

Pojok Olimpiade

Masalah 1. Misalkan $ABCD$ adalah sebuah segi empat dengan $AB = BC = CD = DA$ (belah ketupat). Misalkan MN dan PQ adalah dua ruas garis yang tegak lurus dengan diagonal BD dan sedemikian hingga jarak di antara keduanya adalah $d > BD/2$, dengan $M \in AD, N \in DC, P \in AB$, dan $Q \in BC$. Tunjukkan bahwa keliling dari segi enam $AMNCQP$ tidak bergantung pada posisi MN dan PQ selama jarak di antara keduanya tetap konstan.

Masalah 2. Misalkan m dan n adalah bilangan bulat positif sedemikian hingga $n \leq m$. Buktikan bahwa

$$2^n n! \leq \frac{(m+n)!}{(m-n)!} \leq (m^2 + m)^n.$$

Masalah 3. Misalkan P_1, P_2, P_3, P_4 adalah empat titik pada sebuah lingkaran. Misalkan I_1 adalah titik pusat lingkaran dalam (incenter) dari segitiga $P_2P_3P_4$, I_2 adalah incenter dari segitiga $P_1P_3P_4$, I_3 adalah incenter dari segitiga $P_1P_2P_4$, dan I_4 adalah incenter dari segitiga $P_2P_3P_1$. Buktikan bahwa I_1, I_2, I_3, I_4 adalah titik-titik sudut dari sebuah persegi panjang.

Masalah 4. The National Marriage Council ingin mengundang n pasangan untuk membentuk 17 kelompok diskusi dengan kondisi sebagai berikut:

- 1) Semua anggota dalam satu kelompok harus berjenis kelamin sama, artinya mereka semua laki-laki atau semua perempuan.
- 2) Perbedaan jumlah anggota antara dua kelompok mana pun adalah 0 atau 1.
- 3) Semua kelompok memiliki setidaknya satu anggota.
- 4) Setiap orang harus termasuk dalam satu dan hanya satu kelompok saja.

Temukan semua nilai n , $n \leq 1996$, yang memungkinkan hal ini terjadi. Jelaskan jawaban Anda.

Masalah 5. Misalkan a, b, c adalah panjang sisi-sisi sebuah segitiga. Buktikan bahwa

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$$

dan tentukan kapan kesamaan (tanda sama dengan) terjadi.

Ketaksamaan Stirling

(Vol 2 - No 3)

Sangat berguna untuk memiliki pendekatan (aproksimasi) yang baik untuk $n!$, yaitu faktorial dari bilangan bulat positif n . Hal ini diberikan oleh Ketaksamaan Stirling yang menyatakan bahwa untuk $n \geq 2$,

$$\frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^n} < n! < \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{e^{n-1}}.$$

Ini dapat dibuktikan dengan menggunakan kalkulus dasar.

Kita pertama-tama berurusan dengan batas atas. Perhatikan luas di bawah kurva $\ln x$ pada interval $[1, n]$. Kita membaginya menjadi $n - 1$ sub-interval dengan lebar 1. Untuk $1 \leq k \leq n - 1$, kita mendekati luas potongan ke- k pada $[k, k + 1]$ dengan mengganti kurva dengan garis lurus (tali busur) yang menghubungkan titik ujung kiri $(k, \ln k)$ ke titik ujung kanan $(k + 1, \ln(k + 1))$. Luas trapesium ini adalah $\frac{1}{2}(\ln k + \ln(k + 1))$. Karena $\ln x$ berbentuk cekung ke bawah (konkaf), luas trapesium ini lebih kecil daripada luas potongan di bawah kurva tersebut. Maka dapat disimpulkan bahwa

$$\int_1^n \ln x dx > \frac{1}{2}(\ln 1 + 2 \ln 2 + \dots + 2 \ln(n - 1) + \ln n).$$

Menggunakan integral parsial, kita mendapatkan

$$n \ln n - n + 1 > \ln(n!) - \frac{1}{2} \ln n$$

atau

$$\ln\left(\frac{n^n}{e^{n-1}}\right) > \ln\left(\frac{n!}{n^{\frac{1}{2}}}\right).$$

Batas atas yang diinginkan diperoleh dari fakta bahwa $\ln x$ adalah fungsi naik.

