m = 2^{10} . 5^2$.

Jadi, bilangan asli k terbesar yang memenuhi adalah 2.

16. Perhatikan,

$H = \frac{10m^2+25}{n+2} = \frac{10(n^2-4)-65}{n+2} = 10(n-2) + \frac{65}{n+2}$

Sehingga, (n + 2) haruslah factor bulat positif dari 65.

Diperoleh n + 2 = {1,5,13,65} maka n = {-1,3,11,63}.

Maka, n bilangan asli yang memenuhi adalah n = {3,11,63}

Sehingga,

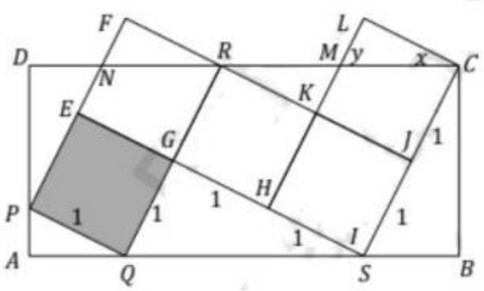
$H|_{n=3} = 10(3-2) + \frac{65}{3+2} = 10 + 13 = 23$

$H|_{n=11} = 10(11-2) + \frac{65}{11+2} = 90 + 5 = 95$

$H|_{n=63} = 10(63-2) + \frac{65}{63+2} = 610 + 1 = 611$

Jadi, jumlah semua anggota H = 23 + 95 + 611 = 729.

17. Perhatikan gambar berikut.



Mengingat ABCD persegi Panjang dan lima persegi kecil, misal ∠MCL = x dan ∠CML = y, maka

∠MCL = ∠MRK = ∠NRF = ∠NPD = ∠PQA = ∠QSG = ∠SCB = x.

∠CML = ∠RMK = ∠RNF = ∠PND = ∠QPA = ∠SQG = ∠CSB = y.

Sehingga ΔMCL ~ ΔMRK ~ ΔNRF ~ ΔNPD ~ ΔPQA ~ ΔQSG ~ ΔSCB.

Namun karena CL = RK = RF = 1, jelas bahwa ΔMCL ≅ ΔMRK ~ ΔNRF.

Perhatikan ΔCJR, tan ∠MRK = $\frac{CJ}{RJ} = \frac{1}{2}$, akibatnya $\frac{ML}{CL} = \frac{MK}{RK} = \frac{NF}{RF} = \frac{1}{2} \Rightarrow ML = MK = NF = \frac{1}{2}$.

Karena tan ∠MRK = $\frac{1}{2}$, akibatnya sin ∠MRK = $\frac{1}{5}\sqrt{5}$ dan cos ∠MRK = $\frac{2}{5}\sqrt{5}$.

Jelas bahwa $\frac{BS}{CS} = \frac{GQ}{SQ} = \frac{1}{5}\sqrt{5} \Rightarrow BS = \frac{2}{5}\sqrt{5}$ dan $SQ = \sqrt{5}$.

Juga diperoleh $\frac{AQ}{PQ} = \frac{BC}{SC} = \frac{2}{5}\sqrt{5} \Rightarrow AQ = \frac{2}{5}\sqrt{5}$ dan $BC = \frac{4}{5}\sqrt{5}$.

Sehingga, luas ABCD adalah

$[ABCD] = AB \cdot BC = (AQ + SQ + BS) \cdot BC = \left(\frac{2}{5}\sqrt{5} + \sqrt{5} + \frac{2}{5}\sqrt{5}\right) \cdot \frac{4}{5}\sqrt{5} = \frac{9}{5}\sqrt{5} \cdot \frac{4}{5}\sqrt{5} = \frac{36}{5}$.

18. Perhatikan, $2^{2020}|f(a)$ dan $2^{2020}|f(b)$, maka jelas bahwa $2^{2020}|(f(b) - f(a))$.

Sehingga,

$2^{2020} | (f(b) - f(a)) \Rightarrow 2^{2020} | ((b^2 + pb + q) – (a^2 + pa + q))$
$\Leftrightarrow 2^{2020} | (b^2 – a^2 + p(b – p))$
$\Leftrightarrow 2^{2020} | (b + a)(b – a) + p(b – a))$
$\Leftrightarrow 2^{2020} | ((b – a)(b + a + p))$

Padahal, $2^{1000} \nmid (b – a)$, maka ada bilangan bulat $1021 \le m \le 2020$ sehingga $2^m | (b + a + p)$.
Perhatikan juga, $2^{2020} | f(a)$ dan $2^{2020} | f(c)$, maka jelas bahwa $2^{2020} | (f(c) – f(a))$.
Sehingga,

$2^{2020} | (f(c) - f(a)) \Rightarrow 2^{2020} | ((c^2 + pc + q) – (a^2 + pa + q))$
$\Leftrightarrow 2^{2020} | (c^2 - a^2 + p(c – p))$
$\Leftrightarrow 2^{2020} | (c + a)(c – a) + p(c – a))$
$\Leftrightarrow 2^{2020} | ((c – a)(c + a + p))$

Padahal, $2^{1000} \nmid (c – a)$, maka ada bilangan bulat $1021 \le n \le 2020$ sehingga $2^n | (c + a + p)$.
Sehingga, karena $2^{1021} | 2^m \Rightarrow 2^{1021} | (b + a + p)$ dan $2^{1021} | 2^n \Rightarrow 2^{1021} | (c + a + p)$.
Jadi, jelas bahwa $2^{1021} | ((b + a + p) – (c + a + p)) \Rightarrow 2^{1021} | (b – c)$. (Terbukti).

19. Perhatikan, jika $x^2 + 20x + 20$ rasional, maka $x^2 + 20x$ juga rasional.
Begitu juga jika $x^3 - 2020x + 1$ rasional, maka $x^3 - 2020x$ juga rasional.
Untuk p dan q rasional, maka jelas bahwa $x^2 + 20x + p$ dan $x^3 – 2020x + q$ juga rasional.
Perhatikan juga bahwa $x^3 - 2020x + q \equiv (x^2 + 20x + p)(x + r)$, jelas bahwa agar kesamaan suku banyak di ruas kiri dan kanan terjadi maka r = -20.
Sehingga,

$x^3 - 2020x + q \equiv (x^2 + 20x + p)(x - 20)$
$\Leftrightarrow x^3 - 2020x + q \equiv x^3 + (p - 400)x – 20p$

Dengan kesamaan suku banyak diperoleh,
$-2020 = p – 400 \Rightarrow p = -1620$
$q = -20p = -20(-1620) = 32400$
Sehingga diperoleh

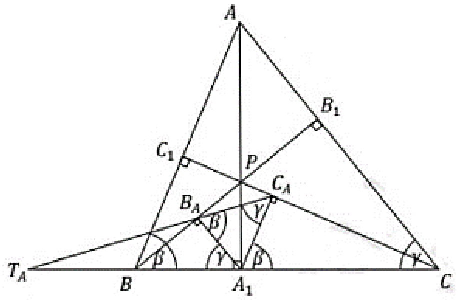
$$\underbrace{x^3 - 2020x + 32400}_{\text{rasional}} \equiv (x^2 + 20x - 1620)(x - 20)$$

Untuk memeriksa apakah penyelesaian bilangan irrasional x, maka ada dua kasus yang bisa diamati

- Jika $x^2 + 20x - 1620 \neq 0$, maka $(x - 20)$ rasional, sehingga x adalah rasional. Hal ini tentunya kontradiksi dengan pernyataan soal bahwa x irrasional.
- Jika $x^2 + 20x - 1620 = 0$, maka diperoleh

$x^2 + 20x - 1620 = 0 \Rightarrow x^2 + 20x = 1620$
$\Leftrightarrow x^2 + 20x + 100 = 1720$
$\Leftrightarrow (x + 10)^2 = 1720$
$\Leftrightarrow x + 10 = \pm\sqrt{1720}$
$\Leftrightarrow x + 10 = \pm 2\sqrt{430}$
$\Leftrightarrow x = -10 \pm 2\sqrt{430}$

20. Perhatikan,



Perhatikan $B_AA_1 || AC$ dan $C_AA_1 || AB$ maka $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_AC_A$ sehingga $\angle ABC = \angle A_1B_AC_A = \beta$ dan $\angle ACB = \angle A_1C_AB_A = \gamma$. Perhatikan aturan sinus pada segitiga PB_AC_A

$$\frac{PC}{\sin(90^o - \beta)} = \frac{B_{AP}}{\sin(90^o - \gamma)} \Rightarrow \frac{PC_A}{B_AP} = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$$

Dengan trigonometri pada segitiga A_1C_AC diperoleh

$$\frac{AC}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin\gamma} \Rightarrow \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{AB}{AC}$$

Sehingga,

$$\frac{BB_A}{C_AC} = \frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{AB}{AC}$$

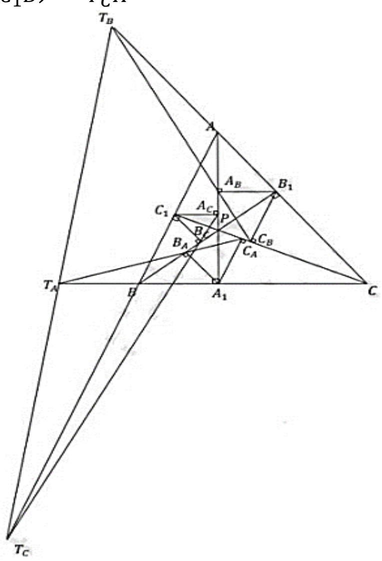
Dengan dalil Menelause pada segitiga PBC

$$\begin{aligned}
\frac{BB_A}{B_AP} \cdot \frac{PC_A}{C_AC} \cdot \frac{CT_A}{T_AB} = 1 \ &\Rightarrow \frac{BB_A}{C_AC} \cdot \frac{PC_A}{B_AP} \cdot \frac{CT_A}{T_AB} = 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} \cdot \frac{CT_A}{T_AB} = 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{CT_A}{T_AB} = 1 \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{A_1B}{A_1C}\right)^2 \cdot \frac{CT_A}{T_AB} = 1
\end{aligned}$$

Perhatikan gambar dibawah ini, dengan cara yang sama, akan diperoleh

$$\left(\frac{B_1C}{B_1A}\right)^2 \cdot \frac{AT_B}{T_BC} = 1$$

$$\left(\frac{C_1A}{C_1B}\right)^2 \cdot \frac{BT_C}{T_CA} = 1$$



Sehingga, dengan mengalikan tiga persamaan yang sebelumnya maka diperoleh

$$\left(\frac{A_1B}{A_1C}\right)^2 \cdot \frac{CT_A}{T_AB} \cdot \left(\frac{B_1C}{B_1A}\right)^2 \cdot \frac{AT_B}{T_BC} \cdot \left(\frac{C_1A}{C_1B}\right)^2 \cdot \frac{BT_C}{T_CA} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\left(\frac{A_1B}{A_1C} \cdot \frac{B_1C}{B_1A} \cdot \frac{C_1A}{C_1B}\right)^2}_{\text{Dalil de ceva}} \cdot \frac{CT_A}{T_AB} \cdot \frac{BT_C}{T_CA} \cdot \frac{AT_B}{T_BC} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{CT_A}{T_AB} \cdot \frac{BT_C}{T_CA} \cdot \frac{AT_B}{T_BC} = 1$$

Jadi, terbukti bahwa T_A, T_B, T_C segaris (kolinear).

21. Perhatikan, dari n siswa dengan k < n bulat positif untuk setiap siswa s. Misal, Permen(s) adalah banyak permen yang diperoleh siswa s, dan nilai(s) adalah nilai yang diperoleh siswa s, serta T(s) = {t|nilai(t) > nilai (s)} adalah himpunan anak lain yang nilainya lebih tinggi dari s, maka menurut informasi dari soal, untuk setiap anak s, ia mendapatkan

    (i) Permen (s) = k . nilai(s)

    (ii) Permen (s) = 1 . $\sum_{t \epsilon T(s)}$ (nilai(t) - nilai(s))

    Sehingga, banyak permen total yang diperoleh anak s adalah

    Permen(s) = k . nilai(s) + 1 . $\sum_{t \epsilon T(s)}$ (nilai(t) - nilai(s))

    = (k - |T(s)|) . nilai(s) + $\sum_{t \epsilon T(s)}$ nilai(t)

    Setelah semua permen dibagikan, ternyata Permen(Badu) adalah minimum dan i = |T(Badu)|.

    Permen(Badu) = (k - |T(Badu)|) . nilai(Badu) + $\sum_{t \epsilon T(\text{Badu})}$ nilai(t)

    = (k – i) . nilai(Badu) + $\sum_{t \epsilon T(\text{Badu})}$ nilai(t)

    Kita bagi kasus menjadi dua yaitu

    - Jika k – i < 0, anggap nilai Badu maksimal. Maka, ada s sehingga nilai(s) > nilai(Badu) dimana T(s) ⊆ T(Badu).

      s ϵ T(Badu), akan dipilih s agar nilai(s) seminimal mungkin.

      Permen(s) = (k – i + i - |T(s)|) . nilai(s) + $\sum_{t \epsilon T(s)}$ nilai(t)

      $= \underbrace{(k-i) \cdot \text{nilai}(s)}_{<(k-i) \cdot \text{nilai(Badu)}} + \underbrace{(i - |T(s)|) \cdot \text{nilai}(s) + \sum_{t \in T(s)} \text{nilai}(t)}_{\leq \sum_{t \epsilon T(\text{Badu})} \text{nilai}(t)}$

      Sehingga,

      Permen(s) < (k – i) · nilai(Badu) + $\sum_{t \epsilon T(\text{Badu})}$ nilai(t) = Permen(Badu)

      Jadi, kontradiksi dengan pernyataan bahwa permen Badu minimal.

    - Karena k – i < 0 tidak mungkin terjadi, maka jika k – i ≥ 0 ⇒ i ≤ k mudah dibuktikan bahwa ini bisa terjadi.

    Jadi, nilai i yang mungkin adalah 0, 1, 2, …, k.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2020

TINGKAT NASIONAL

HARI PERTAMA & HARI KEDUA

WAKTU : 8 JAM

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika Tingkat Nasional Tahun 2020

1. Diberikan segitiga lancip ABC dan titik D pada segmen BC. Lingkaran c_1 adalah lingkaran yang melalui A, D dan memiliki titik pusat pada garis AC, sedangkan lingkaran c_2 adalah lingkaran yang melalui A, D dan memiliki titik pusat pada garis AB. Misalkan $P \neq A$ adalah titik potong lingkaran c_1 dengan AB dan $Q \neq A$ adalah titik potong lingkaran c_2 dengan AC. Buktikan bahwa AD garis bagi $\angle PDQ$.

2. Misalkan $P(x) = ax^2 + bx + c$ dengan a, b, c real. Jika

$$P(a) = bc,\ \ P(b) = ca,\ \ P(c) = ab$$

Buktikan bahwa

$$(a - b)(b - c)(c - a)(a + b + c) = 0$$

3. Tentukan semua fungsi $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ sehingga $n^2 + f(n)f(m)$ merupakan bilangan kelipatan $f(n) + m$ untuk setiap bilangan asli n, m.

4. Diberikan papan catur berukuran $2n \times 2n$ yang setiap petaknya diwarnai dengan salah satu dari n warna. Buktikan bahwa terdapat dua petak yang terletak di dalam kolom yang sama atau baris yang sama, sehingga jika pewarnaan kedua petak tersebut ditukar, maka terdapat persegi panjang yang keempat petak pada semua sudutnya memiliki warna yang sama.

5. Suatu himpunan A memuat tepat n bilangan bulat yang masing-masing lebih besar dari 1 dan setiap faktor primanya kurang dari 10. Tentukan n terkecil sehingga A pasti memuat dua anggota berbeda a dan b dengan ab adalah kuadrat dari suatu bilangan bulat.

6. Diberikan segiempat talibusur $ABCD$. Misalkan X titik pada sisi $BC (X \neq C)$ sehingga garis AX tegak lurus dengan garis bagi $\angle CBD$, dan Y titik pada sisi $AD (Y \neq D)$ sehingga garis BY tegak lurus dengan garis bagi $\angle CAD$. Buktikan bahwa XY sejajar dengan CD.

7. Tentukan semua polinom dengan koefisien bilangan real $P(x)$ yang memenuhi

$$P(\lfloor x \rfloor) = \lfloor P(x) \rfloor$$

untuk setiap bilangan real x.

8. Tentukan bilangan asli terkecil $n > 2$, atau buktikan bahwa tidak ada bilangan asli n yang memenuhi sifat berikut: Terdapat bilangan asli $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ sehingga

$$FPB(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{FPB(a_k, a_{k+1})} + \frac{1}{FPB(a_k, a_{k+2})} + \cdots + \frac{1}{FPB(a_k, a_n)} \right)$$

Catatan: FPB$(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n)$ adalah faktor persekutuan terbesar dari $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2020

TINGKAT NASIONAL

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Nasional Tahun 2020

1. Penyelesaian :
   Misalkan garis tegak lurus dari D terhadap AD berpotongan dengan AB dan AC masing-masing di K dan J. Karena ∡ADK = ∡ADJ = 90°, kita harus memiliki AK dan AJ sebagai diameter masing-masing dari (ADK) dan ADJ. Perhatikan bahwa
   $$\measuredangle KQJ = \measuredangle AQK = \measuredangle ADK = \measuredangle ADJ = \measuredangle APJ = \measuredangle KPJ = 90^\circ$$
   Ini memberikan PKJQ adalah segi empat siklik, jadi
   $$\measuredangle ADP = \measuredangle AJP = \measuredangle QJP = \measuredangle QKP = \measuredangle QKA = \measuredangle QDA$$
   Sesuai kebutuhan.
   Perhatikan saja bahwa DPQ adalah segitiga ortik dari AKJ, sehingga titik pusatnya adalah titik ortik dari AKJ, yang terletak pada AD.

2. Penyelesaian :
   Berikut solusi yang dimaksud (Sepertinya sebagian besar peserta hanya mengkritik masalah ini secara blak-blakan):
   Asumsikan semua a, b, c berbeda. Kita akan membuktikan bahwa a + b + c = 0.
   Misalkan Q(x) = xP(x) – abc = $ax^3 + bx^2 + cx$ – abc, maka a, b, c adalah akar-akar dari Q(x). Oleh karena itu, kita peroleh bahwa
   $$k(x-a)(x-b)(x-c) = Q(x) = ax^3 + bx^2 + cx - abc$$
   Mudah untuk mendapatkan k = 1 dengan menguji x = 0. Jadi, kita punya
   $$(x-a)(x-b)(x-c) = ax^3 + bx^2 + cx - abc$$
   Oleh karena itu, dengan membandingkan koefisien, dapat disimpulkan bahwa a = 1, 2b + c + 1 = 0, dan b(c + 1) = 0. Kita juga menyimpulkan bahwa b = 0 dan c = -1, yang memaksa a + b + c = 0.

3. Penyelesaian :
   P(1, 1) menghasilkan f(1) = 1
   Dengan menggunakan pengantar, kita sudah selesai. Misalkan bahwa f(n – 1) = n – 1 maka f(n) = n.
   P(n, n – 1) memberikan: f(n) + n – 1 | n^2 + f(n)(n – 1) - (n – 1)[f(n) + n – 1] = n^2 - $(n – 1)^2$ = 2n – 1. Jadi f(n) = n.

4. Penyelesaian :
   Karena terdapat 2n · 2n = $4n^2$ ubin yang diwarnai dengan n warna, terdapat warna k yang digunakan pada setidaknya 4n ubin. Perhatikan semua 4n ubin dengan warna ini.
   Untuk setiap indeks 1 ≤ i ≤ 2n, misalkan f(i) adalah jumlah ubin berwarna k pada baris i. Dengan demikian, kita memiliki $\sum_{i=1}^{2n} f(i)$ = 4n dan f(i) ≤ 2n untuk setiap 1 ≤ i ≤ 2n. Secara khusus:
   1. Setidaknya ada dua indeks i sehingga f(i) ≥ 2.

Memang, sebaliknya $4n = \sum_{i=1}^{2n} f(i) \leq (2n) + 1 \cdot (2n-1) = 4n - 1$
adalah kontradiksi.

2. Perhatikan himpunan S dari semua indeks i sehingga f(i) ≥ 2. Maka, $\sum_{i \in S} f(i) > 2n$.
   Ini memiliki bukti yang sama seperti di atas.
   Menurut definisi S, $\sum_{i \notin S} f(i) \leq \sum_{i \notin S} 1 = 2n - |S| \leq 2n - 2 < 2n$
   disebabkan oleh pengamatan sebelumnya, jadi
   $$\sum_{i \in S} f(i) = 4n - \sum_{i \notin S} f(i) > 2n.$$

Sekarang, perhatikan himpunan T dari semua ubin dengan koordinat (i, j) berwarna k dengan i ∈ S. Ini berkorespondensi dengan semua ubin berwarna k yang juga memiliki ubin lain dalam baris yang sama dengan warna k. Jumlah pasangan (atau ubin) tersebut adalah $\sum_{i \in S} f(i) > 2n$, sehingga berdasarkan prinsip pigeonhole, terdapat dua ubin berbeda di T pada kolom yang sama, misalnya (i_1, j) dan (i_2, j). Perhatikan dua ubin (i_1, j'), $(i_2, j'') \in T$ dengan $j', j'' \neq j$; keduanya ada berdasarkan konstruksi dan argumen kita sebelumnya. Jika $j' = j''$, kita dapat menukar dua ubin acak selain empat ubin yang telah disebutkan. Jika $j' \neq j''$, kita tukar (i_2, j') dan (i_2, j'') dan selesai.

5. Penyelesaian :
   Kita tinjau himpunan S = $\{2^{a_1}3^{a_2}5^{a_3}7^{a_4} \mid a_1, a_2, \ldots a_4 \geq 0\}$. Jelas, A ⊆ S. Kita dapat mendefinisikan setiap elemen S dari kuadruplet titik (a_1, a_2, a_3, a_4). Jika kita memiliki setidaknya 17 titik, terdapat dua titik di A dengan representasi yang sama modulo 2 (karena hanya ada 16 kemungkinan representasi), yang menyiratkan bahwa jika keduanya adalah $(a_1, a_2, a_3, a_4) \equiv (b_1, b_2, b_3, b_4) \pmod 2$, maka
   $$2^{a_1+b_1}3^{a_2+b_2}5^{a_3+b_3}7^{a_4+b_4}$$
   adalah kuadrat sempurna berdasarkan konstruksinya.
   Untuk membangun A dengan 16 elemen, kita cukup mempertimbangkan himpunan kuadruplet dengan $1 \leq a_k \leq 2$ untuk $1 \leq k \leq 4$.

6. Penyelesaian :
   Misalkan ∡XYZ menyatakan sudut arah ∠XYZ. (Ditulis dalam urutan berlawanan arah jarum jam.)
   Misalkan M adalah titik tengah busur CD. Jadi, AM dan BM adalah garis bagi sudut-sudut yang menghadap busur CD yang sama. Misalkan AX ∩ BM = K, BY ∩ AM = J, dan AX ∩ BY = L. Jelas, JMKL adalah siklik, karena terdapat dua sudut siku-siku pada sisi yang berlawanan. Hal ini menghasilkan ∡KLB = ∡JLA = ∡JMK. Karena ∡LJA = ∡BKL, dari dua sudut yang sama pada segitiga ALJ dan KLB, ∡LAJ = ∡KBL, maka dengan menambahkan ∡JAY = ∡XBK pada kedua sisi secara berurutan, kita peroleh ∡XBY = ∡XAY sehingga ABXY bersifat siklik. Oleh karena itu, ∡YAB = ∡BXY = ∡BCD, maka karena B, X, C didefinisikan sebagai kolinear, XY || CD, sesuai keinginan.

7. Penyelesaian :
   Jelas, konstanta P berfungsi jika merupakan bilangan bulat. Jika P(x) = ax + b linear, kita peroleh bahwa b = P(0) = $\lfloor P(0) \rfloor$, sehingga b merupakan bilangan bulat. Sekarang, a juga harus berupa bilangan bulat dengan mempertimbangkan P(1). Jika a > 1, kita peroleh bahwa P(0.5) = 0.5a + b ≥ b + 1, sebuah kontradiksi. Demikian pula, jika a < 0, kita peroleh

$$P(0.5) = 0.5a + b < b$$

kontradiksi lebih lanjut. Jadi a = 1, dan kita peroleh P(x) = x + b.

Sekarang, asumsikan P berderajat paling sedikit 2 dan perhatikan deret beda hingga $\triangle$P. Kita perhatikan bahwa $\triangle$P berderajat paling sedikit 1, sehingga deret tersebut tak terbatas. Jika deret tersebut positif tak terbatas, kita dapat menemukan beberapa n sehingga $\triangle$P(n) > 10^{420}, dan dengan demikian, berdasarkan Teorema Nilai Antara, karena P(x) kontinu, terdapat δ ∈ (n, n + 1) dengan P(δ) = P(n) + 10^{69}, dan dengan demikian kita memiliki kontradiksi kita, karena jelas $\lfloor \delta \rfloor = n$ tetapi $\lfloor P(\delta) \rfloor \neq P(n)$. Demikian pula, jika tak terbatas di bawah, kita dapat melakukan hal yang sama - pertimbangkan beberapa n sedemikian rupa sehingga $\triangle$P(n) < -10^{420}. Kemudian, kita peroleh bahwa terdapat beberapa δ ∈ (n, n + 1) dengan P(δ) = P(n) – 10^{69}, yang sekali lagi kontradiktif (karena lantainya tidak sama). Jadi, kasus ini mustahil.

Jadi semua solusinya adalah P(x) = c, x + c untuk c ∈ $\mathbb{Z}$.

8. Penyelesaian :

Kesulitan utama dari soal ini adalah menyadari bahwa ketika n = 4, terdapat 6 suku di sebelah kanan yang terlalu sulit untuk dipecahkan. Jadi, carilah pasangannya.

Jawabannya adalah n = 4, yang dicapai dengan pasangan (2, 6, 6, 6).

Kita hanya perlu membuktikan bahwa n = 3 tidak dapat dicapai.

Sekarang, kita punya

$$\gcd(a_1, a_2, a_3) = \frac{1}{\gcd(a_1, a_2)} + \frac{1}{\gcd(a_1, a_3)} + \frac{1}{\gcd(a_2, a_3)}$$

Perhatikan bahwa jika k | gcd(a_1, a_2, a_3), maka k | gcd(a_i, a_j), ∀1 ≤ i < j ≤ 3$. Jadi,

$$k \leq \gcd(a_1, a_2, a_3) \leq \frac{3}{k}$$

memaksa k ≤ 1. Oleh karena itu, gcd(a_1, a_2, a_3) = 1.

Sekarang, bash saja $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

WLOG x ≤ y ≤ z, dan misalkan x = gcd(a_1, a_2), y = gcd(a_1, a_3), z = gcd(a_2, a_3) untuk penyederhanaan.

$$\frac{3}{z} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$$

Jadi, z ≤ 3, dan untuk alasan yang jelas z > 1.

Jika z = 3, maka kita harus memiliki persamaan, yang memaksa x = y = z = 3, tetapi gcd(x,y,z) | gcd(a,b,c), yang merupakan kontradiksi.

Jika z = 2, maka kita harus memiliki $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$. Pemecahan kasus sederhana seperti ini akan menghasilkan (y,z) = (4, 4) atau (3, 6).

Yang pertama tidak mungkin karena 4 | gcd(a_1, a_3), gcd(a_2, a_3) menunjukkan bahwa 4 | a_1, a_2 memaksa 4 | gcd(a_1, a_2).

Yang kedua juga tidak mungkin karena 2 | gcd(a_1, a_2), gcd(a_2, a_3) menunjukkan bahwa 2 | a_1, a_3, tetapi gcd(a_1, a_3) = 3.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2021

TINGKAT KABUPATEN/KOTA

BIDANG MATEMATIKA

WAKTU : 180 MENIT

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Kabupaten/Kota Tahun 2021

1. Misal u_1, u_2, u_3, … barisan aritmatika dengan suku-suku real positif. Jika $\frac{u_1+u_2}{u_3} = \frac{11}{21}$, maka nilai $\frac{u_2+u_3}{u_1}$ adalah …

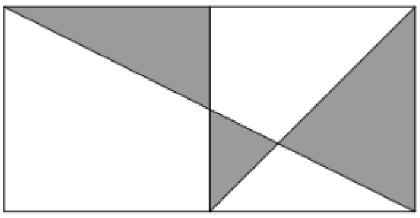
2. Koefisien x^7 pada penjabaran
$$(1+x)(2+x^2)(3+x^3)(4+x^4)(5+x^5)$$
adalah …

3. Diberikan fungsi f terdefinisi untuk semua bilangan real x selain 0 dan 1, memenuhi
$$(x+1)f(-x) + \frac{1-x}{4x} f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{100(x^2+4)}{x}$$
Hitung nilai dari $f(2) + f(3) + f(4) + \ldots + f(400)$.

4. Diketahui bilangan bulat positif A dan B jika dibagi 5 berturut-turut bersisa 2 dan 3. Sisa pembagian bilangan $A(A+1) + 5B$ oleh 25 adalah …

5. Bilangan asli n dikatakan menarik jika terdapat suku banyak (polinom) dengan koefisien bilangan bulat $P(x)$ sehingga $P(7) = 2021$ dan $P(n) = 2045$. Banyaknya bilangan prima menarik adalah …

6. Pada gambar di bawah ini, sebuah persegi panjang dibagi dua menjadi 2 buah persegi yang panjang sisinya 6 cm. Luas total daerah yang diarsir adalah … cm^2.



7. Pada suatu lingkaran dengan jari-jari r, terdapat segiempat talibusur $ABCD$ dengan $AB = 8$ dan $CD = 5$. Sisi AB dan DC diperpanjang dan berpotongan di luar lingkaran di titik P. Jika $\angle APD = 60^o$ dan $BP = 6$, maka nilai dari r^2 adalah …

8. Bilangan 1, 2, 3, …, 999 digit-digitnya disusun membentuk angka baru m dengan menuliskan semua digit bilangan-bilangan tadi dari kiri ke kanan. Jadi, m = 1234…91011…999. Hasil penjumlahan digit ke-2021, 2022, 2023 dari m adalah …

9. Diketahui ada 6 pasang suami-istri. Dari keenam pasangan tersebut, dipilih 6 orang secara acak. Banyaknya cara untuk memilih 6 orang tersebut sehingga paling banyak terdapat sepasang suami-istri adalah …

10. Diketahui segitiga ABC dengan $AB >$ AC. Garis bagi sudut BAC memotong BC di titik D. Titik E dan F berturut-turut terletak pada sisi AC dan AB sehingga DE sejajar AB dan DF sejajar AC. Lingkaran luar ΔBCE memotong sisi AB di titik K. Jika luas segitiga CDE adalah 75 dan luas segitiga DEF adalah 85, maka luas segiempat $DEKF$ adalah …

11. Jika $a > 1$ suatu bilangan asli sehingga hasil penjumlahan semua bilangan real x yang memenuhi persamaan

$$\lfloor x \rfloor^2 - 2ax + a = 0$$

adalah 51, maka a adalah … **Catatan:** $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang tidak lebih dari x.

12. Diketahui bilangan real a, b dan c memenuhi pertidaksamaan

$$|ax^2 + bx + c| \leq 1$$

untuk setiap x anggota bilangan real dengan $0 \leq x \leq 1$. Nilai maksimum yang mungkin dari $21a + 20b + 19c$ adalah …

13. Diberikan x, y dan n bilangan asli yang memenuhi

$$x^2 + (y + 2)x + (n + 1)y = n^2 + 252$$

Nilai y terbesar yang mungkin adalah …

14. Jika dua digit terakhir dari a^{777} adalah 77, maka dua digit terkahir dari a adalah …

15. Bilangan asli ganjil b terbesar sehingga barisan bilangan asli

$$a_n = n^2 + 19n + b$$

memenuhi FPB(a_n, a_{n+1}) = FPB(a_{n+2}, a_{n+1}) untuk setiap bilangan asli n adalah …

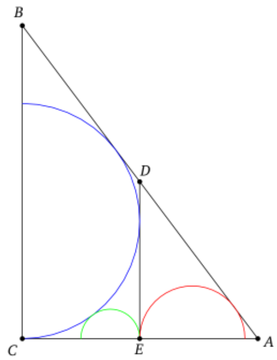
16. Diberikan segitiga ABC dengan $AB = 6$, $BC = 7$ dan $CA = 8$. Jika I adalah titik potong ketiga garis bagi segitiga ABC, maka AI^2 adalah …

17. Banyak fungsi (pemetaan) dari A = {1,2,3,4,5,6} ke B = {7,8,9,10} dengan syarat 7 dan 8 mempunyai prapeta, yaitu ada x dan y di A sehingga $f(x) = 7$ dan $f(y) = 8$ adalah …

18. Banyaknya barisan ternary (sukunya 0, 1 atau 2) yang memuat 13 suku, memuat tepat empat 0 dan setiap di antara dua 0 ada paling sedikit dua suku bukan 0 adalah …

19. Sebuah papan catur berukuran 101 × 21 akan dipasangi beberapa ubin berukuran 3 × 1. Berapa ubin terbanyak yang bisa dipasang pada papan sehingga tidak ada 2 ubin yang bertumpuk atau bersentuhan? (Bersentuhan pada titik sudut ubin juga tidak diperbolehkan)

20. Diberikan segitiga siku-siku ABC, dengan $\angle C = 90^o$. Titik D terletak pada sisi AB dan E pada sisi AC sehingga garis DE sejajar dengan garis BC. Diketahui tiga setengah lingkaran berwarna biru, merah dan hijau sedemikian sehingga setengah lingkaran biru menyinggung AC dan AB, setengah lingkaran merah menyinggung sisi AB dan garis DE, dan setengah lingkaran hijau menyinggung setengah lingkaran biru dan garis DE (perhatikan gambar berikut).



Jika $2AC + 5BC = 5AB$, maka perbandingan panjang jari-jari setengah lingkaran merah dengan jari-jari setengah lingkaran hijau adalah k : 25. Nilai k adalah ...

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2021

TINGKAT KABUPATEN/KOTA

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Kabupaten/Kota Tahun 2021

1. Penyelesaian:

$$\frac{u_1+u_2}{u_3}=\frac{11}{21}\Rightarrow\frac{u_1+u_2+u_3}{u_3}=\frac{32}{21}$$

$$\frac{u_2+u_3}{u_1}=p\Rightarrow\frac{u_1+u_2+u_3}{u_1}=p+1$$

Kita tahu bahwa $u_2=\frac{1}{2}(u_1+u_3)$, sehingga $u_1+u_2+u_3=\frac{3}{2}(u_1+u_3)$. Jadi,

$$\frac{1}{p+1}+\frac{21}{32}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{1}{p+1}=\frac{1}{96}$$

$$\Leftrightarrow p=95$$

2. Penyelesaian:

Perhatikan bahwa suku x^7 dapat dibuat dari perkalian berikut:

$(1+x)(2+x^2)(3+x^3)(4+x^4)(5+x^5)\Rightarrow x\cdot x^2\cdot 3\cdot x^4\cdot 5=15x^7$

$(1+x)(2+x^2)(3+x^3)(4+x^4)(5+x^5)\Rightarrow 1\cdot x^2\cdot 3\cdot 4\cdot x^5=12x^7$

$(1+x)(2+x^2)(3+x^3)(4+x^4)(5+x^5)\Rightarrow 1\cdot 2\cdot x^3\cdot x^4\cdot 5=10x^7$

Jadi, total koefisien suku x^7 adalah 15 + 12 + 10 = 37.

3. Penyelesaian:

Perhatikan hubungan antara $f(-x)$ dan $f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Substitusi x pada $f(-x)$ dapat mengubah $f(-x)$ menjadi $f\left(\frac{1}{x}\right)$, begitu juga sebaliknya.

Dengan mengganti x menjadi $-\frac{1}{x}$ diperoleh:

$$-\left(\frac{1-x}{x}\right)f\left(\frac{1}{x}\right)-\left(\frac{x+1}{4}\right)f(-x)=-\frac{100(4x^2+1)}{x}$$

Dengan mengalikan kedua ruas dengan (-4) diperoleh:

$$16\left(\frac{1-x}{4x}\right)f\left(\frac{1}{x}\right)+(x+1)f(-x)=\frac{100(16x^2+4)}{x}$$

Kemudian, dengan mengeliminasikan bentuk $f(-x)$ akan diperoleh persamaan dalam bentuk $f\left(\frac{1}{x}\right)$.

$$16\left(\frac{1-x}{4x}\right)f\left(\frac{1}{x}\right)+(x+1)f(-x)=\frac{100(16x^2+4)}{x}$$

$$\left(\frac{1-x}{4x}\right)f\left(\frac{1}{x}\right)+(x+1)f(-x)=\frac{100(x^2+4)}{x}$$

$$\underline{\hspace{10cm}}\;-$$

$$15\left(\frac{1-x}{4x}\right)f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{100(15x^2)}{x}$$

Sehingga

$$15\left(\frac{1-x}{4x}\right)f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{100(15x^2)}{x}\Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{400x^2}{1-x}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \frac{400}{x(x-1)}$$
$$\Leftrightarrow f(x) = 400\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}\right)$$

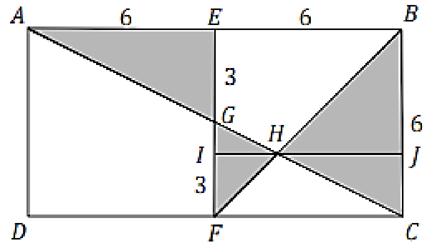
Jadi, bentuk $f(x)$ merupakan bentuk telescoping. Maka,

$$\begin{aligned} f(2) + f(3) + f(4) + \cdots + f(400) &= 400\left(\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{399} - \frac{1}{400}\right)\right) \\ &= 400\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{400}\right) \\ &= 400\left(\frac{399}{400}\right) \\ &= 399 \end{aligned}$$

4. Penyelesaian:
   Bilangan A dan B dapat dinyatakan berturut-turut sebagai $5a + 2$ dan $5b + 3$ dengan a dan b bilangan cacah.
   $$\begin{aligned} A(A+1) + 5B &= (5a+2)(5a+3) + 5(5b+3) \\ &= 25a^2 + 25a + 6 + 25b^2 + 15 \\ &= 25(a^2 + a + b^2) + 21 \end{aligned}$$
   Jadi, jelas bahwa $A(A+1) + 5B$ dibagi 25 bersisa 21.

5. Penyelesaian:
   Misal $Q(x)$ adalah suatu polinom yang memenuhi $Q(x) = P(x) - 2021$, maka jelas sekali bahwa $Q(7) = 0$. Sehingga, $Q(x) = (x-7) \cdot R(x)$ dengan $R(x)$ adalah suatu polinom yang derajatnya satu kurangnya dari derajat $Q(x)$.
   Dari $Q(x) = P(x) - 2021$, maka $P(x) = Q(x) + 2021$.
   Karena, $P(n) = 2045$, maka $Q(n) + 2021 = 2045$.
   Perhatikan, $Q(n) + 2021 = 2045 \Rightarrow (n-7) \cdot R(n) = 24$
   $$\Leftrightarrow (n-7) \cdot R(n) = 24$$
   $$\Leftrightarrow R(n) = \frac{24}{n-7}$$
   Perhatikan sekali lagi, n adalah bilangan prima, dan koefisien polinom adalah bilangan bulat, maka agar $R(n)$ bulat, jelas sekali bahwa $(n-7)$ merupakan factor bulat dari 24.
   Sehingga, $n - 7 = \{-24, -12, -8, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$.
   Maka, $n = \{-17, -5, -1, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 13, 15, 19, 31\}$.
   Sehingga n yang merupakan bilangan prima adalah $3, 5, 11, 13, 19, 31$.
   Jadi, banyaknya n yang memenuhi adalah 6.

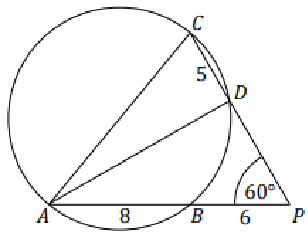
6. Penyelesaian:



Perhatikan,
Dari kesebangunan ΔAGE dan ΔACB diperoleh $EG = GF = 3$.
Dari kesebangunan ΔHGF dan ΔHCB dan misal diperoleh $HI = 2$ dan $HJ = 4$.
Maka, luas daerah arsir adalah

$$\begin{aligned}[AEG] + [HGF] + [HCB] &= \frac{1}{2} \cdot GE \cdot AE + \frac{1}{2} \cdot GF \cdot HI + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot HJ \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 \\ &= 9 + 3 + 12 \\ &= 24\end{aligned}$$

7. Penyelesaian:



Dengan menggunakan POP (Power of Point) diperoleh:

$$\begin{aligned}PD \cdot PC = PB \cdot PA \quad &\Rightarrow x(x+5) &&= 6 \cdot 14 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 5x &&= 84 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 5x - 84 &&= 0 \\ &\Leftrightarrow (x+12)(x-7) &&= 0 \\ &\Leftrightarrow x = -12 \text{ atau} && x = 7\end{aligned}$$

Karena Panjang PD tidak boleh negative, maka $PD = x = 7$.
Perhatikan $\angle APD = 60^o$, artinya $\cos \angle APD = \frac{1}{2}$.
Padahal, berlaku $\frac{PD}{PA} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2} = \cos \angle APD$, sehingga jelas bahwa $\angle ADP = 90^o$.
Dari ΔADP siku-siku di D diperoleh:

$$\begin{aligned}AD^2 &= AP^2 - PD^2 \\ &= 14^2 - 7^2 \\ &= 147\end{aligned}$$

Jadi, karena pada ΔADC besar $\angle ADP = 90^o$, maka AC adalah diameter, sehingga berlaku

$$\begin{aligned}AC^2 = AD^2 + CD^2 &\Rightarrow (2r)^2 = 147 + 25 \\ &\Leftrightarrow 4r^2 = 172 \\ &\Leftrightarrow r^2 = 43\end{aligned}$$

8. Penyelesaian:
   Kita potong-potong dulu bilangan $m = 123\ldots91011\ldots999$, menjadi bentuk seperti berikut.

$$m = \underbrace{123\ldots89}_{\textit{digit satuan}}\ \underbrace{101112\ldots9899}_{\textit{digit puluhan}}\ \underbrace{\underbrace{100101102\ldots198199}_{\substack{\textit{digit ratusan}\\ \textit{dengan angka awal 1}}}\ \underbrace{200201202\ldots298299}_{\substack{\textit{digit ratusan}\\ \textit{dengan angka awal 2}}}\ldots\ \underbrace{900901902\ldots998999}_{\substack{\textit{digit ratusan}\\ \textit{dengan angka awal 9}}}}_{\textit{semua digit ratusan}}$$

   Perhatikan,
   - Digit satuan, dari 1 sampai 9 ada sebanyak (9 – 1 + 1) = 9 digit.
   - Digit puluhan, dari 10 sampai 99 ada sebanyak (99 – 10 + 1) × 2 = 180 digit.
   - Digit ratusan, dari 100 sampai n ada sebanyak $(n - 100 + 1) \times 3$ digit.

   Jadi banyak digit dari 1 sampai n adalah (9 + 180 + (n – 99) × 3) buah digit.
   Sehingga apabila kita hendak mencari digit ke 2021, 2022, 2023 dari m, maka kita perlu memperhatikan bahwa digit terakhir dari bilangan ratusan selalu terletak pada digit yang merupakan kelipatan tiga.
   Ilustrasi berikut mungkin akan mempermudah pemahaman kita.

$$\underbrace{\underbrace{123\ldots89}_{\textit{digit satuan}}\ \underbrace{101112\ldots9899}_{\textit{digit puluhan}}}_{\substack{\textit{banyak digitnya 9+180}\\ \textit{merupakan kelipatan 3}}}\ \underbrace{10\boxed{0}}_{\textit{3 digit}}\ \underbrace{10\boxed{1}}_{\textit{3 digit}}\ \underbrace{10\boxed{2}}_{\textit{3 digit}}$$

   Jadi, untuk mempermudah pencarian, maka akan dicari digit ke-2022, karena 2022 merupakan kelipatan tiga.
   Digit ke 2022 adalah digit terakhir dari n yang memenuhi:

$$\begin{aligned} 9 + 180(n - 99) \times 3 = 2022 \quad &\Rightarrow 189 + (n - 99) \times 3 = 2022 \\ &\Leftrightarrow 63 + n - 99 = 674 \\ &\Leftrightarrow n - 36 = 674 \\ &\Leftrightarrow n = 710 \end{aligned}$$

   Kita tahu bahwa digit terakhir dari 710, yaitu 0 adalah digit ke-2022, sehingga ilustrasi berikut juga akan membantu mencari digit ke-2021 dan digit ke-2023.

$$\underbrace{123\ldots89}_{\textit{digit satuan}}\ \underbrace{101112\ldots9899}_{\textit{digit puluhan}}\ \ldots\ 7\boxed{1}\boxed{0}\boxed{7}11712$$

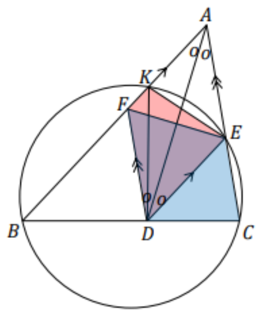
   Sehingga, digit ke-2021 adalah 1, digit ke-2022 adalah 0, dan digit ke-2023 adalah 7.
   Jadi, hasil penjumlahan digit ke 2021, 2022, 2023 dari m adalah 1 + 0 + 7 = 8.

9. Penyelesaian:
   Misal pasangan suami istri tersebut adalah $L_1P_1, L_2P_2, \ldots, L_6P_6$. Dari kedua belas orang tersebut akan dipilih enam orang dimana paling banyak terdapat sepasang suami istri, maka akan ada dua kasus yang mungkin, yaitu:
   - Tidak ada pasangan suami istri
     Akan dipilih satu orang dari setiap pasangan suami istri. Sehingga, banyak cara untuk memilih enam orang tersebut adalah $2^6 = 64$ cara.
   - Tepat ada satu pasang suami istri

Akan dipilih dua orang yang merupakan satu pasangan. Banyaknya cara memilih dua orang tersebut adalah ${}_6C_1 = 6$ cara.
Sehingga, masih tersisa lima pasangan suami istri dan empat orang lagi untuk dipilih, dimana keempatnya tidak boleh ada sepasang suami istri.
Maka, jelas akan dipilih empat dari lima pasangan suami istri yang tersisa untuk diambil satu orang pada setiap pasangan. Banyak cara untuk memilih empat orang tersebut adalah ${}_5C_4 \times 2^4 = 80$ cara.
Jadi, banyak cara pada kasus ini adalah $6 \times 80 = 480$ cara.

Jadi, total banyak cara adalah 64 + 480 = 544 cara.

10. Penyelesaian:



Perhatikan, $[DKEF] = [DEF] + [EFK]$.
Jelas bahwa $DEAF$ adalah jajargenjang, sehingga $DF = AE$.
Karena $DF||AC$, akibatnya

$$\frac{[CDE]}{[DEF]} = \frac{CE}{DF} = \frac{75}{85} = \frac{15}{17}$$

Perhatikan juga bahwa AD garis bagi $\angle BAC$, maka berlaku:

$$\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BD}$$

Karena $DE||AB$ maka berlaku kesebangunan ΔCDE dan ΔCAB, yaitu:

$$\frac{CE}{AE} = \frac{CD}{BD}$$

Jadi, dari dua perbandingan tersebut dan karena $DF = AE$ jelas bahwa

$$\frac{CD}{BD} = \frac{CE}{AE} = \frac{AC}{AB} = \frac{CE}{DF} = \frac{15}{17}$$

Dengan menggunakan POP (Power of Point) diperoleh:

$$AK \cdot AB = AE \cdot AC \qquad \Rightarrow \frac{AK}{AE} = \frac{AC}{AB}$$
$$\Leftrightarrow \frac{AK}{AE} = \frac{15}{17}$$

Padahal $DEAF$ adalah jajargenjang dan menggunakan sifat garis bagi diperoleh ΔAFD adalah segitiga sama kaki, sehingga $AF = FD$ dan mengakibatkan $DEAF$ adalah belah ketupat dengan

$$AF = AE = ED = DF.$$
$$\frac{AK}{AE} = \frac{15x}{17x} \Rightarrow \frac{AF-FK}{AE} = \frac{15}{17}$$

$$\Leftrightarrow \frac{AF-FK}{AE} = \frac{15}{17}$$
$$\Leftrightarrow \frac{FK}{AE} = \frac{2}{17}$$

Sehingga,

$$\frac{[EFK]}{[DEF]} = \frac{FK}{ED} \Rightarrow \frac{[EFK]}{[DEF]} = \frac{FK}{AE}$$
$$\Leftrightarrow \frac{[EFK]}{[DEF]} = \frac{2}{17}$$
$$\Leftrightarrow [EFK] = \frac{2}{17}[DEF]$$

Jadi, $[DKEF] = [DEF] + [EFK] = [DEF] + \frac{2}{17}[DEF] = \frac{19}{17}[DEF] = \frac{19}{17} \times 85 = 95$.

11. Penyelesaian:
    Perhatikan, $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$, dengan $0 \leq \{x\} < 1$.
    Sehingga,
    $$\lfloor x \rfloor^2 - 2ax + a = 0 \quad \Rightarrow \quad (x - \{x\})^2 - 2ax + a = 0$$
    $$\Leftrightarrow x^2 - 2x\{x\} + \{x\}^2 - 2ax + a = 0$$
    $$\Leftrightarrow x^2 - 2(a + \{x\})x + (a + \{x\}^2) = 0$$
    Periksa nilai diskriminan dari $x^2 - 2(a + \{x\})x + (a + \{x\}^2) = 0$,
    $$D = b^2 - 4ac \qquad \Rightarrow D = \left(2(a + \{x\})\right)^2 - 4(1)(a + \{x\}^2)$$
    $$\Leftrightarrow D = 4a^2 + 8a\{x\} + 4\{x\}^2 - 4a - 4\{x\}^2$$
    $$\Leftrightarrow D = 4a^2 + 8a\{x\} - 4a$$
    Persamaan memiliki penyelesaian real apabila $D > 0$, sehingga
    $$D > 0 \qquad \Rightarrow 4a^2 + 8a\{x\} - 4a > 0$$
    $$\Leftrightarrow 4a(a-1) + 8a\{x\} > 0$$
    Untuk $a > 1$ dan $0 \leq \{x\} < 1$ maka diperoleh $4a(a-1) > 0$ dan $8a\{x\} \geq 0$, sehingga jelas benar bahwa $4a(a-1) + 8a\{x\} > 0$. Sehingga, dari teorema vieta diperoleh jumlah semua bilangan real x yang memenuhi persamaan $x^2 - 2(a + \{x\})x + (a + \{x\}^2) = 0$ adalah
    $$x_1 + x_2 = -\frac{-2(a+\{x\})}{1} \Rightarrow 51 = 2a + 2\{x\}$$
    $$\Leftrightarrow \{x\} = \frac{51-2a}{2}$$
    Padahal, $0 \leq \{x\} < 1$. Sehingga,
    $$0 \leq \{x\} < 1 \qquad \Rightarrow 0 \leq \frac{51-2a}{2} < 1$$
    $$\Leftrightarrow 0 \leq 51 - 2a < 2$$
    $$\Leftrightarrow -2 < 2a - 51 \leq 0$$
    $$\Leftrightarrow 49 < 2a \leq 51$$
    $$\Leftrightarrow 24{,}5 < a \leq 25{,}5$$
    Jadi, karena a bilangan bulat, maka satu-satunya nilai a yang memenuhi adalah 25.

12. Penyelesaian:
    Perhatikan,
    - Untuk $x = 0$, maka $|c| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq c \leq 1$

- Untuk $x=\frac{1}{2}$, maka $\left|\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c\right|\leq 1 \Rightarrow -1\leq \frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c\leq 1$
$$\Leftrightarrow -4\leq -4\left(\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c\right)\leq 4$$
- Untuk $x=1$, maka $|a+b+c|\leq 1 \Rightarrow -1< a+b+c\leq 1$
$$\Leftrightarrow -22\leq 22(a+b+c)\leq 22$$

Perhatikan bahwa $21a+20b+19c=22(a+b+c)+c-4\left(\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c\right)$.
Sehingga, jelas bahwa bentuk $21a+20b+19c$ dapat diuraikan dari tiga bentuk di atas. Jadi, jumlahkan ketiganya diperoleh $-27\leq 21a+20b+19c\leq 27$.
Kesamaan terjadi saat $a=8, b=-8$ dan $c=1$ sehingga $f(0)=1$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=-1$ dan $f(1)=1$ memenuhi $|f(x)|\leq 1$ untuk setiap $0\leq x\leq 1$.
Jadi, nilai maksimum $21a+20b+19c$ adalah 27.

13. Penyelesaian:
$$\begin{aligned} x^2+(y+2)x+(n+1)y=n^2+252 \Rightarrow \quad & x^2+xy+2x+ny+y=n^2+252\\ \Leftrightarrow \quad & x^2+2x+1+(x+n+1)y=n^2+253\\ \Leftrightarrow \quad & (x+1)^2-n^2+(x+n+1)y=253\\ \Leftrightarrow \quad & (x+1+n)(x+1-n)+(x+n+1)y=253\\ \Leftrightarrow \quad & (x+1+n)(y+x+1-n)=253 \end{aligned}$$
Sehingga, $(x+1+n)$ merupakan salah satu factor bulat positif 253, yaitu $\{1,11,23,253\}$. Perhatikan juga bahwa untuk x, y dan n bilangan asli, maka $x+n+1\geq 3$, sehingga dapat diperiksa tiga kasus yang mungkin, yaitu:

- Untuk $x+1+n=11$ maka $y+x+1-n=23$.

Perhatikan, $\begin{aligned} x+1+n&=11\\ y+x+1-n&=23\\ \hline -y+2n&=-12 \end{aligned}$ $-$ $\Rightarrow n=\dfrac{y-12}{2}$	Perhatikan, $x+1+n=11 \Rightarrow x=10-n$ dan karena $x\geq 1$ maka diperoleh: $x\geq 1 \Rightarrow 10-n\geq 1$ $\Leftrightarrow \quad n\leq 9$

Maka,
$$n\leq 9 \Rightarrow \frac{y-12}{2}\leq 9$$
$$\Leftrightarrow y\leq 30$$
Sehingga, untuk $x+1+n=11$ diperoleh nilai maksimum y adalah 30.

- Untuk $x+1+n=23$ maka $y+x+1-n=11$.

Perhatikan, $\begin{aligned} x+1+n&=23\\ y+x+1-n&=11\\ \hline -y+2n&=12 \end{aligned}$ $-$ $\Rightarrow n=\dfrac{y+12}{2}$	Perhatikan, $x+1+n=23 \Rightarrow x=22-n$ dan karena $x\geq 1$ maka diperoleh: $x\geq 1 \Rightarrow 22-n\geq 1$ $\Leftrightarrow \quad n\leq 21$

Maka,
$$n\leq 21 \Rightarrow \frac{y+12}{2}\leq 21$$
$$\Leftrightarrow y\leq 30$$

Sehingga, untuk $x+1+n=23$ diperoleh nilai maksimum y adalah 30.

- Untuk $x+1+n=253$ maka $y+x+1-n=1$.

Perhatikan, $\begin{array}{r} x+1+n=253 \\ y+x+1-n=1 \\ \hline -y+2n=252 \end{array} -$ $\Rightarrow n=\dfrac{y+252}{2}$	Perhatikan, $x+1+n=253 \Rightarrow x=252-n$ dan karena $x \geq 1$ maka diperoleh: $x \geq 1 \Rightarrow 252-n \geq 1$ $\Leftrightarrow n \leq 251$

Maka,

$$n \leq 251 \Rightarrow \frac{y+252}{2} \leq 251$$

Sehingga, untuk $x+1+n=253$ diperoleh nilai maksimum y adalah 250.

Jadi, nilai y terbesar yang mungkin adalah 250.

14. Penyelesaian:
Perhatikan, $a^{777} \equiv 77$ (mod 100) artinya $a^{777} \equiv 77$ (mod 10)
Dengan teorema Euler, a relative prima dengan 10 dan $\varphi(10)$ = 4, maka $a^4 \equiv 1$ (mod 10). Sehingga,
$a^{777} \equiv 7$ (mod 10) $\Rightarrow (a^4)^{194} \cdot a \equiv 7$ (mod 10)
$\Leftrightarrow a \equiv 7$ (mod 10)
Karena $a \equiv 7$ (mod 10), maka dua digit terakhir dari a dapat kita nyatakan sebagai $a=10k+7$, dengan teorema Euler, a relative prima dengan 100 dan $\varphi(100)=40$, maka $a^{40} \equiv 1$ (mod 100).

$$\begin{aligned} a^{777} \equiv 77 \pmod{100} \Rightarrow\quad & (a^{40})^{19} \cdot a^{17} \equiv 77 \pmod{100} \\ \Leftrightarrow\quad & a^{17} \equiv 77 \pmod{100} \\ \Leftrightarrow\quad & (10k+7)^{17} \equiv 77 \pmod{100} \\ \Leftrightarrow\quad & 170k \cdot 7^{16} + 7^{17} \equiv 77 \pmod{100} \\ \Leftrightarrow\quad & 170k \cdot (7^4)^4 + (7^4)^4 \cdot 7 \equiv 77 \pmod{100} \\ \Leftrightarrow\quad & 170k \cdot (1)^4 + (1)^4 \cdot 7 \equiv 77 \pmod{100} \\ \Leftrightarrow\quad & 170k + 7 \equiv 77 \pmod{100} \\ \Leftrightarrow\quad & 70k \equiv 70 \pmod{100} \\ \Leftrightarrow\quad & 7k \equiv 7 \pmod{10} \\ \Leftrightarrow\quad & k \equiv 1 \pmod{10} \end{aligned}$$

Sehingga, $k=1$. Diperoleh $a=10(1)+7=17$.
Jadi, dua digit terakhir dari a adalah 17.

15. Penyelesaian:
Perhatikan, jika b bilangan ganjil dan mengingat $n^2+19=n(n+19)$ merupakan perkalian bilangan ganjil dan genap, maka jelas bahwa a_n selalu bernilai ganjil untuk setiap bilangan asli n.
Karena $a_{n+1} > a_n$ maka:

$$
\begin{aligned}
\text{FPB}(a_n, a_{n+1}) &= \text{FPB}(a_n, a_{n+1} - a_n) \\
&= \text{FPB}\left(n^2 + 19n + b, \left((n+1)^2 + 19(n+1) + b\right) - (n^2 + 19n + b)\right) \\
&= \text{FPB}(n^2 + 19n + b, 2n + 20) \\
&= \text{FPB}(n^2 + 19n + b, n + 10) \\
&= \text{FPB}(n^2 + 19n + b - (n+10)(n+9), n + 10) \\
&= \text{FPB}(b - 90, n + 10)
\end{aligned}
$$

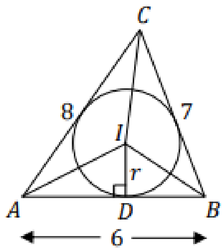
Sehingga diperoleh:

$$
\begin{aligned}
\text{FPB}(a_n, a_{n+1}) &= \text{FPB}(b - 90, n + 10) \\
\text{FPB}(a_{n+1}, a_{n+2}) &= \text{FPB}(b - 90, n + 11)
\end{aligned}
$$

Jelas bahwa $\text{FPB}(n + 10, n + 11) = 1$ dan dari soal $\text{FPB}(a_n, a_{n+1}) = \text{FPB}(a_{n+2}, a_{n+1})$ sehingga $\text{FPB}(b - 90, n + 10) = \text{FPB}(b - 90, n + 11)$ terjadi saat $b - 90 = 1 \Rightarrow b = 91$.

Jadi, nilai b terbesar adalah 91.

16. Penyelesaian:



Perhatikan, karena I adalah titik potong ketiga garis bagi segitiga ABC, maka I adalah titik pusat lingkaran dalam segitiga ABC dan ID adalah jari-jari lingkaran.

Sehingga, karena $s = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) = \frac{1}{2}(6 + 7 + 8) = \frac{21}{2}$ maka dengan rumus jari-jari lingkaran dalam segitiga diperoleh:

$$
\begin{aligned}
ID = \frac{[ABC]}{s} \Rightarrow ID &= \frac{\sqrt{s(s - AB)(s - BC)(s - AC)}}{s} \\
&= \frac{\sqrt{\frac{21}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{2}}}{\frac{21}{2}} \\
&= \frac{\frac{\sqrt{21^2 \cdot 15}}{2}}{\frac{21}{2}} \\
&= \frac{\sqrt{15}}{2}
\end{aligned}
$$

Perhatikan, karena $AD = s - BC = \frac{7}{2}$, dengan Pythagoras diperoleh:

$$
AI^2 = AD^2 + ID^2 = \left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2 = \frac{49}{4} + \frac{15}{4} = \frac{64}{4} = 16
$$

Jadi, $AI^2 = 16$.

17. Penyelesaian:
    Dengan PIE (Prinsip Inklusi-Eksklusi)
    - Jika tanpa syarat apapun
      Banyaknya pemetaan yang mungkin adalah $n(B)^{n(A)} = 4^6$
    - Jika tidak ada $f(x) = 7$
      Banyaknya pemetaan yang mungkin adalah $(n(B) - 1)^{n(A)} = 3^6$
    - Jika tidak ada $f(x) = 8$
      Banyaknya pemetaan yang mungkin adalah $(n(B) - 1)^{n(A)} = 3^6$
    - Jika tidak ada $f(x) = 7$ dan $f(x) = 8$
      Banyaknya pemetaan yang mungkin adalah $(n(B) - 2)^{n(A)} = 2^6$

    Jadi, banyaknya pemetaan dari $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ke $B = \{7, 8, 9, 10\}$ dengan syarat 7 dan 8 mempunyai prapeta adalah $4^6 - 3^6 - 3^6 + 2^6 = 2702$.

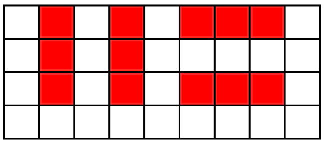
18. Penyelesaian:
    Perhatikan, untuk memberikan pemahaman soal berikut adalah salah satu contoh barisan ternary yang memenuhi soal, dapat dituliskan sebagai berikut:

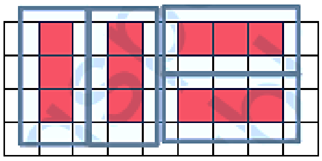
$$\underbrace{1}_{a}\boxed{0}\underbrace{11}_{b}\boxed{0}\underbrace{2122}_{c}\boxed{0}\underbrace{12}_{d}\boxed{0}\underbrace{}_{e}$$

    Huruf a, b, c, d, e pada barisan tersebut adalah banyak elemen digit bukan 0 yang diisikan dengan digit 0 sebagai pembatasnya. Mudah dipahami bahwa karena setiap di antara dua 0 ada paling sedikit dua suku bukan nol, maka $b, c, d \geq 2$, serta karena 0 dapat menjadi awal dan akhir dari barisan maka $a, b \geq 0$.
    Perhatikan lagi, barisan harus memuat 13 suku, padahal terdapat tepat empat 0, sehingga haruslah ada Sembilan digit bukan 0. Sehingga banyaknya susunan digit bukan nol memenuhi:
    $a + b + c + d + e = 9$
    Dengan $a, e \geq 0$ dan $b, c, d \geq 2$.
    Dengan substitusi $b = p + 2$, $c = q + 2$ dan $d = r + 2$, mengingat $b, c, d \geq 2$ maka $p, q, r \geq 0$.
    Sehingga banyaknya susunan digit bukan nol memenuhi:
    $a + p + 2 + q + 2 + r + 2 + e = 9$
    $\Leftrightarrow a + p + q + r + e = 3$
    Dengan $a, p, q, r, e \geq 0$
    Dengan De Moivre banyaknya susunan digit bukan nol adalah ${}_{3+(5-1)}C_3 = {}_7C_3 = 35$ susunan.
    Padahal susunan digit bukan nol memiliki dua kemungkinan digit, yaitu 1 atau 2. Jadi banyak cara menyusun kesembilan digit bukan nol adalah $2^9 = 512$ cara.
    Jadi, banyaknya barisan ternary yang dapat dibuat sebanyak ${}_7C_3 \cdot 2^9 = 35 - 512 = 17920$ susunan.

19. Penyelesaian:
    Ada dua syarat pada soal, yaitu:
    - Tidak ada dua ubin yang bertumpuk
    - Tidak ada dua ubin yang bersentuhan sisinya maupun titik sudutnya

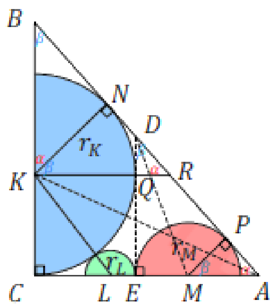
Kedua syarat tersebut dapat dipenuhi bila terdapat sela-sela di antara ubin minimal 1 petak. Ilustrasi berikut mungkin akan membantu mempermudah pemahaman kita.





Jadi, kita dapat membuat sela-sela dengan memperbesar ubin dari 3×1 menjadi 4×2, dengan menambahkan $\frac{1}{2}$ petak di masing-masing sisi kanan, kiri, atas dan bawah ubin.
Jika ubin 3×1 diletakkan menempel di bagian paling atas seperti ilustrasi sama artinya dengan ubin 4×1 menjadi terletak di luar papan yang diperbolehkan. Sehingga, papan harus juga kita perluas $\frac{1}{2}$ petak di masing-masing sisi kanan, kiri, atas dan bawah.
Jadi, soal akan analog dengan "Sebuah papan catur berukuran 102×22 akan dipasangi beberapa ubin berukuran 4×2. Berapa ubin terbanyak yang bisa dipasang pada papan sehingga tidak ada dua ubin yang bertumpuk, sedangkan dua ubin boleh bersentuhan?"
Dapat kita kerjakan dengan membagi luas papan catur, dibagi luas satu buah ubin.
Jadi, banyak ubin terbanyak yang dapat dipasang adalah $\left\lfloor \frac{102\times22}{4\times2} \right\rfloor = 280$ ubin.

20. Penyelesaian:



Ditanyakan nilai k yang memenuhi $\frac{r_M}{r_L} = \frac{k}{25}$.
Dengan Pythagoras diperoleh

$$25AB^2 = 25AC^2 + 25BC^2$$
$$\Rightarrow (2AC + 5BC)^2 = 25AC^2 + 25BC^2$$
$$\Leftrightarrow 4AC^2 + 20 \cdot AC \cdot BC + 25BC^2 = 25AC^2 + 25BC^2$$
$$\Leftrightarrow 20 \cdot AC \cdot BC = 21AC^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{21}{20}$$

Misal, $BC = 21x$ dan $AC = 20x$ maka $AB = \sqrt{BC^2 + AC^2} = 29x$.
Perhatikan ΔACK kongruen ΔANK, sehingga $AC = AN = 20x$. Akibatnya, $BN = 9x$.
Perhatikan ΔABC sebangun ΔKBN, sehingga $r_K = KN = \frac{20}{21} \cdot BN = \frac{60}{7}x$.
Perhatikan ΔKCL, dengan Pythagoras diperoleh:

$r_K^2 = (r_K + r_L)^2 - (r_K - r_L)^2 \quad \Rightarrow r_K^2 = 4r_K \cdot r_L$

$\Leftrightarrow r_L = \frac{1}{4} r_K$

$\Leftrightarrow r_L = \frac{15}{7} x$

Sehingga, $AE = AC - r_K = 20x - \frac{60}{7}x = \frac{80x}{7}$

Perhatikan ΔDEM kongruen ΔDPM, maka $DE = DP$, dan ΔAED, maka $AM = \frac{29}{21} r_M$.

Perhatikan juga bahwa $AE = AM + EM = \frac{29}{21} r_M + r_M = \frac{50}{21} r_M$. Artinya $r_M = \frac{21}{50} AE = \frac{24}{5} x$.

Jadi, $\frac{r_M}{r_L} = \frac{k}{25} \Rightarrow \frac{\frac{24}{5}x}{\frac{15}{7}x} = \frac{k}{25}$

$\Leftrightarrow k = 56.$

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2021

TINGKAT PROVINSI

BIDANG MATEMATIKA

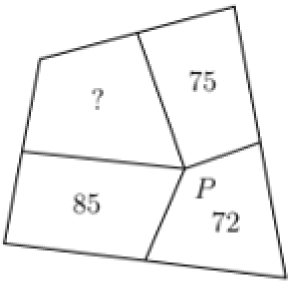
WAKTU : 210 MENIT

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2021

1. Tentukan banyak cara membagikan delapan buku cerita berbeda kepada tiga anak, dengan setiap anak menerima paling sedikit dua buku.

2. Titik P terletak di dalam suatu segiempat dan dihubungkan dengan titik tengah setiap sisi segiempat tersebut, seperti di gambar. Dari konstruksi ini, segiempat tersebut terbagi menjadi empat buah daerah. Luas tiga dari empat daerah tersebut telah ditulis di dalam masing-masing daerah. Tentukanlah luas dari daerah yang belum diketahui (ditandai dengan tanda tanya).



3. Misalkan a, b, c bilangan bulat positif, dan definisikan $P(x) = ax^2 + bx + c$. Tentukan banyak tripel (a, b, c) sehingga $a, b, c \leq 10$ dan $P(x)$ habis dibagi 6 untuk semua x bilangan bulat positif.

4. Tentukanlah semua pasangan bilangan real (x, y) yang memenuhi sistem persamaan berikut:

$$(x^2 + y + 1)(y^2 + x + 1) = 4$$

$$(x^2 + y)^2 + (y^2 + x)^2 = 2.$$

5. Diberikan segitiga ABC, dengan $\angle ABC = 120^\circ$. Titik-titik A_1, B_1, dan C_1 berturut-turut terletak pada segmen BC, CA, dan AB, sehingga garis AA_1, BB_1, dan CC_1 merupakan garis-garis bagi dari sudut-sudut segitiga ABC. Tentukanlah besar $\angle A_1B_1C_1$.

6. Suta menuliskan 2021 bilangan asli pertama di papan tulis, sehingga setiap bilangan ditulis tepat sekali. Ia kemudian melingkari beberapa bilangan di antaranya, kemudian menjumlahkan seluruh bilangan yang ia lingkari dan mendapatkan nilai K. Kemudian, Suta juga menjumlahkan seluruh bilangan yang tidak ia lingkari dan mendapatkan nilai L. Tunjukkan Suta dapat memilih bilangan yang ia lingkari di awal, sehingga $K - L = 2021$.

7. Tentukanlah semua bilangan asli $n > 3$ sehingga $\lfloor\sqrt{n}\rfloor - 1$ habis membagi $n + 1$ dan $\lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1$ habis membagi $n - 1$.

   Catatan: $\lfloor x \rfloor$ adalah bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x.

8. Diberikan segitiga ABC dengan titik berat G. Titik D merupakan titik tengah AC. Garis yang melalui G dan sejajar dengan BC memotong AB di E. Buktikan bahwa $\angle AEC = \angle DGC$ jika dan hanya jika $\angle ACB = 90^\circ$.

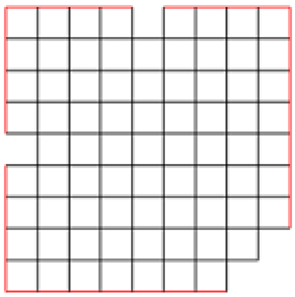
9. Misal X himpunan yang berisikan bilangan rasional positif yang memenuhi dua persyaratan berikut:

   (i) Jika x rasional dan $2021 \le x \le 2022$, maka $x \in X$.

   (ii) Jika $x, y \in X$, maka xy juga di X.

   Buktikan seluruh bilangan rasional positif termuat di X.

10. Lima buah petak dari papan catur berukuran 9×9 dibuang seperti terlihat pada gambar. Seluruh papan catur tersebut akan ditutupi oleh kartu-kartu domino sehingga setiap domino menutupi dua petak papan, dan setiap petak tertutup oleh tepat satu domino. Dapatkah hal tersebut dilakukan sehingga setiap garis vertikal dan horizontal bagian dalam (yang bukan garis merah) sedikitnya memotong dua kartu domino?



SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2021

TINGKAT PROVINSI

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2021

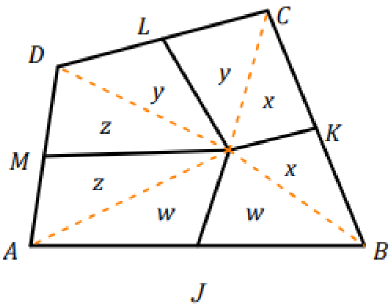
1. **Bukti.** Misal anak ke-i memperoleh x_i buku, di mana $i \in \{1,2,3\}$ dan $x_i \geq 2$ untuk setiap i. Maka, memisalkan $y_i = x_i - 1$, diperoleh yi bilangan asli, dan $y_1 + y_2 + y_3 = 8 - 1 - 1 - 1 = 5$. Dengan Stars and Bars, diperoleh $\binom{5-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$ kasus yang ada. Semua kasus tersebut adalah (3, 3, 2) dan permutasinya, serta (4, 2, 2) dan permutasinya.

   Kasus 1. Untuk setiap permutasi (3, 3, 2): Ada $\frac{3!}{2!} = 3$ permutasi kasus ini, dengan banyaknya cara per kasus sama dengan
   $$\binom{8}{3,3,2} = \frac{8!}{3!3!2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{6 \cdot 2} = 8 \times 7 \times 5 \times 2 = 560$$
   Maka pada ketiga kasus ini ada 3 × 560 = 1680 cara.

   Kasus 2. Untuk setiap permutasi (4, 2, 2): Ada $\frac{3!}{2!} = 3$ permutasi kasus ini, dengan banyaknya cara per kasus sama dengan
   $$\binom{8}{4,2,2} = \frac{8!}{4!2!2!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{2 \cdot 2} = 2 \times 7 \times 6 \times 5 = 420$$
   Maka pada ketiga kasus ini ada 3 × 420 = 1260 cara.

   Sehingga ada 1260 + 1680 = 2940 cara untuk mendistribusikan 8 buku cerita berbeda kepada tiga anak, dengan masing-masing anak menerima sedikitnya dua buku.

2. **Bukti.** Namakan segiempat awal sebagai segiempat ABCD, lalu buatlah garis-garis PA, PB, PC, dan PD. Misalkan titik-titik J, K, L, M adalah titik-titik tengah dari sisi-sisi AB, BC, CD, dan DA berturut-turut. Karena perbandingan luas segitiga jika tingginya sama, adalah sama dengan perbandingan alasnya, dapat dimisalkan bahwa $[\triangle AJP] = [\triangle BJP] = w$, $[\triangle KBP] = [\triangle KCP] = x$, $[\triangle PLC] = [\triangle PLD] = y$, $[\triangle PDM] = [\triangle PAM] = z$, seperti gambar berikut.



   Maka diperoleh w + z = 85, w + x = 72, x + y = 75, dan kita ingin mencari y + z. Tinjau bahwa
   $$(w + z) + (x + y) = (w + x) + (y + z) \Leftrightarrow y + z = 85 + 75 - 72 = 88,$$
   artinya luas daerah yang belum diketahui adalah 88.

3. **Bukti.** Tinjau x dalam modulo 6, lalu hanya perlu dikuli:
   - $x \equiv 0 \pmod 6$: Maka $6 | c$. Jadi nilai c = 6 satu-satunya kemungkinan.
   - $x \equiv 1 \pmod 6$: Maka $6 | a + b + c$, namun mengingat C = 6 diperoleh $6 | a + b$.

- $x \equiv 2 \pmod 6$: Maka $6|4a + 2b + c \Leftrightarrow 6|4a + 2b \Leftrightarrow 3|2a + b$. Namun mengingat $6|a + b$, diperoleh $3|a + b$ atau $3|a$.
- $x \equiv 3 \pmod 6$: Maka $6|9a + 3b + c \Leftrightarrow 6|9a + 3b \Leftrightarrow 2|3a + b \Leftrightarrow 2|a + b$. (Tidak ada syarat baru, ingat $6|a + b$.)
- $x \equiv 4 \pmod 6$: Maka $6|16a + 4b + c \Leftrightarrow 3|8a + 2b = 2(4a + b)$ sehingga dengan Lemma Euclid diperoleh $3|4a + b \Leftrightarrow 3|a + b$. (Tidak ada syarat baru)
- $x \equiv 5 \pmod 6$: Maka $6|25a + 5b + c \Leftrightarrow 6|5(5a + b)$ sehingga dengan Lemma Euclid diperoleh bahwa $6|5a + 2b \Leftrightarrow 6|5a + b - 5(a + b) = -4b \Leftrightarrow 3| - 2b + 3b = 3|b$.

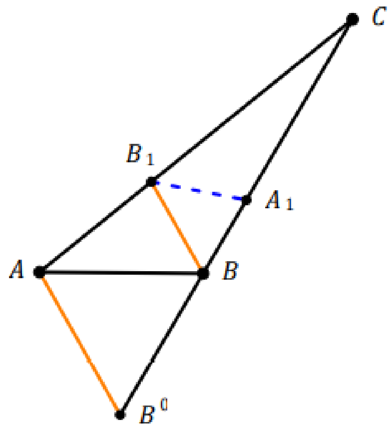
Maka semua syarat yang diperlukan adalah $6|c$, $3|a$,$3|b$, dan $6|a + b$. Akan dibuktikan ini memenuhi. Misal $a = 3p$, $b = 3q$, dan $c = 6$. Jelas $3|P(n)$. Lalu:

- Untuk n genap, diperlukan bahwa $6|P(n) = (3p)n^2 + (3q)n + 6 \Leftrightarrow 6|3n(pn + q)$. Tetapi n genap, maka $6|3n$, sehingga benar.
- Untuk n ganjil, misal $n = 2k - 1$. Maka dalam modulo 2, $P(2k - 1) = (3p)n^2 + 3qn + 6 \equiv pn^2 + 3qn \pmod 2 \equiv p(-1)^2 + 3q(-1) \equiv p - 3q \equiv p + q \pmod 2$, atau $2|p + q$ sehingga memenuhi juga.

Menggunakan permisalan yang sama, jelas dan $1 \le q \le 3$ dan $2|p + q$. Ada 5 pasangan (p,q) yang memenuhi, yakni $(p,q) = (1,1),(1,3),(2,2),(3,1),(3,3) \Leftrightarrow (a,b) = (3,3),(3,9),(6,6),(9,3),(9,9)$ dengan satu-satunya nilai c yang mungkin adalah 6, maka terdapat 5 tripel (a,b,c) yang memenuhi.

4. **Bukti.** Misal $a = x^2 + y$ dan $b = y^2 + x$. Maka diperoleh $(a + 1)(b + 1) = 4$ dan $a^2 + b^2 = 2$. Memisalkan lagi bahwa $m = a + b$, diperoleh $ab + a + b + 1 = 4 \Leftrightarrow ab = 3 - m \Leftrightarrow 2ab = 6 - 2m$, sehingga $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 2 + 6 - 2m = 8 - 2m = m^2$. Sehingga semua nilai m yang memenuhi adalah
$$m^2 + 2m - 8 = 0 \Leftrightarrow (m + 4)(m - 2) = 0 \Leftrightarrow m = -4, \quad m = 2.$$
Tinjau juga bahwa $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \ge 0$, maka $2 - (6 - 2m) = 2m - 4 \ge 0 \Leftrightarrow m \ge 2$. Maka $m = -4$ tidak memenuhi. Sehingga diperoleh $m = 2$, dan $(a - b)^2 = 2(2) - 4 = 0 \Leftrightarrow a = b$, dan $a + b = 2$ maka $a = b = 1$. Jadi oleh sistem
$$x^2 + y = 1$$
$$y^2 + x = 1$$
Kita dapat mengeliminasi agar diperoleh $x^2 - y^2 + y - x = 0 \Leftrightarrow (x - y)(x + y - 1) = 0$ artinya $x = y$ atau $x + y = 1$.
Kasus 1. $x = y$: Masukkan ke persamaan 1 agar diperoleh $(y^2 + y + 1)^2 = 4 \Leftrightarrow y^2 + y + 1 = \pm 2$. Sedangkan memasukkan ke peramaan bawah, diperoleh $2(y^2 + y)^2 = 2 \Leftrightarrow y^2 + y = \pm 1 \Leftrightarrow y^2 + y + 1 = 2$ atau 0. Maka hanya $y^2 + y + 1 = 2$ memenuhi, yang membentuk solusi di sini adalah $(x, y) = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ dan $\left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2}, \frac{-\sqrt{5}-1}{2}\right)$.
Kasus 2. $x + y = 1$: Substitusi jadi $y = 1 - x$ ke persamaan soal di persamaan kedua, sehingga diperoleh $(x^2 - x + 1)^2 + ((1 - x)^2 + x)^2 = (x^2 - x + 1)^2 + (x^2 - x + 1)^2 = 2 \Leftrightarrow (x^2 - x + 1)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = 1$ (sebab $x^2 - x + \frac{1}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \ge 0$). Sehingga $x^2 - x + 1 = 1 \Leftrightarrow x(x - 1) = 0$ maka $x = 0$ atau 1. Maka semua solusi di sini adalah $(x, y) = (0,1)$ dan $(1, 0)$.
Jadi, semua pasangan bilangan real (x, y) yang memenuhi adalah
$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right), \left(\frac{-\sqrt{5}-1}{2}, \frac{-\sqrt{5}-1}{2}\right), (0,1), \text{dan } (1,0).$$

5. **Bukti.** Perpanjang sinar CB ke titik-titik B' sehingga BB' = AB. Tinjau bahwa ∠B'BA = 60◦ (pelurus ∠ABC) sehingga △B'BA samasisi. Karena ∠AB'B + ∠B'BB1 = 60◦ + 120◦ = 180◦, diperoleh bahwa garis BB_1 sejajar AB'. Maka △CB1B ∼ △CAB', dan $\angle CB_1B$ = 60◦ + ∠CAB.



Lemma
Garis B_1A_1 membagi $\angle BB_1C$ menjadi dua sudut yang sama besar.
Bukti. Dengan kesebangunan tadi, $\frac{BB_1}{B_1C} = \frac{B'A}{AC} = \frac{BA}{AC}$. Selanjutnya, dengan teorema perbandingan sisi oleh garis bagi, $\frac{BA}{AC} = \frac{BA_1}{A_1C}$. Maka menggabungkan, diperoleh

$$\frac{BB_1}{B_1C} = \frac{BA_1}{A_1C}$$

yang merupakan konvers dari teorema garis bagi.
Dengan cara yang sama, B_1C_1 merupakan garis bagi $\angle AB_1B$. Maka,

$$\angle A_1B_1C_1 = \angle A_1B_1B + \angle BB_1C_1 = \frac{1}{2}(\angle BB_1C + \angle BB_1A) = \frac{1}{2} \cdot 180^o = 90^o$$

6. **Bukti.** Suta perlu melingkari (1,2020),(2,2019),··· ,(505,1516) (dengan kata lain, (x,2021 − x) untuk 1 ≤ x ≤ 505 dan x bilangan bulat, maka jumlah tiap pasangannya 2021) dan 2021, sehingga nilai

$$K = 2021 \times (505 + 1) = 2021 \times 506.$$

Jumlah semua bilangan pada papan tulis adalah

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 2021 = \frac{2021 \cdot 2022}{2} = 2021 \times 1011.$$

Sementara, diketahui bahwa
K + L = 2021 × 1011 ⇔ 2021 × 506 + L = 2021 × 1011
⇔ L = 2021 × (1011 − 506) = 2021 × 505.
Maka, K − L = 2021 × 506 − 2021 × 505 = 2021(506 − 505) = 2021.

7. **Bukti.** Semua bilangan asli yang memenuhi adalah n = 4,7,9,13 dan 31. Dapat dilihat masingmasing dari bilangan tersebut memenuhi:
n = 4 ⇒ (2 − 1)|5 (Memenuhi), (2 + 1)|3 (Memenuhi),
n = 7 ⇒ (2 − 1)|8 (Memenuhi), (2 + 1)|6 (Memenuhi),
n = 9 ⇒ (3 − 1)|10 (Memenuhi), (3 + 1)|8 (Memenuhi),
n = 13 ⇒ (3 − 1)|14 (Memenuhi), (3 + 1)|12 (Memenuhi),

n = 31 ⇒ (5 − 1)|32 (Memenuhi), (5 + 1)|30 (Memenuhi).

Akan dibuktikan solusinya sudah lengkap. Misalkan $\lfloor\sqrt{n}\rfloor = k$. Maka, n bilangan asli memenuhi ketaksamaan $k^2 \le n \le (k+1)^2 - 1 = k^2 + 2k$. Mengingat $n > 3 \Leftrightarrow n \ge 4$, dan $n = k^2 \ge 4$, maka $k \ge 2$ (sebab k bulat nonnegatif, mengingat syarat akar).

Lemma

$n = k^2$ atau $n = k^2 + k + 1$ untuk suatu $k \ge 2$.

Bukti. Meninjau syarat kedua, diperoleh bahwa $k + 1 | n - 1 \ge k^2 - 1$. Jelas bahwa $k + 1 | k^2 - 1 = (k - 1)(k + 1)$ dan $k + 1 | k^2 + k = k(k + 1)$ memenuhi. Jika $n > k^2 + k + 1$, haruslah $n \ge k^2 + k + 1 + (k + 1) = k^2 + 2k + 2 > k^2 + 2k \ge n \Leftrightarrow n > n$ (kontradiksi).

Maka substitusi nilai tersebut ke dalam syarat kedua.

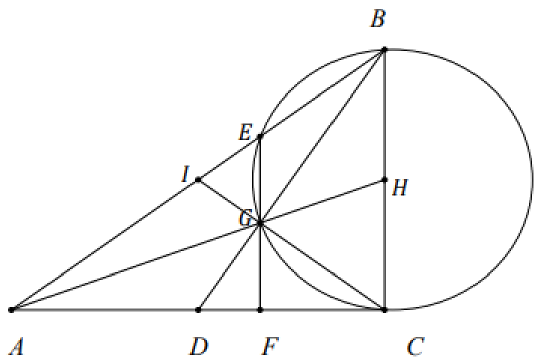
Kasus 1. Untuk $n = k^2$: maka $k - 1 | k^2 + 1 \Leftrightarrow k - 1 | (k^2 + 1) - (k - 1)(k + 1) = k^2 + 1 - (k^2 - 1) = 2$, sehingga $k - 1 = 1$ atau 2 (sebab $k \ge 2$) sehingga k = 2 dan 3, atau $n = k^2 = 4$ atau 9.

Kasus 2. Untuk $n = k^2 + k + 1$: maka $k - 1 | k^2 + k \Leftrightarrow k - 1 | k^2 + k + 2 - (k - 1)(k + 2) = k^2 + k + 2 - (k^2 + k - 2) = 4$, sehingga k − 1 = 1,2, atau 4, yakni k = 2,3, atau 5.

Maka $n = 2^2 + 2 + 1 = 7$, atau $n = 3^2 + 3 + 1 = 13$, atau $n = 5^2 + 5 + 1 = 31$.

Maka semua solusi sudah ditemukan.

8. **Bukti.**



Akan dibuktikan terlebih dahulu bahwa jika ∠AEC = ∠DGC, maka ∠ACB = 90°, lalu sebaliknya. Untuk itu, misalkan EG ∩ AC = F, AG ∩ BC = H, dan CG ∩ AB = I.

Lemma

CGEB siklis.

Bukti. Tinjau

$$\angle CGB = 180^\circ - \angle CGD = 180^\circ - \angle CEA = \angle CEB$$

sehingga CGEB siklis.

Karena CGEB adalah trapesium siklis, maka diperoleh

$$\angle EGC = 180^\circ - \angle EBC = \angle GEB$$

sehingga panjang GC = EB. Kita punya panjang. $CI = \frac{3}{2}CG$. Di sisi lain, karena EG||BH, maka △AEF ∼ △ABC. Sehingga kita punya

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AG}{GH} = \frac{2}{1} \Longrightarrow AE = 2EB = 2GC.$$

Kita peroleh $AB = AE + EB = 3GC \Longrightarrow AI = \frac{3}{2}GC = CI$. Karena panjang AI = CI = BI, maka I adalah titik pusat (ABC). Akibatnya, ∠ACB = 90◦.

Untuk pembuktian dari kanan ke kiri. Seperti pada bagian sebelumnya, kita peroleh AE : EB = 2 : 1. Secara analog, kita peroleh juga △AFG ∼ △ACH dan didapatkan AF = 2FC dan $GF = \frac{2}{3}HC = \frac{1}{3}BC$. Kita peroleh juga $AD = \frac{1}{2}AC$ dan $DF = \frac{1}{6}AC$. Karena EF||BC, maka ∠AFE = 90◦. Dari teorema Pythagoras pada △FGC, kita peroleh

$$GC = \sqrt{FC^2 + FG^2} = \sqrt{\frac{AC^2}{9} + \frac{CB^2}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{AC^2 + CB^2}$$

Di sisi lain, pada △ABC:

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} \Longrightarrow AE = \frac{2}{3}\sqrt{AC^2 + BC^2}$$

Tinjau bahwa $\frac{CD}{CA} = \frac{1}{2} = \frac{CG}{AE}$. Tinjau bahwa I titik pusat (ABC), kita peroleh ∠GCD = ∠ICA = ∠IAC = ∠EAC (serta mengingat perbandingan AE : GC = AC : DG), maka kita dapatkan △DCG ∼ △CAE sehingga berakibat ∠DGC = ∠AEC.

9. **Bukti.** Motivasi dari pengerjaan ini adalah dengan meninjau beberapa hal yang dapat dilakukan terlebih dahulu.

Lemma

Semua bilangan rasional $\frac{a}{b} \in \left[1, \frac{2022}{2021}\right] \in X$.

Bukti. Ambil sembarang rasional $\frac{a}{b} \in \left[1, \frac{2022}{2021}\right]$. Tinjau bahwa 2021 ≤ $\frac{2021a}{b}$ ≤ 2022 dan 2021 ∈ X, maka oleh syarat (i) dan (ii), mengambil $x = \frac{2021a}{b}$ dan y = 2021, diperoleh

$$\frac{\frac{2021a}{b}}{2021} = \frac{a}{b} \in X$$

Selanjutnya, kita akan coba membuktikan bahwa semua bilangan asli termuat di X.

Lemma

Semua bilangan asli n ∈ X.

Bukti. Kita akan memulai dari menunjukkan 1 ∈ X, ini mudah sebab mengambil x = y ∈ X memenuhi (sebab x = y > 0). Lalu, dengan ini, kita buat suatu klaim.

Klaim - Semua bilangan asli m ≥ 2021 ∈ X.

Kita akan membuktikan dengan induksi. Diketahui bahwa 1,2021,2022 ∈ X. Maka, dengan mengambil x = 1, y = 2022 diperoleh $\frac{1}{2022} \in X$. Base case dari induksi diselesaikan terlebih dahulu. Karena

$$1 < \frac{2023}{2022} < \frac{2022}{2021} \text{ maka } \frac{2023}{2022} \in X$$

sebab jelas nilainya rasional. Maka, mengambil x = 2023 2022 dan $y = \frac{1}{2022}$, diperoleh bahwa

$$\frac{x}{y} = \frac{\frac{2023}{2022}}{\frac{1}{2022}} = 2023 \in X$$

Dengan cara yang sama, misalkan suatu bilangan bulat positif n ∈ X, maka $\frac{1}{n} \in X$ dengan mengambil x = 1 dan y = n. Sekarang tinjau bahwa jika m > n bulat positif, hal ini ekuivalen dengan menyatakan bahwa

$$mn + n < mn + m \Leftrightarrow n(m+1) < m(n+1) \Leftrightarrow \frac{m+1}{m} < \frac{n+1}{n} \leq \frac{2022}{2021}.$$

Dan jelas bahwa $\frac{n+1}{n}$ = 1 + $\frac{1}{n}$ > 1, sehingga $\frac{n+1}{n}$ n ∈ X. Ini artinya mengambil x = $\frac{n+1}{n}$ dan y = $\frac{1}{n}$, diperoleh

$$\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{1}{n}} = n + 1 \in X,$$

sehingga induksinya terbukti.

Maka, sekarang, cukup membuktikan bahwa semua bilangan asli 2 ≤ m ≤ 2020 di X. Untuk itu, ambil x = 2021m dan y = 2021. Karena 2021m ∈ Z dan 2021m ≥ 4042 ≥ 2021, maka 2021m ∈ X. Sehingga diperoleh bahwa

$$\frac{x}{y} = \frac{2021m}{2021} = m \in X.$$

Karena oleh definisi bilangan rasional, sembarang bilangan rasional positif dapat dituliskan sebagai $\frac{a}{b}$ dengan FPB(a,b) = 1 serta a, b ∈ N, mengambil x = a dan y = b menghasilkan bilangan rasional sembarang yang diinginkan. Sehingga terbukti semua bilangan rasional positif termuat di dalam X.

10. **Bukti.** Jawabannya adalah tidak. Hal tersebut akan dibuktikan, sebagai berikut:

Kita ingin mengubinkan 76 petak, atau akan menggunakan tepat 38 domino (karena kita tidak ingin ada domino yang tumpang tindih). Perhatikan bahwa setiap domino memotong tepat 1 garis. Asumsikan dengan kontradiksi, kita bisa mengubinkan papan catur tersebut agar memenuhi kondisi soal. Sebelum melanjutkan, untuk mempermudah penulisan, kita akan memberi nama setiap kolom dan baris, yakni kolom/baris n untuk 1 ≤ n ≤ 9, yang bersifat terurut dari kiri ke kanan untuk kolom, dan atas ke bawah untuk baris. Lalu, namakan garis vertikal dari kiri ke kanan sebagai $v_1, v_2, \cdots, v_8$, dan garis horizontal dari atas ke bawah sebagai $h_1, h_2, \cdots, h_8$, secara berurutan.

Lemma

Banyaknya domino horizontal yang menutupi kolom-kolom 2, 4, 6, dan 9 adalah ganjil.

Bukti.

Tinjau bahwa banyaknya petak pada kolom 2, 4, 6, dan 9 adalah ganjil (yakni: 9,9,9,7). Selanjutnya, perhatikan bahwa domino vertikal akan menutupi kolom tersebut sebanyak tepat 2 petak, sementara domino horizontal menutupi kolom tersebut sebanyak 1 petak. Jadi, mengingat bahwa banyaknya petak pada kolom-kolom tersebut ganjil, banyaknya domino horizontal yang menutupi kolom tersebut pasti ganjil.

Setiap domino horizontal pada kolom n akan memotong antara $v_n - 1$ atau v_n. Perhatikan dalil berikut.

Lemma

Garis v_1 dan v_2 pasti dipotong oleh minimal 5 domino. Maka garis-garis $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ dipotong oleh minimal 15 domino.

Bukti. Karena v_1 dan v_2 masing-masing harus dipotong oleh minimal 2 domino, dan setiap domino hanya bisa memotong salah satu dari garis vertikal tersebut, maka harus terdapat minimal 4 domino horizontal pada kolom 2. Mengingat banyaknya domino horizontal harus ganjil, maka terdapat minimal 5 domino horizontal yang salah satu petaknya pada kolom 2. Maka banyaknya domino agar dapat memotong garis-garis v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 masing-masing dipotong minimal 2 kali memerlukan setidaknya 5 + 5 + 5 = 15 domino. Sekarang kita perlu memperhatikan banyaknya domino minimum yang dapat memotong garis v_7 dan v_8.

Lemma

Garis v_7 dan v_8 minimal dipotong oleh 5 domino.

Bukti. Dengan argumen yang serupa, karena terdapat 7 petak pada kolom 9, garis v_8 harus dipotong oleh setidaknya 3 domino. Selain itu, domino-domino yang sudah ada tidak mungkin memotong garis v_7. Jadi harus terdapat setidaknya 2 petak horizontal yang menutupi kolom 7 dan 8. Sehingga diperlukan minimal 2 + 3 = 5 domino. Jadi banyaknya domino minimal agar semua garis vertikal dipotong oleh sedikitnya dua domino ini tercapai, adalah 15 + 2 + 3 = 20.

Analog, untuk garis-garis horizontal, baris 2, 4, dan 6 juga memiliki 9 petak, sementara baris 9 memiliki 7 petak. Dengan argumen yang serupa, kita juga perlu setidaknya 20 domino yang menutupi garis-garis horizontal yang ada. Namun, 20 + 20 = 40 > 38, sementara kita hanya bisa memuat 38 domino pada papan catur tersebut, yang merupakan suatu kontradiksi.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2021

TINGKAT NASIONAL

HARI PERTAMA & HARI KEDUA

WAKTU : 8 JAM

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika Tingkat Nasional Tahun 2021

1. Pada papan tulis tertulis secara berurutan angka-angka berikut:
   1 2 3 4 5 6 7 8 9
   Andi harus menempatkan tanda + atau – di antara setiap dua angka yang berurutan dan menghitung nilai dari ekspresi yang dihasilkan. Sebagai contoh, Andi bisa menempatkan tanda + dan – sebagai berikut:
   $1 + 2 - 3 + 4 + 5 + 6 + 7 - 8 - 9 = 5$
   Tentukan bilangan positif ganjil terkecil yang tidak mungkin bisa diperoleh oleh Andi.

2. Diberikan segitiga lancip ABC. Titik D dan E berturut-turut merupakan titik tengah segmen AB dan AC. Misalkan L_1 dan L_2 berturut-turut lingkaran luar segitiga ABC dan ADE. Garis CD memotong lingkaran L_1 dan L_2 pada $M(M \neq C)$ dan $N(N \neq D)$. Jika $DM = DN$, buktikan bahwa ABC segitiga sama kaki.

3. Sebuah bilangan asli disebut *prima berpangkat* jika bilangan tersebut dapat dituliskan dalam bentuk p^k, dengan p prima dan k bilangan bulat positif. Tentukan nilai n terbesar yang mungkin sehingga ada barisan bilangan prima berpangkat $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dengan $a_i = a_{i-1} + a_{i-2}$ untuk semua $3 \leq i \leq n$.

4. Misalkan x, y, z bilangan real positif dengan $x + y + z = 3$. Buktikan
   $$2\sqrt{x+\sqrt{y}} + 2\sqrt{y+\sqrt{z}} + 2\sqrt{z+\sqrt{x}} \leq \sqrt{8+x-y} + \sqrt{8+y-z} + \sqrt{8+z-x}$$

5. Misalkan $P(x) = x^2 + rx + s$ polinomial dengan koefisien real. Diketahui $P(x)$ mempunyai dua akar real berbeda yang keduanya kurang dari -1 dan selisih akarnya kurang dari 2. Buktikan bahwa $P(P(x)) > 0$ untuk setiap bilangan real x.

6. Di papan tulis dituliskan n bilangan asli. Pada setiap langkah kita dapat menghapus dua bilangan a dan b dan menggantinya dengan FPB(a, b) dan KPK(a, b) – FPB(a, b). Buktikan semua bilangan dapat dibuat sama sebanyak berhingga langkah.

7. Diberikan segitiga ABC dengan lingkaran luar l. Titik M berada di dalam segitiga ABC sehingga AM garis bagi $\angle BAC$. Lingkaran dengan jari-jari MB dan pusat M memotong l dan BC berturut-turut di D dan E ($B \neq D$ dan $B \neq E$). Buktikan AP garis bagi $\angle DPE$ jika dan hanya jika $\angle B = 90$∘.

8. Di sebuah papan catur berukuran 100 × 100, rencananya akan diletakkan papan-papan kecil berukuran 1 × 3 dan 3 × 1 sehingga:
   (i) Setiap petak papan catur besar tertutup oleh paling banyak satu papan kecil.
   (ii) Keseluruhan papan-papan kecil menutupi seluruh petak besar, kecuali satu buah petak.
   (iii) Sisi-sisi papan kecil diletakkan sejajar dengan petak-petak papan besar.
   Misalkan untuk melakukan intruksi di atas, dibutuhkan H papan berukuran 1 × 3 dan V papan berukuran 3 × 1. Tentukan semua pasangan (H, V) yang mungkin.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2021

TINGKAT NASIONAL

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

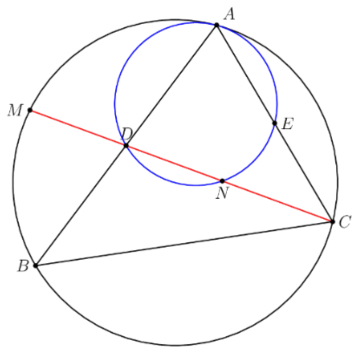
Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Nasional Tahun 2021

1. Penyelesaian :

   Dengan menjumlahkan semua, kita mendapatkan bahwa jumlahnya adalah 45, jadi jika di antara keduanya diberikan tanda -, maka jumlahnya adalah

   45 – 2(Jumlah bilangan di belakang tanda " - "). Kemudian kita perlu membuktikan bahwa dengan bilangan 2 hingga 9, kita dapat membuat bilangan antara 2 hingga 22 dengan menjumlahkan bilangan bulat berbeda dalam interval 2 hingga 9. (Bashh) Dan kita mendapatkan bahwa bilangan bulat ganjil terkecil adalah 43.

2. Penyelesaian :



   Misalkan AD = DB = x, AE = EC = y, DN = DM = z, dan CN = m. Dengan PoP, kita peroleh

$$\begin{aligned} CD \cdot DM = BD \cdot DA \Longrightarrow z^2 + mz &= x^2 \\ CN \cdot CD = CE \cdot CA \Longrightarrow m^2 + mz &= 2y^2. \end{aligned}$$

   Kita memiliki $(m + z)^2 = x^2 + 2y^2$. Berdasarkan LoC dari $\triangle ACD$:

$$\cos A = \frac{x^2 + 4y^2 - (m+z)^2}{4xy} = \frac{2y^2}{4xy} = \frac{y}{2x}.$$

   Berdasarkan LoC dari $\triangle ABC$:

$$BC^2 = 4x^2 + 4y^2 - 8xy\cos A = 4x^2 + 4y^2 - 4y^2 = 4x^2 = AB^2,$$

   jadi kita punya BC = AB.

3. Penyelesaian :

   Jawabannya adalah 7, dicapai dengan urutan 5, 2, 7, 9, 16, 25, 41.

   Misalkan terdapat suatu barisan dengan panjang 8 yang memenuhi syarat tersebut.

   Pangkat prima ganjil tidak dapat berupa tiga suku berurutan karena paritas, sehingga harus ada setidaknya dua suku yang merupakan pangkat 2.

   Misalkan $2^a < 2^b$ adalah dua suku dari barisan tersebut.

   Jika 2^a dan 2^b adalah suku-suku berurutan, semua sukunya genap, sehingga semua sukunya berbentuk 2^k. Maka, kita tidak dapat membuat barisan tersebut memiliki lebih dari tiga suku, kontradiksi.

Jika tidak, seharusnya ada tepat dua suku antara 2^a dan 2^b (karena masalah paritas).
Misalkan 2a, p^s, q^t, 2^b menjadi empat suku berurutan dari barisan di mana p, q adalah bilangan prima ganjil.
Jika a ≥ 2, kita memiliki $4 \mid 2^a = q^t - p^s$ dan $4 \mid 2^b = q^t + p^s$, sehingga $4 \mid 2q^t$ merupakan kontradiksi.
Jadi a = 1.
Sekarang kita bagi menjadi tiga kasus. Perhatikan bahwa persamaan $|2^x - 3^y| = 1$ hanya memiliki solusi (x, y) = (1, 1), (2, 1), (3, 2) atas bilangan bulat positif.

Kasus 1. $p^s \equiv 0$ (mod 3)
Dalam kasus ini p = 3, dan kita memiliki $2^b = q^t + p^s = 2p^s + 2 \Leftrightarrow 2^{b-1} = 3^s + 1$.
Jadi s = 1 dan b = 3, maka deret tersebut tidak boleh memiliki lebih dari 5 suku.
(Coba hitung, kita memiliki ...1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... dan 1, 21 bukan pangkat prima.)

Kasus 2. $p^s \equiv 1$ (mod 3)
$q^t = p^s + 2 \equiv 0$ (mod 3) jadi q = 3, dan kita punya $2^b = q^t + p^s = 2q^t - 2 \Leftrightarrow 2^{b-1} = 3^t - 1$.
Jadi (t, b) = (1, 2) atau (t, b) = (2, 4).
Jika (t, b) = (1, 2), $p^s = q^t - 1 = 3_1 - 1 = 2$, kontradiksi.
Jika (t, b) = (2, 4), kita punya barisan yang menjadi ...-3, 5, 2, 7, 9, 16, 25, 41, 66... dan -3, 66 bukan pangkat prima, jadi barisan tersebut tidak boleh memiliki lebih dari 8 suku.

Kasus 3. $p^s \equiv 2$ (mod 3)
$2^b = q^t + p^s = 2p^s + 2 \equiv 0$ (mod 3), kontradiksi.

Kita sudah membahas semua kasus, jadi kita sudah selesai.

4. Penyelesaian :

$$\begin{aligned}
2\sum_{cyc}\sqrt{x+\sqrt{y}} &\leq 2\sum_{cyc}\sqrt{x+\frac{y+1}{2}} \\
&= \sum_{cyc}\sqrt{x+\frac{y+1}{2}}+\sqrt{y+\frac{z+1}{2}} \\
&\leq \sum_{cyc}\sqrt{2\left(x+\frac{y+1}{2}+y+\frac{z+1}{2}\right)} \\
&= \sum_{cyc}\sqrt{2(x+y)+(y+z+2)} \\
&= \sum_{cyc}\sqrt{2(3-z)+(y+z+2)} = \sum_{cyc}\sqrt{8+y-z}
\end{aligned}$$

5. Penyelesaian :
Tulis P(x) = (x + a)(x + b) dengan a,b > 1 dan |a – b| < 2. Kita diminta untuk membuktikan bahwa P(P(x)) = ((x + a)(x + b) + a)((x + a)(x + b) + b) positif untuk semua x riil. Cukup dengan membuktikan bahwa (x + a)(x + b) + min(a,b) > 0 untuk setiap x ∈ ℝ. WLOG a > b.

$$
\begin{aligned}
(x+a)(x+b)+b &= \left(x+\frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{(a-b)^2}{4} + b \\
&\geq b - \frac{(a-b)^2}{4} \\
&> b-1 \\
&> 0
\end{aligned}
$$

6. Penyelesaian :

   Jika n = 1, maka selesai, jadi asumsikan n ≥ 2. Ambil dua kasus apa pun, misalnya a, b. Kita bagi menjadi beberapa kasus:

   - Jika a ⊥ b, maka pertama-tama lakukan operasi pada (a, b) dan dapatkan 1 dan beberapa bilangan lainnya. Kemudian, buat semuanya menjadi 1 karena FPB(x, 1) = 1 dan KPK(x, 1) – FPB(x, 1) = x – 1 mengurangi x sebesar 1.
   - Perhatikan kasus di mana tidak ada angka dengan FPB(a, b) = 1 pada awalnya. Kemudian, jika terdapat c sehingga FPB(a, c) ⊥ FPB(b, c) ada, maka kita dapat menerapkan langkah pada (a, c) dan kemudian (FPB(a, c), b), yang menghasilkan 1 di papan, kita kembali ke Kasus 1. Oleh karena itu, kita sekarang berasumsi bahwa tidak ada c seperti itu, yaitu FPB($\{a_i\}_n$) ≠ 1. Ambil a, b seperti itu dengan FPB(a, b) = FPB($\{a_i\}_n$), lakukan operasi pada (a, b), kita peroleh d = FPB(a, b). Sekarang ambilah x apa saja dan catat bahwa FPB(d, x) = d dan KPK(x, d) – FPB(x, d) = x – d mengurangi x sebesar d, ulangi hingga x menggantikan dengan d.