Sekarang kita mengalihkan perhatian ke batas bawah. Perhatikan luas di bawah

kurva $\ln x$ pada interval $[\frac{3}{2}, n]$. Kita membaginya menjadi $n - 2$ sub-interval dengan lebar 1 dan satu interval akhir $[n - \frac{1}{2}, n]$. Untuk $1 \leq k \leq n - 2$, kita mendekati luas potongan ke- k pada $[k + \frac{1}{2}, k + \frac{3}{2}]$ dengan mengganti kurva dengan garis singgungnya di titik tengah $(k + 1, \ln(k + 1))$. Luas trapezium ini adalah $\ln(k + 1)$. Karena $\ln x$ berbentuk cekung ke bawah (konkaf), luas ini besar daripada luas potongan kurva tersebut. Untuk potongan terakhir, kita mengganti kurva dengan garis horizontal yang melalui titik ujung kanan $(n, \ln n)$. Luas persegi panjang ini adalah $\frac{1}{2} \ln n$. Karena $\ln x$ adalah fungsi naik, luas ini lebih besar daripada luas potongan kurva tersebut. Maka dapat disimpulkan bahwa

$$\int_{\frac{3}{2}}^n \ln x dx < \ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln(n - 1) + \frac{1}{2} \ln n.$$

Menggunakan integral parsial, kita mendapatkan

$$n \ln n - n + \frac{3}{2}\left(1 - \ln \frac{3}{2}\right) < \ln(n!) - \frac{1}{2} \ln n.$$

Kita dapat mengabaikan suku $\frac{3}{2}(1 - \ln \frac{3}{2})$ karena $1 > \ln \frac{3}{2}$. Oleh karena itu

$$\ln\left(\frac{n^n}{e^n}\right) < \ln\left(\frac{n!}{n^{\frac{1}{2}}}\right).$$

Batas bawah yang diinginkan diperoleh dari fakta bahwa $\ln x$ adalah fungsi naik.

Pojok Soal

Soal 31. Tunjukkan bahwa untuk setiap tiga bilangan bulat ganjil yang diberikan, terdapat sebuah bilangan bulat ganjil sedemikian sehingga jumlah kuadrat dari keempat bilangan bulat tersebut juga merupakan sebuah bilangan kuadrat.

Soal 32. Misalkan $a_0 = 1996$ dan $a_{n+1} = a_n^2 / (a_n + 1)$ untuk $n = 0, 1, 2, \dots$. Buktikan bahwa $\lfloor a_n \rfloor = 1996 - n$ untuk $n = 0, 1, 2, \dots, 999$, di mana $\lfloor x \rfloor$ adalah bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x .

Soal 33. Misalkan A, B, C adalah titik-titik yang tidak segaris (non-kolinear). Buktikan bahwa terdapat satu titik unik X pada bidang ABC sedemikian sehingga $XA^2 + XB^2 + AB^2 = XB^2 + XC^2 + BC^2 = XC^2 + XA^2 + CA^2$.

Soal 34. Misalkan $n > 2$ adalah sebuah bilangan bulat, c adalah bilangan riil bukan nol, dan z adalah akar non-riil (imajiner) dari $X^n + cX + 1$. Tunjukkan bahwa

$$|z| \geq \frac{1}{\sqrt[n]{n-1}}$$

Soal 35. Pada sebuah papan tulis, tertulis sembilan angka 0 dan satu angka 1. Jika dalam satu operasi, dua angka mana pun di papan tulis tersebut dapat diganti dengan nilai rata-ratanya, berapakah bilangan positif terkecil yang dapat muncul di papan tulis setelah sejumlah operasi yang berhingga dilakukan?

Solusi

Soal 26. Tunjukkan bahwa solusi-solusi dari persamaan $\cos \pi x = \frac{1}{3}$ semuanya adalah bilangan irasional.