7. Penyelesaian :

   Karena AM adalah garis bagi sudut ∠BAC dan P adalah titik tengah busur BC, jelaslah bahwa P terletak di perpotongan kedua AM dan ℓ.

   Kasus 1, Jika kita tahu bahwa ∠B = 90°

   Dengan mengejar sudut,

   $$\angle DEM = \frac{180^\circ - \angle DME}{2} = 90^\circ - \frac{\angle DME}{2} = 90^\circ - \angle DBE$$
   $$= 90^\circ - (180^\circ - \angle DPC) = 90^\circ - (180^\circ - (\angle DPM + 90^\circ))$$
   $$= 90^\circ - (90^\circ - \angle DPM) = \angle DPM$$

   Oleh karena itu, DPEM adalah segiempat siklik. Karena DM = ME dan DPEM adalah segiempat siklik, jelaslah bahwa ∠DPM = ∠MPE ⟹ AP adalah garis bagi sudut ∠DPE.

   Kasus 2, jika kita tahu bahwa AP adalah garis bagi sudut ∠DPE

   Artinya, DPEM adalah segiempat siklik. Dengan mengejar sudut,

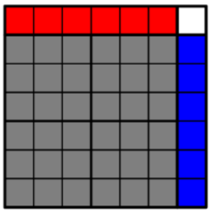
   $$\angle ABC = \angle APC = 180^\circ - (\angle DBE + \angle DPM) = 180^\circ - (\frac{\angle DME}{2} + \angle DEM)$$
   $$= 180^\circ - (\frac{180^\circ - \angle MDE - \angle DEM}{2} + \angle DEM) = 180^\circ - (\frac{180^\circ - 2\angle DEM}{2} + \angle DEM)$$
   $$= 180^\circ - (90^\circ - \angle DEM + \angle DEM) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

   seperti yang diinginkan.

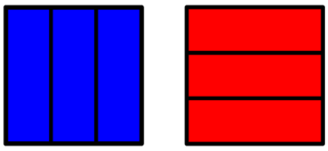
   Oleh karena itu, kita telah membuktikan bahwa AP adalah garis bagi sudut ∠DPE jika dan hanya jika ∠B = 90°.

8. Penyelesaian :

Kami menyatakan bahwa jawabannya adalah (k, 3333 – k) di mana 33 ≤ k ≤ 3300 dan k ≡ 0 (mod 3). Mudah untuk menemukan konfigurasi seperti itu, dengan menggeneralisasi papan berikut.



di mana setiap 3 x 3 ubin abu-abu dapat diganti dengan 3 papan horizontal atau 3 papan vertikal sebagai berikut:



Mari kita fokus untuk membuktikan bahwa tidak ada pasangan (H, V) lainnya yang mungkin. Perlu diketahui bahwa jumlah papan yang dibutuhkan untuk memasang seluruh papan adalah H + V = $\frac{100^2-1}{3}$ = 3333. Oleh karena itu, cukup dengan mencatat jumlah papan vertikal yang digunakan. Misalkan terdapat k papan vertikal yang digunakan.

Klaim 1. $33 \leq k \leq 3300$.

Bukti. Kita akan membuktikan bahwa k ≥ 33, dan dengan menggunakan simetri, 3333 – k ≥ 33 juga, karena ini menghitung jumlah papan horizontal. Untuk membuktikannya, tetapkan baris i, dan misalkan jumlah papan horizontal adalah h_i dan jumlah papan vertikal adalah v_i. Perhatikan bahwa

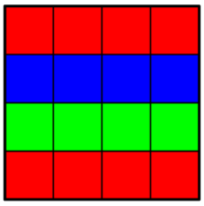
$$3h_i + v_i \in \{99, 100\}$$

untuk semua 1 ≤ i ≤ 100, yang mana hanya bisa menjadi 99 untuk tepat satu indeks i. Ini menyiratkan bahwa $v_i \geq 1$ (mod 3) untuk tepat 99 indeks i. Ini menghasilkan $v_i \geq 1$ untuk setidaknya 99 indeks i, yang memaksa $\sum_i v_i \geq 99$. Namun, setiap papan vertikal berkontribusi terhadap v_i tepat tiga kali, yang berarti bahwa

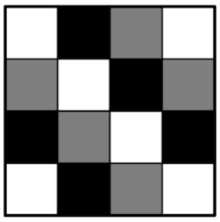
$$3k = \sum_i v_i \geq 99 \implies k \geq 33$$

Klaim 2. k ≡ 0 (mod 3).

Bukti. Mari kita warnai papan dengan tiga warna: merah, biru, dan hijau sehingga setiap baris memiliki warna yang sama, dan warnanya bergantian seperti yang ditunjukkan pada gambar di bawah ini, di mana kita selalu memulai dengan merah sebagai warna baris pertama:



Pertama-tama, kita asumsikan bahwa ubin yang hilang pasti berada di baris berwarna merah. Untuk membuktikannya, warnai papan dengan cara berikut:



di mana ubin paling kiri atas berwarna putih. Mudah untuk melihat bahwa setiap papan horizontal, dan setiap papan vertikal, harus menutupi tepat 1 ubin dari setiap warna. Karena terdapat 1 ubin putih lebih banyak daripada ubin hitam dan abu-abu, maka ubin yang dihilangkan harus berwarna putih. Dengan mengulangi argumen yang sama, tetapi mencerminkan pewarnaannya, kita mengamati bahwa ubin yang dihilangkan harus berwarna putih dalam kedua kasus pewarnaan. Semua ubin yang tersisa ini terletak di baris merah pada pewarnaan awal.

Perhatikan bahwa totalnya adalah 34 x 100 = 3400 ubin merah. Sekarang mari kita hitung jumlah ubin merah yang ditempati oleh papan vertikal dan horizontal. Karena kotak yang hilang adalah salah satu ubin merah, maka terdapat 3399 ubin yang terisi. Namun, setiap papan vertikal menyumbang tepat satu ubin merah, dan setiap papan horizontal menyumbang 0 atau 3 ubin merah. Oleh karena itu, kita simpulkan bahwa

$$k \equiv 0 \pmod 3$$

Itulah yang kami inginkan.

Catatan: Ini adalah soal yang bagus yang menunjukkan betapa kuatnya argumen pewarnaan dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah yang melibatkan kisi-kisi.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2022

TINGKAT KABUPATEN/KOTA

BIDANG MATEMATIKA

WAKTU : 180 MENIT

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Kabupaten/Kota Tahun 2022

1. Misalkan $f(x) = a^2x + 200$.
   Jika $f(20) + f^{-1}(22) = f^{-1}(20) + f(22)$,
   Maka $f(1) = \dots$

2. Banyaknya bilangan bulat dari 1001 sampai dengan 2022 yang habis dibagi 12 atau 18 adalah …

3. Diberikan segitiga ABC siku-siku disudut B. Titik D berada pada sisi AB dan titik E berada pada sisi AC. Diketahui bahwa DE sejajar dengan BC. Jika $AD = 18$, $DB = 3$ dan $BC = 28$, maka panjang AE adalah …

4. Banyaknya pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi persamaan

$$|x| + |y| + |x + y| = 22$$

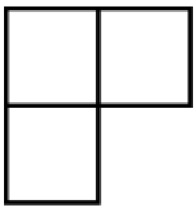
   adalah …

5. Jika sisa pembagian

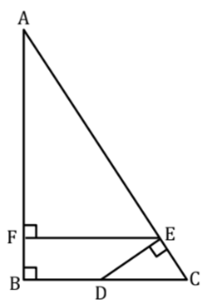
$$x^{2023} + x^{1012} + x^{506} + x^{253} + x^{127}$$

   oleh $x^2 - 1$ adalah $Ax + B$, maka nilai dari $34 + 4B = \dots$

6. Sebuah papan catur persegi panjang berukuran 3 x 20 akan ditutupi dengan 20 tromino seperti pada gambar dibawah ini sehingga seluruh papan catur tertutupi oleh seluruh tromino dan tidak ada tromino yang tumpang tindih. Banyaknya cara untuk melakukan hal tersebut adalah …



7. Diberikan segitiga ABC seperti pada gambar dibawah.



Diketahui $AB = \frac{3}{2}BC$ dan $BD = CD$, Jika luas segitiga DEC adalah 13, maka luas segitiga AFE adalah …

8. Untuk setiap bilangan asli n, Misalkan $S(n)$ menyatakan hasil penjumlahan semua digit n. Diberikan barisan (a_n) dengan $a_1 = 4$ dan $a_n = (S(a_{n-1}))^2 - 1$ untuk $n \geq 2$. Sisa pembagian $a_1 = a_2 + a_3 + \ldots + a_{2022}$ oleh 21 adalah …

9. Misalkan x dan y bilangan real dengan $x > y > 0$. Jika $x + 200 \leq \sqrt{x^2 - y^2 + 400(x+y)}$, maka $y = \ldots$

10. Jika x adalah bilangan asli sehingga $x^2 + 42x$ merupakan pangkat tiga dari suatu bilangan prima, maka $x =$ …

11. Didalam suatu ruangan terdapat 12 kursi yang disusun dalam tiga baris, sehingga baris pertama memuat 3 kursi, baris kedua memuat 4 kursi dan baris terakhir memuat 5 kursi. 12 siswa termasuk Azka dan Budi akan menempati kursi-kursi tersebut. Jika banyaknya cara menempati sehingga Azka dan Budi di baris pertama adalah A maka $\frac{A}{9!} = \ldots$

12. Diketahui segitiga ABC merupakan segitiga siku-siku dengan luas 63. Misalkan R dan r berturut-turut menyatakan panjang jari-jari lingkaran luar dan jari-jari lingkaran dalam segitiga ABC. Jika $R + r = 12$, maka panjang sisi miring dari ABC adalah …

13. Jika

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k + B}{3k + 1} = 20$$

maka B adalah …

14. Banyaknya tripel $(w_1, w_2, w_3, \ldots, w_7)$ yang memenuhi persamaan

$$w_1, w_2, w_3, \ldots, w_7 = 148$$

dengan $20 \leq w_1, w_2, w_3, \ldots, w_7 \leq 22$ adalah …

15. Diberikan segitiga siku-siku sama kaki ABC dengan $BC = AB$. Misalkan L titik tengah BC dan P titik pada sisi AC sehingga BP tegak lurus AL. Jika $CP = 20\sqrt{2}$, maka panjang AB adalah …

16. Misalkan m dan n bilangan-bilangan asli. Jika $FPB(m, n) = 3$ dan $FBP(2m, 5n) = 30$, maka $FPB(15m, 6n)$ adalah …

17. Diketahui a, b, c, d bilangan real positif yang memenuhi $a > c$, $d > b$ dan

$$3a^2 + 3b^2 = 3c^2 + 3d^2 = 4ac + 4bd$$

Nilai $\frac{12(ab+cd)}{ad+bc} = \ldots$

18. Misalkan A adalah himpunan semua bilangan 8 digit yang digit-digitnya adalah 1, 2 atau 3 dan memuat paling sedikit 1 digit 2. Banyaknya bilangan N di A sehingga setiap digit 2 di N diapit oleh digit 1 dan 3 adalah …

19. Diberikan suatu belah ketupat $ABCD$ dan sebuah titik E di dalamnya, sehingga $AE = BE$. Jika $\angle BAE = 12^\circ$ dan $\angle DAE = 72^\circ$, maka $\angle CDE = \ldots$

20. Diketahui x, y, z adalah bilangan bulat yang memenuhi

$$x^2y + y^2z + z^2x - 20 = xy^2 + yz^2 + zx^2 - 22 = 3xyz$$

Nilai terbesar dari $x + y + z$ adalah …

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2022

TINGKAT KABUPATEN/KOTA

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Kabupaten/Kota Tahun 2022

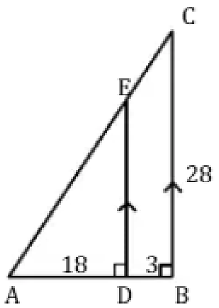
1. Penyelesaian:
   Perhatikan, $f(x) = a^2x + 200$, maka $f^{-1}(x) = \frac{x-200}{a^2}$.
   Sehingga,
   $$f(20) + f^{-1}(22) = f^{-1}(20) + f(22) \Rightarrow f(20) - f(22) = f^{-1}(20) - f^{-1}(22)$$
   $$\Leftrightarrow a^2(20 - 22) = \frac{20 - 22}{a^2}$$
   $$\Leftrightarrow a^2 = 1$$
   Jadi, $f(x) = x + 200$.
   Maka, $f(1) = 1 + 200 = 201$.

2. Penyelesaian:
   Perhatikan,
   A = himpunan bilangan bulat dari 1001 sampai dengan 2022
   $= \{1008, 1020, 1032, \dots, 2016\}$
   $n(A) = \frac{2016-1008}{12} + 1 = 85$

   B = himpunan bilangan bulat dari 1001 sampai dengan 2022 yang habis dibagi 18
   $= \{1008, 1026, 1044, \dots, 2016\}$
   $n(B) = \frac{2016-1008}{18} + 1 = 57$

   $A \cap B$ = himpunan bilangan bulat dari 1001 sampai dengan 2022 yang habis dibagi 12 dan 18
   = himpunan bilangan bulat dari 1001 sampai dengan 2022 yang habis dibagi 36
   $= \{1008, 1044, 1080, \dots, 2016\}$
   $n(A \cap B) = \frac{2016-1008}{36} + 1 = 29$
   Jadi, banyak bilangan bulat dari 1001 sampai dengan 2022 yang habis dibagi 12 atau 18 adalah
   $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
   $= 85 + 57 - 29$
   $= 113$

3. Penyelesaian:
   Perhatikan gambar berikut,



Pada ΔABC berlaku Pythagoras berikut

$$\begin{aligned} AC^2 = AB^2 + BC^2 &\Rightarrow AC^2 = 21^2 + 28^2 \\ &\Leftrightarrow AC^2 = 441 + 784 \\ &\Leftrightarrow AC^2 = 1225 \\ &\Leftrightarrow AC = \sqrt{1225} \\ &\Leftrightarrow AC = 35 \end{aligned}$$

Perhatikan DE sejajar dengan BC, sehingga berlaku kesebangunan berikut

$$\begin{aligned} \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} &\Rightarrow AE = \frac{AD}{AB} AC \\ &\Leftrightarrow AE = \frac{18}{21} \times 35 \\ &\Leftrightarrow AE = 30 \end{aligned}$$

4. Penyelesaian:

Perhatikan setiap definisi dari nilai mutlak di setiap suku aljabar soal.

$$|x| = \begin{cases} x, \text{untuk } x \geq 0 \\ -x, \text{untuk } x < 0 \end{cases}$$

$$|y| = \begin{cases} y, \text{untuk } x \geq 0 \\ -y, \text{untuk } x < 0 \end{cases}$$

$$|x+y| = \begin{cases} x+y, \text{untuk } x+y \geq 0 \\ -x-y, \text{untuk } x+y < 0 \end{cases}$$

Dengan memperhatikan definisi bentuk $|x+y|$, maka kita dapat mengerjakan dalam dua kasus.

1. Untuk $x + y \geq 0$

   Dengan melihat definisi dari $|x|$ dan $|y|$, maka kasus ini dapat terbagi dalam tiga kasus lagi yaitu

   a. $x + y \geq 0, x \geq 0, y \geq 0$, sehingga

   $$\begin{aligned} |x| + |y| + |x+y| = 22 &\Rightarrow x + y + x + y = 22 \\ &\Leftrightarrow x + y = 11 \end{aligned}$$

   Untuk $x + y = 11$, dengan x, y bilangan cacah dan menggunakan kombinasi dengan perulangan diperoleh ada sebanyak ${}_{11+(2-1)}C_{2-1} = {}_{21}C_1 = 12$ pasangan (x, y) bulat.

   b. $x + y \geq 0, x \geq 0, y < 0$, sehingga

   $$\begin{aligned} |x| + |y| + |x+y| = 22 &\Rightarrow x - y + x + y = 22 \\ &\Leftrightarrow x = 11 \end{aligned}$$

   Untuk $x + y \geq 0$ dan $x = 11$, maka $11 + y \geq 0 \Rightarrow y \geq -11$.

Sehingga diperoleh pasangan $x = 11$ dan $-11 \leq y < 0$, jadi ada 11 pasangan (x, y) bulat.

c. $x + y \geq 0, x < 0, y \geq 0$, sehingga

$|x| + |y| + |x + y| = 22 \Rightarrow -x + y + x + y = 22$

$\Leftrightarrow y = 11$

Untuk $x + y \geq 0$ dan $y = 11$, maka $x + 11 \geq 0 \Rightarrow x \geq -11$.

Sehingga diperoleh pasangan $y = 11$ dan $-11 < x < 0$, jadi ada 11 pasangan (x, y) bulat.

2. Untuk $x + y < 0$

Dengan melihat definisi dari $|x|$ dan $|y|$, maka kasus ini dapat terbagi dalam tiga kasus lagi yaitu

a. $x + y < 0, x < 0, y < 0$, sehingga

$|x| + |y| + |x + y| = 22 \Rightarrow -x - y - x - y = 22$

$\Leftrightarrow x + y = -11$

Untuk $x + y = -11$, dengan $x, y < 0$, dapat kita analogikan apabila $a = -x$ dan $b = -y$ maka persamaan akan menjadi $a + b = 11$, dengan a, b bilangan asli dan menggunakan kombinasi dengan perulangan diperoleh ada sebanyak ${}_{11-1}C_{2-1} = {}_{10}C_1 = 10$ pasangan (x, y) bulat.

b. $x + y < 0, x \geq 0, y < 0$, sehingga

$|x| + |y| + |x + y| = 22 \Rightarrow x - y - x - y = 22$

$\Leftrightarrow y = -11$

Untuk $x + y < 0$ dan $y = -11$, maka $x - 11 < 0 \Rightarrow x < 11$.

Sehingga diperoleh pasangan $y = -11$ dan $0 < x < 11$, jadi ada 11 pasangan (x, y) bulat.

c. $x + y < 0, x < 0, y \geq 0$, sehingga

$|x| + |y| + |x + y| = 22 \Rightarrow -x + y - x - y = 22$

$\Leftrightarrow x = -11$

Untuk $x + y < 0$ dan $x = -11$, maka $-11 + y < 0 \Rightarrow y < 11$.

Sehingga diperoleh pasangan $x = -11$ dan $0 < y < 11$, jadi ada 11 pasangan (x, y) bulat.

Jadi, keseluruhan ada sebanyak (12 + 11 + 11) + (10 + 11 + 11) = 66 pasangan bulat (x, y).

5. Penyelesaian:

Pembagi $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$ dan sisa $S(x) = Ax + B$, sehingga

1. Sisa pembagian oleh $(x + 1)$ adalah $f(1)$.

$S(1) = f(1) \quad \Rightarrow A(1) + B = (1)^{2023} + (1)^{1012} + (1)^{506} + (1)^{253} + (1)^{127}$

$\Leftrightarrow A + B = 5$

2. Sisa pembagian oleh $(x - 1)$ adalah $f(-1)$.

$S(-1) = f(-1) \quad \Rightarrow A(-1) + B = (-1)^{2023} + (-1)^{1012} + (-1)^{506} + (-1)^{253} + (-1)^{127}$

$\Leftrightarrow -A + B = 1$

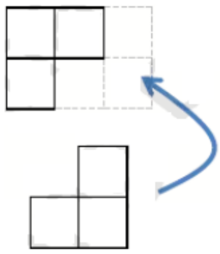
Sehingga dengan eliminasi A pada kedua persamaan diperoleh

$$\begin{array}{r} A + B = 5 \\ -A + B = -1 \\ \hline 2B = 4 \Rightarrow B = 2 \end{array} +$$

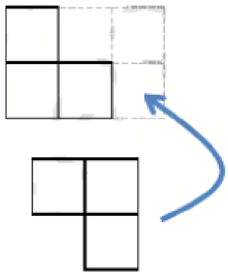
Substitusi $B = 2$ ke $A + B = 5$ diperoleh $A = 3$.

Jadi nilai $3A + 4B = 3(3) + 4(2) = 9 + 8 = 17$.

6. Penyelesaian:
   Perhatikan untuk mengisi lebar 3 petak dari persegi Panjang, kita focus ke persegi Panjang berukuran 3 $\times$ 2 di bawah ini.
   Ada dua cara mengisi petak tersebut dengan 2 tromino seperti pada gambar

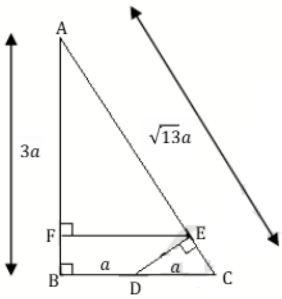


   Atau



   Sehingga, setiap 2 baris pada persegi Panjang dapat diisi tromino sebanyak 2 cara.
   Padahal untuk persegi Panjang 3×20, akan memuat 10 buah petak 2 baris.
   Jadi, banyak cara menyusun tromino adalah $\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times \ldots \times 2}_{\text{sebanyak 10 buah}} = 2^{10} = 1024$ cara.

7. Penyelesaian:
   Perhatikan gambar segitiga ABC



   Misal $BD = CD = a$, maka
   $AB = \frac{3}{2}BC = \frac{3}{2} \times 2a = 3a$
   Dengan Phytagoras diperoleh
   $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} \Rightarrow AC = \sqrt{(3a)^2 + (2a)^2}$
   $\Leftrightarrow AC = \sqrt{3a^2}$
   $\Leftrightarrow AC = \sqrt{13a}$

Segitiga ABC dan segitiga DEC sebangun, sehingga diperoleh perbandingan
$\frac{BC}{AC} = \frac{CE}{CD} \Rightarrow CE = \frac{BC}{AC} \times CD$
$\Leftrightarrow CE = \frac{2a}{\sqrt{13a}} \times a$
$\Leftrightarrow CE = \frac{2}{13}\sqrt{13a}$
Jadi, diperoleh $AE = AC - CE = \sqrt{13a} - \frac{2}{13}\sqrt{13a} = \frac{11}{13}\sqrt{13a} = \frac{11}{\sqrt{13}}a$
Dari kesebangunan segitiga AFE dan segitiga DEC diperoleh perbandingan

$$\frac{[AFE]}{[DEC]} = \left(\frac{AE}{DC}\right)^2 \Rightarrow \frac{[AFE]}{13} = \left(\frac{\frac{11}{\sqrt{13}}a}{a}\right)^2$$
$$\Leftrightarrow [AFE] = 121$$

8. Penyelesaian:
Perhatikan,
$a_1 = 4 \Rightarrow a_2 = (4)^2 - 1 = 15$
$a_2 = 15 \Rightarrow a_3 = (1+5)^2 - 1 = 35$
$a_3 = 35 \Rightarrow a_4 = (3+5)^2 - 1 = 63$
$a_4 = 63 \Rightarrow a_5 = (6+3)^2 - 1 = 80$
$a_5 = 80 \Rightarrow a_6 = (8+0)^2 - 1 = 63$
Perhatikan lagi, sampai di a_6 diperoleh kesimpulan $a_6 = a_4$, sehingga nilai-nilai suku berikutnya dari barisan (a_n) ini akan berulang-ulang dengan periode dua suku.
$a_4 = a_{4+2n} = 63 \equiv 0$ (mod 21) dan $a_5 = a_{5+2n} = 80$, untuk setiap n bilangan asli.
Sehingga diperoleh,
$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \cdots a_{2022} &\equiv [a_1 + a_2 + a_3 + (a_4 + a_6 + \cdots + a_{2022}) + \\ &\quad (a_5 + a_7 + \cdots + a_{2021})] \text{ (mod 21)} \\ &\equiv \left[(a_1 + a_2 + a_3) + 1010\big(a_4 \text{(mod 21)}\big) + 1009(a_5)\right] \text{ (mod 21)} \\ &\equiv [(4 + 15 + 35) + 0 + 1009(80)] \text{ (mod 21)} \\ &\equiv [(54 + 1009(80)] \text{ (mod 21)} \\ &\equiv [(54 \text{ mod } 21) + (1009 \text{ mod } 21)80] \text{ (mod 21)} \\ &\equiv [12 + 1(80)] \text{ (mod 21)} \\ &\equiv 92 \text{ (mod 21)} \\ &\equiv 8 \text{ (mod 21)} \end{aligned}$$
Jadi, sisa pembagian $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{2022}$ oleh 21 adalah 8.

9. Penyelesaian:
Karena x, y bilangan positif, maka kuadratkan kedua ruas diperbolehkan.
$$\begin{aligned} x + 200 \leq \sqrt{x^2 - y^2 + 400(x+y)} \quad &\Rightarrow (x+200)^2 \leq \left(\sqrt{x^2 - y^2 + 400(x+y)}\right)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 400x + 40000 \leq x^2 - y^2 + 400x + 400y \\ &\Leftrightarrow y^2 - 400y + 40000 \leq 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (y-200)^2 \leq 0$$

Padahal, untuk setiap y berlaku $(y-200)^2 \geq 0$. Jadi jelas bahwa $(y-200)^2 = 0 \Rightarrow y = 200$.

10. Penyelesaian:
Misalkan p adalah suatu bilangan prima, maka
$x^2 + 42x = p^3 \Rightarrow x(x+42) = p^3$
Jelas bahwa untuk $x = 1$ maka $p^3 = 43$ bukanlah suatu pangkat tiga dari bilangan prima. Maka, haruslah $p|x$ dan $p|x+42$. Hal ini berarti bahwa $p|42$.
Maka kemungkinan nilai $p = \{2,3,7\}$, dengan x adalah bilangan bulat.
- Untuk $p = 2$, maka $x(x+42) = 8$, tidak ada x bulat yang memenuhi.
- Untuk $p = 3$, maka $x(x+42) = 27$, tidak ada x bulat yang memenuhi.
- Untuk $p = 7$, maka $x(x+42) = 343 \Rightarrow x^2 + 42x - 343 = 0$
$\Leftrightarrow (x-7)(x+49) = 0$
$\Leftrightarrow x = 7$ atau $x = -49$
Karena x adalah bilangan asli, maka yang memenuhi adalah $x = 7$.

11. Penyelesaian:
Banyak cara Azka dan Budi menempati di baris pertama adalah ${}_3P_2 = \frac{3!}{1!} = 6$.
Banyak cara mendudukkan 10 siswa yang lain adalah 10!
Sehingga, banyak cara Azka dan Budi menempati di paris pertama adalah $A = 6 \times 10!$.
Jadi,
$$\frac{A}{9!} = \frac{6 \times 10!}{9!} = \frac{6 \times 10 \times 9!}{9!} = 6 \times 10 = 60$$

12. Penyelesaian:
Misal sisi-sisi segitiga adalah $a = BC, b = AC, c = AB$.
Dan segitiga ABC siku-siku di C, sehingga $c = AB$ adalah sisi miring, dan berlaku $c^2 = a^2 + b^2$
Maka luas segitiga adalah $L = \frac{1}{2}ab = 63$.
Ingat lagi rumus jari-jari lingkaran luar suatu segitiga R dan jari-jari lingkaran dalam segitiga r.
$$R = \frac{abc}{4L} = \frac{abc}{4\left(\frac{1}{2}ab\right)} = \frac{c}{2}$$
$$r = \frac{L}{\frac{1}{2}K} = \frac{126}{a+b+c} = \frac{126}{\sqrt{(a^2+b^2)+2ab}+c} = \frac{126}{\sqrt{c^2+252}+c}$$
Sehingga,
$$R + r = 12 \quad \Rightarrow \quad \frac{c}{2} + \frac{L}{\frac{1}{2}(a+b+c)} = 12$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{c}{2} + \frac{126}{\sqrt{c^2+252}+c} = 12$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{c}{2} + \frac{126(\sqrt{c^2+252}-c)}{252} = 12$$

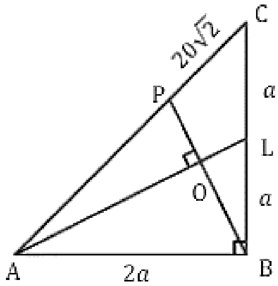
$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt{c^2+252}}{2} = 12$$
$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{c^2+252} = 24$$
$$\Leftrightarrow \quad c^2 + 252 = 576$$
$$\Leftrightarrow \quad c^2 = 324$$
$$\Leftrightarrow \quad c = 18$$

13. Penyelesaian:
    Ingat, deret geometri tak hingga dengan $0 < x < 1$ berbentuk
    $$1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$
    Apabila bentuk deret tersebut diturunkan akan menjadi
    $$1 + 2x + 3x^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} k\,x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$
    $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+B}{3^{k+1}} = 20 \Rightarrow \frac{2}{3^2}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^{k-1}} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{B}{3^{k-1}}\right) = 20$$
    $$\Leftrightarrow \frac{2}{3^2}\left(\sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} + \frac{B}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right) = 20$$
    $$\Leftrightarrow \frac{2}{3^2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} + \frac{B}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right) = 20$$
    $$\Leftrightarrow \frac{2}{3^2}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{B}{2}\left(\frac{3}{2}\right)\right) = 20$$
    $$\Leftrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{6}B = 20$$
    $$\Leftrightarrow 3 + B = 120$$
    $$\Leftrightarrow B = 117$$

14. Penyelesaian:
    Misal $w_i = p_i + 20$, maka soal akan analog dengan bentuk persamaan
    $$p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_7 = 8$$
    Dengan $0 \le p_1, p_2, p_3, \dots, p_7 \le 2$
    Maka dengan mendata kasus per kasus penyelesaiannya diperoleh
    - Penyelesaian berbentuk (2,2,2,2,0,0,0) ada sebanyak $\frac{7!}{4!3!} = 35$
    - Penyelesaian berbentuk (2,2,2,1,1,0,0) ada sebanyak $\frac{7!}{3!2!2!} = 210$
    - Penyelesaian berbentuk (2,2,1,1,1,1,0) ada sebanyak $\frac{7!}{2!4!1!} = 105$
    - Penyelesaian berbentuk (2,1,1,1,1,1,1) ada sebanyak $\frac{7!}{1!6!} = 7$

Jadi, banyak penyelesaian terurutnya adalah 35 + 210 + 105 + 7 = 357

15. Penyelesaian:
Perhatikan gambar segitiga ABC



Perhatikan segitiga ABL, berlaku Pythagoras

$$AL^2 = AB^2 + BL^2 \Rightarrow AL = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = \sqrt{5}a$$

Perhatikan segitiga ABL sebangun dengan segitiga BOL, misal $LO = x$, berlaku

$$\frac{BL}{LA} = \frac{LO}{BL} \quad \Rightarrow LO = \frac{BL^2}{LA}$$
$$\Leftrightarrow LO = \frac{a^2}{\sqrt{5}a}$$
$$\Leftrightarrow LO = \frac{a}{\sqrt{5}}$$

Karena $LO = \frac{a}{\sqrt{5}}$, maka $OA = \frac{4a}{\sqrt{5}}$, sehingga dengan dalil Menelause, diperoleh

$$\frac{LO}{OA} \cdot \frac{AP}{PC} \cdot \frac{CB}{BL} = 1 \Rightarrow \frac{1}{4} \cdot \frac{AP}{20\sqrt{2}} \cdot 2 = 1$$
$$\Leftrightarrow AP = 40\sqrt{2}$$

Karena $AP = 40\sqrt{2}$ dan $PC = 20\sqrt{2}$, maka $AC = 60\sqrt{2}$.
Dengan Pythagoras pada segitiga ABC diperoleh

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow \left(60\sqrt{2}\right)^2 = (2a)^2 + (2a)^2$$
$$\Leftrightarrow 7200 = 8a^2$$
$$\Leftrightarrow a^2 = 900$$
$$\Leftrightarrow a = 30$$

Jadi, Panjang $AB = 2a = 2(30) = 60$.

16. Penyelesaian:
Dari FPB$(m, n) = 3$, akan dimisalkan $m = 3a$ dan $n = 3b$.
Dan dari FPB$(2m, 5n) = 30$, maka $30|2m \Rightarrow 30|6a \Rightarrow 5|a$ dan $30|5n \Rightarrow 30|15b \Rightarrow 2|b$.
Misal $a = 5c$ dan $b = 2d$, maka $m = 15c$ dan $n = 6d$.
Perhatikan FPB$(30c, 30d) = 30$, maka FPB$(c, d) = 1$
Maka, FPB$(15m, 6n)$ = FPB$(225c, 36d) = 9$.

17. Penyelesaian:
Misalkan $a = pc$ dan $d = qb$, ini dapat dilakukan karena b, $c > 0$, sehingga p, $q > 1$, maka diperoleh

$3p^2c^2 + 3b^2 = k$ ....(1)
$3q^2b^2 + 3c^2 = k$ ....(2)
$4pc^2 + 4qb^2 = k$ ....(3)

Padahal, kita akan mencari nilai

$$\frac{(ab + cd)}{(ad + bc)} = \frac{pcb + cqb}{pqbc + bc} = \frac{p + q}{pq + 1}$$

Eliminasi persamaan $(1) \times q^2 - (2)$ menghasilkan

$$(3p^2q^2c^2 + 3b^2q^2) - (3q^2b + 3c^2) = k(q^2 - 1) \Rightarrow 3c^2(p^2q^2 - 1) = k(q^2 - 1)$$
$$\Leftrightarrow \quad c^2 = \frac{k(q^2-1)}{3(p^2q^2-1)}$$

Eliminasi persamaan $(2) \times p^2 - (1)$ menghasilkan

$$(3p^2q^2b^2 + 3p^2c^2) - (3p^2c + 3b^2) = k(p^2 - 1) \Rightarrow 3b^2(p^2q^2 - 1) = k(p^2 - 1)$$
$$\Leftrightarrow \quad c^2 = \frac{k(p^2-1)}{3(p^2q^2-1)}$$

Substitusikan ke persamaan (3) menghasilkan

$$4pc^2 + 4qb^2 = k \quad \Rightarrow \frac{4pk(q^2-1)+4qk(p^2-1)}{3(p^2q^2-1)} = k$$
$$\Leftrightarrow \frac{pq^2-p+p^2q-q}{p^2q^2-1} = \frac{3}{4}$$
$$\Leftrightarrow pq^2 - p + p^2q - q = \frac{3}{4}p^2q^2 - \frac{3}{4}$$
$$\Leftrightarrow 0 = \frac{3}{4}p^2q^2 - p^2q - pq^2 + \frac{3}{4}pq - \frac{3}{4}pq + p + p + q - \frac{3}{4}$$
$$\Leftrightarrow 0 = pq\left(\frac{3}{4}pq - p - q + \frac{3}{4}\right) - \left(\frac{3}{4}pq - p - q + \frac{3}{4}\right)$$
$$\Leftrightarrow 0 = (pq - 1)\left(\frac{3}{4}pq - p - q + \frac{3}{4}\right)$$

Karena $pq > 1$, haruslah $\frac{3}{4}pq - p - q + \frac{3}{4} = 0$, sehingga diperoleh $\frac{p+q}{pq+1} = \frac{3}{4}$

Jadi,

$$\frac{12(ab + cd)}{ad + bc} = 12\left(\frac{p + q}{pq + 1}\right) = 12 \times \frac{3}{4} = \frac{36}{4} = 9$$

18. Penyelesaian:

Perhatikan ilustrasi berikut untuk memperjelas pemahaman terhadap bilangan N.

$$1\,\boxed{2}\,3 \ldots 1\,\boxed{2}\,3 \ldots 3\,\boxed{2}\,1 \ldots 1\,\boxed{2}\,3\,\boxed{2}\,1\,\boxed{2}\,3$$

Karena A ada 8 digit, maka ada sebanyak 8 buah $\boxed{}$, dan sebagian terisi oleh $\boxed{1\,\boxed{2}\,3}$ atau $\boxed{3\,\boxed{2}\,1}$

Kita akan membagi kasus sesuai banyak $\boxed{1\,\boxed{2}\,3}$ atau $\boxed{3\,\boxed{2}\,1}$

1. Kasus pertama, jika ada 1 buah angka $\boxed{2}$.

   Sebagai ilustrasi $\boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{1\,\boxed{2}\,3}\,\boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{}$ dan $\boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{3\,\boxed{2}\,1}\,\boxed{}\,\boxed{}\,\boxed{}$

Ada 6 kelompok besar, sehingga kemungkinan posisi $\boxed{1\,\boxed{2}\,3}$ ada 6 buah, dan dapat dipasang sebanyak 2 cara, yaitu $\boxed{1\,\boxed{2}\,3}$ atau $\boxed{3\,\boxed{2}\,1}$

Untuk pengisian sebanyak 5 buah $\square$ yang lain dapat diisi angka 1 atau 3, sehingga ada keseluruhan 2^5 cara.

Jadi, keseluruhan banyak bilangan N yang terbentuk adalah sebagai berikut.

Banyak posisi $\boxed{1\,\boxed{2}\,3}$ diletakkan di kelompok besar	Banyak cara menyusun angka 1 dan 3 pada $\boxed{1\,\boxed{2}\,3}$	Banyak cara menyusun angka 1 dan 3 kotak $\square$ yang lain	Total banyak cara
6	2	2^5	$6 \times 2 \times 2^5 = 384$

2. Kasus kedua, jika ada 2 buah angka $\boxed{2}$.

   Ada dua subkasus, yaitu $\square$ $\boxed{1\,\boxed{2}\,3}$ $\square$ $\boxed{1\,\boxed{2}\,3}$ dan $\square$ $\square$ $\boxed{3\,\boxed{2}\,1\,\boxed{2}\,3}$ $\square$

   a. Kita mulai untuk kasus dimana $\square$ $\square$ $\boxed{3\,\boxed{2}\,1\,\boxed{2}\,3}$ $\square$, artinya ada 1 bilangan selain $\boxed{2}$ di antara dua buah $\boxed{2}$.

   Ada 4 kelompok besar, sehingga kemungkinan posisi $\boxed{3\,\boxed{2}\,1\,\boxed{2}\,3}$ ada 4 buah, dan dapat dipasang sebanyak 2 cara, yaitu $\boxed{3\,\boxed{2}\,1\,\boxed{2}\,3}$ atau $\boxed{1\,\boxed{2}\,3\,\boxed{2}\,1}$

   Untuk pengisian sebanyak 3 buah $\square$ yang lain dapat diisi angka 1 atau 3, sehingga ada keseluruhan 2^3 cara.

   Jadi, keseluruhan banyak bilangan N yang berbentuk adalah sebagai berikut

Banyak posisi $\boxed{1\,\boxed{2}\,3}$ diletakkan di kelompok besar	Banyak cara menyusun angka 1 dan 3 pada $\boxed{1\,\boxed{2}\,3}$	Banyak cara menyusun angka 1 dan 3 kotak $\square$ yang lain	Total banyak cara
4	2	2^3	$4 \times 2 \times 2^3 = 64$

   b. Kita mulai untuk kasus dimana $\square$ $\boxed{1\,\boxed{2}\,3}$ $\square$ $\boxed{1\,\boxed{2}\,3}$, artinya ada lebih dari 1 bilangan selain $\boxed{2}$ di antara dua buah $\boxed{2}$.

   Ada 4 kelompok besar, sehingga kemungkinan posisi $\boxed{1\,\boxed{2}\,3}$ ada memilih 2 tempat dari 4 tempat tersedia, yaitu $\binom{4}{2} = 6$ buah, dan dapat dipasang sebanyak 4 cara, yaitu

   $\square$ $\boxed{1\,\boxed{2}\,3}$ $\square$ $\boxed{1\,\boxed{2}\,3}$,
   $\square$ $\boxed{1\,\boxed{2}\,3}$ $\square$ $\boxed{3\,\boxed{2}\,1}$,
   $\square$ $\boxed{3\,\boxed{2}\,1}$ $\square$ $\boxed{1\,\boxed{2}\,3}$
   $\square$ $\boxed{3\,\boxed{2}\,1}$ $\square$ $\boxed{3\,\boxed{2}\,1}$

   Untuk pengisian sebanyak 2 buah $\square$ yang lain dapat diisi angka 1 atau 3, sehingga ada keseluruhan 2^2 cara.

   Jadi, keseluruhan banyak bilangan N yang terbentuk adalah sebagai berikut

Banyak posisi $\boxed{1\boxed{2}3}$ diletakkan di kelompok besar	Banyak cara menyusun angka 1 dan 3 pada $\boxed{1\boxed{2}3}$	Banyak cara menyusun angka 1 dan 3 kotak $\boxed{}$ yang lain	Total banyak cara
6	4	2^2	$6 \times 4 \times 2^2 = 96$

3. Kasus ketiga, jika ada 3 buah angka $\boxed{2}$.

Ada dua subkasus, yaitu $\boxed{3\boxed{2}1\boxed{2}3\boxed{2}1}\boxed{}$ dan $\boxed{1\boxed{2}3}\boxed{3\boxed{2}1\boxed{2}3}$

a. Kita mulai untuk kasus dimana $\boxed{3\boxed{2}1\boxed{2}3\boxed{2}1}\boxed{}$, artinya ada 1 bilangan selain $\boxed{2}$ di antara dua buah $\boxed{2}$.

Ada 2 kelompok besar, sehingga kemungkinan posisi $\boxed{3\boxed{2}1\boxed{2}3\boxed{2}1}$ ada 2 buah, dan dapat dipasang sebanyak 2 cara, yaitu $\boxed{3\boxed{2}1\boxed{2}3\boxed{2}1}$ atau $\boxed{1\boxed{2}3\boxed{2}1\boxed{2}3}$

Untuk pengisian sebanyak 1 buah $\boxed{}$ yang lain dapat diisi angka 1 atau 3, sehingga ada keseluruhan 2^1 cara.

Jadi, keseluruhan banyak bilangan N yang terbentuk adalah sebagai berikut

Banyak posisi $\boxed{1\boxed{2}3}$ diletakkan di kelompok besar	Banyak cara menyusun angka 1 dan 3 pada $\boxed{1\boxed{2}3}$	Banyak cara menyusun angka 1 dan 3 kotak $\boxed{}$ yang lain	Total banyak cara
2	2	2^1	$2 \times 2 \times 2^1 = 8$

b. Kita mulai untuk kasus dimana $\boxed{1\boxed{2}3}\boxed{3\boxed{2}1\boxed{2}3}$, artinya ada lebih dari 1 bilangan selain $\boxed{2}$ di antara dua buah $\boxed{2}$.

Ada 2 kelompok besar, sehingga kemungkinan posisi $\boxed{1\boxed{2}3}$ dan $\boxed{3\boxed{2}1\boxed{2}3}$ dapat dipasang sebanyak 2 cara, yaitu

$\boxed{1\boxed{2}3}\boxed{3\boxed{2}1\boxed{2}3}$

$\boxed{3\boxed{2}1\boxed{2}3}\boxed{1\boxed{2}3}$

Untuk pengisian angka 1 dan 3 pada $\boxed{1\boxed{2}3}$ dapat dipasang sebanyak 2 cara, begitu juga posisi angka 1 dan 3 pada $\boxed{3\boxed{2}1\boxed{2}3}$ dapat dipasang sebanyak 2 cara.

Karena tidak ada slot $\boxed{}$ sehingga tidak perlu dihitung.

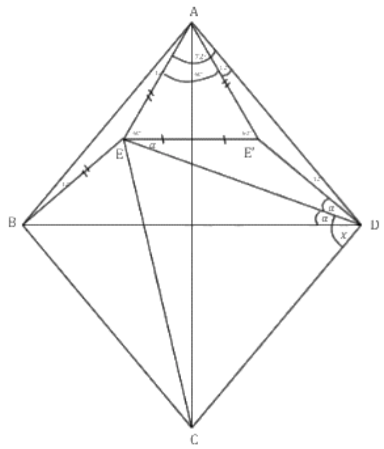
Jadi, keseluruhan banyak bilangan N yang terbentuk adalah sebagai berikut

Banyak posisi $\boxed{1\boxed{2}3}$ dan $\boxed{3\boxed{2}1\boxed{2}3}$	Banyak cara menyusun angka 1 dan 3 pada $\boxed{1\boxed{2}3}$	Banyak cara menyusun angka 1 dan 3 pada $\boxed{3\boxed{2}1\boxed{2}3}$	Total banyak cara
2	2	2	$2 \times 2 \times 2 = 8$

Jadi, total seluruh cara menyusun bilangan N dalam A adalah sebanyak $384 + (64 + 96) + (8 + 8) = 560$ cara.

19. Penyelesaian:

Perhatikan belah ketupat $ABCD$



Buat E' merupakan titik pencerminan dari E terhadap garis AC.
Sehingga karena $\angle DAE = 72^o$ dan $\angle BAE = 12^o = \angle DAE'$, maka $\angle EAE' = 60^o$.
Juga perhatikan karena $AE = AE'$ maka jelas bahwa EAE' adalah segitiga sama sisi.
Perhatikan juga bahwa $\angle DAC = 42^o$, maka $\angle BDA = 48^o = 2\alpha + 12^o \Rightarrow \alpha = 18^o$.
Jadi, $x = \angle CDE = \angle CDB + \angle BDE = 48^o + 18^o = 66^o$.

20. Penyelesaian:
Perhatikan,
$$xy^2 + yz^2 + zx^2 - 22 = x^2y + y^2z + z^2x - 20$$
$$\Rightarrow xy^2 - x^2y + yz^2 - y^2z + zx^2 - z^2x = 2$$
$$\Leftrightarrow (x-y)(y-z)(z-x) = 2$$

Karena $(x-y)+(y-z)+(z-x) = 0$, maka tanpa mengurangi keumuman misal $x - y > 0$, maka diperoleh penyelesaian sebagai berikut
$x - y = 2$
$y - z = -1 \Rightarrow y = z - 1$
$z - x = -1 \Rightarrow x = z + 1$

Substitusikan $x = z + 1$ dan $y = z - 1$ ke soal, sehingga diperoleh
$$xy^2 + yz^2 + zx^2 - 22 = 3xyz$$
$$\Rightarrow (z+1)(z-1)^2 + (z-1)z^2 + z(z+1)^2 - 22 = 3(z+1)(z-1)z$$
$$\Leftrightarrow 3z^4 - 21 = 3z^3 - 3z$$
$$\Leftrightarrow 3z = 21$$
$$\Leftrightarrow z = 7$$
Jadi, nilai $x + y + z = (z+1) + (z-1) + z = 3z = 3(7) = 21$.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2022

TINGKAT PROVINSI

BIDANG MATEMATIKA

WAKTU : 210 MENIT

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2022

1. Misalkan a, b, c adalah bilangan asli sedemikian sehingga $a + 2b + 3c = 73$. Nilai minimum dari $a^2 + b^2 + c^2$ adalah...

2. Diketahui ABC adalah trapesium sedemikian sehingga $AB||CD$, dengan panjang $AB = 6$ dan $CD = 7$. Misalkan titik P dan Q berturut-turut pada AD dan BC sedemikian sehingga $PQ||AB$. Jika keliling trapesium $ABQP$ sama dengan keliling trapesium $PQCD$ serta $AD + BC = 10$, panjang dari $20PQ$ adalah...

3. Diberikan segitiga sama sisi dengan panjang 21 dapat dipartisi menjadi 21^2 segitiga sama sisi dengan panjang 1, dan sisi-sisi segitiga kecil sejajar dengan segitiga besar. Banyaknya jajargenjang yang tersusun atas segitiga samasisi kecil adalah $21k$. Nilai $k = \cdots$

4. Jumlah semua bilangan asli b sehingga terdapat bilangan asli a yang memenuhi
$$\sqrt{a + \frac{15}{b}} = a\sqrt{\frac{15}{b}}$$
adalah ...

5. Definisikan suatu barisan naik sebagai semua bilangan tujuh digit yang terdiri dari angka-angka 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Suku ke-2024 dari barisan tersebut adalah ...

6. Misalkan $P(x)$ adalah sebuah polinomial dengan koefisien bilangan bulat sedemikian sehingga $P(6)P(38)P(57) + 19$ habis dibagi 114. Jika $P(-13) = 479$ dan $P(0) \geq 0$, nilai terkecil yang mungkin dari $P(0)$ adalah ...

7. Banyaknya pasangan bilangan bulat (m, n) yang merupakan solusi dari persamaan
$$m^n = 17^{324}$$
adalah ...

8. Misalkan ABC adalah segitiga dengan $AB = 16$, $AC = 23$ dan $\angle BAC = 30^o$. Luas persegi panjang terbesar sehingga salah satu sisinya berhimpit dengan BC, dan dua titik sudut lainnya masing-masing pada AB dan AC adalah ...

9. Banyaknya himpunan bagian tak kosong dari $S \in \{1, 2, \ldots, 21\}$ yang hasil penjumlahan anggota-anggotanya habis dibagi 4 adalah $2^k - m$; dimana k dan m bilangan bulat dan $0 \leq m < 2022$. Nilai dari $10k + m$ adalah ...

10. Definisikan barisan $\{a_n\}$ dengan $a_1 > 3$, dan untuk semua bilangan asli $n \geq 1$ berlaku $2a_{n+1} = a_n(-1 + \sqrt{4a_n - 3})$ Jika $||a_1 - a_{2022}| = 2023$, nilai dari

$$\sum_{i=1}^{2023} \frac{a_i^3}{a_i^2 + a_i a_{i+1} + a_{i+1}^2} = \cdots$$

11. Misalkan A dan B himpunan dengan sifat bahwa terdapat tepat 144 himpunan yang merupakan himpunan bagian dari A atau B. Tentukan banyaknya anggota $A \cup B$.

12. (a) Tentukan suatu bilangan asli n sehingga $n(n + 2022) + 2$ merupakan bilangan kuadrat sempurna. (b) Tentukan semua bilangan asli a sehingga untuk setiap bilangan asli n, bilangan $n(n + a) + 2$ tidak pernah merupakan suatu kuadrat sempurna.

13. Diketahui bahwa x dan y adalah bilangan real yang memenuhi

$$5x^2 + 4xy + 11y^2 = 3$$

Tanpa menggunakan kalkulus (turunan/integral), tentukan nilai maksimum dari $xy - 2x + 5y$.

14. Diberikan segitiga ABC dengan titik pusat lingkaran luar O. Titik D merupakan refleksi titik A terhadap BC. Misalkan ℓ adalah garis yang sejajar dengan BC dan melalui O. Garis melalui B sejajar CD dan ℓ bertemu pada titik B_1. CB_1 dan BD berpotongan pada titik B_2. Garis melalui C sejajar BD dan ℓ bertemu pada titik C_1. BC_1 dan CD berpotongan pada titik C_2. Buktikan bahwa A, B_2, C_2, D terletak pada suatu lingkaran.

15. Pada papan tulis mula-mula terdapat 22 angka 1, 2, 3, ⋯, 21, 22. Suatu langkah adalah prosedur memilih dua angka a, b pada papan dengan $b \geq a + 2$, kemudian menghapus a dan b dan menggantikannya dengan $a + 1$ dan $b - 1$. Tentukan banyaknya langkah maksimum yang mungkin dapat dilakukan.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2022

TINGKAT PROVINSI

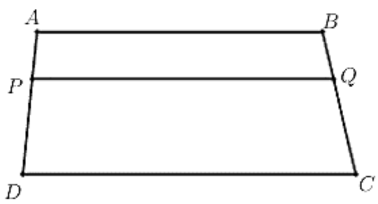
SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2022

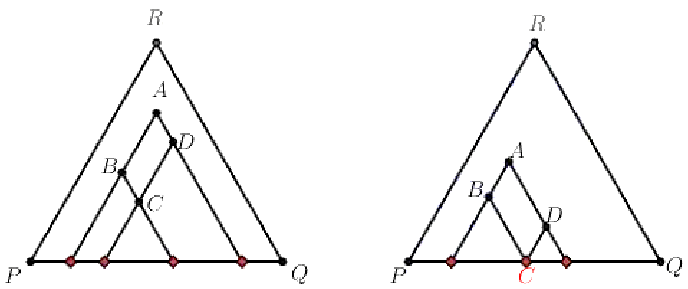
1. Penyelesaian:
   Dari Ketaksamaan Cauchy-Schwarz,
   $$(a^2+b^2+c^2)(1^2+2^2+3^2) \geq 73^2 \Longrightarrow a^2+b^2+c^2 \geq 381$$
   Nilai minimum ini dapat dicapai ketika $a=5, b=10$, dan $c=16$.

2. Penyelesaian:



Misalkan $AP = ax, PD = (1-x)a, BQ = bx$, dan $QC = (1-x)b$. Dari informasi pada soal didapat
$$6 + ax + bx = 7 + a + b - ax - bx \text{ dan } a + b = 10.$$
Selesaikan, didapat $x = \frac{11}{20}$. Panjang $PQ = \frac{6\times9+7\times11}{20} \Longrightarrow 20PQ = 131$.

3. Penyelesaian:
   Misalkan segitiga sama sisi tersebut adalah PQR dan jajargenjangnya adalah $ABCD$. Perhatikan bahwa ada tepat satu sisi, sebut saja PQ, yang tidak sejajar dengan sisi jajargenjang. Segmen PQ berpotongan dengan garis AB, BC, CD, DA di tiga atau empat titik berbeda.



Sebaliknya, dari empat titik berbeda pada PQ, kita bisa membuat tepat satu jajargenjang yang tidak memiliki sisi yang sejajar dengan PQ dan keempat sisinya memotong PQ di empat titik tersebut. Demikian juga dari tiga berbeda pada PQ, kita memiliki tepat satu jajargenjang dengan sifat serupa. Dengan ini, banyaknya jajargenjang adalah banyaknya pemilihan empat atau tiga titik pada suatu sisi segitiga PQR, yaitu
$$3 \times \left(\binom{22}{4} + \binom{22}{3}\right) = 3\binom{23}{4} = \frac{3\times23\times22\times21\times20}{24}$$
Jadi, $k = 1265$.

4. Penyelesaian:
   Kuadratkan dan sederhanakan soal menjadi
$$b = 15a - \frac{15}{a}$$
   Karena a, b adalah bilangan asli maka $a = 1{,}3{,}5{,}15$. Dengan ini, b yang memenuhi adalah 0, 40, 72, 14. Jadi, jumlah b asli yang dicari adalah 40 + 72 + 224 = 336.

5. Penyelesaian:
   Karena 2024 = $2 \cdot 6! + 4 \cdot 5! + 4 \cdot 4! + 1 \cdot 3! + 1 \cdot 2! + 0 \cdot 1!$, maka bilangan yang dicari adalah 3672154.

6. Penyelesaian:
   Gunakan sifat jika $a \equiv b \pmod{m}$ maka $P(a) \equiv P(b) \pmod{m}$. Perhatikan 114 = 2 × 3 × 19.
   - Perhatikan $P(0) \equiv P(-13) \pmod{13}$. Jadi, $P(0) \equiv 11 \pmod{13}$.
   - Perhatikan $P(6) \equiv P(-13) \not\equiv 0 \pmod{19}$ dan $P(57) \equiv P(38) \equiv P(0) \pmod{19}$. Kemudian dari $19|P(6)P(38)P(57) + 19$ didapat
$$19|P(6)P(0)^2 \Longrightarrow 19|P(0)$$
   - Perhatikan $P(6) \equiv P(57) \equiv P(0) \pmod{3}$ dan $P(38) \equiv P(-13) \equiv 2 \pmod{3}$. Dengan cara yang sama, kita dapatkan
$$3|2P(0)^2 + 1 \Longrightarrow P(0) = 1{,}2 \pmod{3}$$
   - Perhatikan $P(6) \equiv P(38) \equiv P(0) \pmod{2}$ dan $P(57) \equiv P(-13) \equiv 1 \pmod{2}$. Dengan cara yang sama, kita dapatkan
$$2|P(0)^2 + 1 \Longrightarrow P(0) = 1 \pmod{2}$$

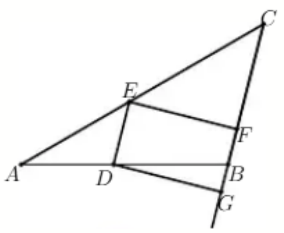
   Dari $P(0) \geq 0$, dan empat informasi terakhir, didapat $P(0)$ terkecil adalah 323. Contoh polinom yang memenuhi adalah $P(x) = -12x + 323$.

7. Penyelesaian:
   Perhatikan bahwa karena 17 merupakan bilangan prima, maka m harus berbentuk 17^k atau $(-17)^k$ dan n haruslah factor dari 324.
   - Kasus 1: $m > 0$

     Perhatikan bahwa untuk setiap n factor dari $324 = 2^2 \cdot 3^4$, maka $m = 17^{\frac{324}{n}}$ memenuhi persamaan. Terdapat $3 \cdot 5 = 15$ solusi.
   - Kasus 2: $m < 0$, maka $m = (-17)^k$
     Karena m negative, maka haruslah k ganjil. Perhatikan bahwa untuk setiap k factor ganjil dari $324 = 2^2 \cdot 3^4, m = (-17)^k$ dan $n = \frac{324}{k}$ memenuhi. Maka terdapat 5 solusi.

   Maka banyaknya pasangan bilangan bulat (m, n) yang memenuhi adalah 15 + 5 = 20.

8. Penyelesaian:
   Kita mengasumsikan kedua titik sudut lainnya ada pada segmen AB dan AC. Misalkan $DEFG$ adalah persegi Panjang dengan titik D, E pada segmen AB, AC, berturut-turut dan titik F, G pada BC.



Misalkan $AE/AC = x$ maka $DE = xBC$. Dari hokum sinus pada ΔABC, diperoleh $\sin C = \frac{8}{BC}$ sehingga $EF = \frac{SCE}{BC}$. Dengan ini, luas $DEFG$ adalah

$$8xCE = 8x(1-x)AC \leq 2AC = 46$$

Ketaksamaan terakhir adalah AM-GM dan nilai maksimum tercapai saat E adalah titik tengah AC.

9. Penyelesaian:

Misalkan a_n, b_n, c_n, d_n adalah banyaknya subhimpunan dari $\{1,2,\ldots,n\}$ dengan jumlah elemen kongruen dengan 0, 1, 2, 3 dalam modulo 4, berturut-turut. Jumlah elemen pada himpunan kosong didefinisikan sebagai nol. Dengan perhitungan langsung, didapat $a_2 = b_2 = c_2 = d_2 = 1$. Dengan meninjau subhimpunan yang memuat $n+1$ dan yang tidak, didapat $a_{n+1} = a_n + x$ dengan $x \in \{a_n, b_n, c_n, d_n\}$. Demikian juga untuk b_{n+1}, c_{n+1}, dan d_{n+1}. Dari sini bisa disimpulkan secara induktif bahwa $a_n = b_n = c_n = d_n$ untuk semua $n \geq 2$. Karena $a_{21} + b_{21} + c_{21} + d_{21} = 2^{21}$ maka $a_{21} = 2^{19}$. Karena himpunan kosong terhitung pada a_{21} maka banyaknya yang dicari adalah $2^{19} - 1$.

Jadi, $k = 19$ dan $m = 1$. Jawaban yang diinginkan adalah 191.

10. Penyelesaian:

Tulis kondisi pada soal menjadi $2a_{n+1} + a_n = a_n\sqrt{4a_n - 3}$. Kuadratkan dan sederhanakan menjadi

$$\frac{a_n^3}{a_n^2 + a_n a_{n+1} + a_{n+1}^2} = 1$$

Untuk semua $n \geq 1$. Dengan ini, nilai yang dicari adalah 2023.

11. Penyelesaian:

Misalkan $|A| = x, |B| = y, |A \cap B| = z$ maka

$$144 = 2^x + 2^y - 2^z$$

Tanpa mengurangi keberlakuan secara umum, asumsikan $x \geq y \geq z$. Karena,

$$2^x \leq 2^x + 2^y - 2^z < 2^x + 2^y \leq 2 \times 2^x \Longrightarrow 2^x \leq 144 < 2^{x+1} \Longrightarrow x = 7$$

Dengan ini, $2^Y - 2^z = 16$. Jelas bahwa $y > z$, maka $v_2(2^y - 2^z) = z$. Dari sini disimpulkan $z = 4$ dan $y = 5$.

Jadi, $|A \cup B| = x + y - z = 8$.

12. Penyelesaian:

a. Tinjau persamaan

$$n(n+2022) + 2 = (n+1010)^2$$

Memiliki solusi $n = \frac{1010^2}{2} - 1$. Karena hanya diminta suatu n yang memenuhi, selesai.

b. - Untuk $a = 1$: Karena $n(n+1) + 2$ kuadrat saat $n = 1$ maka $a = 1$ tidak memenuhi.
- Untuk $a = 2$: Karena $(n+1)^2 < n(n+2) + 2 < (n+2)^2$ maka $n(n+2) + 2$ bukan bilangan kuadrat untuk setiap bilangan asli n. Jadi, $a = 2$ memenuhi.
- Untuk $a = 3$: Karena $(n+1)^2 < n(n+3) + 2 < (n+2)^2$ maka $n(n+3) + 2$ bukan bilangan kuadrat untuk setiap bilangan asli n. Jadi, $a = 3$ memenuhi.
- Untuk $a \equiv 0 \pmod 4$: Perhatikan bahwa $n(n+a) + 2 \equiv n^2 + 2 \equiv 2,3 \pmod 4$ bukanlah bilangan kuadrat. Jadi, $a = 4k$ memenuhi untuk setiap k asli.

Sekarang kita perlu meninjau semua $a \geq 5$ dan $a /\equiv 0$ (mod 4). Akan dibuktikan selalu ada bilangan asli k sehingga persamaan

$$n(n+a) + 2 = (n+k)^2$$

Memiliki solusi n asli. Untuk a genap, ambil $k = \frac{a}{2} - 1$. Untuk a ganjil, ambil $k = \frac{a-1}{2}$. Mudah diperiksa bahwa nilai k tersebut memberikan solusi n asli.

Jadi, hanya $a = 2, 3$ dan $4k$, dengan k bilangan asli, yang memenuhi kondisi soal.

13. Penyelesaian:

Misalkan $xy - 2x + 5y = k$. Maka, $xy = k + 2x - 5y$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} 3 &= 5x^2 + 4xy + 11y^2 \\ &= 5x^2 + 2xy + 2xy + 11y^2 \\ &= 5x^2 + 2xy + 2(k + 2x - 5y) + 11y^2 \\ &= 5x^2 + 2xy + 2k + 4x - 10y + 11y^2 \end{aligned}$$

Persamaan terakhir dapat ditulis ulang menjadi

$$k = \frac{13}{4} - \frac{1}{2}\left((2x+1)^2 + (x+y)^2 + 10\left(y - \frac{1}{2}\right)^2\right)$$

Karena tidak ada bilangan kuadrat yang negative maka $k \leq \frac{13}{4}$. Perhatikan bahwa

$$k = \frac{13}{4} \Leftrightarrow 2x + 1 = x + y = y - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ dan } y = \frac{1}{2}.$$

Dapat dicek bahwa $x = -\frac{1}{2}$ dan $y = \frac{1}{2}$ memenuhi $5x^2 + 4xy + 11y^2 = 3$. Jadi, nilai maksimum dari $xy - 2x + 5y$ adalah $\frac{13}{4}$.

14. Penyelesaian:

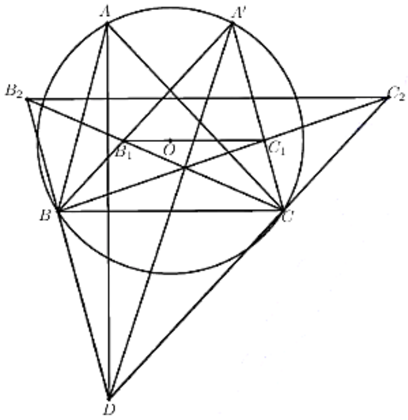
Karena BC adalah garis sumbu AD maka cukup dibuktikan bahwa pusat lingkaran luar ΔDB_2C_2 ada pada garis BC.

Misalkan A' adalah titik potong BB_1 dan CC_1. Dengan ini, $A'CDB$ adalah jajargenjang. Akibatnya $\angle BA'C = \angle BDC = \angle BAC$, sehingga A' ada pada lingkaran luar ABC.

Perhatikan bahwa $\Delta BB_2C \sim \Delta C_1CB_1$, $\Delta CC_2B \sim \Delta B_1BC_1$, dan $\Delta A'B_1C_1 \sim \Delta A'BC$. Dengan ini

$$\frac{BB_2}{CC_2} = \frac{BB_2}{BC} \times \frac{BC}{CC_2} = \frac{CC_1}{C_1B_1} \times \frac{B_1C_1}{BB_1} = \frac{CC_1}{BB_1} = \frac{A'C}{A'B} = \frac{DB}{DC}.$$

Akibatnya $\Delta DBC \sim \Delta DB_2C_2$.



Perhatikan juga bahwa,

$$\frac{DB_2}{BB_2}=\frac{DC}{BB_1}=\frac{A'B}{BB_1}=\frac{A'C}{CC_1}$$

Dengan ini, pasangan titk (B, C) pada ΔDB_2C_2 berkorespondesi dengan pasangan titik (C_1, B_1) pada $\Delta A'CB$. Karena titik pusat lingkaran luar $\Delta A'CB$, yaitu O, ada pada B_1C_1 maka titik pusat lingkaran luar ΔDB_2C_2 ada pada BC. Terbukti.

15. Penyelesaian:

Perhatikan bahwa jumlah bilangan adalah invariant dan prosedur ini akan berhenti jika selisih bilangan terbesar dan terkecil di papan adalah nol atau satu.

Kemungkinan pertama tidak mungkin terjadi karena jumlah bilangan mula-mula adalah 11×23 yang tidak habis dibagi 22.

Untuk kemungkinan kedua, misalkan bilangan yang tersisa adalah x dan $x+1$ dengan banyaknya masing-masing adalah k dan $22-k$, berturut-turut. Kita punya persamaan,

$$11 \times 23 = kx + (22-k)(x+1) \Longrightarrow 231 = 22x - k.$$

Dengan ini, $k = 11 \pmod{22}$. Karena $0 \le k \le 22$ maka $k = 11$ dan $x = 11$. Jadi, prosedur harus berakhir saat bilangan yang tersisi adalah

$$\underbrace{11,11,\dots,11}_{11\ kali},\underbrace{12,12,\dots,12}_{11\ kali}.$$

Sekarang perhatikan nilai

$$S(x_1, x_2, \dots, x_{22}) = \sum_{i=1}^{22}\left(x_i - \frac{23}{2}\right)^2$$

Dengan $x_1, x_2, \dots, x_{22}$ adalah bilangan di papan. Untuk setiap dua langkah berurutan yang mengganti pasangan (a, b) menjadi $(a+1, b-1)$ didapat nilai S yang berubah (turun) sebesar

$$\left(a-\frac{23}{2}\right)^2+\left(a-\frac{23}{2}\right)^2-\left(a-\frac{21}{2}\right)^2-\left(b-\frac{25}{2}\right)^2 = 2(b-a-1) \ge 2.$$

Karena $S(1,2,\dots,22) = \frac{1771}{2}$ dan $S(11,\dots,11,12,\dots,12) = \frac{11}{2}$ maka banyaknya langkah maksimum adalah

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1771}{2}-\frac{11}{2}\right)=440.$$

Untuk konfigurasi 440 langkah dapat dilakukan dengan cara berikut:
Perhatikan bilangan-bilangan

$$a, a+1, \ldots, b-1, b.$$

Dengan memilih pasangan-pasangan $(a, a+2), (a+1, a+3), (a+2, a+4), \ldots, (b-2, b)$, secara berturut-turut, kita telah melakukan $b-a-1$ langkah dan pada akhirnya kita hanya mengubah satu buah a menjadi $a+1$ dan satu buah b menjadi $b-1$. Dengan observasi tersebut, kita bisamembuat susunan langkah berikut:

- Dari 1, 2, 3, ..., 22, lakukan 20 langkah untuk mendapatkan 2, 2, 3, 4, 5, ..., 19, 20, 21, 22.
- Dari konfigurasi sebelumnya, lakukan 18 langkah untuk mendapatkan 2, 3, 3, 4, 5, ..., 19, 20, 20, 21.
- Lanjutkan 18 langkah lagi untuk mendapatkan 3, 3, 3, 4, 5, ..., 18, 19, 20, 20, 20. Sampai sini, kita melakukan dua kali 18 langkah untuk mengubah dua buah 2 di poin pertama menjadi dua buah 3 di poin ini.
- Lanjutkan dengan 3×16 langkah berikutnya untuk mengubah tiga buah 3 menjadi tiga buah 4.
- Dan seterusnya.

Dengan ini, banyaknya langkah adalah

$$20+2(18)+3(16)+4(14)+5(12)+6(10)+7(8)+8(6)+9(4)+10(2)=440.$$

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2022

TINGKAT NASIONAL

HARI PERTAMA & HARI KEDUA

WAKTU : 8 JAM

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Nasional Tahun 2022

1. Tentukan semua fungsi $f: R \to R$ sehingga untuk setiap $x, y \in R$ berlaku $f(f(f(x)) + f(y)) = f(y) - f(x)$.

2. Diketahui $P(x)$ suku banyak dengan koefisien bilangan bulat yang memenuhi $P(1) = 10$ dan $P(-1) = 22$.
   a. Berikan contoh $P(x)$ sehingga $P(x) = 0$ memiliki suatu akar bilangan bulat.
   b. Jika $P(0) = 4$, tunjukkan bahwa $P(x) = 0$ tidak memiliki akar bilangan bulat.

3. Diberikan persegi panjang $ABCD$. Titik E, F terletak pada diagonal AC sehingga F terletak diantara A, E dan E terletak di antara C, F. Lingkaran luar segitiga BEF memotong AB dan BC pada G, H dan lingkaran luar segitiga DEF memotong AD dan CD pada I, J. Buktikan bahwa garis GJ, IH, dan AC berpotongan di satu titik.

4. Diberikan segi-26 beraturan. Tunjukkan bahwa untuk sembarang 9 titik sudut dari segi-26 tersebut, pasti ada tiga titik yang membentuk segitiga sama kaki.

5. Diberikan bilangan asli $N \geq 2$ dan bilangan bulat $a_1, a_2, \dots, a_{N+1}$ sehingga untuk setiap indeks $1 \leq i \leq j \leq N + 1$ berlaku $a_i a_{i+1} \dots a_j \not\equiv 1 (\mathrm{mod}\ N)$. Buktikan bahwa terdapat indeks i sehingga $\mathrm{FPB}(a_i, N) \neq 1$.

6. Pada segitiga ABC, titik D dan E berada pada sisi AB dan AC berturut-turut sehingga DE sejajar BC. Diketahui terdapat titik P pada interior segiempat $BDEC$ sehingga $\angle BPD = \angle CPE = 90^\circ$. Buktikan bahwa garis AP melalui titik pusat lingkaran luar dari segitiga-segitiga EPD dan BPC.

7. Misalkan A adalah suatu barisan bilangan nol dan satu. Barisan tersebut dapat diubah dengan melakukan operasi berikut: kita boleh memilih suatu blok atau sub-barisan bersambung (contiguous subsequence) di mana terdapat nol dan satu yang tidak sama banyaknya, dan membalik urutan bilangan di dalam blok tersebut (blok $a_1, a_2, \dots, a_r$ menjadi $a_r, a_{r-1}, \dots, a_1$).
   Sebagai contoh, misalkan A adalah barisan 1, 1, 0, 0, 1. Kita boleh memilih blok 1, 0, 0 dan membaliknya, sehingga barisan 1, 1, 0, 0 , 1 berubah menjadi 1, 0, 0, 1 , 1. Namun, kita tidak boleh memilih blok 1, 1, 0, 0 dan membalik urutannya karena mengandung 1 dan 0 yang sama banyaknya. Dua barisan A dan B dikatakan berkerabat jika A dapat diubah menjadi B melalui sejumlah hingga operasi-operasi di atas.
   Tentukan bilangan asli n terbesar sehingga terdapat n barisan berbeda $A_1, A_2, \dots, A_n$ di mana setiap barisan terdiri dari 2022 bilangan dan untuk setiap indeks $i \neq j$, barisan A_i tidak berkerabat A_j.

8. Tentukan bilangan real positif K terkecil sehingga ketaksamaan

$$K + \frac{a+b+c}{3} \geq (K+1)\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

   Berlaku untuk setiap bilangan real $0 \leq a, b, c \leq 1$.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2022

TINGKAT NASIONAL

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Nasional Tahun 2022

1. Penyelesaian :
   Misalkan P(x, y) menyatakan pernyataan persamaan fungsional ini. P(x, x) menunjukkan keberadaan r nyata yang mana f(r) = 0. P(r, r) memberikan kita
   $$f(f(f(r))+f(r))=0$$
   atau f(f(0)) = 0. Sekarang, P(0, y) menghasilkan f(f(y)) = f(y) – f(0). Akhirnya, kita dapat menulis ulang persamaan fungsional tersebut menjadi:
   $$f(f(x)+f(y)-f(0))=f(y)-f(x)$$
   Sebut saja Q(x, y). Membandingkan Q(x, y) dan Q(y, x) menghasilkan f(x) – f(y) = f(y) – f(x) atau (f) konstan. Pemeriksaan menunjukkan bahwa hanya f ≡ 0 yang berfungsi, sehingga kita menyimpulkan bahwa itu adalah satu-satunya solusi yang mungkin.

2. Penyelesaian :
   (a) Kita dapat mengambil P(x) = x(16x – 6) yang memiliki akar di 0 (ini tentu saja dimotivasi oleh bagian (b)).
   (b) Dengan menggunakan x – y | P(x) – P(y), kita akan mendapatkan x | 4 dan x – 1 | 10 dan x + 1 | 22. Karena x $\neq \pm$1, kita mendapatkan bahwa x pasti genap dan karenanya x – 1 | 5 dan x + 1 | 11. Namun, mudah untuk melihat bahwa hal ini tidak mungkin kecuali x = 0 yang tentu saja tidak bekerja berdasarkan asumsi.

3. Penyelesaian :
   Dengan menggunakan titik phantom, misalkan AC berpotongan dengan HI dan GJ masing-masing di K dan L. Kita akan membuktikan bahwa K = L
   Dengan POP, kita mendapatkan
   $$CJ\times CD=CF\times CE=CH\times CB$$
   $$AI\times AD=AE\times AF=AG\times AB$$
   Perhatikan bahwa $\triangle AKI\sim\triangle CKH$; $\triangle ALG\sim\triangle CLJ$
   Maka,
   $$\frac{AK}{CK}=\frac{AI}{CH}\ ;\ \frac{AL}{CL}=\frac{AG}{CJ}$$
   Dari sana kita dapat menyimpulkan bahwa
   $$\frac{AK}{CK}=\frac{AL}{CL}$$
   Karena K dan L keduanya berada pada AC, maka K = L.

4. Penyelesaian :
   Kita akan membahas masalah utama ini mengandalkan simetri untuk mengurangi bash semaksimal mungkin. Namun, pertama-tama, mari kita terjemahkan ini ke dalam formulasi ekuivalen berikut:

Buktikan bahwa untuk setiap 9 angka di $\mathbb{Z}/26\mathbb{Z}$, ada tiga angka yang membentuk barisan aritmatika.
Di antara 9 angka ini; berdasarkan Prinsip PigeonHole, 5 di antaranya akan memiliki residu yang sama modulo 2. Oleh karena itu, cukup dibuktikan bahwa untuk setiap 5 angka dalam $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$, terdapat tiga angka yang membentuk barisan aritmetika. Dengan menggabungkan hal ini dengan fakta bahwa ketiganya memiliki residu yang sama modulo 2, kita selesai.
Misalkan sebaliknya, terdapat himpunan S berisi 5 bilangan dalam $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ sehingga tiga bilangan apa pun tidak membentuk barisan aritmetika. Dengan menggeser $x \mapsto ax + b$ jika perlu, kita dapat melakukan WLOG bahwa {6, 7} terletak pada himpunan lima bilangan kita, S.

- Karena 6, 0, 7 merupakan deret aritmatika, kita simpulkan bahwa 0 $\notin S$.
- Karena 5, 6, 7 merupakan deret aritmatika, kita simpulkan bahwa 5 $\notin S$.
- Karena 6, 7, 8 merupakan deret aritmatika, kita simpulkan bahwa 8 $\notin S$.

Kasus 1. 4 $\notin S$.
Kami kemudian memiliki:

- Karena 2, 4, 6 merupakan deret aritmatika, kita simpulkan bahwa 6 $\notin S$.
- Karena 4, 7, 10 merupakan deret aritmatika, kita simpulkan bahwa 10 $\notin S$.
- Karena 1, 4, 7 merupakan deret aritmatika, kita simpulkan bahwa 1 $\notin S$.
- Karena 7, 12, 4 merupakan deret aritmatika, kita simpulkan bahwa 12 $\notin S$.

yang menyisakan 3, 9 dan 11 sebagai pilihan yang mungkin dari dua elemen tersisa di S. Namun,

- Jika 9, 11 $\in S$, maka 7, 9, 11 merupakan deret aritmatika.
- Jika 9, 3 $\in S$, maka 3, 6, 9 merupakan deret aritmatika.
- Jika 3, 11 $\in S$, maka 3, 7, 11 merupakan deret aritmatika.

Kasus 2. $\notin S$.
Berdasarkan simetri, 9 $\notin S$ juga. Maka, satu-satunya elemen yang mungkin untuk S adalah dari 1, 2, 3, 10, 11, 12.
Jika 3 $\in S$, karena 3, 7, 11 dan 7, 3, 12 merupakan deret aritmatika, maka 11, 12 $\notin S$. Dengan demikian, elemen yang tersisa berasal dari 1, 2 dan 10.

- Jika 1, 2 $\in S$, maka 1, 2, 3 merupakan barisan aritmatika.
- Jika 1, 10 $\in S$, maka 1, 10, 6 merupakan barisan aritmatika.
- Jika 2, 10 $\in S$, maka 2, 6, 10 merupakan barisan aritmatika.

Jadi, 3 $\notin S$ dan berdasarkan simetri 10 $\notin S$.
Sekarang, hanya tiga elemen yang mungkin untuk S yang berasal dari 1, 2, 11, 12. Pasangkan mereka sebagai {1, 11} dan {2, 12}. Berdasarkan Prinsip Pigeon Hole, salah satu dari dua pasangan ini akan terpilih. Namun, kedua kemungkinan ini gagal karena 1, 6, 11 dan 2, 7, 12 merupakan deret aritmatika.

5. Penyelesaian :
Kita akan membuktikan hal ini untuk sembarang angka N, alih-alih N + 1 angka (dan batasan ini dapat ditingkatkan lebih lanjut).
Misalkan sebaliknya, bahwa FPB(a_i, N) = 1 untuk semua indeks i.
Perhatikan N angka berikut.

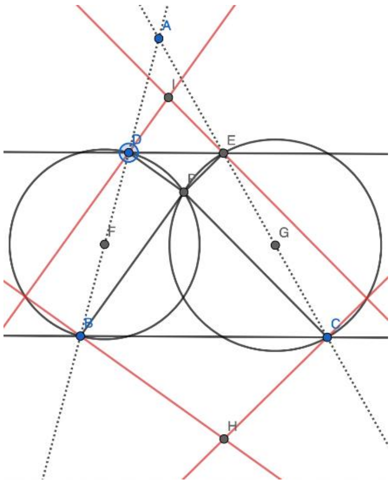
$$a_1, a_1a_2, a_1a_2a_3, \ldots, a_1a_2a_3\cdots a_N$$

Dengan asumsi, tidak ada nilai di atas yang sama dengan 1 modulo N -- dan dengan demikian semuanya hanya mencakup paling banyak N – 1 residu modulo N. Berdasarkan Prinsip PigeonHole, terdapat i < j sehingga

$$a_1 \cdots a_i \equiv a_1 \cdots a_j \pmod N$$

Karena FPB(a_1 a_2 … a_i, N) = 1, kita simpulkan bahwa a_{i+1} … $a_j \equiv 1$ (mod N), yang merupakan kontradiksi, seperti yang diinginkan.

6. Penyelesaian :
   Semoga diagram di bawah ini menjelaskan semuanya. Di sini, garis merah tegak lurus terhadap DP di D, EP di E, BP di P, dan CP di C, masing-masing.
   Cukuplah untuk membuktikan bahwa terdapat homotetis yang berpusat di A yang mengirimkan segiempat IDPE ke PBHC. Memang, jika ini berlaku, maka A, I, P, dan H kolinear; tetapi pusat lingkaran EPD dan BPC masing-masing merupakan titik tengah IP dan PH. Jadi, ini menyiratkan pernyataan yang diinginkan.
   Tentu saja, perhatikan homotetis ϕ yang berpusat di A yang mengirimkan D ke B. Karena DE sejajar dengan BC, maka ϕ(E) = C. Selanjutnya, amati bahwa ID dan BP keduanya tegak lurus terhadap DP, sehingga keduanya pasti sejajar. Demikian pula, IE sejajar dengan PC. Dengan demikian, segitiga IDE dan PBC sebangun, dengan orientasi yang sama; hal ini memaksa ϕ(I) = P. Terakhir, terapkan argumen yang sama untuk mendapatkan bahwa segitiga PDE dan HBC sebangun dengan orientasi yang sama (dan dengan demikian ϕ(P) = H). Selesai.



7. **Penyelesaian :**
   Didefinisikan A_x = 1010 … A_y = 0101 …
   Klaim. A_x dan A_y tidak terkait dengan A_i lainnya.
   Bukti. Perhatikan bahwa setiap blok A_x dan A_y yang memiliki jumlah nol dan satu yang tidak sama akan selalu menjadi palindrom. Jadi, jika kita membalik blok tersebut, kita akan selalu mendapatkan keluaran A_x atau A_y yang sama, sehingga A_x dan A_y tidak terkait dengan A_i lainnya.

Klaim. Misalkan $S_{i,j}$ adalah himpunan semua A dengan i bilangan nol dan j bilangan satu. $\forall A_k, A_l \in S_{i,j}$, A_k, dan A_l saling terkait.

Bukti. (perlu bukti yang lebih kuat) Perhatikan bahwa hal ini berlaku untuk $S_{0,1}$, $S_{1,0}$.

Demi induksi, dikatakan bahwa hal ini berlaku untuk $S_{i,j-1}$ dan $S_{i-1,j}$. Perhatikan bahwa setiap elemen $S_{i,j}$ dapat dibentuk dengan menambahkan 1 ke depan atau belakang setiap anggota $S_{i,j-1}$ atau dengan menambahkan 0 ke depan atau belakang setiap anggota $S_{i-1,j}$. Jadi untuk membuktikan bahwa setiap anggota $S_{i,j}$ berhubungan satu sama lain, kita perlu membuktikan bahwa ada anggota $S_{i,j-1}$ dan $S_{i-1,j}$ yang berhubungan atau sama setelah penjumlahan.

Misalkan $A_n = 00 \cdot 0011 \cdot 11$ dan $A_m = 00 \cdot 0011 \cdot 11$ sehingga $A_n \in S_{i,j-1}$; $A_m \in S_{i-1,j}$. Jelas, setelah penjumlahan (sebut saja A'_n dan A'_m), $A'_n = A'_m$ sehingga keduanya saling terkait. Jadi, dengan induksi, untuk semua i, j, setiap anggota $S_{i,j}$ saling terkait.

Penyelesaian. Misalkan $A_{i,j}$ adalah salah satu anggota $S_{i,j}$. Untuk k > 2 kita memiliki

$$A_{0,k}, A_{1,k-1}, \cdots, A_{k,0}, A_x, A_y$$

tidak saling terkait.

Jadi, bilangan asli terbesar n yang memiliki n deret berbeda $A_1, A_2, \ldots, A_n$ yang setiap deretnya terdiri dari 2022 digit, dan untuk setiap indeks $i \neq j$, deret A_i tidak terkait dengan A_j adalah 2025.

8. Penyelesaian :

Kami menyatakan bahwa $K = \frac{1}{3}\sqrt{6}$ berfungsi. Perhatikan bahwa untuk (a,b,c) = (1,1,0), kita memiliki

$$K + \frac{2}{3} \geq (K+1)\sqrt{\frac{2}{3}} \implies K \geq \frac{1}{3}\sqrt{6}$$

Cukup untuk membuktikan bahwa pilihan K ini berhasil.

Klaim. Untuk setiap $0 \leq a,b,c \leq 1$, kita memiliki

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2} \leq \frac{a+b+c+\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

Kesetaraan berlaku jika dan hanya jika (a,b,c) ∈ {(1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (1,1,1)}.

Bukti. Perbaiki a + b + c = k. WLOG $a \geq b \geq c$. Perhatikan fungsi objektif $f(a,b,c) = a^2 + b^2 + c^2$. Perhatikan bahwa

$$f(a+\varepsilon, b-\varepsilon, c) = (a+\varepsilon)^2 + (b-\varepsilon)^2 + c^2 \geq a^2+b^2+c^2 = f(a,b,c)$$

dan

$$f(a, b+\varepsilon, c-\varepsilon) = a^2 + (b+\varepsilon)^2 + (c-\varepsilon)^2 \geq a^2+b^2+c^2 = f(a,b,c)$$

Sekarang, pertimbangkan tiga kasus:

- Jika $0 \leq k \leq 1$, maka dengan argumen di atas, maksimum fungsi objektif tercapai ketika f(k,0,0), dan kita dapat dengan mudah memeriksa bahwa

$$f(k,0,0) = k \leq \frac{k+\sqrt{6}}{1+\sqrt{6}} < \frac{k+\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$$

  untuk semua k ∈ [0,1].

- Jika $1 \leq k \leq 2$, maka dengan argumen di atas, nilai maksimum fungsi objektif tercapai ketika f(1, k – 1, 0). Dengan demikian, cukup dibuktikan bahwa
$$f(1, k-1, 0) = \sqrt{1 + (k-1)^2} \leq \frac{k + \sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$$
Namun hal ini memang benar karena
$$\sqrt{1 + (k-1)^2} \overset{k-1 \geq 1}{\leq} (k-1)\sqrt{2} \leq \frac{k + \sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$$
dan kesetaraan berlaku jika dan hanya jika k = 2.
- Jika $2 \leq k \leq 3$, maka dengan argumen di atas, nilai maksimum fungsi objektif tercapai ketika f(1, 1, k – 2). Oleh karena itu, cukup dibuktikan bahwa
$$\sqrt{2 + (k-2)^2} \leq \frac{k + \sqrt{6}}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}$$
yang ekuivalen dengan $-2(2 + \sqrt{6})(k - 2)(k - 3) \leq 0$, yang jelas benar. Kesetaraan berlaku ketika k = 2, 3.

Dari klaim kami, kami memiliki
$$\left(\frac{1}{3}\sqrt{6} + 1\right)\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{3}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$
$$\overset{\text{Claim}}{\leq} \frac{a + b + c + \sqrt{6}}{3} = \frac{a + b + c}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{6}$$
dan dengan demikian $K = \frac{1}{3}\sqrt{6}$ berfungsi sebagaimana mestinya.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2023

TINGKAT KABUPATEN/KOTA

BIDANG MATEMATIKA

WAKTU : 180 MENIT

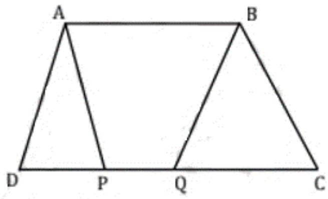
WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Kabupaten/Kota Tahun 2023

1. Hasil penjumlahan semua solusi persamaan $|x - |2x + 3|| = 99$ adalah …

2. Didalam suatu laci terdapat tujuh pasang kaos kaki yang setiap pasangannya berbeda dengan pasangan lainnya. Diambil lima kaos kaki sekaligus secara acak. Banyaknya cara pengambilan sehingga di antara yang terambil tedapat tepat sepasang kaos kaki yang cocok (berpasangan) adalah …

3. Diberikan trapesium $ABCD$ dengan $AB = 14$, $CD = 19$. AB sejajar CD, dan kedua sudut $\angle ADC$ dan $\angle BCD$ lancip. Misalkan P dan Q titik yang terletak pada sisi CD sehingga $AD = AP$ dan $BC = BQ$. Panjang PQ = …



4. Suatu bilangan 4 digit $\overline{7ab9}$ merupakan suatu bilangan kuadrat. Nilai $a + b$ adalah …

5. Diberikan fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx = c$ yang memenuhi $f(5) = 25$ dan $f(6) = 36$. Jika $a \neq 1$, maka nilai dari $\frac{c-b}{a-1}$ adalah …

6. Dua tim A dan B bertanding sepak bola sebanyak 15 kali. Pada setiap pertandingan, tim yang berhasil mencetak 4 gol pertama menjadi pemenang dan tidak ada pertandingan yang berakhir seri. Selama 15 pertandingan tersebut, tim A memenangkan pertandingan lebih banyak dibandingkan tim B, namun banyak gol yang dicetak tim B lebih banyak lebih banyak dibandingkan tim A. Selisih total gol terbesar yang mungkin di cetak kedua tim tersebut adalah …

7. Diberikan segitiga lancip ABC dengan $AB = 12$ dan $AC = 10$ dan D suatu titik pada sisi BC. Misalkan E dan F menyatakan titik-titik berat segitiga ABD dan ACD, Jika luas segitiga DEF adalah 4, maka panjang sisi BC adalah $\sqrt{n}$ dengan n = …

8. Sisa pembagian bilangan $5^{2022} + 11^{2022}$ oleh 64 adalah …

9. Diberikan suku banyak $P(x)$ dengan koefisien bulat jika
$$P(r_1) = P(r_2) = 200$$
dengan r_1, r_2 merupakan akar-akar persamaan $x^2 + x - 23 = 0$, maka sisa pembagian $P(1)$ oleh 21 adalah …

10. Banyaknya bilangan 4 digit yang habis dibagi 3 dan memuat angka 6 adalah …

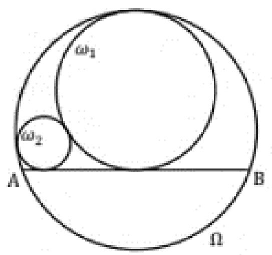
11. Misalkan $ABCD$ segiempat tali busur dengan lingkaran luar ω dan $BC = CD$. Diagonal AC dan BD berpotongan dititik E dan diketahui bahwa $BE = 7$ dan $DE = 5$. Jika garis singgung ω dititik A memotong perpanjangan diagonal BD dititik P, maka $\frac{PD}{PB}$ dapat dituliskan dalam bentuk mn dengan m, n bialngan asli yang relatif prima. Nilai dari $m + n$ adalah ...

12. Jika bilangan asli x dan y memenuhi persamaan $x(x - y) = 5y - 6$maka $x + y =$ ...

13. Misalkan a_1, a_2, a_3, ... suatu barisan bilangan yang memenuhi persamaan $a_{n+2} - a_{n+1} + a_n = \frac{n+1}{6}$ untuk setiap bilangan asli n. Jika $a_1 = 1$ dan $a_2 = 2$, maka $a_{2023} =$ ...

14. Diberikan himpunan $S = \{a, b, c, d, e, f\}$. Akan dipilih dua sub himpunan dari S yang gabungannya adalah S. Sub himpunan yang dipilih tidak harus berbeda, misalnya keduanya boleh sama dengan S. Urutan dari sub himpunan yang dipilih tidak diperhatikan, sebagai contoh pasangan sub himpunan ($\{a, b, c\}$, $\{c, d, e, f\}$) sama dengan pasangan ($\{c, d, e, f\}\{a, b, c\}$). Banyaknya cara melakukan pemilihan adalah ...

15. Diberikan lingkaran Ω dan AB suatu tali busur dari Ω. Lingkaran ω_1 menyinggung Ω secara internal dan menyinggung AB pada titik tengahnya. Lingkaran ω_2 menyinggung Ω secara internal, menyinggung ω_1, secara eksternal dan juga menyinggung AB.



Jika jari-jari ω_1 adalah 35 dan jari-jari ω_2 adalah 7, maka panjang AB adalah ...

16. Misalkan $n = 2^a 3^b$ dengan a dan b bilangan asli. Jika hasil kali semua faktor positif dari n adalah 1290, maka nilai $ab =$ ...

17. Nilai minimum dari

$$\frac{(x+y)^2}{\sqrt{x^2-16}+\sqrt{y^2-25}}$$

adalah ...

18. Diberikan 100 titik seperti gambar dibawah ini. Banyaknya persegi yang semua titik sudutnya adalah empat titik di antara titik-titik pada gambar adalah ...

19. Diberikan segitiga ABC. Misalkan D, E, F masing-masing adalah titik pada sisi BC, CA, AB sehingga AD, BE, CF berpotongan di satu titiik. Diketahui bahwa $\angle EDF = 54^{\circ}$. Jika $\angle ADB = 90^{\circ}$ dan $AF = FB$, maka besar sudut $\angle ABC$ = …

20. Misalkan p dan n dua bilangan asli dengan p bilangan prima sedemikian sehingga p membagi $n^2 + 4$ dan n membagi $p^2 + 4$. Jika $p < 200$, maka nilai terbesar yang mungkin dari n adalah …

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2023

TINGKAT KABUPATEN/KOTA

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Kabupaten/Kota Tahun 2023

1. Penyelesaian:
Perhatikan, ingat lagi definisi nilai mutlak berikut,
$|x| = \begin{cases} x, \text{untuk } x \geq 0 \\ -x, \text{untuk } x < 0 \end{cases}$
Maka, dengan memandang bentuk nilai mutlak berikut,
$|2x+3| = \begin{cases} 2x+3, \text{untuk } 2x+3 \geq 0 \\ -2x-3, \text{untuk } 2x+3 < 0 \end{cases}$
Diperoleh dua kasus yaitu:
   1. Untuk $2x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{3}{2}$
   $\big|x - |2x+3|\big| = 99 \Rightarrow |x - (2x+3)| = 99$
   $\Leftrightarrow \quad |-x-3| = 99$
   Maka, dengan memandang bentuk nilai mutlak berikut,
   $|-x-3| = \begin{cases} -x-3, \text{untuk } -x-3 \geq 0 \\ x+3, \text{untuk } -x-3 < 0 \end{cases}$
   Sehingga, diperoleh dua kasus lagi, yaitu:
      a. Untuk $-x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \leq -3$
      Diperoleh $x \leq -3$ akan kontradiksi dengan syarat di kasus (1) bahwa $x \geq -\frac{3}{2}$.
      Sehingga tidak ada penyelesaian di kasus (1.a) ini.
      b. Untuk $-x - 3 < 0 \Rightarrow x > -3$
      Karena syarat di kasus (1) adalah $x \geq -\frac{3}{2}$ maka diperoleh irisan dari syarat untuk kasus (1.b) adalah irisan dari $x \geq -\frac{3}{2}$ dan $x > -3$, yaitu $x \geq -\frac{3}{2}$.
      Sehingga,
      $|-x-3| = 99 \Rightarrow x + 3 = 99$
      $\Leftrightarrow x = 96$
   2. Untuk $2x + 3 < 0 \Rightarrow x < -\frac{3}{2}$
   $\big|x - |2x+3|\big| = 99 \Rightarrow |x - (-2x-3)| = 99$
   $\Leftrightarrow \quad |3x+3| = 99$
   Maka, dengan memandang bentuk nilai mutlak berikut,
   $|3x+3| = \begin{cases} 3x+3, \text{untuk } 3x+3 \geq 0 \\ -3x-3, \text{untuk } 3x+3 < 0 \end{cases}$
   Sehingga, diperoleh dua kasus lagi, yaitu:
      a. Untuk $3x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$
      Diperoleh $x \geq 1$ akan kontradiksi dengan syarat di kasus (2) bahwa $x < -\frac{3}{2}$
      Sehingga tidak ada penyelesaian di kasus (2.a) ini.
      b. Untuk $3x + 3 < 0 \Rightarrow x < -1$

Karena syarat di kasus (1) adalah $x < -\frac{3}{2}$ maka diperoleh irisan dari syarat untuk kasus (2.b) adalah irisan dari $x < -\frac{3}{2}$ dan $x < -1$ yaitu $x < -\frac{3}{2}$

Sehingga,

$|3x + 3| = 99 \qquad \Rightarrow -3x - 3 = 99$

$\Leftrightarrow -3x = 102$

$\Leftrightarrow x = \frac{102}{-3}$

$\Leftrightarrow x = -34$

Jadi, jumlah semua x yang memenuhi adalah 96 + (-34) = 62.

2. Penyelesaian:

Perhatikan, terdapat tujuh pasang kaos kaki, artinya ada keseluruhan 14 kaos kaki.

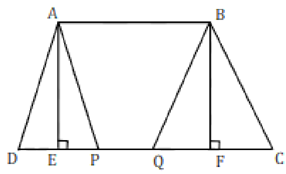
Apabila diambil lima kaos kaki sekaligus secara acak dan agar terambil tepat sepasang kaos kaki yang berpasangan, kanan-kiri dari lima pengambilan tersebut haruslah terambil satu pasang kaos kaki dari tujuh pasang kaos kaki. Banyak cara pengambilan ini adalah ${}_7C_1 = 7$ cara.

Karena akan diambil lima kaos kaki, dan dua kaos kaki merupakan kaos kaki yang sepasang, maka tiga kaos kaki yang lain masing-masing adalah kaos kaki yang tidak sepasang, dimana banyak cara pengambilan ini adalah ${}_6C_3 = 20$ cara. Sedangkan banyak jenis kaos kaki kanan atau kiri yang teambil banyak caranya adalah 2^3.

Jadi, banyak keseluruhan cara pengambilan adalah ${}_7C_1 \times {}_6C_3 \times 2^3 = 7 \times 20 \times 8 = 1120$ cara.

3. Penyelesaian:

Perhatikan, misakan E dan F titik yang terletak pada sisi CD, sehingga $AE \perp CD$ dan $BF \perp CD$, maka E dan F merupakan garis tinggi dari segitiga ADP dan BQC.



Perhatikan juga karena $AB = EF = 14$, dan mengingat $DC = DE + EF + FC = 19$, maka

$DC = DE + EF + FC \Rightarrow 19 = DE + 14 + FC$

$\Leftrightarrow 5 = DE + FC$

Karena $AD = AP$, maka segitiga ADP adalah segitiga samakaki, sehingga $DE = EP$.

Begitu juga karena $BC = BQ$, maka segitiga BQC adalah segitiga samakaki, sehingga $QF = FC$.

Sehingga, karena $DE + FC = 5$, maka $EP + QF = 5$.

Perhatikan lagi $EF = EP + PQ + QF$, sehingga

$EF = EP + PQ + QF \Rightarrow 14 = PQ + 5$

$\Leftrightarrow PQ = 9$

4. Penyelesaian:

Perhatikan, karena $\overline{7ab9} < 100^2$ maka jelas bahwa $\overline{7ab9}$ adalah bilangan kuadrat dari bilangan dua digit. Dan dengan memperhatikan bilangan satuan $\overline{7ab9}$ adalah 9, maka bilangan dua digit tersebut pasti berakhiran 3 atau 7.

Mudah diperiksa bahwa $80^2 < \overline{7ab9} < 90^2$ sehingga ada 2 kemungkinan apakah $\overline{7ab9} = 83^2$ ataukah $\overline{7ab9} = 87^2$.

Perhatikan bahwa $83^2 = 6889$ dan $87^2 = 7569$. Sehingga jelas bahwa $\overline{7ab9} = 7569$, sehingga $a = 5$ dan $b = 6$. Jadi, $a + b = 5 + 6 = 11$.

5. Penyelesaian:

Perhatikan,

$$\begin{aligned} f(5) = 25 &\Rightarrow a(5)^2 + b(5) + c = 25 \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ &\Leftrightarrow \quad 25a + 5b + c = 25 \\ f(6) = 36 &\Rightarrow a(6)^2 + b(6) + c = 36 \\ &\Leftrightarrow \quad 36a + 6b + c = 36 \ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{aligned}$$

Sehingga, eliminasi c dari persamaan (2) dan persamaan (1) diperoleh:

$$\begin{array}{r} 36a + 6b + c = 36 \\ 25a + 5b + c = 25 \quad - \\ \hline 11a + b = 11 \Rightarrow b = 11(1 - a) \end{array}$$

Substitusikan $b = 11(1 - a)$ ke persamaan (1) diperoleh:

$$\begin{aligned} 25a + 5\big(11(1 - a)\big) + c = 25 \quad &\Rightarrow 25a + 55 - 55a + c = 25 \\ &\Leftrightarrow c = 30a - 30 \\ &\Leftrightarrow c = 30(a - 1) \end{aligned}$$

Sehingga karena $b = 11(1 - a)$ dan $c = 30(a - 1)$, maka

$$\frac{c - b}{a - 1} = \frac{30(a - 1) - 11(1 - a)}{(a - 1)} = \frac{30(a - 1) + 11(a - 1)}{(a - 1)} = \frac{41(a - 1)}{(a - 1)} = \boxed{41}$$

6. Penyelesaian:

Misal A dan B adalah total gol yang dicetak tim A dan tim B.

Misal A_m, B_m, A_k, dan B_k adalah total banyak gol yang dicetak saat tim A dan B menang atau kalah.

Perhatikan tim yang berhasil mencetak 4 gol pertama menjadi pemenang, misal a_i, b_i menyatakan banyak gol yang dicetak pada kemenangan ke-i oleh tim A dan tim B, sehingga diperoleh $a_i, b_i = 4$.

Misal n menyatakan banyak kemenangan tim A, sehingga diperoleh

$$A_m = \sum_{i=1}^{n} a_i = 4n \text{ dan } B_m = \sum_{i=1}^{15-n} b_i = 4(15 - n) = 60 - 4n$$

Dan misal a_j, b_j menyatakan banyak gol yang dicetak saat kekalahan ke-j diderita tim A dan tim B, maka $0 \le a_j, b_j \le 3$, sehingga diperoleh

$$0 \le \sum_{j=1}^{n} a_j \le 3n \text{ dan } 0 \le \sum_{j=1}^{n} b_j \le 3n$$

Karena total gol tim B lebih banyak daripada tim A, maka selisih gol terbesar terjadi saat mengalami kekalahan, gol tim A harus minimum dan gol tim B harus maksimum. Sehingga diperoleh

$$A_k = \min\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right) = 0 \text{ dan } B_k = \max\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) = 3n$$

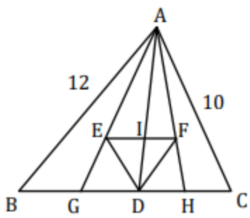
Total gol yang dicetak oleh tim A adalah $A = A_m + A_k = 4n + 0 = 4n$.
Dan total gol yang dicetak oleh tim B adalah $B = B_m + B_k = (60 - 4n) + 3n = 60 - n$.
Jadi misal δ menyatakan selisih gol tim B dan tim A, diperoleh

$$\delta = B - A = (60 - n) - 4n = 60 - 5n \Rightarrow n = \frac{60 - \delta}{5}$$

Karena tim A memenangkan pertandingan lebih banyak dibandingkan tim B, artinya dalam 15 kali pertandingan, tim A paling sedikit menang 8 kali, sehingga nilai n memenuhi $n \geq 8$.
Mudah diperiksa bahwa

$$n = \frac{60 - \delta}{5} \geq 8 \Rightarrow \delta_{maks} = 20$$

7. Penyelesaian:
Perhatikan,



Misal $[ABG] = [AGD] = a$ dan $[ADH] = [AHC] = b$
Dari teorema garis berat diperoleh

$$\frac{DI}{DA} = \frac{1}{3} \text{ dan } \frac{EF}{GH} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{[DEF]}{[AGH]} = \frac{2}{9}$$

Sehingga,

$$[DEF] = \frac{2(a+b)}{9} = 4$$

Artinya $a + b = 18$.
Sehingga $[ABC] = 2(a + b) = 36$.

Maka dengan trigonometri diperoleh

$$[ABC] = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin\angle BAC$$
$$36 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10 \cdot \sin\angle BAC$$
$$\frac{3}{5} = \sin\angle BAC$$

Karena $\angle ABC$ lancip maka $\cos\angle ABC = \frac{4}{5}$, sehingga Panjang BC adalah

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos \angle ABC$$
$$\left(\sqrt{n}\right)^2 = 12^2 + 10^2 - 2 \cdot 12 \cdot 10 \cdot \frac{4}{5}$$
$$n = 144 + 100 - 192$$
$$n = 52$$

8. Penyelesaian:
Ingat kembali tentang Teorema Euler dan Fungsi Phi Euler yaitu:
Untuk m bilangan bulat positif dan a adalah bilangan bulat dimana FPB$(a, m) = 1$, maka berlaku $a^{\varphi(m)} = 1$ (mod m), dimana jika $m = p_1^{q_1} \cdot p_2^{q_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{q_k}$ faktorisasi prima dari m, maka $\varphi(m) = m\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$
Perhatikan, karena FPB(5,64) = FPB(11,64) = 1 dan $\varphi(64) = 2^6\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 32$, sehingga jelas bahwa $5^{32} \equiv 1$ (mod 64) dan $11^{32} \equiv 1$ (mod 64).
Perhatikan juga bahwa 2022 = 63 × 32 + 6, maka
$$\begin{aligned} 5^{2022} + 11^{2022} &\equiv 5^6 + 11^6 \pmod{64} \\ &\equiv (5^3)^2 + (11^2)^3 \pmod{64} \\ &\equiv (-3)^2 + (97)^3 \pmod{64} \\ &\equiv 9 + (-343) \pmod{64} \\ &\equiv 9 + 41 \pmod{64} \\ &\equiv 50 \pmod{64} \end{aligned}$$

9. Penyelesaian:
Perhatikan, kita dapat menuliskan $P(x)$ sebagai
$$P(x) = (x^2 + x - 23) \cdot H(x) + (ax + b)$$
Karena r_1, r_2 merupakan akar-akar persamaan $x^2 + x - 23 = 0$, sehingga diperoleh
$$P(r_1) = ar_1 + b$$
$$P(r_2) = ar_2 + b$$
Mengingat diskriminan $x^2 + x - 23 = 0$ adalah $D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-23) = 93 \neq 0$, jelas bahwa nilai $r_1 \neq r_2$.
Padahal,
$$\begin{aligned} P(r_1) = P(r_2) \quad &\Rightarrow ar_1 + b = ar_2 + b \\ &\Leftrightarrow ar_1 - ar_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow a(r_1 - r_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow a = 0 \end{aligned}$$
Jadi, $P(r_1) = 200 \Rightarrow ar_1 + b = 200 \Rightarrow b = 200$
Maka, $P(x) - (x^2 + x - 23) \cdot H(x) + 200$
Untuk $x = 1$ diperoleh
$$\begin{aligned} P(1) \quad &= (1^2 + 1 - 23) \cdot H(1) + 200 \\ &= (-21)H(1) + 21 \cdot 9 + 11 \\ &= 21\big(9 - H(1)\big) + 11 \end{aligned}$$

Jadi, jelas bahwa sisa pembagian $P(1)$ oleh 21 adalah 11.

10. Penyelesaian:

Perhatikan, bilangan $\overline{abcd}$ adalah bilangan 4-digit yang habis dibagi 3 dan memuat angka 6.

Pertama kita cari dulu bilangan 4-digit yang habis dibagi 3, yaitu bilangan mulai 1002 sampai 9999. Banyak bilangan seperti ini adalah

$$\begin{aligned} U_n = a + (n-1)b \quad & \Rightarrow 9999 = 1002 + (n-1)\cdot 3 \\ & \Leftrightarrow 8997 = (n-1)\cdot 3 \\ & \Leftrightarrow 2999 = n - 1 \\ & \Leftrightarrow 3000 = n \end{aligned}$$

Lalu, kita cari bilangan 4-digit yang habis dibagi, dan tidak memuat bilangan 6.