Solusi: Asumsikan $x = m/n$ (di mana m, n adalah bilangan bulat bukan nol dan n positif) adalah solusi dari $\cos \pi x = 1/3$. Perhatikan $a_k = \cos k\pi x = \cos km\pi/n$ untuk bilangan bulat positif

k . Karena kosinus bersifat periodic 2π , maka,

$$a_{k+2n} = \cos(km\pi/n + 2m\pi) = a_k,$$

sehingga paling banyak terdapat $2n$ nilai berbeda yang mungkin untuk a_k . Menggunakan identitas $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$, kita memperoleh

$$a_2 = -\frac{7}{9}, a_4 = \frac{17}{81}, \dots, a_{2^p} = \frac{c_p}{3^{2^p}}, \dots$$

dimana pembilangnya

$$c_1 = -7, \dots, c_p = 2c_{p-1}^2 - 3^{2^p}, \dots$$

adalah bilangan bulat yang tidak habis dibagi 3 melalui induksi matematika. Oleh karena itu, angka-angka $a_2, a_4, a_8, a_{16}, \dots$ semuanya berbeda, sebuah kontradiksi.

Soal 27. Misalkan $ABCD$ adalah sebuah segi empat tali busur (segi empat siklik) dan misalkan I_A, I_B, I_C, I_D berturut-turut adalah titik pusat lingkaran dalam (incenter) dari $\triangle BCD, \triangle ACD, \triangle ABD, \triangle ABC$. Tunjukkan bahwa $I_A I_B I_C I_D$ adalah sebuah persegi panjang.

Solusi: Tarik ruas garis $A I_C, A I_D, B I_C, B I_D$. Karena $\angle ADB = \angle ACB$, kita mendapatkan

$$\angle DAB + \angle DBA = \angle CAB + \angle CBA.$$

Maka,

$$\begin{aligned} \angle I_C A I_D &= \angle I_C A B - \angle I_D A B \\ &= \frac{1}{2} \angle DAB - \frac{1}{2} \angle CAB \\ &= \frac{1}{2} \angle CBA - \frac{1}{2} \angle DBA \\ &= \angle I_D B A - \angle I_C B A \\ &= \angle I_C B I_D. \end{aligned}$$

Jadi, A, B, I_D, I_C adalah konsiklik (terletak pada lingkaran yang sama). Demikian pula, A, D, I_B, I_C adalah konsiklik. Sekarang

$$\begin{aligned} \angle I_B I_C I_D &= 360^\circ - (\angle I_D I_C A + \angle I_B I_C A) \\ &= \angle I_D B A + \angle I_B D A \\ &= \frac{1}{2} \angle CBA + \frac{1}{2} \angle ADC \\ &= 90^\circ. \end{aligned}$$

Demikian pula, tiga sudut lainnya dari $I_A I_B I_C I_D$ adalah sudut siku-siku.

Soal 28. Bilangan bulat positif dipisahkan menjadi dua himpunan bagian (subset) yang tidak memiliki elemen persekutuan (saling lepas). Tunjukkan bahwa salah satu dari kedua himpunan bagian tersebut harus memuat tiga suku barisan aritmetika.

Solusi: Misalkan x adalah bilangan bulat yang lebih besar dari 6. Jika $x + 2, x + 4, x + 6$ berada dalam himpunan bagian yang sama, maka kita telah menemukan tiga suku barisan aritmetika di sana. Jika tidak, maka x dan (setidaknya) salah satu dari $x + 2, x + 4, x + 6$ (sebut saja $x + 2y$) berada dalam himpunan bagian yang sama. Jika himpunan bagian ini juga memuat salah satu dari $x - 2y, x + y, x + 4y$, maka sekali lagi terdapat tiga suku barisan aritmetika. Jika tidak, maka $x - 2y, x + y, x + 4y$ berada di himpunan bagian lainnya dan mereka membentuk tiga suku barisan aritmetika di sana.

Masalah ini adalah kasus khusus dari Teorema Van der Waerden, yang menegaskan bahwa untuk setiap $m > 1$ dan $n > 2$, terdapat bilangan bulat terkecil $w(m, n)$ sedemikian sehingga tidak peduli bagaimana angka $1, 2, 3, \dots, w(m, n)$ dipisahkan ke dalam m himpunan bagian tanpa pasangan yang memiliki elemen persekutuan, akan ada setidaknya satu himpunan bagian yang memiliki n suku barisan aritmetika. Dua pemecah soal, secara independen menunjukkan bahwa $w(2, 3) = 9$.