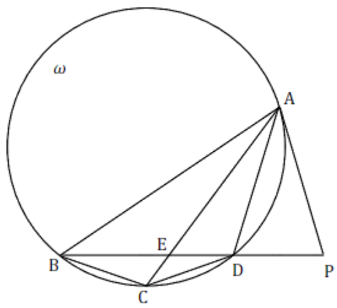
- Digit ribuan dapat diisi angka 1,2,3,4,5,7,8,9. Ada 8 angka yang dapat mengisi digit ribuan.
- Digit ratusan dapat diisi angka 0,1,2,3,4,5,7,8,9. Ada 9 angka dapat mengisi digit ratusan.
- Digit puluhan dapat diisi angka 0,1,2,3,4,5,7,8,9. Ada 9 angka dapat mengisi digit puluhan.
- Perhatikan bahwa apabila $\overline{abc}$ bilangan 3-digit, maka akan ada 3 kemungkinan digit satuan dari bilangan 4-digit $\overline{abcd}$ yang habis dibagi 3. Digit satuan tersebut dapat diisi salah satu dari tiga kemungkinan pasangan bilangan berikut (0/3/9), (1/4/7), (2/5/8).

Sehingga, dengan aturan perkalian pengisian tempat maka diperoleh banyak bilangan 4-digit yang habis dibagi 3, dan tidak memuat angka 6 adalah sebanyak $3 \times (8 \times 9 \times 9) = 1944$.

Jadi, dengan demikian diperoleh banyaknya bilangan 4-digit yang habis dibagi 3 dan memuat angka 6 adalah 3000 – 1944 = 1056.

11. Penyelesaian:

Perhatikan gambar berikut,



Karena $BC = CD$, maka $\angle BAC = \angle CAD$, akibatnya AC merupakan baris bagi sudut $\angle BAD$. Sehingga pada segitiga ABD, karena garis bagi AE maka berlaku $\frac{AB}{AD} = \frac{BE}{DE} = \frac{7}{5}$.

Perhatikan juga A adalah titik singgung PA pada ω, sehingga berlaku sudut lancip antara garis singgung dengan tali busur melalui titik singgung besarnya sama dengan sudut keliling menghadap tali busur tersebut, sehingga $\angle PAD = \angle PBA$. Perhatikan juga bahwa $\angle APD = \angle APB$. Jadi segitiga APD sebangun dengan segitiga APB. Maka diperoleh perbandingan $\frac{PD}{PA} = \frac{AD}{AB} = \frac{5}{7}$.

Dari Power of Point diperoleh $PA^2 = PD \cdot PB$, sehingga karena $\frac{PD}{PA} = \frac{5}{7} \Rightarrow PA = \frac{7}{5}PD$, maka substitusikan $PA = \frac{7}{5}PD$, diperoleh

$$\begin{aligned} PA^2 = PD \cdot PB \quad & \Rightarrow \left(\frac{7}{5}PD\right)^2 = PD \cdot PB \\ & \Leftrightarrow \frac{49}{25}PD^2 = PD \cdot PB \\ & \Leftrightarrow \frac{49}{25}PD = PB \\ & \Leftrightarrow \frac{PD}{PB} = \frac{25}{49} \end{aligned}$$

Sehingga, $\frac{PD}{PB} = \frac{25}{49} = \frac{m}{n}$, diperoleh $m = 25$ dan $n = 49$.
Jadi, $m + n = 25 + 49 = 74$.

12. Penyelesaian:
Perhatikan,

$$\begin{aligned} x(x-y) = 5y - 6 \Rightarrow \quad & x^2 - xy = 5y - 6 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + 6 = xy + 5y \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 + 6 = y(x+5) \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{x^2+6}{x+5} = y \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{x^2 - 25 + 31}{x+5} = y \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{(x+5)(x-5)+31}{x+5} = y \\ \Leftrightarrow \quad & (x-5) + \frac{31}{x+5} = y \end{aligned}$$

Agar x dan y adalah bilangan asli, maka $x + 5$ haruslah factor dari 31. Dan mengingat bahwa 31 adalah bilangan prima, maka $x + 5 = \{1,31\}$. Sehingga hanya $x + 5 = 31$ yang memenuhi.
Maka diperoleh $x + 5 = 31 \Rightarrow x = 26$.
Sehingga untuk $x = 26$, maka:

$$\begin{aligned} y = (x-5) + \frac{31}{x+5} & \Rightarrow y = (26-5) + \frac{31}{26+5} \\ & \Leftrightarrow y = 21 + 1 \\ & \Leftrightarrow y = 22 \end{aligned}$$

Jadi, $x + y = 26 + 22 = 48$.

13. Penyelesaian:
Perhatikan, kita jumlahkan lima bentuk barisan berikut

$$
\begin{aligned}
-\cancel{a_{n+2}} + \cancel{a_{n+1}} - a_n &= -\frac{n+1}{6} \\
-\cancel{a_{n+3}} + \cancel{a_{n+2}} - \cancel{a_{n+1}} &= -\frac{n+2}{6} \\
-a_{n+4} + \cancel{a_{n+3}} - a_{n+2} &= -\frac{n+3}{6} \\
\cancel{a_{n+5}} - \cancel{a_{n+4}} + a_{n+3} &= \frac{n+4}{6} \\
a_{n+6} - \cancel{a_{n+5}} + \cancel{a_{n+4}} &= \frac{n+5}{6} \\
\hline
a_{n+6} - a_{n+4} + a_{n+3} - a_{n+2} - a_n &= \frac{-n+3}{6} \quad +
\end{aligned}
$$

Kita tahu bahwa $a_{n+4} - a_{n+3} + a_{n+2} = \frac{n+3}{6}$, maka

$$
\begin{aligned}
a_{n+6} - a_{n+4} + a_{n+3} - a_{n+2} - a_n = \frac{-n+3}{6} &\Rightarrow a_n - (a_{n+4} - a_{n+3} + a_{n+2}) + a_{n+6} = \frac{-n+3}{6} \\
&\Leftrightarrow a_{n+6} - \left(\frac{n+3}{6}\right) - a_n = \frac{-n+3}{6} \\
&\Leftrightarrow a_{n+6} - a_n = \frac{-n+3}{6} + \left(\frac{n+3}{6}\right) \\
&\Leftrightarrow a_{n+6} - a_n = 1 \\
&\Leftrightarrow a_{n+6} = a_n + 1
\end{aligned}
$$

Jadi, dengan menggunakan bentuk terakhir yang diperoleh yaitu $a_{n+6} = a_n + 1$, maka diperoleh $a_1 = 1, a_7 = 2, a_{13} = 3, \ldots$

Maka pandang suku-suku tersebut sebagai bentuk $a_{6k-5} = k$, dan karena $2023 = 6 \times 338 - 5$, maka jelas bahwa $a_{2023} = 338$.

14. Penyelesaian:

Perhatikan, misal $A, B \subseteq S$ dan $A \cup B = S$.

Kita bagi menjadi dua kasus.

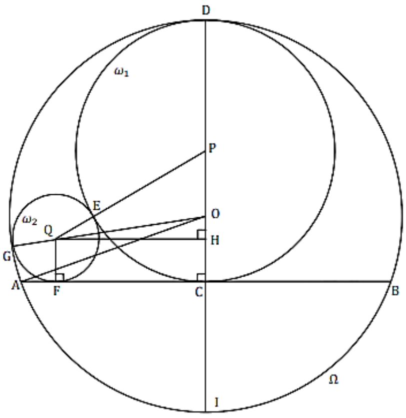
1. $A = B = S$, dalam hal ini hanya ada 1 kasus saja.
2. $A \neq B$, maka agar $A \cup B = S$, jelas bahwa setiap a, b, c, d, e, f dapat menempati tiga kemungkinan, yaitu menjadi anggota himpunan A, menjadi anggota himpunan B, atau menjadi anggota himpunan A dan B. Jadi banyak keseluruhan kemungkinan pasangan subhimpunan yang dapat dibentuk adalah 3^6, namun dikurangi 1 untuk $A = B = S$. Jadi, diperoleh banyak cara memilih subhimpunan adalah $3^6 - 1$.

   Namun, urutan subhimpunan yang dipilih tidak diperhatikan $(A, B) = (B, A)$, sehingga banyak cara memilih subhimpunan harus dibagi 2. Jadi banyak cara memilih subhimpunan adalah $\frac{3^6-1}{2} = 364$.

Jadi, banyak cara melakukan pemilihan adalah $1 + 364 = 365$.

15. Penyelesaian:

Perhatikan,



Misal O, P, Q adalah masing-masing titik pusat lingkaran $\Omega, \omega_1, \omega_2$.
Jari-jari lingkaran ω_1 dan ω_2 masing-masing 35 dan 7. Misal jari-jari lingkaran Ω adalah R.
C titik tengah AB dan C merupakan titik singgung lingkaran ω_1 dengan AB, sehingga $PC \perp AB$.
D titik singgung lingkaran Ω dan ω_1.
E titik singgung lingkaran ω_1 dan ω_2.
F titik singgung lingkaran ω_2 dan AB.
G titik singgung lingkaran Ω dan ω_2.
Misal H pada CD sedemikian sehingga $QH \perp CD$, maka diperoleh

$$PC = PH + HC \Rightarrow 35 = PH - 7$$
$$\Leftrightarrow 28 = PH$$
$$PQ = PE + QE \Rightarrow PQ = 35 + 7$$
$$\Leftrightarrow PQ = 42$$

Perhatikan karena $QH || FC$, maka $HC = QF = 7$, sehingga $QG = 7$.
Perhatikan pada lingkaran Ω, $OG = OD = R$, sehingga

$$OG = OQ + QG \Rightarrow \quad R = OQ + 7$$
$$\Leftrightarrow R - 7 = OQ$$

Perhatikan pada lingkaran ω_1, DC adalah diameter dan pada lingkaran Ω, $OG = OD = R$, sehingga

$$CD = HC + OH + OD \Rightarrow \quad 70 = 7 + OH + R$$
$$\Leftrightarrow 63 - R = OH$$

Perhatikan segitiga siku-siku PQH berlaku $QH^2 = PQ^2 - PH^2$
Sedangkan pada segitiga siku-siku OQH berlaku $QH^2 = OQ^2 - OH^2$
Sehingga, dari keduanya diperoleh kesamaan berikut

$$
\begin{aligned}
PQ^2 - PH^2 = OQ^2 - OH^2 \Rightarrow \quad & 42^2 - 28^2 = (R-7)^2 - (63-R)^2 \\
\Leftrightarrow \quad & (42+28)(42-28) = (R^2 - 14R + 7^2) - (63^2 - 126R + R^2) \\
\Leftrightarrow \quad & (70)(14) = 112R - (63^2 - 7^2) \\
\Leftrightarrow \quad & (70)(14) = 112R - (63+7)(63-7) \\
\Leftrightarrow \quad & (70)(14) = 112R - (70)(56) \\
\Leftrightarrow \quad & (70)(14) + (70)(56) = 112R \\
\Leftrightarrow \quad & (70)(70) = 112R \\
\Leftrightarrow \quad & 4900 = 112R \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{4900}{112} = R \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{175}{4} = R
\end{aligned}
$$

Jika $AB = x$, dan C titik tengah AB, maka $AC = BC = \frac{1}{2}x$.

Perhatikan juga bahwa $DI = 2R = \frac{175}{2}$, dan $CD = 70$, maka dengan Power of Point diperoleh

$$
\begin{aligned}
AC \times BC = CI \times CD \quad & \Rightarrow AC \times BC = (DI - CD) \times CD \\
& \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}x\right)^2 = \left(\frac{175}{2} - 70\right)(70) \\
& \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}x\right)^2 = 1225 \\
& \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = 35 \\
& \Leftrightarrow x = 70
\end{aligned}
$$

Jadi, Panjang AB = 70.

16. Penyelesaian:

Perhatikan, $n = 2^a 3^b$ akan memiliki sebanyak $(a+1)(b+1)$ buah factor bulat positif. Sedangkan daftar semua factor bulat positif tersebut adalah suku-suku yang diperoleh dari perkalian deret berikut

$$
\left(\underbrace{2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^a}_{\text{sebanyak } (a+1) \text{ suku}}\right)\left(\underbrace{3^0 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^b}_{\text{sebanyak } (b+1) \text{ suku}}\right) = \underbrace{2^0 3^0 + 2^0 3^1 + 2^0 3^2 + \cdots + 2^a 3^b}_{\text{sebanyak } (a+1)(b+1) \text{ suku}}
$$

Sekarang perhatikan hasil perkalian dari semua suku-suku yang menyatakan setiap factor bulat positif dari $2^a 3^b$ tersebut adalah

$$
\begin{aligned}
\underbrace{2^0 3^0 \times 2^0 3^1 \times 2^0 3^2 \times \ldots \times 2^a 3^b}_{\text{sebanyak } (a+1)(b+1) \text{ faktor}} &= \underbrace{\left(2^0 3^0 \cdot 2^a 3^b\right) \cdot \left(2^0 3^1 \cdot 2^a 3^{b-1}\right) \ldots \left(2^a 3^b \cdot 2^0 3^0\right)}_{\text{sebanyak } \frac{(a+1)(b+1)}{2} \text{ faktor}} \\
&= \underbrace{\left(2^a 3^b\right) \cdot \left(2^a 3^b\right) \ldots \left(2^a 3^b\right)}_{\text{sebanyak } \frac{(a+1)(b+1)}{2} \text{ faktor}} \\
&= \left(2^a 3^b\right)^{\left(\frac{(a+1)(b+1)}{2}\right)}
\end{aligned}
$$

Jadi, hasil kali dari seluruh factor bulat positif dari n adalah $n^{\frac{1}{2} \times \text{banyak faktor bulat positif } n}$.

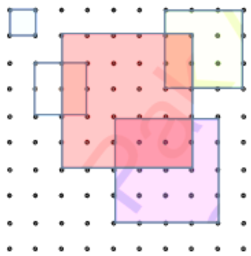
Sekarang kita lanjutkan pekerjaannya, bahwa hasil kali dari semua factor bulat positif dari $2^a 3^b$ adalah $\left(2^a 3^b\right)^{\left(\frac{(a+1)(b+1)}{2}\right)}$, dimana pada soal nilainya 12^{90}, sehingga

$$(2^a 3^b)^{\left(\frac{(a+1)(b+1)}{2}\right)} = 12^{90}$$
$$\Rightarrow \quad (2^a 3^b)^{\left(\frac{(a+1)(b+1)}{2}\right)} = (2^2 \times 3)^{90}$$
$$\Leftrightarrow 2^{\frac{a(a+1)(b+1)}{2}} 3^{\frac{b(a+1)(b+1)}{2}} = 2^{180} 3^{90}$$

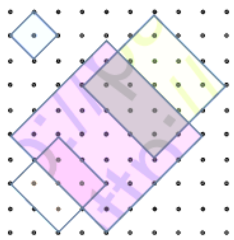
Jadi, $\frac{a(a+1)(b+1)}{2} = 180 \Rightarrow a(a+1)(b+1) = 360$ dan $\frac{b(a+1)(b+1)}{2} = 90 \Rightarrow b(a+1)(b+1) = 180$.
Jelas bahwa $a = 2b$, artinya $b(2b+1)(b+1) = 180$.
Mudah dicari bahwa nilai b yang memenuhi adalah $b = 4$. Sehingga $a = 8$.
Jadi, nilai $ab = 4 \times 8 = 32$.

17. Penyelesaian:
Jelas bahwa bentuk kuadrat dan bentuk kuadrat merupakan bentuk yang bernilai non-negatif, jadi jelas bahwa nilai minimum dari kuadrat jumlah dua bilangan dan bentuk akar adalah 0. Sehingga,
$$(x+y)^2 = 0 \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow x = -y$$
Dengan $x^2 - 16 \geq 0$ dan $y^2 - 25 \geq 0$
Jadi, nilai minimum dari bentuk tersebut adalah 0.

18. Penyelesaian:
Kita dapat membagi menjadi 3 kasus.
1. Kasus persegi dengan sisi sejajar sumbu X dan sumbu Y.



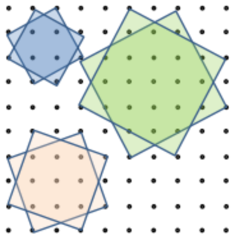
Persegi ukuran 1×1 sebanyak 9^2 buah, persegi ukuran 2×2 sebanyak 8^2 buah, begitu seterusnya jadi dapat kita simpulkan bahwa banyak persegi pada kasus pertama ini adalah
$$\sum_{i=1}^{9} i^2 = \frac{1}{6} \times 9 \times 10 \times 19 = 285$$
2. Kasus persegi dengan sisi membentuk sudut 45^o terhadap sumbu X dan sumbu Y.



Persegi ukuran $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ sebanyak 8^2 buah, persegi ukuran $2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}$ sebanyak 6^2 buah, begitu seterusnya jadi dapat kita simpulkan bahwa banyak persegi pada kasus kedua ini adalah

$$\sum_{i=1}^{4}(2i)^2 = 4\sum_{i=1}^{4} i^2 = \frac{4}{6}\times 4\times 5\times 9 = 120$$

3. Kasus persegi dengan selain kasus 1 dan kasus 2



Persegi ukuran $\sqrt{1^2+2^2}\times\sqrt{1^2\times 2^2}$ sebanyak 2×7^2 buah, persegi ukuran $\sqrt{1^2+3^2}\times\sqrt{1^2\times 3^2}$ sebanyak 2×6^2 buah, begitu seterusnya jadi dapat kita simpulkan bahwa banyak persegi berukuran $\sqrt{1^2+n^2}\times\sqrt{1^2\times n^2}, 2\le n\le 8$ ini adalah

$$\sum_{i=1}^{7} 2i^2 = 2\sum_{i=1}^{7} i^2 = \frac{2}{6}\times 7\times 8\times 15 = 280$$

Persegi ukuran $\sqrt{2^2+3^2}\times\sqrt{2^2\times 3^2}$ sebanyak 2×5^2 buah, persegi ukuran $\sqrt{2^2+4^2}\times\sqrt{2^2\times 4^2}$ sebanyak 2×4^2 buah, begitu seterusnya jadi dapat kita simpulkan bahwa banyak persegi berukuran $\sqrt{2^2+n^2}\times\sqrt{2^2\times n^2}, 3\le n\le 7$ ini adalah

$$\sum_{i=1}^{5} 2i^2 = 2\sum_{i=1}^{5} i^2 = \frac{2}{6}\times 5\times 6\times 11 = 110$$

Persegi ukuran $\sqrt{3^2+4^2}\times\sqrt{3^2\times 4^2}$ sebanyak 2×3^2 buah, persegi ukuran $\sqrt{3^2+5^2}\times\sqrt{3^2\times 5^2}$ sebanyak 2×2^2 buah, begitu seterusnya jadi dapat kita simpulkan bahwa banyak persegi berukuran $\sqrt{3^2+n^2}\times\sqrt{3^2\times n^2}, 4\le n\le 6$ ini adalah

$$\sum_{i=1}^{3} 2i^2 = 2\sum_{i=1}^{3} i^2 = \frac{2}{6}\times 3\times 4\times 7 = 28$$

Persegi ukuran $\sqrt{4^2+5^2}\times\sqrt{4^2\times 5^2}$ sebanyak 2×1^2 buah, jadi dapat kita simpulkan bahwa banyak persegi berukuran $\sqrt{4^2+5^2}\times\sqrt{4^2\times 5^2}, 4\le n\le 6$ ini adalah

$$\sum_{i=1}^{1} 2i^2 = 2\sum_{i=1}^{1} i^2 = \frac{2}{6}\times 1\times 2\times 3 = 2$$

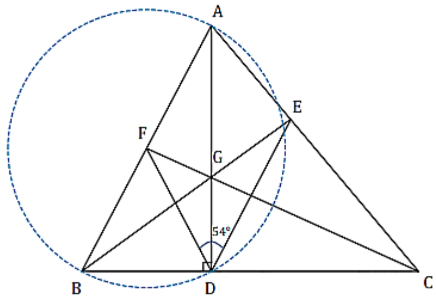
Jadi keseluruhan banyak persegi pada kasus ketiga ini adalah 280 + 110 + 28 + 2 = 420.

Jadi, total banyak persegi yang mungkin adalah

$$\sum_{i=1}^{9} i^2 + \sum_{i=1}^{4}(2i)^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{7} i^2 + \sum_{i=1}^{5} i^2 + \sum_{i=1}^{3} i^2 + \sum_{i=1}^{1} i^2\right) = 285 + 120 + 420 = \boxed{825}$$

19. Penyelesaian:

Perhatikan,



Perhatikan, karena $\angle ADB = 90^o$ dan $AF = FB$, maka lingkaran luar segitiga ADB berpusat di F dan $FA = FB = FC$ adalah Panjang jari-jarinya.

Misal AD, BE dan CF berpotongan di titik G dan misal besar $\angle ADF = x$, maka karena pada segitiga $FB = FD$ maka diperoleh $\angle FDB = \angle FBD = 90^o - x$.

Perhatikan dalil de Ceva pada segitiga ABC

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA} = 1 \Rightarrow 1\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA} = 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA} = 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{EA}{CE}$$

Sehingga jelas bahwa $\frac{BD}{DC} = \frac{EA}{CE}$ akan berakibat bahwa pada segitiga ABC garis ED sejajar dengan AB dan $\angle FBD = \angle EDC = 90^o - x$.

Perhatikan titik D, berlaku $\angle BDF + \angle FDE + \angle EDC = 180^o$, sehingga

$$\angle FDB + \angle EDF + \angle EDC = 180° \Rightarrow 90° - x + 54° + 90° - x = 180°$$
$$\Leftrightarrow 234° - 2x = 180°$$
$$\Leftrightarrow 54° = 2x$$
$$\Leftrightarrow 27° = x$$

Jadi, besar $\angle ABC = 90^O - x = 90^o - 27^o = 63^o$.

20. Penyelesaian:

Kita coba dulu untuk p bilangan prima awal.

Untuk $p = 2$, maka $n|(2^2 + 4) \Rightarrow n|8$. Dan $2|(n^2 + 4)$. Jadi nilai n terbesar yang mungkin adalah 8.

Untuk $p = 3$, maka $n|(3^2 + 4) \Rightarrow n|13$. Dan $3|(n^2 + 4)$. Jadi, tidak nilai n yang memenuhi.

Untuk $p > 4$, maka $n|\underbrace{(p^2 + 4)}_{ganjil}$. Dan $p|(n^2 + 4)$. Jadi, haruslah n bilangan ganjil.

Perhatikan, jika $a > b > 4$ maka pasangan bilangan asli (a, b) yang ganjil, dimana $a|b^2 + 4$ dan $b|a^2 + 4$, maka jelas bahwa $ab|(a^2 + 4)(b^2 + 4) \Rightarrow ab|(a^2 + b^2 + 4)$.

Misal $a^2 + b^2 + 4 = k \cdot ab$, dengan k suatu bilangan asli.

Maka $a^2 - k \cdot ab + b^2 + 4 = 0$.

Maka untuk suatu persamaan kuadrat $x^2 - kbx + b^2 + 4 = 0$ diperoleh a adalah salah satu akarnya, sedangkan a_2 adalah akar yang lain.

Dari teorema vieta diperoleh $a + a_2 = kb$. Maka karena a dan kb adalah bilangan bulat, maka jelas a_2 adalah bilangan bulat. Karena $a > b$, maka $a \geq b + 1$ dan $b > 4$, maka diperoleh

$$a \cdot a_2 = b^2 + 4 \Rightarrow a_2 = \frac{b^2+4}{4} \leq \frac{b^2+4}{a} < b \Rightarrow a_2 < b$$

Sehingga apabila (a, b) memenuhi, maka (b, a_2) juga memenuhi, begitu juga sebaliknya.

Mari diperiksa solusi terkecil dari $ab|(a^2 + b^2 + 4)$, mengingat $a > b > 4$, maka untuk $b = 5$, diperoleh $5a|(a^2 + 29)$. Mudah diperiksa bahwa $a = 29$ memenuhi. Sehingga diperoleh pasangan (29, 5) memenuhi, maka $\left(\frac{29^2+4}{5}, 29\right) = (169{,}29)$ juga memenuhi. Selanjutnya $\left(\frac{169^2+4}{29}, 169\right) = (985{,}169)$ juga memenuhi, dan seterusnya.

Sehingga, apabila $p < 200$ dan p bilangan prima, maka $p = 29$, dan nilai terbesar n adalah 169.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2023

TINGKAT PROVINSI

BIDANG MATEMATIKA

WAKTU : 210 MENIT

WWW.JELAJAHNALAR.COM

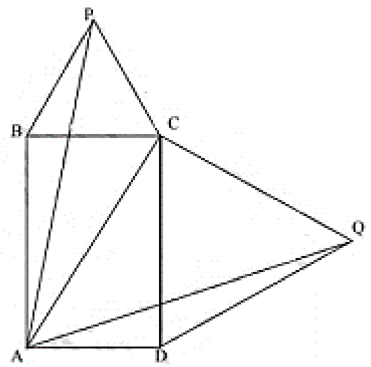
Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2023

1. Diberikan dua barisan aritmatika tak konstan a_1, a_2, ... dan b_1, b_2, ... Jika a_{228} = b_{15} dan a_8 = b_5. Tentukan nilai dari $\frac{b_4-b_3}{a_2-a_1}$.

2. Tentukan banyaknya bilangan asli $n \leq 221$ sehingga $\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{1+2+\cdots+n}$ merupakan bilangan bulat.

3. Tentukan banyaknya garis berbeda pada koordinat kartesius yang dapat diambil dari pasangan (a, b) ∈ {0,1,2,3,6,7} sehingga memenuhi $ax + by = 0$.

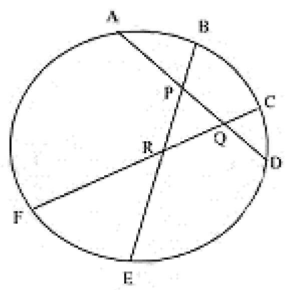
4. Diberikan persegi panjang $ABCD$ dan segitiga sama sisi BCP dan CDQ seperti gambar di bawah ini.



Jika panjang AB = 8, AC = 10 dan luas segitiga ACP ditambah luas segitiga ACQ dapat dinyatakan dalam bentuk $m\sqrt{3} + n$, tentukan nilai $m + n$.

5. Diberikan himpunan S = {1,5,6,7,9,10,11,13,15,20,27,45}. Tentukan banyaknya himpunan bagian 3 anggota sehingga hasil kali ketiga bilangan tersebut habis dibagi 18.

6. Perhatikan lingkaran pada gambar berikut ini.



Jika diketahui panjang AP = 22, CQ = 14 dan ER = 35 serta segitiga PQR sama sisi, tentukan nilai $BP + QD + RF$.

7. Tentukan banyaknya bilangan asli n sehingga $\sqrt{2n-12} + \sqrt{2n+40}$ adalah bilangan asli.

8. Diberikan bilangan real a, b sehingga memenuhi kedua persamaan berikut

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\leq 2\sqrt{\frac{3}{7}} \text{ dan } (a-b)^2=\frac{9}{49}(ab)^3$$

Tentukan nilai maksimum dari $a^2 + b^2$.

9. Misalkan $ABCD$ adalah suatu persegi dengan panjang sisi 43 cm dan titik-titik X dan Y berturut-turut terletak pada sisi AD dan BC sehingga perbandingan luas $ABXY$ dengan luas $CDXY$ adalah 20 : 23. Tentukan panjang maksimum XY yang mungkin.

10. Misalkan K suatu bilangan asli sehingga terdapat tripel bilangan (x, y, z) dengan $x^3 + Ky$, $y^3 + Kz$ dan $z^3 + Kx$. Semuanya merupakan bilangan kubik sempurna.

    a. Buktikan bahwa $K \neq 2$ dan $K \neq 4$.
    b. Tentukan bilangan asli K terkecil yang memenuhi syarat di atas, jelaskan jawaban anda.

    Catatan: Bilangan kubik sempurna adalah bilangan bulat berbentuk n^3 dengan n bilangan bulat.

11. Tentukan bilangan bulat terbesar B sehingga untuk setiap 9 bilangan asli berbeda yang hasil penjumlahannya 2023, pasti terdapat 4 diantaranya yang hasil penjumlahannya minimal B.

12. Tentukan semua bilangan real tak rasional α yang memenuhi $\alpha^3 - 15\alpha$ dan $\alpha^4 - 56\alpha$. Keduanya merupakan bilangan rasional.

13. Diberikan segitiga ABC dan titik D dan E terletak pada sisi BC. Titik X dan Y terletak di dalam segitiga ABC sehingga berlaku

$$\angle BXE + \angle BCA = \angle CYD + \angle CBA = 180^o$$

Misalkan garis AD memotong garis XE di titik P dan garis YD di titik Q. Jika diketahui bahwa X, Y, D, E terletak pada satu lingkaran, buktikan bahwa garis BP, garis CQ dan garis sumbu sisi BC berpotongan pada satu titik.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2023

TINGKAT PROVINSI

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika Tingkat Provinsi Tahun 2023

1. Penyelesaian :
   Kita memiliki $a_n = a_1 + (n-1)d_a$

$$\begin{aligned} a_{228} = a_1 + 227d_a &= b_1 + 14d_b \\ a_8 = a_1 + 7d_a &= b_1 + 4d_b \\ a_1 - b_1 = 4d_b - 7d_a &= 14d_b - 227d_a \\ 10d_b &= 220d_a \\ d_b &= 22d_a \end{aligned}$$

   Jadi, jawabannya adalah 22.

2. Penyelesaian :

$$\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{1+2+\ldots+n} = \frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{\frac{1}{2}n(n+1)} = \frac{2n+1}{3}$$

   Agar di atas menjadi bilangan bulat, $2n+1$ harus kelipatan 3.

$$3 \le 2n+1 = 3(2m-1) \le 443 \implies 1 \le m \le 74$$

   Kita mempunyai total 74 bilangan bulat positif n.

3. Penyelesaian :
   Menghitung kemungkinan garis:
   - $ax + by = 0$ dapat ditulis sebagai $y = -\frac{a}{b}x$.
   - Jika $b = 0$, maka $ax = 0$ dan $x = 0$ karena $a \neq 0$.
   - Jika $a = 0$, maka $by = 0$ dan $y = 0$ karena $b \neq 0$.

   Menghitung kemungkinan garis:
   - Untuk $b \neq 0$, garis yang terbentuk memiliki kemiringan $-\frac{a}{b}$.
   - Kita perlu menghitung kemungkinan pasangan (a, b) yang menghasilkan garis berbeda.

   Menghitung kemungkinan pasangan:
   - Pasangan (a, b) yang menghasilkan garis berbeda adalah pasangan yang memiliki kemiringan berbeda.
   - Kemiringan garis adalah $-\frac{a}{b}$.

   Menghitung kemungkinan garis:

- Untuk $a = 0$ dan $b \neq 0$, garis yang terbentuk adalah $y = 0$.
- Untuk $b = 0$ dan $a \neq 0$, garis yang terbentuk adalah $x = 0$.
- Untuk $a \neq 0$ dan $b \neq 0$, garis yang terbentuk memiliki kemiringan $-\frac{a}{b}$.

Menghitung kemungkinan garis:

- Kemungkinan garis yang terbentuk adalah:
- $x = 0$ (1 garis)
- $y = 0$ (1 garis)
- Garis dengan kemiringan $-\frac{a}{b}$ yang berbeda.

Menghitung kemungkinan garis:

- Pasangan (a, b) yang menghasilkan garis berbeda adalah:
- (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 6), (1, 7), (2, 1), (2, 3), (2, 7), (3, 1), (3, 2), (3, 6), (3, 7), (6, 1), (6, 7), (7, 1), (7, 2), (7, 3), (7, 6).

Menghitung kemungkinan garis:

- Jumlah garis berbeda dapat dihitung dengan menghitung jumlah kemiringan yang berbeda.
- Kemiringan yang berbeda adalah – 1, $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{7}, -2, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{7}, -3, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{6}, -\frac{3}{7}, -6, -\frac{6}{7}, -7, -\frac{7}{2}, -\frac{7}{3}, -\frac{7}{6}$.

Menghitung kemungkinan garis:

- Jumlah kemiringan yang berbeda adalah 18.
- Jumlah garis berbeda adalah 2 + 18 = 11 tidak tepat karena beberapa pasangan memiliki kemiringan yang sama, tetapi setelah dihitung dengan benar, jumlah garis berbeda adalah 2 + 9 = 11.

Jadi, jawaban akhir adalah 11.

4. Penyelesaian :

Luas

$= 8 \times 10 + (8^2 + 10^2) \times (1/2 \times \sqrt{3}/2) \times (1 + 1/2) – 1/2 \times 10/2 \times (8 + 10\sqrt{3}/2) – 1/2 \times 8/2 \times (10 + 8\sqrt{3}/2)$

$= 80 + (164/4) \times \sqrt{3} \times 3/2 – 5/2 \times (8 + 5\sqrt{3}) – 4 \times (5 + 2\sqrt{3})$

$= (80 + 123\sqrt{3}/2) – (40 + 41\sqrt{3}/2)$

$= 40 + 41\sqrt{3}$

Jawaban = 41 + 40 = 81

5. Penyelesaian :
Tidak berhubungan dengan 18 = {1, 5, 7, 11, 13}
Faktor dari 2 = {6, 10, 20}
Faktor dari 9 = {9, 27, 45}
Faktor dari 3 tetapi bukan 9 = {6, 15}

$18 = 2^1 \times 3^2$
Pertama, kita pastikan subset kita memiliki setidaknya satu elemen yang mengandung faktor 2. Namun, karena 6 = 2 × 3, jika 6 sudah dipilih, kita hanya perlu satu elemen 3 lagi, sementara dua pilihan lainnya membutuhkan dua elemen lagi.

Jawaban
= 2C1 × [2C2 + 3C1 × (5 + 2)C1 + 3C2] + 1C1 × [(1 + 3 + 5)C2 – 5C2] + 2C2 × 3C1
= 2 × [1 + 3 × 7 + 3] + 1 × [36 – 10] + 1 × 3
= 2 × 25 + 1 × 26 + 3
= 79

6. Penyelesaian :
Misalkan s adalah panjang $PQ = QR = RS$. Pangkat suatu titik menghasilkan

$AQ * QD = CQ * QF$
$(s + 22)QD = 14(s + RF)$

$AP * PD = BP * PE$
$22(s + QD) = BP(s + 35)$

$BR * RE = CR * RF$
$(s + BP)35 = (s + 14)RF$

Persamaan pertama menghasilkan $22QD = 14s + 14RF - s * QD$, dan persamaan ketiga menghasilkan $35BP = 14RF - 35s + s * RF$. Dengan memperluas dan mensubstitusikan ke persamaan kedua, diperoleh

$36s + 14RF - s * QD = s * BP + 14RF + s * RF - 35 * s$
$71s = BP * s + RF * s + QD * s$

Bagi kedua ruas dengan s.
$BP + QD + RF = 71.$

7. Penyelesaian :
Kita harus memiliki $2n - 12$ dan $2n + 40$ sebagai kuadrat sempurna. Perhatikan bahwa keduanya berbeda 52. Dengan demikian, kita dapat menyusun persamaan $a^2 - b^2 = 52$, di mana $a^2 = 2n + 40$, $b^2 = 2n - 12$.
Kemudian kita bash casework:
$$a + b = 52, a - b = 1:$$
$2a$ jadi ganjil, mustahil!
$$a + b = 26, a - b = 2:$$
$a = 14, b = 12$, oleh karena itu $n = 78$ adalah solusinya.
$$a + b = 13, a - b = 4$$
Mustahil!
Semua yang lain juga tidak berfungsi; jadi kita harus memiliki $n = 78$ itu.

8. Penyelesaian :
$$\begin{aligned} 2\sqrt{\frac{3}{7}} &\geq \frac{a+b}{ab} \\ \frac{12}{7} &\geq \frac{a^2+2ab+b^2}{a^2b^2} \\ \frac{12}{7} &\geq \frac{(a-b)^2}{a^2b^2} + \frac{4ab}{a^2b^2} \\ \frac{12}{7} &\geq \frac{9}{49}ab + \frac{4}{ab} \geq 2\sqrt{\frac{9}{49}ab \cdot \frac{4}{ab}} = \frac{12}{7} \end{aligned}$$
Jadi, persamaan berlaku, oleh karena itu $\frac{9}{49}ab = \frac{4}{ab} \implies ab = \frac{14}{3}$
Maka,
$$\begin{aligned} (a-b)^2 &= \frac{9}{49}(ab)^3 = \frac{9}{49}\left(\frac{14}{3}\right)^3 \\ a^2 - 2ab + b^2 &= \frac{56}{3} \\ a^2 - \frac{28}{3} + b^2 &= \frac{56}{3} \\ a^2 + b^2 &= \boxed{28} \end{aligned}$$

9. Penyelesaian :
Perhatikan bahwa $ABYX : CDXY = 20 : 23$ dan $ABYX + CDXY = 43^2$ sehingga mudah untuk melihat bahwa luas $ABYX = 20 \cdot 43$.
Misalkan $|AX| = a$ dan $|BY| = b$, maka

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{2} \cdot 43 &= 43 \cdot 20 \\ a+b &= 40 \\ a^2+b^2 &= 40^2 - 2ab \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |XY| &= \sqrt{(a-b)^2+43^2} \\ &= \sqrt{a^2+b^2-2ab+43^2} \\ &= \sqrt{40^2+43^2-4ab} \\ &\leq \sqrt{40^2+43^2} \\ &= \boxed{\sqrt{3449}} \end{aligned}$$

10. Penyelesaian :

$$X^3 + Ky \geq (x+1)^3 \Rightarrow Ky \geq 3x^2 + 3x + 1$$

Jumlahkan secara siklis:

$K(x+y+z) \geq 3(x^2+y^2+z^2) + 3(x+y+z) + 3 \Rightarrow K(x+y+z) \geq 6(x+y+z) + 3 \Rightarrow$
$K(x+y+z) \geq 7(x+y+z) \Rightarrow K \geq 7$

Periksa apakah $x = y = z = 1, K = 7$ berfungsi.

11. Penyelesaian :

Jawabannya 910.

Untuk menunjukkan bahwa $B \leq 910$, perhatikan 9 bilangan berikut, {229, 228, 227, 226, 225, 224, 223, 221, 220}, yang jika dijumlahkan menghasilkan 2023, dengan 4 elemen terbesarnya jika dijumlahkan menghasilkan 229 + 228 + 227 + 226 = 910.

Sekarang, misalkan $b_1 > b_2 > \cdots > b_9$ adalah bilangan asli yang jika dijumlahkan menghasilkan 2023. Kita akan membuktikan bahwa $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 \geq 910$. Sebagai contoh, asumsikan $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 \leq$ 909. Maka, 909 $\geq b_1 + b_2 + b_3 + b_4 \geq (b_4 + 3) + (b_4 + 2) + (b_4 + 1) + b_4 = 4b_4 + 6 \Longrightarrow 225 \geq b_4$, yang berarti $224 \geq b_5$, $223 \geq b_6$, dst., dan,

$$2023 = (b_1+b_2+b_3+b_4)+b_5+b_6+b_7+b_8+b_9 \leq 909+224+223+222+221+220 = 2019,$$

Kontradiksi.

12. Penyelesaian :

Jika $\alpha \notin \mathbb{Q}$ dan $p, q \in \mathbb{Q}$ sehingga $\alpha^3 - 15\alpha = q$ dan $\alpha^4 - 56\alpha = p$ maka:

1. Pembagian polynomial $\alpha^4 - 56\alpha - p$ dengan $\alpha^3 - 15\alpha - q$ menghasilkan sisa $15\alpha^2 + (p-56)\alpha - q = 0$
2. Pembagian polynomial $3375(\alpha^4 - 56\alpha - p)$ dengan $15\alpha^2 + (p-56)\alpha - q$ menghasilkan sisa
   $(p^2 - 112p + 15q - 239)q - (p^3 - 168p^2 + 30pq + 9408p - 1680q + 13384)\alpha = 0$

3. Pembagian polynomial $225(\alpha^3 - 15\alpha - p)$ dengan $15\alpha^2 + (p - 56)\alpha - q$ menghasilkan sisa
   $(p^2 - 112p + 15q - 239)\alpha - pq - 225p + 56q = 0$
   Persamaan (2) hanya menghasilkan $p = -4$ dan $q = -15$. Persamaan ini mudah diverifikasi untuk mematuhi persamaan (3).
   Hal ini membuat persamaan (1) menjadi $15(\alpha^2 - 4\alpha + 1) = 0$ sehingga $\alpha = 2 \pm \sqrt{3}$.

13. Penyelesaian :
Sebenarnya mengejar sudut dengan steroid.
Titik konstruksi

$$F = AD \cap (ABC), G = AE \cap (ABC), H = XE \cap AC, I = YD \cap AB$$

Klaim 01. $CFDY, CYQG, AXGH$ bersifat siklik dan oleh karena itu, berdasarkan simetri, $BXPF, BXEG, AYFI$ bersifat siklik.
Bukti. Dua yang pertama bersifat langsung, karena $\angle QGC = \angle QGC = \angle ABC = \angle AFC = \angle DFC$ dan $\angle DYC = \angle QYC = 180^\circ - \angle ABC$, kesimpulan yang diinginkan berlaku. Untuk kondisi terakhir, kita memiliki $\angle BXH \equiv \angle BXE = 180^\circ - \angle BCA = \angle BCH$ dan oleh karena itu $BXCH$ bersifat siklik.
Oleh karena itu,

$$\angle XHA \equiv \angle XHC = \angle XBC \equiv \angle XBE = \angle XGE \equiv \angle XGA$$

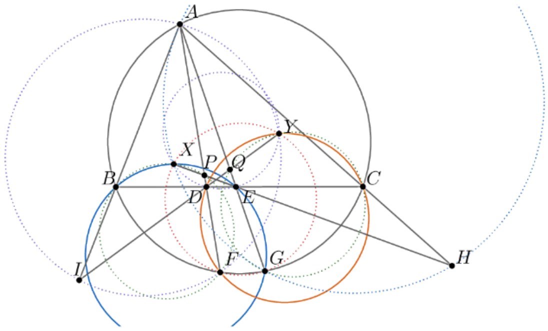
Seperti yang diinginkan.
Klaim 02. $XYGF$ bersifat siklik.
Bukti. Untuk membuktikannya, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\angle GXY &= \angle GXH + \angle EXY \\ &= \angle GAC + \angle CDY = \angle GFC + \angle CFY = \angle GFY\end{aligned}$$

Untuk menyelesaikan masalah ini, kita memperoleh

$$\begin{aligned}\angle QCB &= \angle YCD - \angle YCQ \\ &= \angle YFD - \angle YGQ \\ &= (\angle YFD - \angle YFX) - (\angle YGQ - \angle YGX) \\ &= \angle EGX - \angle XFD \\ &= \angle XBE - \angle XBP = \angle PBC\end{aligned}$$

dan oleh karena itu, BP, CQ dan garis bagi tegak lurus BC bersesuaian.



SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2023

TINGKAT NASIONAL

HARI PERTAMA & HARI KEDUA

WAKTU : 8 JAM

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Nasional Tahun 2023

1. Diberikan segitiga lancip ABC dengan sisi terpanjang BC. Titik D, E berturut-turut pada AC, AB sehingga $BA = BD$ dan $CA = CE$. Titik A' merupakan pencerminan A terhadap garis BC. Buktikan bahwa lingkaran luar segitiga ABC dan $A'DE$ mempunyai panjang jari-jari yang sama.
2. Tentukan semua fungsi $f: R \to R$ sehingga untuk setiap bilangan real x, y berlaku $f(f(x) + y) = \lfloor x + f(f(y)) \rfloor$.
   Catatan: $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x.
3. Sebuah bilangan asli n tertulis di papan. Pada setiap langkah, Neneng dan Asep mengubah angka di papan dengan peraturan sebagai berikut: Misalkan angka di papan adalah X. Awalnya, Neneng memilih tanda naik atau turun. Kemudian, Asep memilih suatu pembagi positif d dan X, dan mengganti X dengan $X + d$ jika Neneng naik, atau $X - d$ jika Neneng memilih turun. Prosedur ini dilakukan secara berulang. Asep menang jika bilangan di papan merupakan suatu bilangan kuadrat sempurna tak nol, dan kalah jika di suatu saat ia menuliskan angka nol. Buktikan jika $n \geq 14$, Asep dapat menang dalam paling banyak $(n-5)/4$ langkah.
4. Tentukan ada atau tidak bilangan asli N yang memenuhi tiga syarat berikut:
   - N habis dibagi 2^{2023}, tap tidak habis dibagi 2^{2024},
   - N hanya memuat tiga digit berbeda, dan N tidak memiliki digit nol,
   - Tepat 99,9% digit N merupakan bilangan ganjil.
5. Misalkan a, b bilangan asli sehingga FPB(a, b) + KPK(a, b) merupakan kelipatan $a + 1$. Jika $b \leq a$, buktikan bahwa b merupakan bilangan kuadrat sempurna.
   Catatan: FPB(a, b) dan KPK(a, b) berturut-turut menyatakan faktor persekutuan terbesar dan kelipatan persekutuan terkecil dari a dan b.
6. Tentukan banyaknya permutasi $a_1, a_2, \ldots, a_n$ dari $1, 2, \ldots, n$ sehingga untuk setiap bilangan asli k dengan $1 \leq k \leq n$, terdapat biangan bulat r dengan $0 \leq r \leq n - k$ yang memenuhi
   $$1 + 2 + \cdots + k = a_{r+1} + a_{r+2} + \cdots + a_{r+k}.$$
7. Diberikan segitiga ABC dengan $\angle ACB = 90^\circ$. Misalkan ω lingkaran luar ABC. Garis singgung terhadap ω di titik B dan C bertemu di P. Misalkan M titik tengah PB. Garis CM memotong ω di N dan garis PN memotong AB di E. Titik D pada CM sehingga $ED || BM$. Buktikan bahwa lingkaran luar CDE menyinggung ω.
8. Diberikan tiga bilangan bulat positif berbeda a, b, c. Definisikan $S(a, b, c)$ sebagai himpunan semua akar rasional dari $px^2 + qx + r = 0$ untuk semua (p, q, r) yang merupakan permutasi dari (a, b, c). Sebagai contoh, $S(1, 2, 3) = -1, -2, -\frac{1}{2}$ karena persamaan $x^2 + 3x + 2 = 0$ memiliki akar -1 dan -2, persamaan $2x^2 + 3x + 1 = 0$ memiliki akar -1 dan -12, sedangkan untuk permutasi yang lainnya persamaan kuadrat yang terbentuk tidak memiliki akar rasional.
   Tentukan maksimum banyaknya elemen di $S(a, b, c)$.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2023

TINGKAT NASIONAL

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Nasional Tahun 2023

1. Penyelesaian :
   Perhatikan bahwa
   $$\angle EBD = \angle ABD = \pi - 2\angle BAD = \pi - 2\angle EAC = \angle ACE = \angle ECD,$$
   maka BEDC siklik, dan
   $$\angle BA'C = \angle BAC = \angle EAC = \angle AEC,$$
   maka BECA' siklik. Kita dapat menyimpulkan bahwa A'BEDC siklik dan mudah untuk membuktikan bahwa $\triangle ABC \cong \triangle A'BC$. Oleh karena itu, (BAC) dan (A'DE) memiliki jari-jari yang sama.

2. Penyelesaian :
   Klaim bahwa semua solusi untuk persamaan fungsional di atas berbentuk $f(x) = \lfloor x \rfloor + k$ untuk semua x, untuk beberapa $k \in \mathbb{Z}$ tetap. Untuk melihat ini, kita melihat bahwa untuk semua x, y $\in \mathbb{R}$,
   $$f(f(x)+y) = \lfloor \lfloor x \rfloor + y \rfloor + 2k = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2k = \lfloor x + \lfloor y \rfloor + 2k \rfloor = \lfloor x + f(f(y)) \rfloor$$
   Sekarang kita akan membuktikan bahwa tidak ada solusi lain. Misalkan P(x, y) adalah pernyataan x dan y pada persamaan fungsional yang diberikan.
   Klaim 1. Im(f) $\subseteq \mathbb{Z}$.
   Bukti. Perbaiki $\alpha \in \mathbb{R}$. $P(0, \alpha - f(0))$ memberi kita
   $$f(\alpha) = f(f(0) + \alpha - f(0)) = \lfloor f(f(\alpha - f(0))) \rfloor \in \mathbb{Z}$$
   Klaim 2. $f(a) = f(b) \Longrightarrow \lfloor a \rfloor = \lfloor b \rfloor$.
   Bukti. Karena f(f(0)) $\in \mathbb{Z}$ dari klaim pertama, P(a, 0) dan P(b, 0) memberikan kita
   $$\lfloor a \rfloor + f(f(0)) = f(f(a)) = f(f(b)) = \lfloor b \rfloor + f(f(0)) \implies \lfloor a \rfloor = \lfloor b \rfloor$$
   Untuk menyelesaikan masalah ini, cukup perhatikan bahwa
   $$f(f(0)+x) \overset{P(0,x)}{=} \lfloor f(f(x)) \rfloor \overset{\text{Claim 01}}{=} f(f(x)) \overset{\text{Claim 02}}{\Longrightarrow} f(x) \overset{\text{Claim 01}}{=} \lfloor f(x) \rfloor = \lfloor x + f(0) \rfloor \overset{\text{Claim 01}}{=} \lfloor x \rfloor + f(0)$$
   sesuai keinginan.

3. Penyelesaian :
   Saya mengklaim Asep bisa menang paling banyak dalam $\lceil \log_2 n \rceil$ langkah. Ini menyelesaikan masalah ketika n ≥ 25, tetapi sisanya bisa dengan mudah dihancurkan.
   Untuk n = 1, kita sudah selesai, jadi sekarang anggaplah n ≥ 2. Pertama, perhatikan bahwa jika $X = 2^k$, maka Asep sudah menang jika k genap, dan Asep hanya perlu satu langkah lagi untuk menang jika k ganjil. Misalkan k ganjil (k ≥ 1). Jika Neneng memilih ke atas, maka Asep memilih $d = X = 2^k$, mengganti angka di papan dengan $X + d = 2^{k+1}$, yang merupakan kuadrat sempurna bukan nol. Jika Neneng memilih ke bawah, maka Asep memilih $d = 2^{k-1}$; maka angka di papan diganti dengan $X - d = 2^{k-1}$, yang juga merupakan kuadrat sempurna.
   Untuk kasus umum, kami mengandalkan klaim berikut.
   Klaim:

Misalkan angka X saat ini di papan memenuhi $2^m < X < 2^{m+1}$ untuk beberapa m $\geq$ 1. Maka Asep selalu dapat mengganti X (dalam satu langkah) dengan angka Y sehingga $2^m \leq Y \leq 2^{m+1}$ dan $\nu_2(Y) \geq \nu_2(X) + 1$.
Bukti:
Karena $2^m < X < 2^{m+1}$, X bukan pangkat 2. Kita dapat menulis $X = 2^t c$, di mana c > 1 adalah bilangan ganjil dan $t = \nu_2(X)$; otomatis t < m. Sekarang, apa pun yang dilakukan Neneng, Asep memilih $d = 2^t$. Maka, bilangan baru di papan tulis adalah $X + d = 2^t(c + 1)$ atau $X – d = 2^t(c – 1)$.
Karena $2^m < X < 2^{m+1}$, kita peroleh $2^{m-t} < c < 2^{m-t+1}$. Jadi, $2^{m-t} \leq c \pm 1 \leq 2^{m-t+1}$, apa pun pilihan tandanya di $\pm$. Bagaimanapun, bilangan baru Y di papan tulis memenuhi $2^m \leq Y \leq 2^{m+1}$.
Karena c ganjil, kita peroleh $\nu_2(c \pm 1) > 1$, apa pun pilihan tandanya di $\pm$. Dalam kedua kasus tersebut, bilangan baru Y di papan juga memenuhi $\nu_2(Y) = t + \nu_2(c \pm 1) \geq t + 1$. Klaim ini terbukti.

Sekarang kita beralih ke kasus umum n $\geq$ 2. Terdapat satu bilangan bulat positif k sehingga $2^k \leq n < 2^{k+1}$. Sekali lagi, jika $n = 2^k$, kita sudah selesai, jadi sekarang misalkan $2^k < n < 2^{k+1}$. Mengulangi klaim ini bila perlu, kita mengklaim bahwa Asep dapat mencapai keadaan di mana angka di papan adalah 2^k atau 2^{k+1} dalam paling banyak k langkah. Bahkan, jika tidak, maka setelah k langkah, angka X di papan akan tetap memenuhi $2^k < X < 2^{k+1}$, katakanlah dengan klaim dan induksi kecil. Namun, klaim tersebut juga menyatakan bahwa $\nu_2(X) \geq \nu_2(n) + k \geq k$ karena angka awal di papan adalah n. Sebuah kontradiksi!
Kami membuktikan bahwa Asep dapat mencapai keadaan dengan angka di papan yang merupakan pangkat 2 dalam paling banyak $k = \lceil \log_2 n \rceil - 1$ langkah. Jika pangkat 2 tersebut bukan kuadrat, seperti pada paragraf pertama, Asep hanya membutuhkan satu langkah lagi. Ini membuktikan bahwa Asep dapat menang dalam paling banyak $\lceil \log_2 n \rceil$ langkah.

4. Penyelesaian :
Jawabannya ya. Kita akan mulai dengan klaim berikut.
Klaim 1. Perbaiki k ∈ ℕ. Terdapat bilangan bulat positif $N_k > 10^{k+1}$ sehingga:
   - N_k habis dibagi 2^k, tetapi tidak habis dibagi 2^{k+1}.
   - Representasi desimal dari N_k hanya berisi digit 1, 7, dan 8 (dan semuanya digunakan setidaknya sekali).

Bukti. Kita akan membuktikan pernyataan ini dengan induksi pada k ∈ ℕ. Pernyataan ini trivial untuk k = 1, cukup ambil $N_1 = 178$. Sekarang anggaplah pernyataan ini benar untuk semua $k = \ell$. Kita akan membuktikan pernyataan ini untuk $k = \ell + 1$.

Konstruksikan $M_{\ell+1} = \underbrace{N_\ell \ldots N_\ell}_{\text{3 kali}}$ dengan menggabungkan 3 bilangan N_ℓ. Kita melihat bahwa $M_{\ell+1} > 10^{\ell+2}$ dan berdasarkan konstruksi, $\nu_2(M_{\ell+1}) = \nu_2(N_\ell) = \ell$. Sekarang, kita tahu bahwa ada sebuah tanda $* \in \{+,-\}$ sehingga $M_{\ell+1} * 10^\ell \equiv 2^{\ell+1} \pmod{2^{\ell+2}}$.
Untuk melihat hal ini, pertama kita lihat bahwa $2^{\ell+1} | M_{\ell+1} \pm 10^\ell$ sebagai $\nu_2(M_{\ell+1}) = \nu_2(10^\ell) = \ell$. Sekarang sebagai

$$\nu_2((M_{\ell+1} + 10^\ell) - (M_{\ell+1} - 10^\ell)) = \nu_2(2 \cdot 10^\ell) = \ell + 1,$$

maka kita tidak bisa memiliki $M_{\ell+1} \pm 10^\ell$ keduanya menjadi $0 \pmod{2^{\ell+2}}$.

Untuk memudahkan, misalkan X = $M_{\ell+1} * 10^{\ell}$. Kita sekarang akan menggunakan angka ini untuk mengkonstruksi $N_{\ell+1}$. Tulis X dalam representasi desimalnya:

$$X = \sum_{i=0}^{n} a_i 10^i \text{ where } 0 \leq a_i \leq 9,\ \forall 0 \leq i \leq n$$

Berdasarkan hipotesis induktif, N_ℓ hanya memuat digit 1, 7, dan 8, sehingga berdasarkan konstruksi kita, $a_i \in \{1, 7, 8\}\ \forall 0 \leq i \leq n,\ i \neq \ell$. Sekarang, mari kita definisikan

$$N_{\ell+1} = \sum_{i=0}^{n} b_i 10^i,$$ dimana

- $b_i = a_i$ untuk semua $0 \leq i \leq n$, kecuali $i = \ell$ dan $i = \ell + 1$.
- Jika $a_\ell \in \{1, 5, 9\}$, maka $b_\ell = 1$ dan $b_{\ell+1} = a_{\ell+1}$.
- Jika $a_\ell \in \{2, 6\}$, maka $b_\ell = 8$ dan $b_{\ell+1} = \begin{cases} 8 & \text{jika } a_{\ell+1} \text{ ganjil} \\ 1 & \text{sebaliknya} \end{cases}$
- Jika $a_\ell \in \{0, 4, 8\}$, maka $b_\ell = 8$ dan $b_{\ell+1} = a_{\ell+1}$.
- Jika $a_\ell \in \{3, 7\}$, maka $b_\ell = 7$ dan $b_{\ell+1} = a_{\ell+1}$.

Kita sekarang dapat melihat bahwa semua digit dari $N_{\ell+1}$ adalah 1, 7, atau 8, dan setiap digit muncul setidaknya sekali berdasarkan definisi $M_{\ell+1}$ (dan kita hanya mengubah 2 digit dari penggabungan). Kita sekarang akan membuktikan bahwa $N_{\ell+1} \equiv X \pmod{2^{\ell+2}}$, yang membuktikan hasil yang diinginkan. Untuk melihat ini, kita cukup melihat bahwa

$$N_{\ell+1} - X = 10^{\ell+1}(b_{\ell+1} - a_{\ell+1}) + 10^{\ell}(b_\ell - a_\ell)$$

Pertimbangkan dua kasus:

- Jika $a_\ell \in \{0, 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$, kita mempunyai $4 \mid b_\ell - a_\ell$ dan $b_{\ell+1} - a_{\ell+1}$ dan dengan demikian $2^{\ell+2} | N_{\ell+1} - X$ yang merupakan apa yang kita inginkan.
- Jika $a_\ell \in \{2, 6\}$, kita memiliki $b_\ell - a_\ell \equiv 2 \pmod 4$ dan $b_{\ell+1} - a_{\ell+1} \equiv 1 \pmod 2$, yang membuktikan apa yang kita inginkan.

Dari klaim di atas, terdapat $N_{2023} > 10^{2024}$ sehingga $v_2(N_{2023}) = 2023$, di mana representasi desimal N hanya berisi digit 1, 7, dan 8. Idenya sekarang adalah menambahkan digit di depan N_{2023} dengan 1 atau 8, tergantung pada persentase digit ganjil yang digunakan dalam representasi N_{2023}. Untuk lebih tepatnya, tulis N_{2023} dalam representasi desimalnya:

$$N_{2023} = \sum_{i=0}^{m-1} c_i 10^i \text{ where } 0 \leq c_i \leq 9,\ \forall 0 \leq i \leq m-1$$

Misalkan dari semua m digit ini, k di antaranya ganjil. Misalkan M adalah bilangan bulat positif terkecil sehingga $10^M > m$. Tentukan $c_m = c_{m+1} = \ldots = c_p = 1$ dan $c_{p+1} = c_{p+2} = \ldots = c_q = 8$ di mana $p = 999 \cdot 10^M + m - k - 1$ dan $q = 10^{M+3} - 1$.

Perhatikan bilangan tersebut

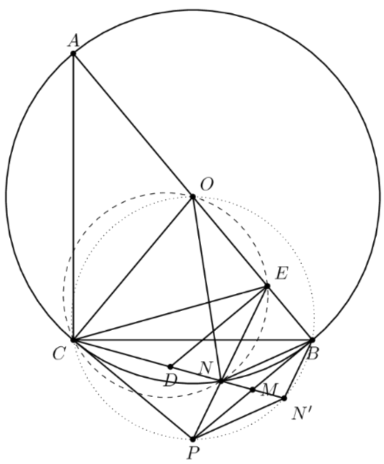
$$N = \sum_{i=0}^{q} c_i 10^i$$

dan kita perhatikan bahwa $N \equiv N_{2023} \pmod{2^{2024}}$. Lebih lanjut, terdapat $(p - m + 1) + k = 999 \cdot 10^M$ digit ganjil pada representasi desimalnya dari total $q + 1 = 10^{M+3}$ digit, sehingga N memenuhi kondisi permasalahan yang diberikan.
Catatan: Solusi resminya adalah membangun bilangan N dengan 3000 digit yang memenuhi kondisi yang diberikan.

5. Penyelesaian :
Misalkan $a = dx$, $b = dy$ dengan $x \geqslant y$ dan $\text{FPB}(x, y) = 1$
$$dx + 1 \mid dxy + d$$
$$dx + 1 \mid dxy + d - y(dx + 1)$$
$$dx + 1 \mid d - y$$
Perhatikan, itu
$$|dx + 1| = dx + 1 > dx \geqslant \max(d, x) \geqslant \max(d, y) > |d - y|$$
Maka, $d - y = 0 \implies b = d^2$

6. Penyelesaian :
Tentukan permutasi $(a_1, \dots, a_n)$ dari $(1, \dots, n)$ sebagai n-keren jika memenuhi pernyataan soal. Misalkan juga jumlah n permutasi n-keren adalah S_n.
Dengan asumsi $k = n - 1$, kita harus memiliki $1 + 2 + \dots + (n - 1) = a_1 + \dots + a_{n-1}$ atau $1 + 2 + \dots + (n - 1) = a_2 + \dots + a_n$. Ini menyiratkan $n = a_n$ atau $n = a_1$. Lebih lanjut, ini menyiratkan bahwa salah satu dari $(a_1, \dots, a_{n-1})$ atau $(a_2, \dots, a_n)$ adalah $(n - 1)$-keren.
Selanjutnya, kita melihat bahwa setiap permutasi $(n - 1)$-keren dapat dibuat n-keren dengan menambahkan n ke depan atau akhir tupel. Oleh karena itu, kita memiliki
$$S_n = 2S_{n-1}.$$
Dengan mempertimbangkan bahwa $S_1 = 1$, kita memiliki $S_n = 2^{n-1}$ melalui induksi.

7. Penyelesaian :



Misalkan O adalah pusat (ABC), jelas bahwa O adalah titik tengah AB. Misalkan ∠CAB = α, maka ∠CBP = 90° - ∠CBA = α. Diketahui panjang PB = PC, maka ∠BCP = α dan ∠CPB = 180° – 2α. Misalkan N′ adalah refleksi titik M ke titik N. Dari PoP ke (ABC) berlaku MP · MB = MB² = MN · MC = MN′ · MC, maka BN'PC adalah siklik. Anggap BNPN' sebagai jajargenjang dan ∠COB = 2∠CAB = 2α dan

$$\angle CNE = \angle PNN' = \angle BN'N = \angle BN'C = \angle BPC = 180^\circ - 2\alpha.$$

Karena ∠BOE + ∠BNE = 180°, maka CNEO bersifat siklik. Dari sini, diperoleh

$$\angle NCB = \frac{\angle NOB}{2} = \frac{\angle NOE}{2} = \frac{\angle NCE}{2} \implies \angle NCB = \angle ECB.$$

Maka,

$$\begin{aligned}\angle CED &= 180^\circ - \angle ECD - \angle EDC \\ &= 180^\circ - 2\angle MCB - \angle BMC \\ &= \angle MBC - \angle MCB \\ &= \angle PBC - \angle MCB \\ &= \angle PCB - \angle MCB \\ &= \angle PCN,\end{aligned}$$

yang dibuktikan dengan Teorema Segmen Alternatif.

8. Penyelesaian :

Saya di sini hanya untuk menambahkan bahwa Anda dapat menemukan |S(a, b, c)| = 8 apa pun pilihan min{a, b, c} yang Anda pilih, selama bukan 1.

WLOG misalkan a = min{a, b, c} > 1. Sekarang, menyelesaikan persamaan $b^2 - 4ac = (b-2)^2$ menghasilkan $4ac = 4b - 4 \Leftrightarrow b = ac + 1$. Kemudian, $c^2 - 4ab = c^2 - 4a(ac+1) = c^2 - 4a^2c - 4a$, dan Anda menginginkannya menjadi kuadrat. Lengkapi kuadrat-kuadratnya:

$$c^2 - 4a^2c - 4a = (c - 2a^2)^2 - 4(a^4 + a).$$

Kita ingin ini menjadi kuadrat, dan saya akan memfaktorkannya menjadi $2(a^2 + a) \cdot 2(a^2 - a + 1)$. Jadi, kita pilih c sedemikian rupa sehingga

$$c - 2a^2 = (a^2 + a) + (a^2 - a + 1) = 2a^2 + 1 \iff c = 4a^2 + 1.$$

Singkatnya, sekarang saya hanya perlu menguji kasus di mana

$$(a, b, c) = (a, 4a^3 + a + 1, 4a^2 + 1).$$

Dengan sedikit bashing, kita mendapatkan bahwa

$$ax^2 + (4a^3 + a + 1)x + (4a^2 + 1) = (ax + 1)(x + 4a^2 + 1),$$
$$ax^2 + (4a^2 + 1)x + (4a^3 + a + 1) = (x + 2a + 1)(ax + 2a^2 - a + 1).$$

Itu berarti

$$S(a, 4a^3{+}a{+}1, 4a^2{+}1) = \left\{-\frac{1}{a}, -(4a^2+1), -a, -\frac{1}{4a^2+1}, -(2a+1), -\left(2a-1+\frac{1}{a}\right), -\frac{1}{2a+1}, -\frac{a}{2a^2-a+1}\right\}.$$

Sekarang Anda cukup periksa bahwa untuk a > 1, kita memiliki $4a^2 + 1 > 2a + 1 > 2a - 1 + 1/a > a > 1$, yang memastikan bahwa himpunan di atas memiliki ukuran 8.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2024

TINGKAT KABUPATEN/KOTA

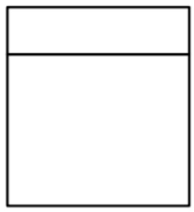
BIDANG MATEMATIKA

WAKTU : 180 MENIT

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Kabupaten/Kota Tahun 2024

1. Sebuah persegi dibagi menjadi 2 persegi panjang seperti terlihat pada gambar. Diketahui hasil penjumlahan kedua keliling persegi panjang tersebut adalah 60, maka luas persegi adalah …



2. Diketahui ada 6 pilihan jalan yang dapat digunakan untuk berpergian dari kota A ke kota B dan ada 8 pilihan jalan yang dapat digunakan untuk berpergian dari kota B ke kota C, Jika seseorang akan berpergian dari kota A ke kota C melalui kota B dan pulang kembali lagi ke kota A melalui jalan jalan yang berbeda dari ketika saat pergi, banyaknya cara memilih jalan yang dapat dilalui adalah …

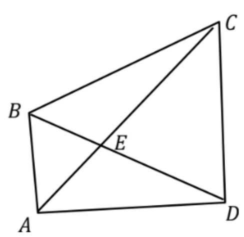
3. Pada papan tertulis 90 bilangan asli 1,1,..,1,a,b (ada sebanyak 88 bilangan 1). Hasil penjumlahan seluruh bilangan di papan adalah A dan demikian juga hasil perkalian semua bilangan di papan adalah A. Nilai A adalah …

4. Misalkan a, b bilangan bulat positif yang tidak memiliki faktor persekutuan positif selain 1. Jika berlaku $\frac{1+2+3+\cdots+104}{3+4+5+\cdots+106} = \frac{a}{b}$, maka nilai $a + b$ adalah …

5. Bilangan OSK adalah bilangan 4 angka yang tidak di mulai dengan angka 0 dan hasil penjumlahan semua digitnya adalah 8. Sebagai contoh, 2024 merupakan bilangan OSK. Banyaknya bilangan OSK adalah …

6. Misalkan $u_1, u_2, u_3, \ldots$ suatu barisan geometri dengan $u_1 > u_2$. Jika $u_2 = 8$ dan $u_5 + u_7 = \frac{17u_6}{4}$. Nilai dari u_1 adalah …

7. Diberikan segiempat $ABCD$ dengan luas segitiga AED sama dengan luas segitiga BEC. Jika $AB = 50$, $AE = 45$ dan $AC = 108$, maka CD adalah …

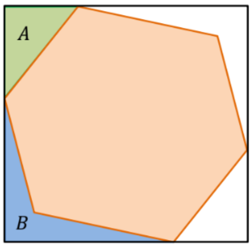


8. Banyaknya bilangan dua digit $\overline{ab}$ dengan $a, b \neq 0$ sehingga $\overline{ab} + \overline{ba}$ merupakan bilangan kelipatan 66 adalah …

9. Misalkan k adalah bilangan bulat positif terkecil kelipatan 2024 yang memiliki 28 faktor positif. Sisa hasil bagi k oleh 100 adalah …

10. Misalkan x, y bilangan real positif dengan $x > y$. Jika diketahui bahwa $x^2 + y^2 = \left(\frac{545}{272}\right)xy$, maka $\frac{x+y}{x-y}$ adalah …

11. Suatu segienam beraturan disisipkan kedalam sebuah persegi panjang seperti terlihat pada gambar dibawah ini, jika luas A dan B berturut-turut adalah 24 dan 23, maka luas segienam beraturan adalah …



12. Banyak himpunan bagian A dari $\{24, 25, 26, \dots, 35\}$ sehingga hasil penjumlahan unsur terbesar dan terkecil dari A sama dengan 59 adalah …

13. Untuk setiap bilangan asli n, misalkan $f(n)$ menyatakan faktor ganjil terbesar dari n dan $p(n) = f(n) + f(n+1) + \dots + f(2n)$. Jika $p(n) = 8145$, maka n adalah …

14. Diberikan suku banyak $P(x) = x^3 + Dx^2 + Ex + 1$ dan $P(-1) = 4$. Jika a, b, c merupakan akar-akar dari $P(x) = 0$ dan memenuhi $(a^2 - bc)(b^2 - ca)(c^2 - ab) = 40$, Maka nilai dari $(D + E)^2$ adalah …

15. Banyaknya barisan bilangan bulat positif dengan enam suku $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ yang mungkin sehingga $1 \le a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \le 4$ dan tidak ada dua suku berurutan yang jumlahnya 4 adalah …

16. Diberikan sebuah segitiga ABC yang siku-siku pada sudut B, Lingkaran ω merupakan lingkaran dalam segitiga ABC yang menyinggung sisi BC pada titik D. Titik E terletak pada ω sehingga PE merupakan diameter dari ω. Perpanjangan garis AE memotong ω kedua kalinya pada titik F, dan memotong sisi BC pada titik G. Apabila $EF = 3$ dan $FG = 4$, maka panjang AE dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{p}{r}\sqrt{q}$, dengan p, q, r merupakan bilangan bulat positif, satu-satunya faktor kuadrat dari q adalah 1 dan $FPB(p, r) = 1$. Nilai dari $p + q + r$ adalah …

17. Diketahui a, b, c bilangan real positif yang memenuhi $a + b + c = \frac{32}{a} + \frac{32}{b} + \frac{32}{c} = 24$. Nilai terbesar yang mungkin dicapai oleh $\frac{a^2+32}{a}$ adalah …

18. Untuk setiap bilangan real x, notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x. Sebagai contoh $\lfloor 1{,}1 \rfloor = 1$, $\lfloor 3 \rfloor = 3$ dan sebagainya. Jika ada tepat sebanyak 1000 bilangan berbeda pada barisan

$$\left\lfloor \frac{1^2}{2024} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{2^2}{2024} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{3^2}{2024} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{n^2}{2024} \right\rfloor$$

maka n = ...

19. Banyaknya pemetaan f: $\{1,2,3,4,5\} \rightarrow \{1,2,3,4,5\}$ sehingga $f(f(x)) \in \{2,4\}$ untuk setiap $x \in \{1,2,3,4,5\}$ adalah ...

20. Pada ΔABC, titik D dan E terletak pada sisi BC sehingga B, D, E, C terletak pada urutan tersebut. Diketahui bahwa $BD : DE : EC$ = 4 : 2 : 5 dan garis-garis AD dan AF membagi tiga $\angle BAC$ sama besar. Garis AD dan AE masing-masing memotong lingkaran luar ΔABC pada titik F dan G. Nilai dari $\frac{DF}{EG}$ dapat dinyatakan dalam bentuk $\sqrt{\frac{p}{q}}$ untuk suatu bilangan bulat positif p dan q yang saling relatif prima, nilai dari $p + q$ adalah ...

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2024

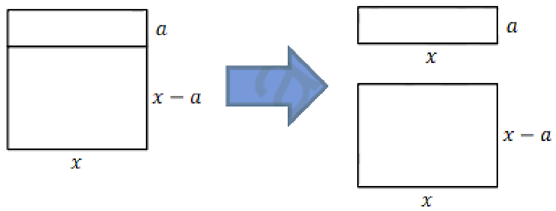
TINGKAT KABUPATEN/KOTA

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Kabupaten/Kota Tahun 2024

1. Penyelesaian:
   Perhatikan ilustrasi berikut!

   Misal Panjang sisi persegi adalah x dan lebar persegi Panjang bagian atas adalah a. Sehingga diperoleh:
   - Keliling persegi Panjang atas adalah $2(x+a)=2x+2a$
   - Keliling persegi Panjang bawah adalah $2\big(x+(x-a)\big)=4x-2a$

   Pada soal diperoleh informasi bahwa hasil penjumlahan kedua keliling persegi Panjang adalah 60, sehingga:

   $$\begin{aligned} & (2x+2a)+(4x-2a)=60 \\ \Leftrightarrow & \qquad 6x=60 \\ \Leftrightarrow & \qquad x=10 \end{aligned}$$

   Jadi, luas persegi tersebut adalah $x^2=10^2=100$.

2. Penyelesaian:
   Perhatikan bahwa ada 6 pilihan untuk berpergian dari kota A dan B dan ada 8 pilihan jalan yang dapat digunakan untuk berpergian dari kota B ke kota C. Sehingga banyak pilihan jalan dari kota A ke kota C melalui kota B ada sebanyak $6\times 8=48$ pilihan jalan.
   Sedangkan, saat pulang kembali ke kota A melalui jalan yang berbeda dari saat pergi, maka banyak jalan dari kota C ke kota B menjadi 7 pilihan jalan, dan banyak pilihan jalan dari kota B ke kota A ada sebanyak 5 pilihan jalan. Sehingga banyak pilihan jalan pulang dari kota C ke kota A melalui kota B ada sebanyak $7\times 5=35$ pilihan jalan.
   Jadi, banyak cara memilih jalan yang dapat dilalui untuk pergi dan pulang ada sebanyak $48\times 35=1680$ pilihan jalan.

3. Penyelesaian:
   Perhatikan bahwa hasil penjumlahan seluruh bilangan di papan adalah A, sehingga diperoleh

   $$A=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{ada\ 88\ suku}+a+b=88+a+b$$

   Sedangkan, hasil perkalian semua bilangan di papan adalah A, sehingga diperoleh

   $$A=\underbrace{1\times 1\times\ldots\times 1}_{ada\ 88\ faktor}\times a\times b=ab$$

Perhatikan bahwa nilai dari hasil penjumlahan dan hasil perkalian bilangan-bilangan di papan adalah sama, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} & 88+a+b=ab \\ \Leftrightarrow\ & ab-a-b=88 \\ \Leftrightarrow\ & a(b-1)-b=88 \text{ (tambahkan kedua ruas dengan 1)} \\ \Leftrightarrow\ & a(b-1)-b+1=89 \\ \Leftrightarrow\ & a\cdot(b-1)-1\cdot(b-1)=89 \text{ (gunakan sifat distribusi)} \\ \Leftrightarrow\ & (a-1)(b-1)=89 \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa 89 adalah bilangan prima, sehingga factor 89 hanya 1 dan 89.
Maka kita akan bagi kasus sebagai berikut:

- Untuk $(a-1)-1 \Rightarrow a=2$ dan $(b-1)=89 \Rightarrow b=90$, sehingga diperoleh $(a,b)=(2,90)$.
- Untuk $(a-1)=89 \Rightarrow a=90$ dan $(b-1)=1 \Rightarrow b=2$, sehingga diperoleh $(a,b)=(90,2)$

Jadi, nilai $A=ab=2\times 90=180$.

4. Penyelesaian:
Perhatikan,

$$\begin{aligned} & \frac{1+2+3+\cdots+104}{3+4+5+\cdots+106}=\frac{a}{b} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1+2+3+\cdots+104}{1+2+3+4+5+\cdots+106-(1+2)}=\frac{a}{b} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\frac{104\times 105}{2}}{\frac{106\times 107}{2}-3}=\frac{a}{b} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{5640}{5668}=\frac{a}{b} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{105}{109}=\frac{a}{b} \end{aligned}$$

Jadi, diperoleh nilai $a=105$ dan $b=109$, sehingga nilai $a+b=105+109=214$.

5. Penyelesaian:
Perhatikan, misal bilangan OSK yaitu bilangan 4 angka tersebut adalah $\overline{abcd}$, maka diperoleh jumlah semua digitnya adalah $a+b+c+d=8$.
Perhatikan juga bahwa bilangan OSK tersebut tidak dapat dimulai dengan angka 0, maka kita akan bagi kasus menjadi dua bagian, yaitu:

- a mungkin bernilai 0

$$a+b+c+d=8$$
$$a,b,c,d\geq 0$$

Maka dengan menggunakan kombinasi dengan perulangan diperoleh banyak pasangan (a,b,c,d) yang memenuhi adalah ${}_{11}C_3=\frac{11!}{8!\cdot 3!}=165$

- a bernilai 0

$$b+c+d=8$$

$$b, c, d \geq 0$$

Maka dengan menggunakan kombinasi dengan perulangan diperoleh banyak pasangan $(0, b, c, d)$ yang memenuhi adalah ${}_{10}C_2 = \frac{10!}{8!\cdot 2!} = 45$

Dengan menggunakan prinsip inklusi-eksklusi maka diperoleh banyak pasangan (a, b, c, d) yang memenuhi adalah 165 – 45 = 120.

6. Penyelesaian:

perhatikan bentuk umum suku ke-n barisan geometri adalah $U_n = ar^{n-1}$, sehingga diperoleh

- $u_2 = 8 \Rightarrow ar = 8.$
- $u_5 + u_7 = \frac{17u_6}{4} \Rightarrow \quad ar^4 + ar^6 = \left(\frac{17}{4}\right)ar^5$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow 4(ar^4 + ar^6) = 17ar^5 \text{ (bagi kedua ruas dengan } ar^4\text{)} \\ &\Leftrightarrow 4(1 + r^2) = 17r \\ &\Leftrightarrow 4r^2 - 17r + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow (r-4)(4r-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow r - 4 = 0 \vee 4r - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow r = 4 \vee \quad r = \tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

Ingat bahwa karena $u_1 > u_2$ sehingga $5 < 1$. Jadi nilai r yang memenuhi layer hanya $r = \frac{1}{4}$.

Perhatikan sekali lagi karena $ar = 8 \Rightarrow a\left(\frac{1}{4}\right) = 8$

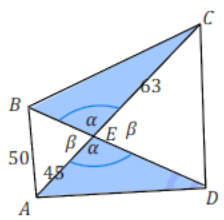
$$\Leftrightarrow a = 32$$

Jadi, nilai $u_1 = a = 32$.

7. Penyelesaian:

Perhatikan, karena $AE = 45$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} AC = 108 \Rightarrow AE + EC &= 108 \\ \Leftrightarrow 45 + EC &= 108 \\ \Leftrightarrow EC &= 63 \end{aligned}$$



Perhatikan juga bahwa karena $[AED] = [BEC]$ dan $\angle AED = \angle BEC = \alpha$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} [AED] = [BEC] &\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot AE \cdot ED \cdot \sin\angle AED = \frac{1}{2}\cdot BE \cdot EC \cdot \sin\angle BEC \\ &\Leftrightarrow AE \cdot ED = BE \cdot EC \\ &\Leftrightarrow \frac{AE}{BE} = \frac{EC}{ED} \end{aligned}$$

Sehingga, karena $\frac{AE}{BE} = \frac{EC}{ED}$ dan $\angle ABE = \angle DEC = \beta$, maka $\Delta ABE \sim \Delta DEC$, akibatnya $\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{CD}$.

Diperoleh,

$$\frac{AE}{EC}=\frac{AB}{CD}\Rightarrow \frac{45}{63}=\frac{50}{CD}$$
$$\Leftrightarrow \frac{5}{7}=\frac{50}{CD}$$
$$\Leftrightarrow CD=50\times\frac{7}{5}$$
$$\Leftrightarrow CD=70$$

Jadi, Panjang CD adalah 70.

8. Penyelesaian:

Perhatikan bahwa $\overline{ab}+\overline{ba}=10a+b+10b+a=11a+11b=11(a+b)$.
Perhatikan juga bahwa $66|11(a+b)\Rightarrow 6|(a+b)$.
Karena $1\le a,b\le 9$, maka $2\le a+b\le 18$. Sehingga karena $6|(a+b)$, maka $(a+b)=\{6,12,18\}$. Sehingga,

- Untuk $a+b=6$, maka $(a,b)=\{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$.
  Ada 5 pasangan (a,b) yang memenuhi untuk $a+b=6$.
- Untuk $a+b=12$, maka (a,b) = $\{(3,9),(4,8),(5,7),(6,6),(7,5),(8,4),(9,3)\}$.
  Ada 7 pasangan (a,b) yang memenuhi untuk $a+b=12$.
- Untuk $a+b=18$, maka $(a,b)=\{(9,9)\}$.
  Hanya ada 1 pasangan (a,b) yang memenuhi untuk $a+b=18$.

Jadi, total banyak pasangan (a,b) yang memenuhi adalah 5 + 7 + 1 = 13.

9. Penyelesaian:

Perhatikan, karena k adalah bilangan bulat positif terkecil kelipatan 2024, maka untuk m bilangan bulat positif $k=2024m$.
Perhatikan juga bahwa $2024=2^3\times 11\times 23$, maka banyak factor bulat positif dari 2024 adalah (3 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = $4\cdot 2\cdot 2=16$ faktor.
Dan mengingat $k=2024m=2^3\times 11\times 23\times m$ maka banyak factor bulat dari k tergantung dari nilai m. Untuk sederhananya akan kita bagi kasus menjadi 2 bagian sebagai berikut:

- Untuk m yang memiliki factor prima selain 2, 11, dan 23, maka banyak factor minimal dari m adalah 2, saat $m=n^1$ dengan n bilangan prima selain 2, 11, dan 23.
  Jadi, banyak factor bulat positif k adalah $2\times 16=32$, dan ini lebih dari 28, sehingga kasus ini tidak memenuhi.
- Untuk m yang memiliki factor prima hanya 2, 11 atau 23, maka untuk a,b,c bilangan bulat non negative diperoleh $m=2^a\times 11^b\times 23^c$, dan $k=2^{3+a}\times 11^{1+b}\times 23^{1+c}$ sehingga banyak factor dari k adalah $(3+a+1)(1+b+1)(1+c+1)=(4+a)(2+b)(2+c)$.
  Dengan memandang $28=2^2\times 7$ dan agar banyak factor k sebanyak 28, maka mudah diperoleh bahwa agar $(4+a)(2+b)(2+c)=28=2\times 2\times 7$, maka $(a,b,c)=(3,0,0)$.
  Jadi, $k=2^6\times 11\times 23=16192\equiv 92$ (mod 100).

Jadi, sisa hasil bagi k oleh 100 adalah 92.

10. Penyelesaian:

Perhatikan, karena $x^2+y^2=\left(\frac{545}{272}\right)xy$ sehingga diperoleh

$$(x\pm y)^2=x^2+y^2\pm 2xy \Rightarrow (x\pm y)^2=\left(\frac{545}{272}\right)xy\pm 2xy$$

Maka

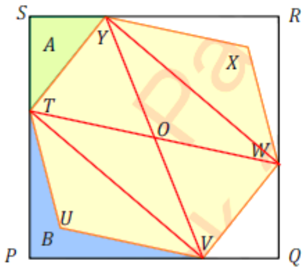
$$\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2=\frac{\left(\frac{545}{272}\right)xy+2xy}{\left(\frac{545}{272}\right)xy-2xy}=\frac{\left(\frac{545+544}{272}\right)xy}{\left(\frac{545-544}{272}\right)xy}=1089$$

Jadi,

$$\frac{x+y}{x-y}=\sqrt{1089}=33$$

11. Penyelesaian:

Perhatikan gambar berikut,



Perhatikan TV. Mudah dibuktikan bahwa $\angle VTY=90^o$.

Jadi, $\angle SYT=\angle PTV$. Oleh karena itu, $\Delta SYT\sim\Delta PTV$.

Misal sisi segienam beraturan adalah a, maka $TV=a\sqrt{3}$.

Akibatnya,

$$\frac{[PTV]}{[SYT]}=\left(\frac{a\sqrt{3}}{a}\right)^2 \Rightarrow \frac{23+[TUV]}{24}=3$$
$$\Leftrightarrow 23+[TUV]=72$$
$$\Leftrightarrow [TUV]=49$$

Mudah dibuktikan juga bahwa jika O adalah titik pusat segienam beraturan, maka $\Delta UTV\cong\Delta OTV$ dan karena $TO=OW$, maka $[TOV]=[OVT]=[TUV]$.

Mudah juga dibuktikan bahwa luas segienam beraturan adalah 6 kali luas TUV.

Jadi, $[TUVWXY]=6\times[TUV]=6\times 49=294$.

12. Penyelesaian:

Perhatikan himpunan bagian A berbentuk $\{x_{min},\dots,x_{max}\}$ dengan $x_{max}+x_{min}=59$ yang dapat dibagi kasus menjadi:

- Untuk $x_{min}=24$ dan $x_{max}=35$, sehingga $\{24,35\}\subseteq A\subseteq\{24,\dots,35\}$

  Banyak himpunan bagian A untuk kasus ini sama dengan banyak himpunan bagian dari himpunan $\{25,26,\dots,34\}$ yaitu sebanyak 2^{10}.

- Untuk $x_{min} = 25$ dan $x_{max} = 34$, sehingga $\{25,34\} \subseteq A \subseteq \{25, \dots, 34\}$
  Banyak himpunan bagian A untuk kasus ini sama dengan banyak himpunan bagian dari himpunan $\{26,27, \dots, 33\}$ yaitu sebanyak 2^8.
- Untuk $x_{min} = 26$ dan $x_{max} = 33$, sehingga $\{26,33\} \subseteq A \subseteq \{26, \dots, 33\}$
  Banyak himpunan bagian A untuk kasus ini sama dengan banyak himpunan bagian dari himpunan $\{27,28, \dots, 32\}$ yaitu sebanyak 2^6.
- Untuk $x_{min} = 27$ dan $x_{max} = 32$, sehingga $\{27,32\} \subseteq A \subseteq \{27, \dots, 32\}$
  Banyak himpunan bagian A untuk kasus ini sama dengan banyak himpunan bagian dari himpunan $\{28,29,30,31\}$ yaitu sebanyak 2^4.
- Untuk $x_{min} = 28$ dan $x_{max} = 31$, sehingga $\{28,31\} \subseteq A \subseteq \{28, \dots, 31\}$
  Banyak himpunan bagian A untuk kasus ini sama dengan banyak himpunan bagian dari himpunan $\{29,30\}$ yaitu sebanyak 2^2.
- Untuk $x_{min} = 29$ dan $x_{max} = 30$, sehingga $\{29,30\} \subseteq A \subseteq \{29,30\}$
  Banyak himpunan bagian A untuk kasus ini sama dengan banyak himpunan bagian dari himpunan $\{\}$ yaitu sebanyak 2^0.

Jadi, banyak total himpunan bagian A yang memenuhi dari semua kasus tersebut adalah sebanyak $2^{10} + 2^8 + 2^6 + 2^4 + 2^2 + 2^0 = 1024 + 256 + 64 + 16 + 4 + 1 = 1365$.

13. Penyelesaian:
Perhatikan untuk setiap bilangan ganjil, maka factor ganjil terbesar adalah bilangan itu sendiri, sehingga $f(2n-1) = 2n-1$. Dan untuk setiap bilangan genap $2n$, maka factor ganjil terbesar dari $2n$ akan sama dengan bilangan factor ganjil terbesar dari n, sehingga $f(2n) = f(n)$.
Perhatikan

$$\begin{array}{rl} p(n+1) = & f(n+1) + f(n+2) + \cdots + f(2n) + f(2n+1) + f(2n+2) \\ p(n) = & f(n) + f(n+1) + f(n+2) + \cdots + f(2n) \\ \hline p(n+1) - p(n) = & -f(n) + f(2n+1) + f(2n+2) \end{array} \; -$$

$$p(n+1) - p(n) = -f(n) + (2n+1) + f\left(\frac{2n+2}{2}\right) = [f(n+1) - f(n)] + (2n+1)$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} & p(n) = p(n) - p(n-1) + p(n-1) - p(n-2) + \cdots + p(2) - p(1) + p(1) \\ \Rightarrow\ & p(n) = [f(n) - f(n-1)] + (2n-1) + [f(n-1) - f(n-2)] + (2n-3) + \cdots + [f(2) - f(1)] + 3 + p(1) \\ \Leftrightarrow\ & p(n) = \big(f(n) - f(1)\big) + \big(3 + 5 + \cdots + (2n-1)\big) + f(1) + f(2) \\ \Leftrightarrow\ & p(n) = f(n) + \big(1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)\big) \\ \Leftrightarrow\ & p(n) = f(n) + n^2 \end{aligned}$$

Perhatikan, jika n adalah bilangan ganjil, maka $f(n) = n$, sedangkan apabila n adalah bilangan genap maka, $1 \le f(n) \le \frac{n}{2}$. Sehingga, $n^2 < p(n) \le n^2 + n$.
Mudah diperiksa bahwa $n = 90$ memenuhi karena $p(90) = f(90) + 90^2 = 45 + 8100 = 8145$.
Jadi, bilangan n yang memenuhi adalah 90.

14. Penyelesaian:

Perhatikan suku banyak $P(x) = x^3 + Dx^2 + Ex + 1$, jika a, b, c adalah akar-akar $P(x) = 0$ maka dari teorema Vieta diperoleh

- $a + b + c = -D$
- $ab + ac + bc = E$
- $abc = -1$

Perhatikan juga bahwa $P(-1) = 4$, sehingga

$$P(-1) = 4 \Rightarrow -1 + D - E + 1 = 4$$
$$\Leftrightarrow D - E = 4$$

Ingat juga bahwa $a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ac)(a + b + c) + 3abc$. Sedangkan, dari $(a^2 - bc)(b^2 - ca)(c^2 - ab) = 40$ diperoleh

$$\begin{aligned}
& (a^2 - bc)(b^2 - ca)(c^2 - ab) = 40 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{a\left(a^2 + \frac{1}{a}\right) b\left(b^2 + \frac{1}{b}\right) c\left(c^2 + \frac{1}{c}\right)}{abc} = 40 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{(a^3 + 1)(b^3 + 1)(c^3 + 1)}{abc} = 40 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{1 + a^3 + b^3 + c^3 + a^3b^3 + a^3c^3 + b^3c^3 + a^3b^3c^3}{abc} = 40 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{1 + a^3 + b^3 + c^3 + a^3b^3 + a^3c^3 + b^3c^3 + (-1)}{-1} = 40 \\
\Leftrightarrow\quad & -(a^3 + b^3 + c^3) - (a^3b^3 + a^3c^3 + b^3c^3) = 40
\end{aligned}$$

Perhatikan rumus berikut

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3(a + b + c)(ab + bc + ac) + 3abc = -D^3 + 3DE - 3$$

Maka

$$a^3b^3 + a^3c^3 + b^3c^3 = (ab + bc + ac)^3 - 3(ab + bc + ac)(a^2bc + ab^2c + abc^2) + 3(abc)^2$$

Maka

$$a^3b^3 + a^3c^3 + b^3c^3 = (ab + bc + ac)^3 - 3(ab + bc + ac)(a + b + c) + 3(abc)^2$$

Jadi, $a^3b^3 + a^3c^3 + b^3c^3 = E^3 - 3DE + 3$

Maka kita lanjutkan lagi perhitungannya

$$
\begin{aligned}
& (a^2-bc)(b^2-ca)(c^2-ab)=40 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{a\left(a^2+\frac{1}{a}\right)b\left(b^2+\frac{1}{b}\right)c\left(c^2+\frac{1}{c}\right)}{abc}=40 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{(a^3+1)(b^3+1)(c^3+1)}{abc}=40 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1+a^3+b^3+c^3+a^3b^3+a^3c^3+b^3c^3+a^3b^3c^3}{abc}=40 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1+a^3+b^3+c^3+a^3b^3+a^3c^3+b^3c^3+(-1)}{-1}=40 \\
\Leftrightarrow\ & -(a^3+b^3+c^3)-(a^3b^3+a^3c^3+b^3c^3)=40 \\
\Leftrightarrow\ & D^3-3DE+3-E^3+3DE-3=40 \\
\Leftrightarrow\ & D^3-E^3=40 \\
\Leftrightarrow\ & (D-E)(D^2+DE+E^2)=40 \\
\Leftrightarrow\ & 4(D^2+DE+E^2)=40 \\
\Leftrightarrow\ & (D^2+DE+E^2)=10 \\
\Leftrightarrow\ & ((E+4)^2+(E+4)E+E^2)=10 \\
\Leftrightarrow\ & (E^2+8E+16+E^2+4E+E^2)=10 \\
\Leftrightarrow\ & 3E^2+12E+16=10 \\
\Leftrightarrow\ & 3E^2+12E=-6 \\
\Leftrightarrow\ & E^2+4E=-2
\end{aligned}
$$

Jadi,

$(D+E)^2=(D-E+2E)^2=(4+2E)^2=4(E^2+4E+4)=4\times(-2+4)=4\times 2=8.$

15. Penyelesaian:

Perhatikan, didefinisikan $f_k(n)$ = banyak barisan $a_1, a_2, \dots, a_n$ yang memenuhi soal dengan $a_1=k$ dan $S_n=f_1(n)+f_2(n)+f_3(n)+f_4(n)$.

$$
\begin{aligned}
f_4(n) &= f_1(n-1)+f_2(n-1)+f_3(n-1)+f_4(n-1) \\
f_3(n) &= f_2(n-1)+f_3(n-1)+f_4(n-1) \\
f_2(n) &= f_1(n-1)+f_3(n-1)+f_4(n-1) \\
f_1(n) &= f_1(n-1)+f_2(n-1)+f_4(n-1)
\end{aligned}
$$

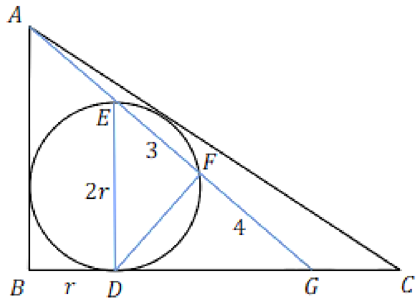
Sehingga,

$$
\begin{aligned}
f_1(n)+f_2(n)+f_3(n)+f_4(n) &= 3\big(f_1(n-1)+f_2(n-1)+f_3(n-1)+f_4(n-1)\big)+f_4(n-1) \\
S_n &= 3S_{n-1}+f_1(n-2)+f_2(n-2)+f_3(n-2)+f_4(n-2) \\
S_n &= 3S_{n-1}+S_{n-2}
\end{aligned}
$$

Karena $S_1=4$ dan $S_2=13$, maka

$$
\begin{aligned}
S_3 &= 3(13)+4=43 \\
S_4 &= 3(43)+13=142 \\
S_5 &= 3(142)+43=469 \\
S_6 &= 3(469)+142=\boxed{1549}
\end{aligned}
$$

16. Penyelesaian:
    Perhatikan gambar berikut.



DE adalah diameter lingkaran ω. $DE = 2r$.
Akibatnya $\angle DFE = 90^o$, dan karena BC merupakan garis singgung lingkaran ω, maka $\angle GDE = 90^o$.
Sehingga, $\Delta EFD \sim \Delta DFG \sim \Delta EDG$.
Maka berlaku, $DE^2 = EF \times EG \Rightarrow DE^2 = 3 \times 7$

$$\Leftrightarrow DE = \sqrt{21}$$

Sehingga, $DE = 2r = \sqrt{21} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{21}}{2}$.

Perhatikan juga dengan POP (Power of Point) diperoleh
$GD^2 = GF \times GE \Rightarrow GD^2 = 4 \times 7$

$$\Leftrightarrow GD = \sqrt{28}$$

Perhatikan juga bahwa karena $ED \perp BC$ dan $AB \perp BC$ maka $ED||AB$, sehingga $\Delta ABG \sim \Delta EDG$, sehingga berlaku

$$\begin{aligned}
\frac{GE}{GA} = \frac{GD}{GB} \Rightarrow \quad & \frac{7}{7+AE} = \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{28} + \frac{\sqrt{21}}{2}} \\
\Leftrightarrow\ & 7\sqrt{28} + \sqrt{28}\,AE = 7\sqrt{28} + \frac{7\sqrt{21}}{2} \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{28}\,AE = \frac{7\sqrt{21}}{2} \\
\Leftrightarrow\ & AE = \frac{7\sqrt{21}}{2\sqrt{28}} \\
\Leftrightarrow\ & AE = \frac{7\sqrt{3}}{2\sqrt{4}} \\
\Leftrightarrow\ & AE = \frac{7\sqrt{3}}{4}
\end{aligned}$$

Sehingga, karena $AE = \frac{7}{4}\sqrt{3} = \frac{p}{r}\sqrt{q}$, maka diperoleh nilai $p = 7, q = 3$ dan $r = 4$.
Jadi, $p + q + r = 7 + 3 + 4 = 14$.

17. Penyelesaian:
    Perhatikan bahwa karena $a + b + c = 24 \Rightarrow b + c = 24 - a$ dan dengan menggunakan ketaksamaan CS-Engel, diperoleh $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{(1+1)^2}{b+c}$, sehingga

$$\frac{3}{4}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{1}{a}+\frac{(1+1)^2}{b+c}=\frac{1}{a}+\frac{4}{24-a}=\frac{24+3a}{24a-a^2}$$

Sehingga diperoleh $\frac{3}{4}\geq\frac{24+3a}{24a-a^2}$, akibatnya

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}\geq\frac{24+3a}{24a-a^2}\Rightarrow 72a-3a^2&\geq 96+12a\\ \Leftrightarrow\qquad 60a&\geq 3a^2+96\\ \Leftrightarrow\qquad 20&\geq\frac{a^2+32}{a}\end{aligned}$$

Maka kesamaan CS-Engel akan diperoleh saat $b=c$, sehingga

$$(a,b,c)=\left(10+2\sqrt{17},7-\sqrt{17},7-\sqrt{17}\right)$$

Atau

$$(a,b,c)=\left(10-2\sqrt{17},7+\sqrt{17},7+\sqrt{17}\right)$$

Sehingga nilai maksimal dari $\frac{a^2+32}{a}$ adalah 20.

18. Penyelesaian:

Perhatikan, untuk $0\leq\delta<1$, maka untuk setiap x bilangan real berlaku $x=\lfloor x\rfloor+\delta\Leftrightarrow\lfloor x\rfloor=x-\delta$.

Perhatikan juga misal $f(n)=\left\lfloor\frac{n^2}{2024}\right\rfloor=\frac{n^2}{2024}-\delta_n$.

Perhatikan juga bahwa nilai $f(n+1)-f(n)$ seiring berjalannya nilai n selalu naik, sehingga perhatikan apabila $f(n+1)-f(n)>1$, maka nilai $f(n+1)$ dan $f(n)$ adalah dua nilai yang berbeda, sehingga kita akan mencoba menentukan nilai n yang memenuhi $f(n+1)-f(n)=1$ sebagai pembatasnya dengan $(\delta_{n+1}-\delta_n)\to 0$, yaitu

$$\begin{aligned}f(n+1)-f(n)=1\Rightarrow\left(\frac{(n+1)^2}{2024}-\delta_{n+1}\right)-\left(\frac{n^2}{2024}-\delta_n\right)&=1\\ \Leftrightarrow\left(\frac{(n+1)^2}{2024}-\frac{n^2}{2024}\right)-(\delta_{n+1}-\delta_n)&=1\\ \Leftrightarrow\qquad\frac{2n+1}{2024}-1&=\delta_{n+1}-\delta_n\\ \Leftrightarrow\qquad\frac{2n+1}{2024}-1&>0\\ \Leftrightarrow\qquad\frac{2n-2023}{2024}&>0\\ \Leftrightarrow\qquad n&>1011{,}5=1012\end{aligned}$$

Jadi, akan kita bagi kasus menjadi 2 bagian, yaitu:

- Untuk $1\leq n\leq 1012$, maka nilai $f(n+1)$ dan $f(n)$ belum dapat dipastikan adalah dua nilai yang berbeda. Dan karena $\left\lfloor\frac{1012^2}{2024}\right\rfloor=506$, maka jelas dari $1\leq n\leq 1012$ diperoleh $0\leq f(n)\leq 506$. Sehingga ada 507 bilangan berbeda pada barisan tersebut.
- Untuk $n>1012$, maka nilai $f(n+1)$ dan $f(n)$ adalah dua nilai yang berbeda. Agar terdapat 1000 bilangan berbeda pada barisan tersebut, maka haruslah ada 1000 – 507 = 493 bilangan berbeda untuk $n>1012$.

Jadi, dari dua kasus tersebut dapat diperoleh nilai n yang memenuhi adalah 1012 + 493 = 1505.

19. Penyelesaian:

Perhatikan, didefinisikan $Im(f)$ sebagai himpunan semua bilangan $x \in \{1,2,3,4,5\}$ yang memiliki prapeta.

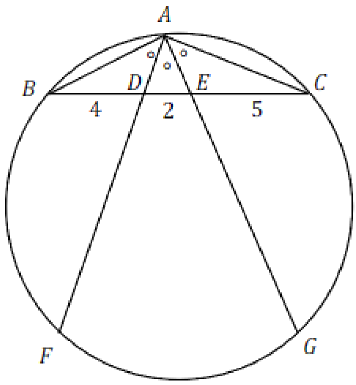
- Kasus 1: $|Im(f)| = 1$: f merupakan fungsi konstan, maka ada dua solusi yaitu $f(x) = 2$ untuk setiap $x \in \{1,2,3,4,5\}$ dan $f(x) = 4$ untuk setiap $x \in \{1,2,3,4,5\}$
- Kasus 2: $|Im(f)| = 2$:
  - Subkasus 1: Jika $Im(f) = a, b$ dengan $a \in \{2,4\}$ dan $b \in \{1,3,5\}$.
    WLOG $a = 2, b = 1$.
    Maka $f(f(x)) = 2$ untuk setiap x, maka $f(1) = f(2) = 2$. Lalu, nilai $f(3), f(4), f(5)$ bisa dipilih dari himpunan {1, 2}, dengan syarat 1 memiliki prapeta. Maka ada $2^3 - 1 = 7$ fungsi yang memenuhi.
    $\therefore$ Pada subkasus ini ada $\binom{2}{1}\binom{3}{1}7 = 42$ fungsi yang memenuhi.
  - Subkasus 2: Jika $Im(f) = \{2,4\}$
    Nilai $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$ dipilih dari {2,4} dengan syarat 2 dan 4 memiliki prapeta.
    Maka ada $2^5 - 2 = 30$ fungsi yang memenuhi.
- Kasus 3: $|Im(f)| = 3$:
  - Subkasus 1: Jika $Im(f) = \{a, b, c\}$ dengan $a \in \{2,4\}$ dan $b, c \in \{1,3,5\}$.
    WLOG $a = 2, b = 1, c = 3$, karena $f(f(x)) \in \{2,4\}$ dan $f(x) \in Im(f)$ untuk setiap x, sehingga $f(f(x)) = 2$ untuk setiap x. Lalu, karena ada x sehingga $f(x) = 1$ dan begitu juga untuk $f(x) = 2$ dan $f(x) = 3$, maka $f(1) = f(2) = f(3) = 2$. Lalu, $(f(4), f(5)) = (1,3)$ atau $(3,1)$.
    Maka dari itu, pada subkasus ini ada $\binom{2}{1}\binom{3}{2}2 = 12$ fungsi yang memenuhi.
  - Subkasus 2: Jika $Im(f) = \{2,4,c\}$ dengan $c = \{1,3,5\}$.
    WLOG $c = 1$, maka $Im(f) = \{1,2,4\}$. Karena $f(f(x)) \in \{2,4\}$, maka $f(1) \in \{2,4\}$.
    WLOG $f(1) = 2$, maka $f(2) \in \{2,4\}$.
    - Subsubkasus 1: $f(2) = 2$, lalu cek $f(4) \in \{1,2,4\}$
      Jika $f(4) = 1$, maka $f(3) = 4$ atau $f(5) = 4$, maka $f(f(3)) = 1$ atau $f(f(5)) = 1$. Tidak memenuhi.
      Jika $f(4) = 2$, maka $\{f(3), f(5)\} = \{1,4\}$, ada 2 fungsi yang memenuhi.
      Jika $f(4) = 4$, maka $f(3), f(5) \in \{1,2,4\}$ dengan syarat 1 memiliki prapeta. Maka ada $3^2 - 2^2 = 5$ fungsi yang memenuhi.
      Maka, ada 2 + 5 = 7 fungsi di subsubkasus 1.
    - Subsubkasus 2: $f(2) = 4$, maka $f(3) = 1$ atau $f(5) = 1$ sehingga ada 5 kemungkinan nilai $(f(3), f(5))$ yaitu $(2,1), (4,1), (1,2), (1,4)$ dan $(1,1)$. Lalu $f(4)$ dapat bernilai 2 atau 4.
      Maka ada $5 \times 2 = 10$ fungsi yang memenuhi.

Maka pada subkasus ini terdapat $3 \times 2 \times (10 + 7) = 102$ fungsi yang memenuhi.

- Kasus 4: $|Im(f)| = 4$:
  Misalkan $Im(f) = \{a, b, c, d\}$. Misal c bilangan yang tidak memiliki prapeta. Karena $f(f(x)) \in \{2,4\}$, jelas bahwa $f(a), f(b), f(c), f(d) \in \{2,4\}$.
  $$Im(f) = \{f(a), f(b), f(c), f(d), f(e)\} \subseteq \{2,4, f(e)\}$$
  Maka, $|Im(f)| \leq 3$. Kontradiksi, maka tidak ada fungsi f yang memenuhi soal.
- Kasus 5: $|Im(f)| = 5$: f merupakan fungsi bijektif, maka $f(f(x))$ juga merupakan fungsi bijektif dan tidak memenuhi soal.

Jadi, total pemetaannya adalah $2 + 42 + 30 + 12 + 102 = 188$.

20. Penyelesaian:
    Perhatikan gambar berikut.



Misalkan $BD = 4$, $DE = 2$, dan $EC = 5$.
Perhatikan karena AD garis bagi $\angle BAE$, maka
$$\frac{AB}{BD} = \frac{AE}{ED} \Rightarrow \frac{AB}{4} = \frac{AE}{2} \Rightarrow AB = 2AE$$
Jadi, misal $AE = x$, maka $AB = 2x$.
Perhatikan karena AE garis bagi $\angle DAC$, maka
$$\frac{AD}{DE} = \frac{AC}{CE} \Rightarrow \frac{AD}{2} = \frac{AC}{5} \Rightarrow AD = \frac{2}{5}AC$$
Jadi, misal $AC = 5y$, maka $AD = 2y$.