Soal 29. Misalkan $P(x)$ adalah suku banyak (polinomial) tidak konstan dengan koefisien bilangan bulat, dan semua koefisiennya lebih besar dari atau sama dengan -1 . Jika $P(2) = 0$, tunjukkan bahwa $P(1) \neq 0$.

Solusi: Karena $P(2) = 0$, maka $P(x) = (x - 2)(a_n x^n + \dots + a_0)$, di mana $n \geq 0, a_n \neq 0$, dan a_n, \dots, a_0 adalah bilangan

bulat. Kita dapat mengasumsikan $n > 0$ karena kasus $n = 0$ sangatlah mudah. Karena koefisien dari $P(x)$ paling sedikit bernilai -1 , kita memiliki $-2a_0 \geq -1, a_{i-1} - 2a_i \geq -1$ untuk $i = 1, \dots, n$ dan $a_n \geq -1$. Oleh karena itu, $a_0 (\leq 1/2)$ bernilai 0 atau merupakan bilangan bulat negative. Secara induktif, jika $a_{i-1} \leq 0$, maka $a_i \leq (a_{i-1} + 1)/2 \leq 1/2$ juga akan bernilai 0 atau negative. Dengan demikian, $a_0, \dots, a_n \leq 0$. Maka $a_n = -1$ dan $P(1) = -(a_n + \dots + a_0) \geq -a_n = 1$.

Soal 30. Untuk bilangan bulat positif $n > 1$, definisikan $f(n)$ sebagai 1 ditambah jumlah dari semua bilangan prima yang membagi n dikalikan dengan eksponennya, contoh: $f(40) = f(2^3 \times 5^1) = 1 + (2 \times 3 + 5 \times 1) = 12$. Tunjukkan bahwa jika $n > 6$, maka barisan $n, f(n), f(f(n)), f(f(f(n))), \dots$ pada akhirnya akan berulang menjadi 8, 7, 8, 7, 8, 7,

Solusi: Dengan mempertimbangkan faktorisasi dari n , kita melihat bahwa $f(n) \leq 6$ jika dan hanya jika $n \leq 6$. Jelas bahwa $f(7) = 8$ dan $f(8) = 7$. Untuk $n \geq 9$ dan n bukan bilangan prima, pertama-tama kita akan menunjukkan $f(n) \leq n - 2$ menggunakan induksi.

Kita mempunyai $f(9) = 7$. Misalkan pernyataan ini benar untuk 9 sampai $n - 1$. Untuk $n > 9$ dan bukan bilangan prima, terdapat bilangan bulat positif $r, s > 1$ sedemikian hingga $n = rs$ dan $(r - 1)(s - 1) \geq 4$. (Hal ini karena $(r - 1)(s - 1) \leq 3$ menyiratkan $rs \leq 2 \times 4 = 8$.) Jika $2 \leq r \leq 8$ atau r adalah bilangan prima, maka $f(r) \leq r + 1$. Jika tidak, maka $9 \leq r < n$ dan r bukan bilangan prima, yang menyiratkan melalui langkah induksi bahwa $f(r) \leq r - 2 < r + 1$. Demikian pula, $f(s) \leq s + 1$. Dari definisi f , kita mendapatkans

$$f(n) = f(r) + f(s) - 1 \leq (r + 1) + (s + 1) - 1$$

$$= n + 2 - (r - 1)(s - 1) \leq n - 2,$$

yang melengkapi pembuktian induksi tersebut.

Sekarang, misalkan masalah ini benar untuk $n = 7, 8, \dots, m - 1$, yaitu barisan $n, f(n), f(f(n)), f(f(f(n))), \dots$ akhirnya berulang 8, 7, 8, 7, 8, 7, Untuk kasus $n = m$, jika m bukan bilangan prima, maka $7 \leq f(m) \leq m - 2$. Melalui langkah induksi, kasus $f(m)$ adalah benar, sehingga kasus m juga akan benar. Jika m adalah bilangan prima, maka $f(m) = 1 + m$ bukan bilangan prima, sehingga $7 \leq f(f(m)) \leq f(m) - 2 = m - 1$. Melalui langkah induksi, kasus $f(f(m))$ adalah benar, sehingga kasus m juga akan menjadi benar.