Dalil Stewart pada AD garis bagi $\angle BAE$, berlaku
$$\begin{aligned} AD^2 = AB \times AE - BD \times DE \Rightarrow & \ (2y)^2 = 2x \cdot x - 4 \cdot 2 \\ \Leftrightarrow & \ 4y^2 = 2x^2 - 8 \\ \Leftrightarrow & \ 2y^2 = x^2 - 4 \end{aligned}$$
Dalil Stewart pada AE garis bagi $\angle DAC$, berlaku
$$\begin{aligned} AE^2 = AD \times AC - DE \times EC \Rightarrow & \ (x)^2 = 2y \cdot 5y - 2 \cdot 5 \\ \Leftrightarrow & \ x^2 = 10y^2 - 10 \end{aligned}$$
Substitusi $x^2 = 10y^2 - 10$ pada $2y^2 = x^2 - 4$ menghasilkan

$$
\begin{aligned}
& 2y^2 = 10y^2 - 10 - 4 \\
\Rightarrow\ & 14 = 8y^2 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{7}{4} = y^2
\end{aligned}
$$

Substitusi $y^2 = \frac{7}{4}$ pada $x^2 = 10y^2 - 10$ menghasilkan

$$
\begin{aligned}
& x^2 = 10 \cdot \left(\frac{7}{4}\right) - 10 \\
\Rightarrow\ & x^2 = \frac{70}{4} - \frac{40}{4} \\
\Leftrightarrow\ & x^2 = \frac{30}{4}
\end{aligned}
$$

Sehingga diperoleh $x^2 = \frac{30}{4} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{30}}{2}$ dan $y^2 = \frac{7}{4} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Maka $AE = x = \frac{\sqrt{30}}{2}$ dan $AD = 2y = \sqrt{7}$

Menggunakan POP dari titik D diperoleh

$$
\begin{aligned}
AD \times DF = BD \times DC \Rightarrow\ & \sqrt{7} \times DF = 4 \times 7 \\
\Leftrightarrow\ & DF = \frac{28}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} \\
\Leftrightarrow\ & DF = 4\sqrt{7}
\end{aligned}
$$

Menggunakan POP dari titik E diperoleh

$$
\begin{aligned}
AE \times EG = BE \times EC \Rightarrow\ & \frac{\sqrt{30}}{2} \times EG = 6 \times 5 \\
\Leftrightarrow\ & EG = \frac{30}{\frac{\sqrt{30}}{2}} \times \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{30}} \\
\Leftrightarrow\ & EG = 2\sqrt{30}
\end{aligned}
$$

Sehingga,

$$
\frac{DF}{EG} = \frac{4\sqrt{7}}{2\sqrt{30}} = \frac{2\sqrt{28}}{2\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{30}} = \sqrt{\frac{28}{30}} = \sqrt{\frac{14}{15}}
$$

Jadi, diperoleh $p = 14$ dan $q = 15$, maka nilai $p + q = 14 + 15 = 29$.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2024

TINGKAT PROVINSI

BIDANG MATEMATIKA

WAKTU : 210 MENIT

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2024

1. Diketahui bahwa $\overline{ab}$ dan $\overline{cd}$ adalah dua bilangan yang hasil kalinya adalah 555. Jika $\overline{ab} < \overline{cd}$, maka nilai dari $a + b$ adalah …

2. Misalkan f dan g fungsi linear yang memenuhi persamaan

$$f(x + g(y)) = 7x + 4y + 12 \text{ untuk setiap bilangan real } x, y$$

   Jika diketahui $g(7) = 5$, maka $g(-12 + f(4)) =$ …

   Catatan: Fungsi linear adalah fungsi berbentuk $h(x) = ax + b$ dengan a, b konstanta bilangan real.

3. Diberikan segitiga ABC dengan panjang sisi $AB = 15$, $AC = 14$, $BC = 13$. Diketahui bahwa terdapat sebuah segitiga sama sisi PQR dengan P, Q dan R masing-masing terletak pada sisi BC, CA, dan AB sehingga PQ sejajar dengan AB.

   Nilai $\frac{PQ}{AB}$ dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b+c\sqrt{d}}$, dengan a, b, c, d adalah bilangan bulat positif, d tidak habis dibagi bilangan kuadrat yang bernilai lebih dari satu, dan $FPB(a, b, c) = 1$. Nilai dari $a + b + c + d$ adalah …

4. Masing-masing petak pada papan berukuran 2025 × 3 akan diwarnai dengan salah satu dari warna hitam atau putih, sedemikian sehingga pada setiap sub-papan berukuran 2 × 2, terdapat masing-masing sebanyak ganjil petak bewarna hitam dan ganjil petak bewarna putih. Misalkan banyaknya cara pewarnaan petak yang mungkin adalah A. Sisa dari A ketika dibagi 1000 adalah …

5. Banyaknya bilangan asli a yang kurang dari 187 sehingga $FPB(a, 187) = 1$ dan $a^2 - 1$ bukan kelipatan dari 187 adalah …

6. Pada persegi $ABCD$ dengan panjang sisi $\sqrt{2} + \sqrt{6}$, titik X terletak pada diagonal AC sehingga $AX > XC$. Garis bagi dalam sudut AXB memotong sisi AB pada titik U. Garis bagi dalam sudut CXD memotong sisi CD pada titik V. Jika $\angle UXV = 150°$, maka nilai dari $\lfloor 3 \times UV^2 \rfloor$ adalah …

   Catatan: Notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x.

7. Diberikan himpunan $S = 1, 2, \ldots, 17$. Misalkan N adalah banyaknya pasangan terurut (A, B) dengan A, B himpunan bagian dari S sehingga $|A \cap B| \leq 2$. Nilai dari $\frac{N}{3^{15}}$ adalah …

   Catatan: Notasi $|X|$ menyatakan banyaknya anggota himpunan X.

8. Misalkan a, b, c merupakan bilangan-bilangan real yang memenuhi pertidaksamaan

$$ax^2 + bx + c \leq (14x - 3)^2$$

   untuk setiap bilangan real x. Nilai terkecil yang mungkin dari $a + 2b + 5c$ adalah …

9. Diberikan bilangan real $C \leq 2$. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan real positif x, y dengan xy = 1 berlaku ketaksamaan

$$\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}+\frac{c}{x+y} \geq 1+\frac{c}{2}$$

10. Diberikan sebuah papan n × n yang terbagi menjadi petak-petak berukuran 1 × 1 yang kesemuanya berwarna putih. Aqua memilih beberapa buah petak dari papan ini, dan mewarnainya dengan warna hitam. Ruby kemudian meletakkan tepat satu buah domino berukuran 1 × 2 di papan, sehingga domino tersebut menutupi tepat dua buah petak di papan. Ruby dapat memutar domino tersebut menjadi domino 2 × 1. Setelah Aqua mewarnai, ternyata ada tepat 2024 cara bagi Ruby untuk meletakkan sebuah domino di papan sehingga domino tersebut menutupi tepat satu buah petak hitam dan satu buah petak putih. Temukanlah nilai n terkecil yang mungkin sehingga Aqua dan Ruby dapat melakukan hal ini.

11. Pada segitiga ABC, titik X, Y dan Z masing-masing merupakan titik tengah dari BC, CA dan AB berturut-turut. Garis sumbu AB memotong garis XY dan garis AC berturut-turut pada Z_1 dan Z_2. Garis sumbu AC memotong garis XZ dan garis AB berturut-turut pada Y_1 dan Y_2. Misalkan K adalah titik sehingga $KZ_1 = KZ_2$ dan $KY_1 = KY_2$. Buktikan bahwa $KB = KC$.

12. Tentukan banyaknya pasangan bilangan asli $1 \leq a, b \leq 2027$ yang memenuhi $2027 | a^6 + b^5 + b^2$. (Catatan: Untuk bilangan bulat a dan b, notasi $a|b$ berarti terdapat suatu bilangan bulat c sehingga $ac = b$).

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2024

TINGKAT PROVINSI

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2024

1. Diketahui bahwa $\overline{ab}$ dan $\overline{cd}$ adalah dua bilangan yang hasil kalinya adalah 555. Jika $\overline{ab}$ < $\overline{cd}$, maka nilai dari a + b adalah 6.
2. Misalkan f dan g fungsi linear yang memenuhi persamaan
f(x + g(y)) = 7x + 4y + 12 untuk setiap bilangan real x, y.
Jika diketahui g(7) = 5, maka g(−12 + f(4)) = 13.
Catatan: Fungsi linear adalah fungsi berbentuk h(x) = ax + b dengan a, b konstanta bilangan real.
3. Diberikan segitiga ABC dengan panjang sisi AB = 15, AC = 14, BC = 13. Diketahui bahwa terdapat sebuah segitiga sama sisi PQR dengan P, Q, dan R masing-masing terletak pada sisi BC, CA, dan AB sehingga PQ sejajar dengan AB.
Nilai $\frac{PQ}{AB}$ dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{a}{b+c\sqrt{d}}$, dengan a, b, c, d adalah bilangan bulat positif, d tidak habis dibagi bilangan kuadrat yang bernilai lebih dari satu, dan FPB(a, b, c) = 1.
Nilai dari a + b + c + d adalah 302.
4. Masing-masing petak pada papan berukuran 2025 × 3 akan diwarnai dengan salah satu dari warna hitam atau putih, sedemikian sehingga pada setiap sub-papan berukuran 2 × 2, terdapat masing-masing sebanyak ganjil petak bewarna hitam dan ganjil petak bewarna putih. Misalkan banyaknya cara pewarnaan petak yang mungkin adalah A. Sisa dari A ketika dibagi 1000 adalah 728.
5. Banyaknya bilangan asli a yang kurang dari 187 sehingga FPB(a,187) = 1 dan a 2 − 1 bukan kelipatan dari 187 adalah 156.
6. Pada persegi ABCD dengan panjang sisi $\sqrt{2} + \sqrt{6}$, titik X terletak pada diagonal AC sehingga AX > XC. Garis bagi dalam sudut AXB memotong sisi AB pada titik U. Garis bagi dalam sudut CXD memotong sisi CD pada titik V.
Jika ∠UXV = 150◦, maka nilai dari $\lfloor 3 \times UV^2 \rfloor$ adalah 45.
Catatan: Notasi $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x.
7. Diberikan himpunan S = 1, 2, ..., 17. Misalkan N adalah banyaknya pasangan terurut (A, B) dengan A, B himpunan bagian dari S sehingga |A ∩ B| ≤ 2.
Nilai dari $\frac{N}{3^{15}}$ adalah 196.
Catatan: Notasi |X| menyatakan banyaknya anggota himpunan X.
8. Misalkan a, b, c merupakan bilangan-bilangan real yang memenuhi pertidaksamaan
$$ax^2 + bx + c \leq (14x - 3)^2$$
untuk setiap bilangan real x.
Nilai terkecil yang mungkin dari a + 2b + 5c adalah -73.
9. Diberikan bilangan real C ≤ 2. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan real positif x, y dengan xy = 1 berlaku ketaksamaan
$$\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} + \frac{C}{x + y} \geq 1 + \frac{C}{2}$$

Solusi. Dengan ketaksamaan AM-QM diperoleh $\sqrt{(x^2+y^2)/2} \ge (x+y)/2$. Cukup dibuktikan bahwa

$$\frac{x+y}{2}+\frac{C}{x+y}-\left(1-\frac{C}{2}\right)\ge 0$$

Dengan ketaksamaan AM-GM, x + y ≥ $2\sqrt{xy}$ = 2 ≥ C. Akibatnya

$$\begin{aligned}
\frac{x+y}{2}+\frac{C}{x+y}-\left(1+\frac{C}{2}\right) &= \left(\frac{x+y}{2}-1\right)+C\left(\frac{1}{x+y}-\frac{1}{2}\right)\\
&= \frac{x+y-2}{2}+C\cdot\frac{2-(x+y)}{2(x+y)}\\
&= \frac{(x+y-2)}{2}\left(1-\frac{C}{x+y}\right)\\
&= \frac{(x+y-2)\,(x+y-C)}{2\,(x+y)}\\
&\ge 0
\end{aligned}$$

dan kita selesai.

10. Diberikan sebuah papan n × n yang terbagi menjadi petak-petak berukuran 1 × 1 yang kesemuanya berwarna putih. Aqua memilih beberapa buah petak dari papan ini, dan mewarnainya dengan warna hitam. Ruby kemudian meletakkan tepat satu buah domino berukuran 1 × 2 di papan, sehingga domino tersebut menutupi tepat dua buah petak di papan. Ruby dapat memutar domino tersebut menjadi domino 2 × 1. Setelah Aqua mewarnai, ternyata ada tepat 2024 cara bagi Ruby untuk meletakkan sebuah domino di papan sehingga domino tersebut menutupi tepat satu buah petak hitam dan satu buah petak putih.

    Temukanlah nilai n terkecil yang mungkin sehingga Aqua dan Ruby dapat melakukan hal ini.

    Solusi. n terkecil yang mungkin adalah 33. - Bukti n ≥ 33 : Perhatikan bahwa terdapat n(n − 1) cara meletakkan domino 1 × 2 di papan berukuran n × n, dan terdapat n(n − 1) cara meletakkan domino 2 × 1 di papan berukuran n × n. Dengan demikian, diperoleh

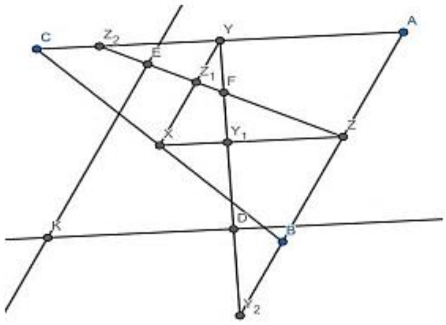
    $$2n(n-1)\ge 2024 \Longrightarrow n\ge 33.$$

    Sekarang akan kita tunjukkan bahwa n = 33 mungkin. Warnai papan seperti papan catur (hitamputih selang-seling) dengan petak ke 1×1 berwarna hitam, kecuali semua petak pada baris ke-33 dan kolom ke-33 semua berwarna putih. Perhatikan bahwa Ruby hanya dapat meletakkan domino pada papan berukuran 32 × 32, atau papan posisi (32,i)(33,i) dengan i genap, atau papan posisi (j,32)(j,33) dengan j genap. Dengan demikian, banyaknya cara meletakkan domino pada papan ada: 2.32.31 + 16 + 16 = 2016. Kekurangan 8 cara dapat di atasi dengan mengubah warna papan pada posisi (33,1),(33,3) dan (33,5) menjadi hitam, sehingga terdapat 8 tambahan cara meletakkan domino, yakni: (32,1)(33,1),(32,3)(33,3),(32,5)(33,5),(33,1)(33,2),(33,2)(33,3),(33,3)(33,4), (33,4)(33,5),(33,5)(33,6).

11. Pada segitiga ABC, titik X, Y, dan Z masing-masing merupakan titik tengah dari BC, CA, dan AB berturut-turut. Garis sumbu AB memotong garis XY dan garis AC berturut-turut pada Z_1 dan Z_2. Garis sumbu AC memotong garis XZ dan garis AB berturut-turut pada Y_1 dan Y_2.

    Misalkan K adalah titik sehingga KZ1 = KZ_2 dan KY_1 = KY_2. Buktikan bahwa KB = KC.

    Solusi. Misal D, E, F masing-masing adalah titik tengah Y_1Y_2, titik tengah Z_1Z_2, dan perpotongan garis sumbu AB dan garis sumbu AC (i.e. titik pusat lingkaran luar ABC). Perhatikan bahwa K merupakan perpotongan garis sumbu Z_1Z_2 dan garis sumbu Y_1Y_2.



Pertama, karena $\angle FYZ_2 = \angle FZY_2 = 90^\circ$ dan $\angle YFZ_2 = \angle ZFY_2$, maka segitiga YFZ_2 dan segitiga ZFY_2 sebangun. Selain itu, karena Z_1 merupakan kaki garis tinggi dari Y ke FZ_2 dan Y_1 merupakan kaki garis tinggi dari Z ke FY_2, maka segitiga FZ_1Y dan FY_1Z juga sebangun. Sehingga berlaku

$$\frac{FZ_1}{FZ_2} = \frac{FY_1}{FY_2} \implies \frac{\frac{FZ_1+FZ_2}{2}}{FZ_1} = \frac{\frac{FY_1+FY_2}{2}}{FY_1} \implies \frac{FE}{FZ_1} = \frac{FD}{FY_1},$$

yang berarti terdapat homothety yang membawa FZ_1Y_1 ke FED. Homothety ini membawa X ke K karena $EK \perp EF$ dan $DK \perp DF$, dan $XZ_1 \perp Z_1F$ serta $XY_1 \perp Y_1F$. Akibatnya, X, K, dan F segaris. Karena FX adalah garis sumbu BC, akibatnya K juga terletak pada garis sumbu BC, i.e. KB = KC.

12. Tentukan banyaknya pasangan bilangan asli $1 \leq a, b \leq 2027$ yang memenuhi $2027 \mid a^6 + b^5 + b^2$.
(Catatan: Untuk bilangan bulat a dan b, notasi $a \mid b$ berarti terdapat suatu bilangan bulat c sehingga ac = b.)
Solusi. Kita klaim bahwa jawabannya adalah 2028. Kita akan gunakan lemma terkenal berikut.
Claim. Apabila $p \equiv 2 \pmod 3$ merupakan bilangan prima, maka peta $x \to x^3$ subjektif. Untuk menyelesaikan soal, tinjau bahwa $2027 \equiv 2 \pmod 3$ dan 2027 bilangan prima. Kita tinjau dua buah kasus: - Apabila $2027 \mid b$, maka $2027 \mid b^5 + b^2$ dan akibatnya $2027 \mid a$. Akibatnya, a = b = 2027 dan ini kerja. - Andai sebaliknya, maka kita punya

$$\left(\frac{a^3}{b}\right)^2 + 1 \equiv -b^3 \pmod{2027}$$

Pilih sembarang $X = \frac{a^3}{b} \in \{1,2, \ldots ,2017\}$. Maka, RHS uniquely defined dan dari klaim, b uniquely defined. Terlebih lagi, $a^3 = b_X$ dan dari klaim, a uniquely defined. Oleh karena itu, terdapat 2027 solusi untuk kasus ini. Kita perlu hati-hati pada kasus ketika RHS $\equiv 0 \pmod{2027}$ dan mengakibatkan kontradiksi, namun ini tidak mungkin sebab ini mengakibatkan $2027 \mid \left(\frac{a^3}{b}\right)^2 + 1$ namun $2027 \equiv 3 \pmod 4$, sebuah kontradiksi.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2024

TINGKAT NASIONAL

HARI PERTAMA & HARI KEDUA

WAKTU : 8 JAM

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Nasional Tahun 2024

1. Carilah semua pasangan bilangan real positif a, b yang memenuhi sistem persamaan
$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=6$$
$$\sqrt{a-5}+\sqrt{b-5}=4$$
2. Triplet bilangan bulat positif (a, b, c) dengan $a < b < c$ disebut *fatal* jika terdapat tiga bilangan bulat tak nol p, q, r yang memenuhi persamaan
$$a^p.b^q.c^r=1$$
Sebagai contoh, {2,3,12} adalah triplet *fatal* karena $2^2.3^1.(12)^{-1} = 1$
Bilangan asli N disebut fatal jika terdapat triplet *fatal* (a, b, c) sehingga $N = a + b + c$
(a) Buktikan bahwa 16 tidak *fatal*.
(b) Buktikan bahwa semua bilangan bukan kelipatan 6 yang lebih besar dari 16 *fatal*.
3. Diberikan segitiga ABC yang lingkaran luarnya berpusat di O dan ketiga garis tingginya berpotongan di H. Garis AH dan garis BH memotong lingkaran luar segitiga ABC sekali lagi berturut-turut di titik D dan E. Misalkan A' dan B' berturut- turut menyatakan titik pusat lingkaran luar segitiga AHE dan lingkaran luar segitiga BHD. Jika A', B', O dan H tidak segaris, buktikan OH melalui titik tengah ruas garis $A'B'$.
4. Kobar dan Borah bermain di papan tulis dengan aturan sebagai berikut: Diberikan dua buah bilangan asli berbeda di papan. Pada setiap langkah, dimulai dari Kobar, masing-masing pemain secara bergiliran mengubah bilangan di papan, dari P dan Q, menjadi $2PQ$ dan $2Q - P$ atau dari P dan Q menjadi $5P - 4Q$ dan $5Q - 4P$. Permainan berakhir saat ada pemain yang memunculkan bilangan tak positif. Pemain tersebut dinyatakan kalah, dan lawannya dinyatakan menang.
Di awal permainan, bilangan yang tertulis di papan adalah 2024 dan A. Jika diketahui Kobar dapat melangsungkan langkah pertamanya, tentukan nilai A terbesar yang mungkin sehingga Borah dapat memenangkan permainan ini.
5. Setiap bilangan bulat diwarnai dengan tepat satu dari warna berikut: merah, biru, atau oranye, dan ketiga warna tersebut digunakan dalam pewarnaan. Pewarnaan ini juga memenuhi sifat-sifat berikut:
   a. Jumlah bilangan merah dan bilangan oranye menghasilkan bilangan berwarna biru,
   b. Jumlah bilangan oranye dan biru menghasilkan bilangan berwarna oranye;
   c. Jumlah bilangan biru dan bilangan merah menghasilkan bilangan berwarna merah.

   a) Buktikan bahwa 0 dan 1 pasti memiliki warna yang berbeda.
   b) Tentukan semua kemungkinan pewarnaan bilangan bulat yang juga memenuhi sifat-sifat yang disebutkan di atas.
6. Misalkan $A_1A_2 \ldots A_n$ adalah poligon bersisi n dengan $n \geq 3$ dan $\angle A_j \leq 180^\circ$ untuk setiap j (dengan kata lain, poligon tersebut cembung atau memiliki sisi berbeda kurang dari n).
Untuk setiap $i \leq n$, misalkan α_i adalah nilai terkecil yang mungkin dari $\angle A_iA_jA_{i+1}$ di mana j bukan i maupun $i + 1$. (Di sini, kita mendefinisikan $A_{n+1} = A_1$.) Buktikan bahwa
$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n \leq 180^o$$
dan tentukan semua kasus persamaan.
7. Misalkan $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ di mana $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ adalah bilangan riil untuk $n \geq 1$ (polinomial monik derajat ke-n dengan koefisien riil). Jika pertidaksamaan
$$3(P(x)+P(y)) \geq P(x+y)$$
berlaku untuk semua bilangan riil x, y, tentukan nilai minimum yang mungkin dari $P(2024)$.

8. Misalkan $n \geq 2$ adalah bilangan bulat positif. Misalkan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ adalah bilangan bulat yang berbeda. Untuk $k = 1, 2, \ldots, n$, misalkan

$$s_k := \prod_{\substack{i \neq k, \\ i \leq i \leq n}} |a_k - a_i|,$$

yaitu sk adalah hasil kali semua suku dalam bentuk $|a_k - a_i|$, di mana $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ dan $i \neq k$. Temukan bilangan bulat positif terbesar M sehingga M membagi kelipatan persekutuan terkecil dari $s_1, s_2, \ldots, s_n$ untuk setiap pilihan $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2024

TINGKAT NASIONAL

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Nasional Tahun 2024

1. Penyelesaian :
   Dituliskan
$$\sqrt{a-5}=x, \sqrt{b-5}=y$$
   Lalu kita ingin menyelesaikannya
$$\sqrt{x^2+5}+\sqrt{y^2+5}=6$$
$$x+y=4$$
   Namun untuk menyelesaikan hal ini, kita hanya perlu mencatat bahwa
$$\begin{aligned}36 &= (\sqrt{x^2+5}+\sqrt{y^2+5})^2\\ &= (x^2+5)+(y^2+5)+2\sqrt{(x^2+5)(y^2+5)}\\ &\overset{\text{CS}}{\geq} (x^2+5)+(y^2+5)+2(xy+5)=(x+y)^2+20=36\end{aligned}$$
   dan agar persamaan berlaku, kita harus memiliki x = y = 2 dan dengan demikian a = b = 9 seperti yang diinginkan.

2. Penyelesaian :
   Asumsikan sebaliknya, dan 16 = a + b + c. Setiap bilangan prima yang membagi setidaknya satu dari a, b, dan c seharusnya membagi setidaknya satu dari variabel lainnya. Kita dapat mengabaikan 11 dan 13.
   Jika 7 merupakan bagian dari bilangan prima, maka a + b + c > 7 + 14 = 21, kontradiksi. Jika 5 merupakan bagian dari bilangan prima, maka satu-satunya kemungkinan tuplet (a, b, c) = (1, 5, 10), tidak fatal.
   Jadi, a, b, c ∈ {1,2,3,4,6,8,9,12}.
   Selain itu, berdasarkan paritas, a, b, c semuanya pasti genap. Oleh karena itu, satu-satunya kemungkinan tuplet adalah (a, b, c) = (2, 6, 8), yang tidak fatal.
   Kami bekerja dengan modulo 6 dan 4. Kami memiliki:
$$\begin{aligned}6k+2&=2+2k+4k, \quad 2^1(2k)^1(4k)^{-1}=1,\\ 6k+4&=4+2k+4k, \quad 4^1(2k)^2(4k)^{-2}=1,\\ 4k+3&=3+k+3k, \quad 3^1(k)^1(3k)^{-1}=1,\\ 4k+9&=9+k+3k \quad 9^1(k)^2(3k)^{-2}=1.\end{aligned}$$
   Masing-masing dekomposisi ini dapat dengan mudah dilihat sebagai sesuatu yang fatal.
   Kasus yang tersisa hanya N = 21,45 (dari kasus 4k + 9, dengan k = 3 atau k = 9). Kita punya
$$21=1+4+16=3+6+12, \quad 1^1 4^2 16^{-1}=3^1 6^{-2} 12^1=1,$$
$$45=6+12+27=3+12+24, \quad 6^6 12^{-3} 27^1=9^1 12^6 24^{-4}=1.$$
   Ini melengkapi buktinya.

3. Penyelesaian :
   W.L.O.G. O = 0 dan (ABC) sebagai lingkaran satuan. Kita memiliki h = a + b + c dan |a| = |b| = |c| = |d| = |e| = 1 (menunjukkan bahwa $\bar{a}=1/a$ berdasarkan sifat $a\bar{a}$ = |a|²). Karena BE ⊥ AC, kita memiliki be + ac = 0 ⟺ e = $-\frac{ac}{b}$ dan d = $-\frac{bc}{a}$. Selesaikan persamaan sistem untuk a':

$$|a'-a| = |a'-h| = |a'-e|,$$

Kita punya

$$a' = \frac{\begin{vmatrix} h & h\overline{h} & 1 \\ a & a\overline{a} & 1 \\ e & e\overline{e} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} h & \overline{h} & 1 \\ a & \overline{a} & 1 \\ e & \overline{e} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} a+b+c & (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) & 1 \\ a & 1 & 1 \\ -\frac{ac}{b} & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a+b+c & \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} & 1 \\ a & \frac{1}{a} & 1 \\ -\frac{ac}{b} & -\frac{b}{ac} & 1 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{-\frac{(a+b)(a+c)(b+c)^2}{b^2c}}{\frac{(b-a)(b+a)(b+c)^2}{ab^2c}} = -\frac{(a+c)a}{b-a}.$$

Secara analogi, $b' = -\frac{(b+c)b}{a-b}$. Oleh karena itu, titik tengah A'B' adalah

$$m = \frac{a'+b'}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{-a^2-ac+b^2+bc}{b-a}\right) = \frac{(b-a)(a+b+c)}{2(b-a)} = \frac{a+b+c}{2},$$

yang juga merupakan titik tengah OH.

4. Penyelesaian :
Misalkan X_1 didefinisikan sebagai orang X yang mengubah bilangan menjadi 2P – Q dan 2Q – P.
Misalkan X_2 didefinisikan sebagai orang X yang mengubah bilangan menjadi 5P – 4Q dan 5Q – 4P.
Dan biarkan $A_aB_bA_cB_d$ ... mendefinisikan langkah kedua orang yang bermain, di mana a,b,c,d, ... ∈ 1,2.
Mencantumkan semua kemungkinan hasil dari Putaran 1 hingga Putaran 3.
[Bagian 1]
K_1 = 2P – Q dan 2Q – P
K_2 = 5P – 4Q dan 5Q – 4P
[Bagian 2]
K_1B_1 = 5P – 4Q dan 5Q – 4P
K_1B_2 = 14P – 13Q dan 14Q – 13P
K_2B_1 = 14P – 13Q dan 14Q – 13P
K_2B_2 = 41P – 40Q dan 41Q – 40P
[Bagian 3]
$K_1B_1K_1$ = 14P – 13Q dan 14Q – 13P
$K_1B_1K_2$ = 41P – 40Q dan 41Q – 40P
$K_1B_2K_1$ = 41P – 40Q dan 41Q – 40P
$K_1B_2K_2$ = 112P – 111Q dan 112Q – 111P
$K_2B_1K_1$ = 41P – 40Q dan 41Q – 40P
$K_2B_1K_2$ = 112P – 111Q dan 112Q – 111P
$K_2B_2K_1$ = 112P – 111Q dan 112Q – 111P
$K_2B_2K_2$ = 365P – 364Q dan 365Q – 364P

Perhatikan bahwa WLOG, P = 2024, Q = A

Perhatikan bahwa untuk ronde 1, 2, 3, nilai maksimum A agar orang tersebut tidak kalah adalah:

$$\frac{2}{1} \cdot 2024 \iff \frac{5}{4} \cdot 2024 \iff \frac{14}{13} \cdot 2024$$

Yang merupakan nilai yang menurun. Dan karena kemungkinan langkah permainannya sama, maka akan terus berlanjut. Oleh karena itu, kita perlu Kobar kalah secepat mungkin, yaitu ronde ke-3. Namun, kita juga ingin Borah tidak kalah di ronde ke-2, jadi kita harus menemukan A, sehingga

$$\frac{5}{4} \cdot 2024 \geq A \geq \frac{14}{13} \cdot 2024$$

(batas atas putaran 2 dan batas atas putaran 3)

Karena A harus berupa bilangan bulat, nilai tertinggi A adalah 2179.

5. Penyelesaian :
   (a) Amati bahwa 0 pasti berwarna biru, karena (1) (jika tidak, anggaplah 0 bukan biru, anggaplah i sebagai bilangan biru (yang ada), lalu terapkan (2) dan (3)). Sekarang, asumsikan 1 juga berwarna biru, jika k adalah bilangan oranye terkecil, maka k + 1 juga akan berwarna oranye, dan karena 0 dan 1 berwarna biru, maka $k \geq 2$. Argumen yang sama berlaku untuk merah, jadi ini berarti semua bilangan bulat $i \leq 1$ berwarna biru, dan setelah itu dapat memiliki paling banyak 2 warna (biru, dengan oranye atau merah, tetapi tidak keduanya). Oleh karena itu, 0 dan 1 pasti berwarna berbeda.
   (b) Perhatikan bahwa harus ada setidaknya 2 bilangan bulat biru, karena jika hanya ada satu, dan ketiga warna digunakan; akan ada setidaknya 1 warna dengan 2 elemen berbeda, jadi dengan menggunakan (1) kita dapat mengkonstruksi 2 x 1 bilangan biru yang berbeda (jadi ada bilangan biru yang bukan 0). Dengan menggunakan pengamatan ini dan soal (a), kita dapat menggeneralisasi fakta di atas, dengan cara berikut:

Lemma. Pewarnaannya periodik, dengan periode $|x| > 1$, di mana $|x|$ adalah besaran positif terkecil sehingga x berwarna biru.

Bukti:

Perhatikan bahwa berdasarkan (2) dan (3), jika x berwarna biru, maka -x pasti berwarna biru, karena x + (-x) = 0 dan 0 berwarna biru. Lanjutkan induksi untuk menyimpulkan bahwa semua kelipatan bilangan bulat x berwarna biru (misalkan $(kx) + (-x) = (k-1)x$ dengan asumsi bahwa -x dan $(k-1)x$ keduanya berwarna biru).

Selanjutnya, perhatikan $k|x| + a$, di mana k adalah bilangan bulat dan $1 \leq a \leq |x|$. Karena $|x|$ berwarna biru, $(k + 1)|x| + a = (k|x| + a) + |x|$ sehingga keduanya memiliki warna yang sama (berdasarkan persamaan (2) dan (3)).

Dari lema tersebut, dapat disimpulkan bahwa warna biru hanya ada pada kelipatan bilangan bulat x (⋆).

Misalkan x > 0 karena -x dan x berwarna sama. Jadi, perhatikan pewarnaan dalam (mod x).

Sekarang kita akan menunjukkan bahwa x = 3. Jelas bahwa x = 2 tidak berlaku karena kita tahu ketiga warna tersebut digunakan, dan karena periodisitas.

Jika sebaliknya x > 3, pilih $0 < a < b < x$ dengan warna yang sama dan $0 < c < x$ dengan warna yang berbeda (keduanya tidak biru). Berdasarkan (1), a + c dan b + c harus berwarna biru, namun $0 < (b + c) - (a + c) = b - a < x$ yang melanggar (⋆).

Jadi semua pewarnaan yang mungkin adalah biru untuk semua bilangan bulat 0 (mod 3), dan untuk 1 (mod 3) dan 2 (mod 3) kita dapat mewarnainya merah, oranye atau sebaliknya, dan kita telah menunjukkan bahwa hanya ini yang berfungsi.

6. Penyelesaian :
$$180^\circ(n-2) = \sum_i \sum_j A_iA_jA_{i+1} \geq \sum_i \alpha_i(n-2) \implies 180^\circ \geq \sum_i \alpha_i.$$
Kesetaraan terjadi jika $A_1A_2 \ldots A_n$ siklik.

7. Penyelesaian :
Klaim 1. deg(P) = 2, sehingga kita dapat menulis P sebagai P(x) = $(x + \alpha)^2 + \beta$ untuk beberapa $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Pembuktian. Perhatikan bahwa kita memiliki P(2x) ≤ 6P(x) untuk semua x ∈ ℝ, yaitu $\frac{P(2x)}{P(x)} \leq 6$ untuk semua x sehingga P(x) ≠ 0. Karena deg(P) ≥ 1, kita memiliki $2^{\deg}$(P) = $\lim_{x\to\infty} \frac{P(2x)}{P(x)} \leq 6$, dan dengan demikian deg(P) ≤ 2$. Karena P(x) ≥ $-\frac{3}{2}$P(0) untuk semua $x \in \mathbb{R}$, yaitu P dibatasi dari bawah, maka P tidak dapat linear dan dengan demikian P(x) = $(x + \alpha)^2 + \beta$ untuk beberapa $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Kondisi permasalahannya kemudian diterjemahkan menjadi $3((x + \alpha)^2 + (y + \alpha)^2) + 5\beta \geq (x + y + \alpha)^2$ berlaku untuk semua x, y ∈ ℝ. Perbaiki $\alpha \in \mathbb{R}$.
Klaim 2. $\beta \geq \frac{3}{5}\alpha^2$ dan ini ketat.
Bukti. Untuk melihat ini, perhatikan saja bahwa ketika x = y = -2α, kita telah memperoleh batas bawah yang diinginkan $\beta \geq \frac{3}{5}\alpha^2$.
Untuk melihat bahwa $\beta = \frac{3}{5}\alpha^2$ berfungsi, kita melihat bahwa untuk setiap x, y ∈ ℝ.
$$3((x+\alpha)^2 + (y+\alpha)^2 + \alpha^2) - (x+y+\alpha)^2 = \frac{1}{2}(2\alpha + 2x - y)^2 + \frac{3}{2}(2\alpha + y)^2 \geq 0$$
Untuk menyelesaikannya, kita diminta meminimalkan P(2024) = $(2024 + \alpha)^2 + \beta \geq (2024 + \alpha)^2 + \frac{3}{5}\alpha^2 \geq$ 1536216 di mana kesetaraan berlaku ketika α = -1265 dan β = 960135.

8. Penyelesaian :
Pertama, pilih $a_k = k$ untuk setiap k. Kemudian, $s_k = (n-k)!\,(k-1)! \mid (n-1)!$ untuk setiap k dan $s_1 = (n-1)!$, sehingga KPK($s_1, s_2, \ldots, s_n$) = (n – 1)!. Selanjutnya, kita perlu menunjukkan klaim berikut: (n – 1)! harus membagi KPK($s_1, s_2, \ldots, s_n$).
Untuk membuktikan klaim tersebut, cukup dengan membuktikan bahwa $\nu_p((n-1)!) \leq \max_k \nu_p(s_k)$ untuk sembarang bilangan prima p. Perhatikan bahwa menurut rumus Legendre,
$$\nu_p((n-1)!) = \sum_{j=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n-1}{p^j} \right\rfloor.$$
Untuk membuktikan ketimpangan, kita berulang kali menjadi serakah!
Misalkan $A_0 = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Berdasarkan prinsip lubang merpati, terdapat bilangan bulat $d_0 \in A$ sehingga $A_1 = \{x \in A_0 : x \equiv d_0 \pmod p\}$ berukuran paling sedikit $\lceil n/p \rceil = \lfloor (n-1)/p \rfloor + 1$. Berdasarkan prinsip lubang merpati, terdapat bilangan bulat $d_1 \equiv d_0 \pmod p$ sehingga $A_2 = \{x \in A_1 : x \equiv d_1 \pmod{p^2}\}$ berukuran

paling sedikit $\lfloor (n-1)/p^n \rfloor$ + 1. Dengan melanjutkan proses ini, kita dapat menunjukkan secara induktif bahwa terdapat rantai bilangan bulat d_0, d_1, … di A sehingga:

1. $d_{i+1} \equiv d_i \pmod{p^{i+1}}$ untuk setiap i; dan
2. untuk setiap $n \geq 1$\$, himpunan $A_n = \{x \in A_0 : x \equiv d_{n-1} \pmod{p^n}\}$ berukuran paling sedikit $\lfloor (n-1)/p^n \rfloor$ + 1.

Untuk i yang cukup besar (sehingga $|x - y| < p^i$ untuk semua x, y $\in A_0$), kita memiliki $A_i = \{d_i\}$. Lebih lanjut, kondisi 1 memastikan bahwa $A_{n+1} \subseteq A_n$ untuk semua $n \geq 1$. Dengan demikian, barisan $(d_i)_{i\geq 1}$ pada akhirnya konstan, katakanlah konvergen ke d, dan kita memiliki $d \equiv d_i \pmod{p^{i+1}}$ untuk setiap i. Akibatnya, $A_n = \{x \in A_0 : x \equiv d \pmod{p^n}\}$ untuk setiap $n \geq 1$.

Akhirnya, tulis $d = a_k$ untuk beberapa $k \leq n$. Pilih N yang cukup besar sehingga $|A_{N+1}| = 1$; kita kemudian memperoleh

$$\begin{aligned}\nu_p(s_k) &= \sum_{i\neq k} \nu_p(a_k - a_i)\\ &= \sum_{n=1}^{N} n\#(A_n \setminus A_{n+1})\\ &= \sum_{n=1}^{N} n(|A_n| - |A_{n+1}|)\\ &= \sum_{n=1}^{N} |A_n| - N|A_{n+1}|\\ &\geq \sum_{n=1}^{N} \left(\left\lfloor \frac{n-1}{p^n} \right\rfloor + 1 \right) - N\\ &= \nu_p((n-1)!).\end{aligned}$$

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2025

TINGKAT KABUPATEN/KOTA

BIDANG MATEMATIKA

WAKTU : 180 MENIT

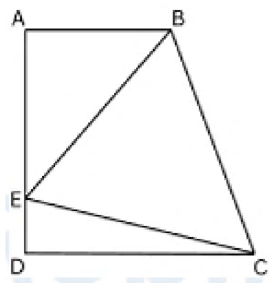
WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Kabupaten/Kota Tahun 2025

1. Diketahui $n^n + 4n + 3 = 16m$. Banyak bilangan bulat n dimana $1 \leq n \leq 110$ dan m bilangan bulat adalah…

2. Bilangan bulat positif terkecil n sehingga $n!$ habis dibagi 1430 adalah…

3. Perhatikan gambar berikut!



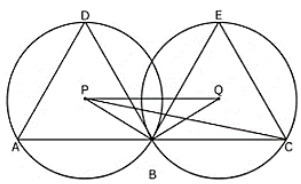
   Diketahui $ABCD$ adalah sebuah trapesium dengan $AB||CD$ dan $\angle ADC = 90^o$. Titik E pada ruas garis AD sehingga $BE = EC$. Jika $AB = 22$, $CD = 27$ dan $BC = 25\sqrt{2}$, maka panjang AE adalah…

4. Banyak himpunan bagian {1,2,3,4,5,6,7} yang memuat himpunan {1,2,3,4,5} atau {4,5,6} adalah…

5. Afif menuliskan sembilan bilangan bulat positif yang lebih kecil dari 18. Ia memastikan bahwa penjumlahan dua bilangan mana pun di antara sembilan bilangan tersebut tidak sama dengan 18. Bilangan positif yang pasti ditulis Afif adalah…

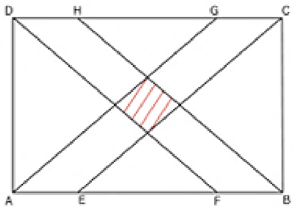
6. Koefisien suku x^2 dari penjabaran $(x + 3)^n$ adalah $81k$ untuk suatu bilangan asli k. Bilangan asli k terkecil yang memenuhi syarat tersebut adalah…

7. Perhatikan gambar berikut!



   Diketahui dua segitiga sama sisi ABD dan BCE dengan panjang sisi yang sama dan titik A, B, dan C kolinear. Titik P dan Q berturut-turut adalah titik pusat lingkaran luar segitiga ABD dan titik pusat lingkaran luar segitiga BCE. Jika luas lingkaran luar segitiga BPC adalah 126, maka luas lingkaran luar segitiga BPQ adalah…

8. Perhatikan gambar berikut!



Diketahui persegi panjang $ABCD$ dengan titik E, F pada AD dan titik G, H pada BC sehingga AF = BE = DG = HC = 52. Jika AD = 26, dan AB = 64, maka luas daerah yang diarsir yang dibatasi AG, CE, BF dan DH adalah...

9. Diketahui polinomial $P(5^b + 1) = 5^{5b} + 4$ untuk semua bilangan asli b, maka nilai $P(3)$ = ...

10. Banyaknya bilangan bulat m sehingga memenuhi persamaan kuadrat

$$x^2 + mx + 37 = m$$

tidak mempunyai akar real adalah ...

11. Jika $FPB(1 + 2 + \ldots + n,\ 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) < 100$, maka nilai maksmimum n adalah...

12. Diketahui sebuah lingkaran pusat titik O dan jari-jari 65. Titik A, B, C merupakan 3 titik berbeda pada lingkaran tersebut dan titik D, E, F berturut-turut merupakan titik tengah BC, AC, AB. Jika 2 ruas garis di antara OD, OE, OF memiliki panjang 25 dan 39, maka panjang ruas garis yang ketiga adalah...

13. Digit-digit dari bilangan 6, 7, 8, ..., n dituliskan dari kiri ke kanan membentuk suatu bilangan baru k, nilai n terkecil sehingga k habis dibagi 7 adalah...

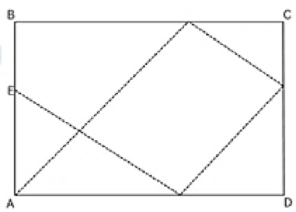
14. Misalkan x, y, $z \in \mathbb{R}^+$ dengan

$$\frac{1}{1+x+y} + \frac{1}{1+y+z} + \frac{1}{1+z+x} = \frac{1}{4}$$

Jika nilai minimum dari $3x + 5y + 6z = A\sqrt{2} + B$, maka nilai $A + B$ adalah...

15. Banyak bilangan bulat berbeda pada barisan $\left\lfloor \frac{579}{1} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{579}{3} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{579}{5} \right\rfloor, \ldots, \left\lfloor \frac{579}{579} \right\rfloor$ adalah ...

16. Diketahui persegi panjang $ABCD$ dan E suatu titik pada sisi AB. Suatu benda bergerak dari titik A dan berturut-turut menyentuh sisi BC, CD, AD dan sampai titik E. Berikut diberikan sebuah contoh lintasan daru benda tersebut.



Jika diketahui bahwa AB = 60, AD = 85, dan jarak terpendek yang ditempuh oleh benda adalah $170\sqrt{2}$, maka panjang AE adalah…

17. Banyak pemetaan f: 1,2,3,4,5 → 1,2,3,4,5 yang memenuhi persamaan $f(f(x)) = f(x)$ untuk setiap $x \in \{1,2,3,4,5\}$ adalah…

18. Suatu percobaan mengundi suatu dadu beberapa kali dan percobaan berhenti setelah muncul mata dadu lebih kecil 5 sebanyak dua kali. Banyak kemungkinan percobaan berhenti pada pengundian ke-5 atau sebelumnya adalah…

19. Hasil penjumlahan semua bilangan asli n sehingga sistem persamaan

$$\begin{cases} nx + y = 85 \\ 2x + (n+1)y = 30 \end{cases}$$

memiliki solusi bilangan bulat (x, y) adalah …

20. Sebuah tabel terdiri atas dua baris dan 29 kolom. Tiap petak dicat hitam atau putih dengan aturan:

    a) Dua kolom bersebelahan tidak boleh memiliki jumlah petak hitam yang sama.
    b) Dua bujur sangkar 2 x 2 yang tumpang-tindih pada satu kolom tidak boleh memiliki jumlah petak hitam yang sama.

    Banyaknya cara perwarnaan papan yang memenuhi aturan tersebut adalah…

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2025

TINGKAT KABUPATEN/KOTA

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Kabupaten/Kota Tahun 2025

1. Persamaan $n^2 + 4n + 3 = 16m$ dapat diubah menjadi $(n + 1)(n + 3) = 16m$. Agar m bilangan bulat, maka n harus $n \equiv 5 \pmod 8$ atau $n \equiv 7 \pmod 8$. Banyak nilai n yang memenuhi adalah
$$\left\lfloor \frac{110-5}{8} + 1 \right\rfloor + \left\lfloor \frac{110-7}{8} + 1 \right\rfloor = 14 + 13 = 27$$
2. Kita ketahui bahwa $1430 = 2 \times 5 \times 11 \times 13$ yaitu perkalian 4 bilangan prima sehingga n terkecil adalah faktor prima terbesar 1430 yaitu 13.
3. Dengan Teorema Phytagoras, $AD = \sqrt{\left(25\sqrt{2}\right)^2 - (27-22)^2} = \sqrt{25 \times 50 - 25} = 35$. Karena BE = EC, dengan menggunakan Teorema Phytagoras, kita dapatkan
$$BE^2 = EC^2 \Rightarrow AE^2 + 22^2 = (35 - AE)^2 + 27^2 \Rightarrow 70AE = 1470 \Rightarrow AE = 21$$
4. Dengan Prinsip Inklusi-Ekslusi, kita dapat menghitung banyak himpunan bagiannya yaitu banyak himpunan yang memuat himpunan {1,2,3,4,5} ditambah banyak himpunan yang memuat himpunan {4,5,6} dikurang banyak himpunan yang memuat himpunan {1,2,3,4,5,6}. Maka jawabannya adalah $2^2 + 2^4 - 2 = 4 + 16 - 2 = 18$.
5. Kita ketahui terdapat 9 pasang bilangan bulat positif lebih kecil dari 18 dimana jumlahnya sama dengan 18. Pasangan-pasangan ini terdiri dari 8 pasang dengan dua bilangan berbeda dan 1 pasang dengan bilangan yang sama yaitu (9,9). Agar Afif dapat menuliskan 9 bilangan yang memenuhi kriteria soal, Afif hanya boleh memilih 1 bilangan dari tiap pasang. Karena ada 1 pasang yang terdiri dari (9,9), maka Afif pasti menulis bilangan 9.
6. Dari Binomial Newton, kita ketahui bahwa koefisien x^2 adalah ${}_nC_2 \cdot 3^{n-2}$, maka kita dapatkan
$$81k = \frac{n(n-1)}{2} \cdot 3^{n-2} \Rightarrow k = \frac{n(n-1)}{2} \cdot 3^{n-6}$$
Nilai n terkecil yang memenuhi adalah n = 6 sehigga k terkecil adalah $\frac{6 \cdot 5}{2} \cdot 3^{6-6} = 15$.
7. Misalkan R adalah jari-jari lingkaran luar segitiga sama sisi tersebut, maka diperoleh
$$R = \frac{s^3}{4\left(\frac{s^2}{4}\sqrt{3}\right)} = \frac{s}{\sqrt{3}}$$
$$s = R\sqrt{3}$$
Karena ABD sama sisi, maka BP adalah garis bagi sehingga $\angle PBA = 30^\circ$. Akibatnya, $\angle PBC = 150^\circ$. Dengan aturan cosinus, diperoleh
$$PC^2 = BP^2 + BC^2 - 2 \cdot BP \cdot BC \cdot \cos 150^\circ$$
$$PC^2 = R^2 + 3R^2 - 2 \cdot R \cdot R\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 7R^2$$
$$PC = R\sqrt{7}$$
Misalkan jari-jari lingkaran luar BPC adalah R_{BPC}, maka dengan rumus $R = \frac{abc}{4L}$ diperoleh

$$126 = \pi R_{BPC}^2 = \pi\left(\frac{R\cdot R\sqrt{3}\cdot R\sqrt{7}}{4\cdot\frac{1}{2}R\cdot R\sqrt{3}\cdot\sin 150^o}\right)^2 = 7\pi R^2$$

$$R = \sqrt{\frac{18}{\pi}}$$

Dengan argumen yang sama, diperoleh ∠QBC = 30◦, sehingga ∠PBQ = 120◦. Dengan aturan cosinus, diperoleh

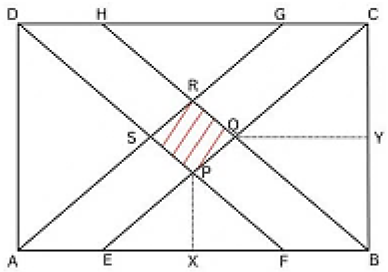
$$PC^2 = R^2 + R^2 - 2\cdot R\cdot R\cdot \cos 120^o$$

$$PQ = R\sqrt{3}$$

Akibatnya, diperoleh luas lingkaran luar segitiga BPQ adalah

$$\pi . R_{BPQ}^2 = \pi\cdot\left(\frac{R\cdot R\cdot R\sqrt{3}}{4\cdot\frac{1}{2}R\cdot R\cdot\sin 120^o}\right)^2 = \pi\cdot R^2 = \pi\cdot\frac{18}{\pi} = 18$$

8. Perhatikan gambar berikut!



Misalkan garis DF dan EC berpotongan di titik P, garis BH dan EC berpotongan di titik Q, garis BH dan GA berpotongan di titik R, serta garis GA dan DF berpotongan di titik S. Titik X pada ruas garis EF sehingga PX ⊥ EF dan titik Y pada garis BC sehingga QY ⊥ BC. Kita ketahui panjang CY = 13 dan EF = BE + AF − AB = 40 sehingga AE = 12 dan EX = 20. Perhatikan bahwa △EXP ∼ △EBC, maka PX = $\frac{EX}{EB}$ · BC = 10. Jelas bahwa PQRS adalah belah ketupat dengan d_1 = AE = 12 dan EB d_2 = 26 – 10 – 10 = 6, maka luas PQRS adalah $\frac{6\cdot 12}{2}$ = 36.

9. Perhatikan bahwa persamaan soal dapat kita tuliskan sebagai

$$P(r) = (r-1)^5 + 4$$

dengan r = $5^b - 1$. Kemudian, misalkan Q(x) = P(x) − $(x-1)^5$ − 4. Karena Q(r) = 0 untuk setiap bilangan asli b, maka Q(x) memiliki sebanyak tak hingga akar. Akibatnya, Q(x) = 0, sehingga P(x) = $(x-1)^5$ + 4.
Maka, diperoleh P(3) = $(3-1)^5$ + 4 = 36.

10. Kita dapat menulis ulang persamaan menjadi $x^2 + mx + 37 - m = 0$. Agar persamaan tidak memiliki akar real, maka diskriman harus negatif.

$$D < 0 \Rightarrow m^2 - 4\cdot 1\cdot(37-m) < 0 \Rightarrow m^2 + 4m - 148 < 0$$

Kita dapat cari batas nilai m yaitu

$$-2-\sqrt{152} < m < -2+\sqrt{152} \Longrightarrow -14,\ldots < m < 10,\ldots$$

Jadi, terdapat 25 nilai m yang memenuhi.

11. Kita dapat tulis ulang pernyataan menjadi

$$FPB\left(\frac{n(n+1)}{2},\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) < 100 \Rightarrow FPB\left(\frac{n(n+1)}{2},\frac{n(n+1)}{2}\cdot\frac{(2n+1)}{3}\right)$$

a. Jika n = 3k dengan k bilangan asli, maka kita dapatkan

$$FPB\left(\frac{3k(3k+1)}{2}, \frac{k(3k+1)}{2}\cdot(6k+1)\right) = \frac{k(3k+1)}{2} < 100$$

Nilai k terbesar adalah 7 sehingga n terbesar adalah 21.

b. Jika n = 3k−1 dengan k bilangan asli, maka kita dapatkan

$$FPB\left(\frac{(3k-1)}{2}, \frac{(3k-1)}{2}\cdot(6k-1)\right) = \frac{(3k-1)k}{2} < 100$$

Nilai k terbesar adalah 8 sehingga n terbesar adalah 23.

c. Jika n = 3k−2 dengan k bilangan asli, maka kita dapatkan

$$FPB\left(\frac{(3k-1)(3k-2)}{2}, \frac{(3k-1)(3k-2)}{2}\cdot(2k-1)\right) = \frac{(3k-1)(3k-2)}{2} < 100$$

Nilai k terbesar adalah 5 sehingga n terbesar adalah 13.

Jadi, nilai maksimum n adalah 23.

12. Tanpa mengurangi keumuman, OD = 25, dan OE = 39. Kita akan cari nilai dari OF. Karena O adalah titik pusat lingkaran luar segitiga ABC, dan D, E, F adalah titik tengah dari ketiga sisi segitiga, maka diperoleh OD ⊥ BC, OE ⊥ AC, dan OE ⊥ AB. Jelas bahwa AO = BO = CO = 65. Dengan Teorema Phytagoras, diperoleh

$$AE = \sqrt{AO^2 - OE^2} = \sqrt{65^2 - 39^2} = \sqrt{104\cdot 26} = 52$$

$$CD = \sqrt{65^2 - 25^2} = \sqrt{90\cdot 40} = 60$$

Akibatnya, AC = 104, BC = 120. Misalkan AB = 2x, dengan rumus R = $\frac{abc}{4L}$, diperoleh

$$65 = \frac{104\cdot 120\cdot 2x}{4\sqrt{(112+x)(x+8)(x-8)(112-x)}} = \frac{6240x}{\sqrt{(112^2-x^2)(x^2-64)}} = \frac{6240x}{\sqrt{-x^4+(112^2+64)x^2-112^2\cdot 64}}$$

Kemudian, akan diperoleh

$$-x^4 + (112^2+64)x^2 - 112^2\cdot 64 = \left(\frac{6240x}{65}\right)^2 = 96^2x^2$$

Persamaan yang diperoleh akan menjadi

$$x^4 - (112^2 - 96^2 + 64)x^2 + 112^2\cdot 64 = 0 \Rightarrow x^4 - 3392x^2 + 112^2\cdot 64 = 0 \Rightarrow (x^2 - 56^2)(x^2 - 16^2) = 0$$

Karena x pasti positif, maka x = 16 atau x = 56. Jika x = 16, diperoleh

$$OF = \sqrt{65^2 - 16^2} = \sqrt{81\cdot 49} = 63$$

Jika x = 56, diperoleh

$$OF = \sqrt{65^2 - 56^2} = \sqrt{121\cdot 9} = 33$$

Terdapat kekurangan informasi pada soal yang didapatkan. Jika ABC lancip, maka OF = 33. Sebaliknya, jika ABC tumpul, maka OF = 63. Pemilihan lancip atau tumpul tersebut didasarkan pada ketaksamaan $BC^2 > AC^2 + AB^2$ untuk tumpul, dan $BC^2 < AC^2 + AB^2$ untuk lancip.

13. Misalkan S_k adalah gabungan digit-digit dari 6 hingga k. Perhatikan bahwa,

$$S_6 = 6 \equiv -1 \bmod 7$$
$$S_7 = 67 \equiv -3 \bmod 7$$
$$S_8 = 678 \equiv -1 \bmod 7$$
$$S_9 = 6789 \equiv -1 \bmod 7$$

Untuk selanjutnya, setiap suku menambah 2 digit baru, jadi untuk 10 ≤ k ≤ 99, kita punya

$$S_k = S_{k-1} \times 10^2 + k$$

Dengan modulo 7, kita peroleh

$$S_k \equiv 2S_{k-1} + k \bmod 7$$

Akibatnya, kita akan peroleh

$$S_{10} \equiv 2(-1) + 10 \equiv 8 \equiv 1 \bmod 7$$
$$S_{11} \equiv 2(1) + 11 \equiv 13 \equiv -1 \bmod 7$$
$$S_{12} \equiv 2(-1) + 12 \equiv 10 \equiv 3 \bmod 7$$
$$S_{13} \equiv 2(3) + 13 \equiv 16 \equiv 5 \bmod 7$$
$$S_{14} \equiv 2(5) + 14 \equiv 24 \equiv 3 \bmod 7$$
$$S_{15} \equiv 2(3) + 15 \equiv 21 \equiv 0 \bmod 7$$

Jadi, n terkecil yang memenuhi sehingga S_n kelipatan 7 adalah 15.

14. Perhatikan bahwa,

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{1+x+y} + \frac{1}{1+y+z} + \frac{1}{1+z+x} = \frac{1}{1+x+y} + \frac{4}{4+4y+4z} + \frac{2}{2+2z+2x}$$

Dengan Ketaksamaan Cauchy Schwarz Engel, diperoleh

$$\frac{1}{4} = \frac{1^2}{1+x+y} + \frac{2^2}{4+4y+4z} + \frac{(\sqrt{2})^2}{2+2z+2x} \geq \frac{(1+2+\sqrt{2})^2}{7+3x+5y+6z} = \frac{11+6\sqrt{2}}{7+3x+5y+6z}$$

yang menyebabkan

$$7 + 3x + 5y + 6z \geq 4(11 + 6\sqrt{2}) = 44 + 24\sqrt{2}$$
$$3x + 5y + 6z \geq 37 + 24\sqrt{2}$$

Kesamaan terjadi ketika

$$\frac{1}{1+x+y} = \frac{2}{4+4y+4z} = \frac{\sqrt{2}}{2+2z+2x}$$

atau

$$\{x, y, z\} = \{\sqrt{2} + 1 + (3 + 2\sqrt{2})z, \sqrt{2} + (1 + 2\sqrt{2})z, z\}, z \in \mathbb{R}^+$$

Jadi, A + B = 37 + 24 = 61.

15. Kita perlu cari a ganjil sehingga $\frac{579}{a} - \frac{579}{a+2} \geq 1$

Perhatikan bahwa

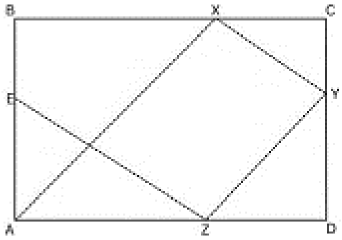
$$\frac{579(a+2) - 579(a)}{a(a+2)} \geq 1 \Rightarrow 579 \cdot 2 \geq a(a+2) \Rightarrow 1158 \geq a(a+2)$$

Nilai maksimum a adalah 33, maka $a \leq 33 \Rightarrow \frac{579}{a} - \frac{579}{a+2} \geq 1 \Rightarrow \left\lfloor \frac{579}{a} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{579}{a+2} \right\rfloor$. Jadi, barisan $\left\lfloor \frac{579}{1} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{579}{3} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{579}{5} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{579}{33} \right\rfloor$ memiliki (33 + 1) : 2 = 17 bilangan bulat berbeda.

Untuk $a \geq 35$, $\frac{579}{a} - \frac{579}{a+2} < 1$. Karena $\frac{579}{a} - \frac{579}{a+2} < 1$, maka $\left\lfloor \frac{579}{a} \right\rfloor$ dan $\left\lfloor \frac{579}{a+2} \right\rfloor$ pasti berselisih 0 atau 1.

Jadi semua bilangan pada barisan $\left\lfloor \frac{579}{35} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{579}{37} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{579}{579} \right\rfloor$ terdiri dari angka 1 hingga $\left\lfloor \frac{579}{35} \right\rfloor = 16$. Oleh karena itu, banyak bilangan bulat berbeda adalah 17 + 16 = 33.

16.



Misal sudut α dimana ($0^o < \alpha < 90^\circ$ dan benda menyentuh BC, CD, DA berturut-turut di X, Y, Z. Jika kita misalkan ∠BAX = β, maka α + β = 90◦ dan ∠AXB = α. Karena benda memantul dan α + β = 90◦ , maka

$$\angle CXY = \alpha \Rightarrow \angle CYX = \beta \Rightarrow \angle DYZ = \beta \Rightarrow \angle DZY = \alpha \Rightarrow \angle AZE = \alpha$$

Dengan identitas trigonometri, kita dapatkan

$$AX = \frac{BX}{\cos\alpha} \text{ dan } XY = \frac{CX}{\cos\alpha} \Rightarrow AX + XY = \frac{BX + CX}{\cos\alpha} = \frac{BC}{\cos\alpha}$$
$$YZ = \frac{DZ}{\cos\alpha} \text{ dan } ZE = \frac{ZA}{\cos\alpha} \Rightarrow YZ + ZE = \frac{DZ + ZA}{\cos\alpha} = \frac{AD}{\cos\alpha}$$

Maka, jarak yang ditempuh adalah

$$AX + XY + YZ + ZE = \frac{BC}{\cos\alpha} + \frac{AD}{\cos\alpha} = \frac{170}{\cos\alpha} = 170\sqrt{2} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Karena 0◦ < α < 90◦, maka pastilah α = 45◦ ⇒ β = 45◦ sehingga △ABX, △CYX, △CYX, △DYZ, △AEZ, semua segitiga siku-siku sama kaki. Oleh karena itu, kita dapatkan BX = AB = 60 ⇒ CX = CY = 25 ⇒ DY = DZ = 35 ⇒ ZA = DA − DZ = 50 ⇒ EA = ZA = 50.

17. Jika f(x) = y untuk suatu x, y ∈ {1,2,3,4,5}, maka diperoleh

$$f(f(x)) = f(x) \Rightarrow f(y) = y$$

Maka, ada x sehingga f(x) = x untuk suatu x ∈ {1,2,3,4,5}. Jika banyaknya x yang memenuhi adalah k, maka banyaknya cara memilih x yang memenuhi ada $\binom{5}{k}$. Untuk x yang tidak memenuhi bentuk dari f(x) = x, jika f(x) = z untuk suatu z sehingga f(z) ≠ z, maka dari f(f(x)) = f(x) diperoleh f(z) = z, padahal f(z) ≠ z. Maka, haruslah f(x) = y, untuk suatu y yang memenuhi f(y) = y. Akibatnya, karena ada 5−k banyaknya x yang tidak memenuhi f(x) = x, dan f(x) punya sebanyak k pilihan keluaran, diperoleh banyaknya pemetaan adalah $\binom{5}{k} \times k^{5-k}$, untuk setiap k = 1,2,3,4,5. Jadi, banyaknya pemetaan yang memenuhi adalah $\binom{5}{1} \times 1^4 + \binom{5}{2} \times 2^3 + \binom{5}{3} \times 3^2 + \binom{5}{4} \times 4^1 + \binom{5}{5} \times 5^0 = 5 + 80 + 90 + 20 + 1 = 196$.

18. Kita dapat menghitung banyak kemungkinan berhenti pada pengundian ke-n yaitu $(n - 1) \cdot 4^2 \cdot 2^{n-2}$.
   a. Percobaan berhenti pada pengundian ke-2 ⇒ $1 \cdot 4^2 \cdot 2^0 = 16$
   b. Percobaan berhenti pada pengundian ke-3 ⇒ $2 \cdot 4^2 \cdot 2^1 = 64$
   c. Percobaan berhenti pada pengundian ke-4 ⇒ $3 \cdot 4^2 \cdot 2^2 = 192$
   d. Percobaan berhenti pada pengundian ke-5 ⇒ $4 \cdot 4^2 \cdot 2^3 = 512$

   Banyak kemungkinan adalah 16 + 64 + 192 + 512 = 784.

19. Perhatikan jumlahkan kedua persamaan akan diperoleh
   $(n + 2)x + (n + 2)y = 115 \Rightarrow (n + 2)(x + y) = 115$

Jelas bahwa (n + 2) haruslah merupakan factor dari 115, maka diperoleh (n + 2) ∈ {5, 23, 115}, sehingga n ∈ {3, 21, 113}. Perhatikan, (x + y) haruslah factor dari 115 juga.
Mudah dicek bahwa pasangan ((n + 2), (x + y)) ∈ {(5,23), (23,5)} yang memenuhi.
Sehingga hanya ada dua buah nilai n yang memenuhi, yaitu 3 dan 21.
Jadi, jumlah semua bilangan asli n yang memenuhi adalah 3 + 21 = 24.

20. Berdasarkan aturan (b), hal ini sama saja dengan kolom ke-k dan k + 2 tidak boleh memiliki jumlah petak hitam yang sama. Maka, pada 3 kolom berurutan, masingmasing dari mereka akan memiliki jumlah petak hitam yang berbeda. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan banyaknya petak hitam pada kolom ke 1,2,3 berturut-turut adalah a,b,c dengan a,b,c adalah permutasi dari {0,1,2}. Maka, pada kolom ke 4, banyaknya petak hitam haruslah a. Hal ini dikarenakan banyaknya petak hitam pada kolom ke-4 harus berbeda dengan kolom ke 2 dan 3. Dengan argumen yang sama, diperoleh banyaknya petak hitam pada 29 kolom secara berturut-turut adalah a,b,c,a,b,c,...,a,b,c,a,b. Perhatikan bahwa ada 2 cara pewarnaan sebuah kolom yang memiliki 1 warna hitam, dan 1 cara pewarnaaan sebuah kolom yang memiliki 0 atau 2 warna hitam. Jika a = 1 atau b = 1, maka banyaknya cara pewarnaan yang mungkin adalah $2 \times 2! \times 2^{10} = 4096$. Jika c = 1, maka banyaknya pewarnaan yang mungkin adalah $2! \times 2^9 = 1024$. Maka, banyaknya cara pewarnaan papan yang mungkin adalah 4096 + 1024 = 5120.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2025

TINGKAT PROVINSI

BIDANG MATEMATIKA

WAKTU : 210 MENIT

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2025

1. Diberikan suatu dadu tidak standar dengan bilangan pada sisi-sisinya 1, 2, 5, 8, 13, 21, dan 34. Dadu tersebut dilemparkan dua kali. Banyaknya kemungkinan jumlah bilangan yang muncul merupakan suatu bilangan pada sisi dadu tersebut adalah …

2. Misalkan $u_1, u_2, u_3, \ldots$ adalah barisan geometri yang memenuhi persamaan

$$u_2 + u_4 + u_6 + u_8 = 31 \text{ dan } u_1 + \frac{u_2}{u_1} = 149$$

   Nilai $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots = \ldots$

3. Diberikan segitiga lancip ABC dengan titik P dan Q pada sisi BC, titik R pada sisi AQ sehingga

$$|PB| = |PQ| = |PR| \text{ dan } |QC| = |QR|.$$

   Diketahui bahwa $ACPR$ merupakan segiempat talibusur. Jika $\angle APR = 54^o$, maka $\angle ABC = \ldots$

   Catatan: notasi $|XY|$ mengatakan panjang ruas garis XY.

4. Misalkan bilangan asli a, b, c, d memenuhi persamaan $2^a + 2^b + 2^c = 4^d$. Jika $a + b + c + d \leq 500$, maka nilai terbesar yang mungkin dari d adalah …

5. Misalkan f suatu polinomial monik berderajat 5. Sehingga

$$f(1) = 4, f(2) = 7, f(3) = 12, f(4) = 19 \text{ dan } f(5) = 28.$$

   Nilai $f(6) = \ldots$

   Catatan: Polinomial $P(x)$ berderajat n disebut polinomial monik jika koefisien dari x^n adalah 1.

6. Banyaknya bilangan asli 8 digit yang hanya terdiri dari digit-digit 1 atau 2 serta tidak memuat 121 maupun 212 adalah …
   Catatan:
   - Contoh bilangan 5 digit yang memenuhi syarat tersebut adalah 12211 dan 22222.
   - Contoh bilangan 5 digit yang tidak memenuhi syarat adalah 11211 dan 21222.

7. Diberikan segiempat konveks $ABCD$ dengan luas 288, AC tegak lurus BD, dan AB tidak sejajar CD. Misalkan P suatu titik di dalam segiempat $ABCD$. Selanjutnya, misalkan Q dan R berturut-turut merupakan proyeksi titik P pada sisi AC dan BD. Jika $AQ|:|CQ| = 5:3$ dan $|BR|:|DR| = 7:2$, maka selisih luas segitiga ABP dengan luas segitiga CDP adalah …
   Catatan: Segiempat konveks adalah segiempat yang memenuhi:
   - Perpotongan kedua diagonalnya terletak didalam segiempat.
   - Keempat sudut dalam dari segiempat tersebut kurang dari 180^o.

8. Banyaknya bilangan asli (a, b) dimana $1 \leq a, b \leq 19^2$ sehingga

$$a^4 + b^3 \text{ habis dibagi } 19^2$$

adalah …

ESAI

1. Tentukan banyaknya bilangan asli $n \geq 2$ sedemikian sehingga terdapat n bilangan bulat berurutan yang jumlahnya 2025.

2. Misalkan S adalah himpunan semua tripel bilangan real positif (a, b, c) yang memenuhi $a + b + c = ab + bc + ca$.
   a. Buktikan bahwa ketaksamaan
   $$\min a + b, b + c, c + a > 1$$
   berlaku untuk setiap $(a, b, c) \in S$.
   b. Apakah terdapat tripel $(a, b, c) \in S$ sehingga
   $$\min a + b, b + c, c + a < 1 + \frac{1}{20^{25}}$$

   Catatan: Notasi min x, y, z menyatakan bilangan terkecil di antara x, y, z.

3. Pada segitiga ABC, misalkan D titik tengah ruas garis AB dan E titik pada sisi BC. Misalkan garis yang melalui E dan sejajar AB memotong garis bagi $\angle ACB$ di titik P. Misalkan juga I titik pusat lingkaran dalam segitiga ABC dan J titik pusat lingkaran singgung luar dari segitiga ABC yang menyinggung sisi CA (bukan perpanjangan sisi CA). Garis DJ memotong sisi CA di titik F.

   a. Buktikan bahwa garis IF sejajar dengan AB.
   b. Buktikan bahwa garis AP, BJ, dan EF berpotongan di satu titik.

4. Diberikan suatu segitiga pada bidang xy dengan ketiga titik sudutnya bukan merupakan titik latis dan ketiga sisinya tidak melalui titik latis. Diketahui juga bahwa segitiga tersebut memuat paling sedikit 10 titik latis di bagian dalamnya. Buktikan bahwa terdapat 4 titik latis di bagian dalam segitiga tersebut yang terletak pada satu garis.

   Catatan: Pada bidang xy, titik latis adalah titik berbentuk (a, b) dengan a dan b bilangan bulat.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA
TAHUN 2025

TINGKAT PROVINSI

SOLUSI SOAL

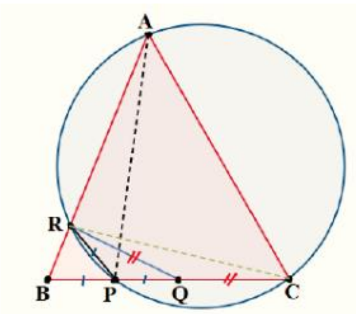
WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Provinsi Tahun 2025

1. Penyelesaian:
   Misalkan (a, b) menyatakan muncul mata dadu pertama dan kedua berturut-turut.
   Misal: $S = \{3, 5, 8, 13, 21, 34\} \rightarrow a, b \in S$
   Pasangan (a, b) dengan $a + b \in S$ yaitu:
   $$(a, b) = \{(3,5), (5,3), (5,8), (8,5), (8,13), (13,8), (13,21), (21,13)\}$$
   Jadi, ada 8 kemungkinan.

2. Penyelesaian:
   Rumus suku ke-n dari barisan geometri adalah $u_n = ar^{n-1}$, maka
   $$u_1 + \frac{u_2}{u_1} = a + r = 149 \Leftrightarrow a = 149 - r \text{ dan}$$
   $$\underbrace{ar + ar^3 + ar^5 + ar^7 + \cdots}_{\substack{\text{deret geometri tak hingga,} \\ \text{suku pertama } ar, \ \text{rasio } r^2}} = 31 \Leftrightarrow \frac{ar}{1 - r^2} = 31 \Leftrightarrow \frac{(149 - r)r}{1 - r^2} = 31 \Leftrightarrow 30r^2 + 149r - 31 = 0$$
   Selanjutnya difaktorkan menjadi $(5r - 1)(6r + 31) = 0$. Agar hasilnya konvergen maka $|r| \leq 1$, sehingga diperoleh $r = \frac{1}{5}$ dan $a = \frac{744}{5}$. Jadi,
   $$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots = \frac{a}{1 - r} = \frac{\frac{744}{5}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{744}{4} = 186$$
   Jadi, hasilnya adalah 186.

3. Penyelesaian:
   Perhatikan gambar berikut.



   Karena $PB = PQ = PR$ maka ada lingkaran yang melalui titik B, Q, R dan berpusat di P seperti pada gambar. Karena $ARPC$ segiempat talibusur, maka $\angle ACR = \angle APR = 54^o$ (sebab menghadap busur AR).
   Misal $\angle QCR = \angle QRC = x$, maka $\angle PRQ = \angle PQR = 2x$, $\angle BPR = 4x$ dan $\angle PBR = \angle PRB = 90^o - 2x$.

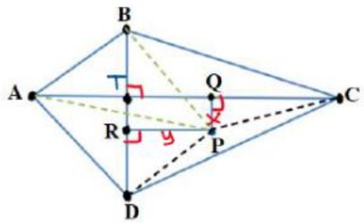
$\angle BAC = \angle RAC = 180^o - \angle RPC = 180^o - \angle RPQ = 4x$. Jumlah sudut pada segitiga $ABC = 180^o$, maka $90^o - 2x + 54^o + x + 4x = 180^o$, diperoleh $x = 12^o$ dan $\angle ABC = \angle PRB = 90^o - 24^o = 66^o$.
Jadi, besar $\angle ABC = 66^o$.

4. Penyelesaian:
WLOG, $a \le b \le c$, maka $2^a + 2^b + 2^c = 4^d \Leftrightarrow 1 + 2^{b-a} + 2^{c-a} = 2^{2d-c}$
Agar d maksimum maka $2d > c$, sehingga LHS harus genap, akibatnya $b - a = 0$, diperoleh
$$2 + 2^{c-a} = 2^{2d-c} \Leftrightarrow 1 + 2^{c-a-1} = 2^{2d-c-1}$$
Agar d maksimum maka $2d > c + 1$, sehingga LHS harus genap, akibatnya $c - a - 1 = 0$, diperoleh $b = a$ dan $c = a + 1$, sehingga persamaan menjadi
$$2^a + 2^a + 2^{a+1} = 2^{2d} \Leftrightarrow 2^{a+2} = 2^{2d}, \text{diperoleh } d = \frac{a+2}{2}$$
Diketahui $a + b + c + d \le 500$, maka $a + a + a + 1 + \frac{a+2}{2} \le 500$, diperoleh $a \le 142$.
Jadi, d maksimum adalah $\frac{144}{2} = 72$.

5. Penyelesaian:
Nilai $f(x)$, untuk $x = 1, 2, 3, 4, 5$ berpola $x^2 + 3$. Misalkan $g(x) = f(x) - (x^2 + 3)$, maka 1, 2, 3, 4, 5 akar-akar dari $g(x) = 0$. Karena f monik maka $g(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$.
$$f(6) - (6^2 + 3) = g(6) = 5! = 120 \Leftrightarrow f(6) = 120 + 39 = 159$$
Jadi, nilai dari $f(6)$ adalah 159.

6. Penyelesaian:
Misalkan $f(n)$ adalah banyak bilangan n digit yang memenuhi soal, g_n adalah banyaknya n digit yang memenuhi soal dan diakhiri dengan dua digit yang sama, sedangkan h_n adalah banyaknya n digit yang memenuhi soal dan diakhiri dengan dua digit yang berbeda.
Maka $g_n = f_{n-1}$ dan $h_n = g_{n-1} = f_{n-2}$. Sehingga,
$$f_n = g_n + h_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \text{dengan } f_2 = 4, f_3 = 6.$$
Sehingga, diperoleh $f_8 = 68$

7. Penyelesaian:
Perhatikan gambar berikut.



$AQ : CQ = 5 : 3 \rightarrow AQ = 5m, CQ = 3m$
$BR : DR = 7 : 2 \rightarrow BR = 7n, DR = 2n$

$[ABCD] = 288 \rightarrow AC \cdot BD = 576$
$\rightarrow 8m \cdot 9n = 576 \rightarrow m \cdot n = 8 \ldots \text{(i)}$

Misal: $PQ = x$ dan $PR = y \rightarrow AT = 5m - y$ dan $BT = 7n - x$
$[ABP] = [ABT] + [ATP] + [BTP]$
$= \frac{1}{2} \cdot (5m - y) \cdot (7n - x) + \frac{1}{2}(5m - y)x + \frac{1}{2}(7n - x) \cdot y$
$= \frac{1}{2}[35mn - xy] = \frac{35}{2}mn - \frac{1}{2}xy$
$[COP] = [CDT] - [PRQT] - [CPQ] - [PDR]$
$= \frac{1}{2}(3m + y) \cdot (2n + k) - xy - \frac{1}{2}(3mx) - \frac{1}{2}(2ny)$
$= \frac{6}{2}mn - \frac{1}{2}xy$
Selisih Luas = $[ABP] - [CDP] = \left(\frac{35}{2}mn - \frac{1}{2}xy\right) - \left(\frac{6}{2}mn - \frac{1}{2}xy\right)$
$= \frac{29}{2}mn = \frac{29}{2}(8) = 116$
Jadi, Selisihnya adalah 116.

8. Penyelesaian:
Untuk persoalan ini kita bagi 2 kasus berdasarkan mod 19, yaitu:
- Kasus 1:

Jika $a \equiv 0$ (mod 19), maka $b^3 \equiv 0$ (mod 19^2), akibatnya $b \equiv 0$ (mod 19). Karena $1 \leq a, b \leq 19^2$, maka ada $19^2 = 361$ pasangan (a, b) sehingga $19|a^4 + b^3$.

- Kasus 2:

Jika $19 \nmid a$, maka $19 \nmid b$, berdasarkan FLT, maka $a^{18} \equiv b^{18} \equiv 1$ (mod 19).

Ada $\frac{18}{\text{FPB}(18,4)} = 9$ nilai berbeda a^4 (mod 19) dan $\frac{18}{\text{FPB}(18,3)} = 6$ nilai berbeda b^3 (mod 19). Banyaknya residu tak nol yang termasuk a^4 dan $-b^3$ = FPB(9, 6) = 3.

Jika $a^4 \equiv t$ (mod 19) dan $b^3 \equiv -t$ (mod 19), maka ada 2 solusi a (sebab FPB(18, 4) = 2) dan 3 solusi b (sebab FPB(18, 3) = 3). Jadi, total ada $3 \times 2 \times 3 = 18$ pasangan (a, b) sehingga $19|a^4 + b^3$. Misalkan (a, b) solusi dari $19|a^4 + b^3$ dan $1 \leq a, b \leq 19^2$, maka dapat ditulis $a \equiv k + 19x$, $b \equiv m + 19y$, dan $k^4 + m^3 = 19p$ dengan k, x, m, y, p bilangan asli $0 \leq x, y < 18$ dan akibatnya

$$a^4 + b^3 \equiv 19p + (4k^3x + 3m^3y)19 \equiv 0 \ (\text{mod } 19^2)$$

Ini mengakibatkan $p + 4k^3x + 3m^3y \equiv 0$ (mod 19) $\Leftrightarrow y \equiv -(p + 4k^3x)(3m^3)^{-1}$ (mod 19). Setiap x tepat satu solusi y, sehingga ada 18 pasangan (x, y) yang memenuhi. Jadi, untuk kasus ini ada $18 \times 19 = 342$ pasangan (a, b) sehingga $19|a^4 + b^3$.

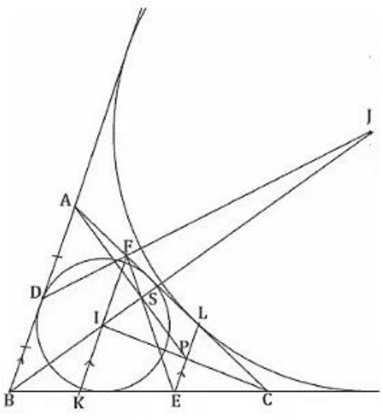
Berdasarkan 2 kasus di atas, total ada 361 + 342 = 703 pasangan (a, b) yang memenuhi $19|a^4 + b^3$.

ESAI

1. Penyelesaian:
Misalkan n bilangan bulat berurutan tersebut adalah $k+1, k+2, k+3, \dots, k+n$, maka
$$kn + 1 + 2 + \cdots + k = 2025$$
$$kn + \frac{n(n+1)}{2} = 2025$$
$$n(2k+n+1) = 4050$$
Jelas bahwa n haruslah factor positif dari 4050. Jika n genap maka $2k+n+1$ ganjil dan sebaliknya. Karena 4050 hanya dapat dinyatakan sebagai perkalian genap dan ganjil, maka semua factor positif dari 4050 selain 1 pasti memenuhi nilai dari n dan k pasti suatu bilangan bulat.
Karena 40450 = $2^1 \times 3^4 \times 5^2$, maka banyaknya n yang mungkin adalah (1 + 1)(4 + 1)(2 + 1) – 1 = 29.

2. Penyelesaian:
a) Misalkan $t = a + b$. Karena a, b bilangan real positif, maka $t \geq 0$ dan
$$(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2 + 4ab \geq 4ab \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow \frac{t^2}{4} \geq ab$$
Diketahui $a+b+c = ab+bc+ca$, maka $ab = t + c(1-t)$.
Andaikan $t \leq 1$, karena $c > 0$, maka $ab = t + c(1-t) \geq t$ dan $\frac{t}{4} - \frac{t^2}{4} = \frac{t(1-t)}{4} \geq 0$, akibatnya
$$\frac{t}{4} \geq \frac{t^2}{4} \geq ab \geq t \text{ (karena } t \geq 0, \text{maka kontradiksi)}$$
Sehingga haruslah $t = a + b > 1$. Dengan cara yang sama, maka $b + c > 1$ dan $c + a > 1$. Jadi, terbukti min$\{a+b, b+c, c+a\} > 1$. (Q.E.D)
b) Ada. Ambil $a = b = k$ dengan $\frac{1}{2} < k < 1$, maka $k + k + c = k^2 + kc + ck$, diperoleh $c = \frac{2k-k^2}{2k-1} > 0$. Perhatikan bahwa $3k - 3k^2 = 3k(1-k) > 0 \Leftrightarrow k^2 + k > 4k^2 - 2k = 2k(2k-1)$.
Karena $2k - 1 > 0$, maka $\frac{k^2+k}{2k-1} > 2k$. Akibatnya, $k + c = k + \frac{2k-k^2}{2k-1} = \frac{k^2+k}{2k-1} > 2k$, sehingga min$\{a+b, b+c, c+a\}$ = min$\{2k, k+c, c+k\} = 2k$. Pilih $k = \frac{1+p}{2}$, dengan $p \in \left(0, \frac{1}{2^{25}}\right)$, maka min$\{a+b, b+c, c+a\}$ = $1 + p < 1 + \frac{1}{2^{25}}$ (Q.E.D).

3. Penyelesaian:
a) Misalkan $Q = AC \cap BJ$. Karena J titik pusat lingkaran singgung luar dari segitiga ABC yang menyinggung sisi CA (bukan perpanjangan sisi CA), maka JB garis bagi dalam $\angle ABC$ dan JA garis bagi luar $\angle BAC$. Akibatnya, $\frac{QJ}{JB} = \frac{QA}{AB}$. Karena I pusat lingkaran dalam, maka AI garis bagi dalam $\angle BAC$ dan IB bagi dalam $\angle ABC$, akibatnya, $\frac{AB}{QA} = \frac{BI}{IQ}$ dan B, I, J kolinier.
Akan dibuktikan IF sejajar AB. Dengan kata lain, akan dibuktikan $\frac{AF}{FQ} = \frac{BI}{IQ}$.
Perhatikan gambar berikut!

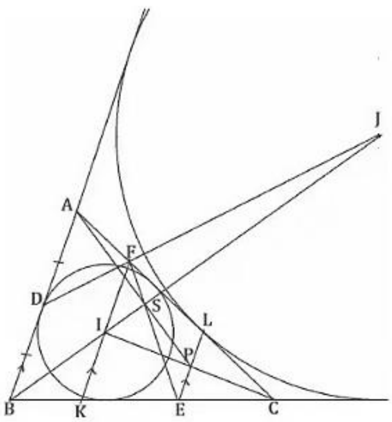


Bukti:

Dengan menelause ΔBAQ, tranv D, F, J, maka

$$\frac{BD}{DA} \cdot \frac{AF}{FQ} \cdot \frac{QJ}{JB} = 1$$
$$\frac{1}{1} \cdot \frac{AF}{FQ} \cdot \frac{QA}{AB} = 1$$
$$\frac{AF}{FQ} = \frac{QA}{AB}$$
$$\frac{AF}{FQ} = \frac{BI}{IQ}$$
$$(\text{Q.E.D})$$

b) Misalkan $FI \cap BC = K, EP \cap AC = L$ dan $AP \cap FE = S$. Akan dibuktikan AP, BJ dan EF konkuren. Dengan kata lain akan dibuktikan BJ melalui S. Dari poin (a), karena B, I, J kolinier, maka dengan invers menelause, cukup dibuktikan bahwa $\frac{ES}{SF} \cdot \frac{FI}{IK} \cdot \frac{KB}{BE} = 1$. Perhatikan gambar berikut!



Bukti:

Dari poin(a) sudah ditentukan bahwa FI sejajar AB. Karena AB sejajar PE, maka PK sejajar LE. Akibatnya,

$$\frac{LP}{PE} = \frac{FI}{IK} \text{ dan } \frac{FA}{AL} = \frac{KB}{BE}$$

Dengan menelause maka ΔLEF, tranv A, S, P

$$\frac{LP}{PE} \cdot \frac{ES}{SF} \cdot \frac{FA}{AL} = 1$$
$$\frac{FI}{IK} \cdot \frac{ES}{SF} \cdot \frac{KB}{BE} = 1$$
$$(\text{Q.E.D})$$

4. Penyelesaian:

   Misalkan $P_1, P_2, \ldots, P_{10}$ adalah titik latis di dalam segitiga. Tinjau koordinat titik latis dalam modulo 3.

   $$(x, y) \to (x \text{ mod } 3, y \text{ mod } 3)$$

   maka ada $3^2 = 9$ kemungkinan berbeda.

   Jika ada 10 titik maka menurut PHP ada 2 titik berbeda, WLOG, misalkan $P_1(x_1, y_1)$ dan $P_2(x_2, y_2)$ sehingga $x_1 \equiv x_2$ (mod 3) dan $y_1 \equiv y_2$ (mod 3).

   Perhatikan bahwa $2x_1 + x_2 \equiv 2y_1 + y_2 \equiv x_1 + 2x_2 \equiv y_1 + 2y_2 \equiv 0$ (mod 3), akibatnya jika kita ambil 2 titik pada garis P_1P_2 dan keduanya berada diantara P_1 dan P_2 dengan rasio 1 : 2 dan 2 : 1, maka kedua titik ini merupakan titik latis. Karena P_1 dan P_2 berada di dalam segitiga maka kedua titik yang kita ambil tersebut juga terletak di dalam segitiga.

   Jadi, ada 4 titik di dalam segitiga yang segaris, yaitu $P_1, \frac{2P_1+P_2}{3}, \frac{P_1+2P_2}{3}$ dan P_2. (Q. E. D).

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2025

TINGKAT NASIONAL

HARI PERTAMA & HARI KEDUA
WAKTU : 8 JAM

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Soal Olimpiade Matematika
Tingkat Nasional Tahun 2025

1. Untuk setiap bilangan bulat positif n, definisikan $f(n)$ sebagai jumlah pasangan terurut bilangan bulat positif (x, y) di mana $x, y \leq n$ sedemikian sehingga FPB dari x, y dan n sama dengan 1. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan komposit n,

$$f(n) \leq n^2 - n$$

dan tentukan semua bilangan bulat positif n sedemikian sehingga kesamaan berlaku.

2. Misalkan ABC adalah segitiga lancip dengan pusat lingkaran luar O. Misalkan D dan E adalah titik-titik pada lingkaran luar segitiga ABC sedemikian sehingga AD tegak lurus terhadap BC dan BE tegak lurus terhadap CA. Segmen CD memotong lingkaran dengan diameter DO di P, sedangkan segmen CE memotong lingkaran dengan diameter EO di Q. Buktikan bahwa $OP = OQ$.

3. Diberikan papan berukuran 2×25. Beberapa label ditempatkan pada **beberapa** kotak berukuran 1×1 dipapan dengan kriteria berikut:

   a. Label yang digunakan adalah bilangan bulat positif berurutan mulai dari 1.
   b. Setiap kotak mendapat label maksimal 1 dan setiap label digunakan tepat sekali.
   c. Kotak pada baris pertama dan kolom pertama diberi label 1 dan label terakhir diberikan kepada kotak pada kolom ke-25.
   d. Dua kotak dengan label berurutan berbagi satu sisi.
   e. Untuk setiap 2×2 kotak, terdapat kotak tanpa label.

   Buktikan bahwa jumlah kemungkinan pemberian label sedemikian sehingga label terakhir berada di baris pertama sama dengan jumlah kemungkinan pemberian label sedemikian sehingga label terakhir berada di baris kedua.

4. Misalkan $(a_n)_{n\geq 1}$ dan $(b_n)_{n\geq 1}$ adalah barisan bilangan real positif sedemikian sehingga $a_1, b_1 < 5$ dan untuk setiap bilangan bulat positif n,

$$a_{n+1} = \frac{b_n + \sqrt{a_n b_n}}{2} \text{ dan } b_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n(a_n + b_n)}{2}}.$$

   Buktikan bahwa $|a_{20} - b_{20} < \frac{1}{2025}$.

5. Misalkan $A_1, A_2, \dots, A_3$ adalah himpunan bagian dari $X = \{1,2,\dots,22\}$, masing-masing dengan 15 elemen. Diketahui bahwa untuk setiap $B \subseteq X$ dengan 10 elemen, terdapat $i, j \in \{1,2,\dots,n\}$ sedemikian sehingga $B \subseteq A_i \subseteq A_j$. Buktikan bahwa $n \geq 431$.

6. Misalkan $\mathbb{R}^+$ adalah himpunan bilangan real positif. Tentukan semua fungsi $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ sedemikian sehingga

$$f(x+y) = \max(f(x), y) + \min(f(y), x)$$

untuk semua $x, y \in \mathbb{R}^+$.

7. Suatu bilangan bulat positif n disebut $asri$ jika terdapat bilangan bulat positif a dan b sedemikian sehingga

$$n = ab + 20a + 25b.$$

a. Buktikan bahwa terdapat bilangan bulat **bukan** $asri$ positif yang lebih besar dari 20^{25}.

b. Buktikan bahwa terdapat bilangan bulat positif 26 berurutan $asri$.

8. Misalkan ABC adalah segitiga sedemikian sehingga $BC > CA$ dan M adalah titik tengah dari AB. Lingkaran dalam segitiga ABC menyinggung BC, CA, dan AB di D, E dan F berturut-turut. Misalkan DE dan AB berpotongan di G. Titik O adalah pusat lingkaran luar segitiga FCG dan OA berpotongan dengan lingkaran luar segitiga FOG di $H (H \neq O)$. Jika $\angle OCB = 90^o$, buktikan bahwa MH menyinggung lingkaran luar segitiga FOG.

SELEKSI OLIMPIADE MATEMATIKA INDONESIA TAHUN 2025

TINGKAT NASIONAL

SOLUSI SOAL

WWW.JELAJAHNALAR.COM

Solusi Olimpiade Matematika
Tingkat Nasional Tahun 2025

1. Penyelesaian:
   Garis besar solusi ini dikomunikasikan kepada saya oleh Ketut Andra Nugraha (yang memenangkan perak dalam kontes) beberapa waktu lalu, jadi saya memutuskan untuk menyelesaikan solusinya dan mempostingnya di sini.
   Kita mengklaim bahwa f bersifat multiplikatif untuk bilangan prima relatif a, b, yaitu $f(ab) = f(a)f(b)$. Misalkan himpunan tersebut $A = (a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_k, b_k)$ adalah k pasangan $a_i, b_i \leq a$ st FPB$(a_i, b_i, a) = 1$ untuk setiap $1 \leq i \leq k$ dan $B = (c_1, d_1), (c_2, d_2), \dots, (c_j, d_j)$ merupakan j pasangan $c_i, d_i \leq b_{\text{st}}$ FPB$(c_i, d_i, b) = 1$ untuk setiap $1 \leq i \leq j$. Misalkan (e, f) dengan $e, f \in \mathbb{N}_{\text{st}}$ FPB$(e, f, ab) = 1$.
   Klaim. $e \equiv a_i \pmod a, e \equiv c_j \pmod b$ dan $f \equiv b_i \pmod a, f \equiv d_j \pmod b$.
   Bukti. Misalkan $m, n, x, y \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga
   $$e \equiv m \pmod a, f \equiv x \pmod a$$
   dan
   $$e \equiv n \pmod b, f \equiv y \pmod b$$
   Cukup untuk membuktikan bahwa $m, x \in A$ dan $n, y \in B$. Asumsikan sebaliknya, maka ada bilangan prima p yang membagi a, m, x. Jadi kita memiliki $p|e, f$, yang berarti FPB$(e, f, ab) \geq p > 1$, sebuah kontradiksi sehingga $m, x \in A$. Secara analog $n, y \in B$,, jadi klaim telah terbukti.
   Dengan CRT, solusinya (e, f) unik (mod ab), jadi setiap pasangan $s \in A$ dan $t \in B$ menghasilkan satu solusi, artinya $f(ab) = kj = f(a)f(b)$. $\square$
   Ambil sembarang bilangan prima q dan bilangan asli r, maka kita memiliki
   $$f(q^r) = (q^r - q^{r-1})^2 = q^{2r}(1 - \frac{1}{q})^2$$
   Sekarang kita siap untuk mengatasi masalah ini. Misalkan $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_l^{a_l}$. Jadi kita memiliki
   $$f(n) = f(p_1^{a_1}) f(p_2^{a_2}) \dots f(p_l^{a_l}) = n^2 \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$$
   Ambil pembagi prima terkecil di antara mereka, misalkan p_t. Karena $n \geq p_t^2$ (karena n merupakan bilangan komposit), maka kita memiliki
   $$f(n) \leq n^2(1 - \frac{1}{p_t^2}) \leq n^2(1 - \frac{1}{n}) = n^2 - n$$
   Kesamaan ketika $n = p^2$ untuk setiap bilangan prima p.

2. Penyelesaian:
   Klaim: Garis CO adalah sumbu radikal dari lingkaran dengan diameter DO dan lingkaran dengan diameter EO.

Bukti: Sudah diketahui bahwa D dan E adalah refleksi dari ortosenter $\triangle ABC$ terhadap sisi masing-masing. Oleh karena itu, C terletak pada garis bagi tegak lurus dari segmen DE. Jadi, jika $X = CO \cap DE$ maka titik X terletak pada kedua lingkaran ini karena sudut siku-siku dan kita memiliki klaim tersebut.
Perhatikan bahwa karena C terletak pada sumbu radikal,

$$CP \cdot CD = CQ \cdot CE$$

dan kita juga tahu bahwa $CD = CE$. Oleh karena itu, $CP = CQ$ juga yang menyiratkan

$$PD = CD - CP = CE - CQ = QE$$

Jadi, $\triangle OPD \cong \triangle OQE$ yang menyiratkan bahwa $OP = OQ$, seperti yang diinginkan.

3. Penyelesaian:
Nyatakan jalur dari label pertama ke label terakhir sebagai urutan panah yang menghubungkan dua label berurutan dari label yang lebih kecil ke label yang lebih besar. Misalkan A_n, B_n, C_n, D_n, masing-masing adalah jumlah cara sehingga gerakan terakhir adalah $\rightarrow$ (pada baris pertama), $\rightarrow$ (pada baris kedua), $\uparrow$ (pada kolom terakhir), dan $\downarrow$ (pada kolom terakhir). Selanjutnya, misalkan $X_n = A_n + B_n + C_n + D_n$.
Kita dapat melihat bahwa $A_{n+3} = X_n + B_n$, $B_{n+3} = X_n + A_n$, $C_{n+3} = X_n - C_n$ dan $D_{n+3} = X_n - D_n$ dengan $A_1 = D_1 = 1$ dan $B_1 = C_1 = 0$.
Masalah ini meminta untuk membuktikan bahwa $A_{25} + D_{25} = B_{25} + C_{25}$. Namun, karena $A_{n+3} + C_{n+3} = 2X_n + B_n - C_n$ dan $B_{n+3} - C_{n+3} = A_n + C_n$ sementara $B_{n+3} + D_{n+3} = 2X_n + A_n - D_n$ dan $A_{n+3} - D_{n+3} = B_n + D_n$, dan juga $A_1 + C_1 = B_1 + D_1$ dan $A_1 - D_1 = B_1 - C_1$, kita dapat menyimpulkan bahwa semua angka $n = 3k + 1$ juga akan memenuhi $A_n + C_n = B_n + D_n$.

4. Penyelesaian:
Lemma: $\dfrac{x-1}{\sqrt{2x^2+2} - \sqrt{x} - 1} > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ untuk $x > 1$.
Bukti: Misalkan $x = a^2$.
Cukup untuk menunjukkan bahwa $\sqrt{2}(a^2-1) + a + 1 \overset{?}{>} \sqrt{2a^4+2}$ atau

$$2(a^2-1)^2 + (a+1)^2 + 2\sqrt{2}(a-1)(a+1)^2 \overset{?}{>} 2a^4 + 2 \iff (a-1)(2\sqrt{2}(a+1)^2 - 3a - 1) > 0$$

Oleh karena itu hasilnya terbukti.

Klaim: $a_n > b_n$ menyiratkan $b_{n+1} > a_{n+1}$ yang menghasilkan $a_{n+2} > b_{n+2} \ldots$
Bukti: Jika $a_n > b_n$, maka

$$b_{n+1} = \frac{\sqrt{a_n}\sqrt{2a_n + 2b_n}}{2} \overset{CS}{\geq} \frac{\sqrt{a_n}(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})}{2} \geq \frac{\sqrt{b_n}(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})}{2} = a_{n+1}$$

dan jika $a_n < b_n$, maka

$$b_{n+1} = \frac{\sqrt{a_n}\sqrt{2a_n + 2b_n}}{2} \leq \frac{\sqrt{b_n}(\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n})}{2} = a_{n+1}$$

karena $2y\sqrt{xy} \geq 2x^2$ dan $xy + y^2 \geq 2xy$ menyiratkan $xy + y^2 + 2y\sqrt{xy} \geq 2x^2 + 2xy$ atau $\sqrt{xy} + y \geq \sqrt{2x^2 + 2xy}$ untuk $a_n = x, b_n = y$.$\square$

Perhatikan bahwa $a_n = b_n$ menghasilkan $a_{n+1} = b_{n+1}$ sehingga kita dapat mengasumsikan bahwa $a_n \neq b_n$.

Klaim: Jika $a_n \leq b_n$, maka

$$a_{n+1} - b_{n+1} \leq \frac{b_n - a_n}{2}$$

Bukti: Misalkan $a_n = x, b_n = y$.

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{\sqrt{xy} + y - \sqrt{2x^2 + 2xy}}{2} \leq \frac{y - x}{2}$$

Karena $2x^2 + 2xy \geq x^2 + xy + 2x\sqrt{xy} = (x + \sqrt{xy})^2$. $\square$

Klaim: Jika $a_n \geq b_n$, maka

$$b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{a_n - b_n}{\sqrt{2}}$$

Bukti: Misalkan $a_n = x, b_n = y$ lagi.

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{\sqrt{2x^2 + 2xy} - \sqrt{xy} - y}{2} \overset{?}{\leq} \frac{x - y}{\sqrt{2}}$$

atau karena ketidaksetaraan tersebut homogen, asumsikan $y = 1$ untuk mendapatkan

$$\frac{x - 1}{\sqrt{2x^2 + 2} - \sqrt{x} - 1} \overset{?}{>} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

dan ini adalah lemma pertama kita.$\square$

Jika $a_1 > b_1$, maka

$$b_2 - a_2 \leq \frac{a_1 - b_1}{\sqrt{2}}$$

dan

$$a_3 - b_3 \leq \frac{b_2 - a_2}{2}$$

dan . . . dan

$$a_{19} - b_{19} \leq \frac{b_{20} - a_{20}}{2}$$

oleh karena itu mengalikan ini menghasilkan

$$b_{20} - a_{20} \leq \frac{a_1 - b_1}{(\sqrt{2})^{10}.2^9} < \frac{5}{2^{14}} < \frac{1}{2025}$$

dan jika $a_1 < b_1$, maka

$$a_{20} - b_{20} < \frac{5}{(\sqrt{2})^9.2^{10}} = \frac{1}{2025}$$

seperti yang diinginkan.$\blacksquare$

5. Penyelesaian:
Misalkan $\mathcal{B}$ adalah himpunan bagian dari yang berelemen 10-X. Sekarang misalkan
$$S = \{(B, i) \mid B \in \mathcal{B}, 1 \le i \le n, B \subseteq A_i\}.$$
Maka
$$|S| \ge 2|\mathcal{B}| = 2\binom{22}{10}$$
karena setiap $B \in \mathcal{B}$ terkandung dalam setidaknya dua A_i. Tetapkan i.
Maka jumlah himpunan bagian dari yang berelemen 10-A_i adalah
$$\binom{15}{10}$$
Dengan menjumlahkan atas $i = 1, 2, \ldots, n$, kita memiliki
$$|S| = \sum_{i=1}^{n} |\{B \mid B \in \mathcal{B}, B \subseteq A_i\}| = n\binom{15}{10}.$$
Jadi kita memiliki
$$n\binom{15}{10} \ge 2\binom{22}{10} \Leftrightarrow n \ge \frac{1292}{3} = 430\frac{2}{3}$$
Oleh karena itu, $n \ge 431$.□

6. Penyelesaian:
Misalkan $P(x, y)$ adalah pernyataan yang diberikan.
Kita memiliki $f(x+y) > \max(f(x), y) \ge y$, jadi untuk setiap a, dengan menetapkan $y = a - x$ dan x sedekat mungkin dengan a di sisi kiri memberikan $f(a) \ge a$, jadi $f(x) \ge x$ untuk setiap x.
$P(x, x) : f(2x) = x + f(x)$.
$P(x, 2x) : f(3x) = \max(f(x), 2x) + x$.
$P(2x, x) : f(3x) = f(2x) + \min(f(x), 2x) = x + f(x) + \min(f(x), 2x)$.
Membandingkan memberikan bahwa
$$\max(f(x), 2x) = f(x) + \min(f(x), 2x) > f(x),$$
jadi $\max(f(x), 2x) = 2x$ dan ini sama dengan
$$f(x) + \min(f(x), 2x) = 2f(x),$$
jadi $f(x) = x$, seperti yang diinginkan.

7. Penyelesaian:
Perhatikan bahwa n adalah asri jika dan hanya jika dapat dinyatakan sebagai $(a+25)(b+20) - 500$ untuk beberapa bilangan bulat positif a, b.

a) Untuk setiap bilangan prima $P > 20^{25} + 500$ (pasti ada bilangan prima seperti itu karena ada bilangan prima yang tak terhingga banyaknya), kami menyatakan bahwa $P - 500$ bukan asri. Jika itu asri, maka bilangan bulat positif a, b memenuhi $(a+25)(b+20) = P$, yang tidak mungkin karena P adalah bilangan prima.

b) Cukup untuk menunjukkan bahwa ada 26 bilangan bulat positif berurutan yang dapat dinyatakan sebagai $(a+25)(b+20)$ untuk bilangan bulat positif a, b (mengambil masing-masing bilangan ini minus 500 akan memberikan urutan bilangan asri berurutan). Kami menyatakan bahwa $46! + 21, 46! + 22, \ldots, 46! + 46$ berhasil.

Tetapkan bilangan bulat apa pun $x \in [21, 46]$. Kami menunjukkan bahwa $46! + x$ dapat dinyatakan sebagai $(a+25)(b+20)$ untuk bilangan bulat positif a, b. Ambil $b = x - 20$ dan

$$a = \frac{46!}{x} - 24,$$

yang keduanya merupakan bilangan bulat positif. Mudah untuk melihat bahwa

$$(a+25)(b+20) = 46! + x.$$

8. Penyelesaian:
Abaikan $\angle OCB = 90^\circ$ syarat tersebut. Kita tetap akan menunjukkan MH bahwa garis singgungnya adalah (FOG).
Perhatikan bahwa AD, BE, CF garis-garis tersebut berpotongan di titik Gergonne (Anda juga dapat menunjukkannya melalui Ceva), oleh karena itu, $(G, F; A, B) = -1$.
Maka kita memiliki
$$\angle AHG = \angle OHG = \angle OFG = \angle OGF = \angle OHF = \angle AHF,$$
sehingga AH merupakan garis bagi sudut $\angle GHF$.
Ini menyiratkan $\angle AHB = 90^\circ$. Oleh karena itu, $MH^2 = MA^2 = (AB/2)^2$. Tetapi karena $(G, F; A, B) = -1$, kita harus memiliki $MG \cdot MF = (AB/2)^2$, oleh karena itu, $MG \cdot MF = MH^2$, yang menyiratkan MH bahwa garis singgungnya adalah (FOG). $\square$

KATA PENUTUP

Selamat! Anda telah menelusuri jejak-jejak logika dan kreativitas Olimpiade Sains Matematika dari tahun **2002 hingga 2025**. Menyelesaikan kumpulan soal ini bukanlah sekadar rutinitas mengerjakan tugas, melainkan sebuah perjalanan intelektual untuk mengasah ketajaman nalar dan persistensi mental.

Matematika olimpiade bukan hanya tentang menemukan angka terakhir atau membuktikan sebuah teorema; ia adalah tentang **seni memecahkan masalah**. Setiap kesulitan yang Anda temui di modul ini adalah tangga menuju pemahaman yang lebih dalam. Ingatlah bahwa para juara tidak dilahirkan dari kemudahan, melainkan dari ribuan jam latihan dan rasa ingin tahu yang tak pernah padam.

Semoga modul ini menjadi bekal berharga bagi Anda dalam menaklukkan kompetisi yang akan datang dan, yang lebih penting, menumbuhkan kecintaan abadi terhadap ilmu pengetahuan.

Sampai jumpa di podium juara!

Mari Bertumbuh Bersama Jelajah Nalar

Jangan biarkan ambisimu berhenti di sini. **Jelajah Nalar** hadir sebagai mitra belajar yang siap membantumu mengupas tuntas konsep-konsep tersulit dengan cara yang menyenangkan dan logis.

Hubungi Kami:

- **WhatsApp:** [0852-1025-5328]
- **Email:** [dotedukasi@gmail.com]
- **Lokasi:** [Grandwest Residence, Kaliabang, Kota Bekasi, Jawa Barat]

Ikuti Jejak Kami di Media Sosial:

- **Instagram:** @jelajahnalar
- **Facebook:** Jelajah Nalar
- **YouTube:** [Jelajah Nalar Official]
- **Website:** [www.jelajahnalar.com]

Program Unggulan Jelajah Nalar

Berikut adalah program-program intensif yang dirancang khusus untuk mencetak generasi juara:

1. **Privat Olimpiade Sains Nasional**

2. **Kelas Olimpiade Sains Nasional**

3. **Privat Kurikulum Nasional**

4. **Kelas Kurikulum Nasional**

5. **Privat Kurikulum Cambridge**

6. **Kelas Kurikulum Cambridge**

7. **Privat Persiapan UTBK**

8. **Kelas Persiapan UTBK**

9. **Privat Persiapan Sekolah Kedianasan**

10. **Kelas Persiapan Sekolah Kedianasan**