Pojok Olimpiade

Soal 1. Tentukan semua barisan bilangan riil $a_1, a_2, \dots, a_{1995}$ yang memenuhi:

$$2\sqrt{a_n - (n-1)} \geq a_{n+1} - (n-1)$$

untuk $n = 1, 2, \dots, 1994$, dan

$$2\sqrt{a_{1995} - 1994} \geq a_1 + 1.$$

Soal 2. Misalkan $a_1, a_2, \dots, a_n$ adalah barisan bilangan bulat dengan nilai di antara 2 dan 1995 sedemikian sehingga:

i. Setiap dua bilangan a_i adalah relative prima (FPB-nya adalah 1).
ii. Setiap a_i merupakan bilangan prima atau hasil kali dari bilangan-bilangan prima yang berbeda.

Tentukan nilai n terkecil yang mungkin untuk memastikan bahwa barisan tersebut akan mengandung (setidaknya) satu bilangan prima.

Soal 3. Misalkan $PQRS$ adalah segi empat tali busur (artinya, titik-titik P, Q, R, S semuanya terletak pada satu lingkaran) sedemikian sehingga ruas garis PQ dan RS tidak sejajar. Perhatikan himpunan lingkaran-lingkaran yang melalui P dan Q, serta himpunan lingkaran-lingkaran yang melalui R dan S. Tentukan himpunan A yang berisi titik-titik singgung dari lingkaran-lingkaran dalam kedua himpunan tersebut.

Soal 4. Misalkan C adalah sebuah lingkaran dengan jari-jari R dan pusat O, dan S adalah sebuah titik tetap di dalam lingkaran C. Misalkan AA' dan BB' adalah tali busur yang saling tegak lurus dan melalui S. Perhatikan persegi panjang $SAMB, SBN'A'SA'M'B'$, dan $SB'NA$. Tentukan himpunan semua titik M, N', M', dan N ketika titik A bergerak mengelilingi seluruh lingkaran.

Soal 5. Tentukan bilangan bulat positif terkecil k sedemikian sehingga terdapat sebuah fungsi f dari himpunan Z (semua bilangan bulat) ke $\{1, 2, \dots, k\}$ dengan sifat bahwa $f(x) \neq f(y)$ setiap kali $|x - y| \in \{5, 7, 12\}$.

Kesebangunan Segitiga melalui Bilangan Kompleks

(Vol 1 - No 3)

Segitiga-segitiga sebangun sudah tidak asing lagi bagi siswa yang mempelajari geometri. Di sini, kita ingin melihat cara aljabar untuk mendeskripsikan segitiga-segitiga sebangun menggunakan bilangan kompleks. Ingat kembali bahwa setiap titik Z pada bidang koordinat berkorespondensi dengan bilangan kompleks $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, di mana $r = |z|$ dan θ = arg z adalah koordinat polar dari z. (Mulai dari sekarang, kita akan menggunakan huruf kapital untuk titik dan huruf kecil untuk bilangan kompleks yang bersesuaian.)

Secara umum, terdapat dua kemungkinan kasus untuk segitiga-segitiga sebangun. Dua buah segitiga dikatakan sebangun secara langsung (directly similar) jika salah satu segitiga dapat diperoleh dengan cara mentranslasi (menggeser) dan merotasi (memutar) segitiga lainnya pada bidang, kemudian memperbesar atau memperkecil ukurannya (scaling). (Catatan: sebuah segitiga tidak sebangun secara langsung dengan hasil pencerminannya, kecuali jika segitiga tersebut adalah sama kaki atau sama sisi.) Misalkan $\Delta Z_1Z_2Z_3$ sebangun secara langsung dengan $\Delta W_1W_2W_3$. Maka $\frac{Z_2Z_1}{Z_3Z_1} = \frac{W_2W_1}{W_3W_1}$ dan $\angle Z_2Z_1Z_3 = \angle W_2W_1W_3$. Kedua persamaan ini setara dengan $\frac{|z_2-z_1|}{|z_3-z_1|} = \frac{|w_2-w_1|}{|w_3-w_1|}$ dan $\arg\left(\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right) = \arg\left(\frac{w_2-w_1}{w_3-w_1}\right)$, yang menyatakan dengan tepat bahwa

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} - \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}.$$

Dengan membalik langkah-langkahnya, kita dapat melihat bahwa persamaan tersebut mengimplikasikan bahwa kedua segitiga tersebut sebangun secara langsung. Untuk kasus $\Delta Z_1Z_2Z_3$ sebangun secara langsung dengan hasil pencerminan dari $\Delta W_1W_2W_3$ persamaannya adalah

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{\overline{w}_2 - \overline{w}_1}{\overline{w}_3 - \overline{w}_1}$$

karena $\overline{w}_1, \overline{w}_2, \overline{w}_3$ memberikan pencerminan dari w_1, w_2, w_3.

Misalkan $\Delta W_1W_2W_3$ adalah segitiga sama sisi dengan titik-titik sudut di $1, \omega, \omega^2 (= \overline{\omega})$, dimana $\omega = (-1 \pm i\sqrt{3})/2$ adalah akar pangkat tiga dari satu (cube root of unity). Kita amati bahwa $w_1 + \omega w_2 + \omega^2 w_3 = 1 + \omega^2 + \omega^4 = 0$. Dapat ditunjukkan bahwa persamaan ini dipenuhi oleh segitiga sama sisi mana pun secara umum. Sebuah segitiga $\Delta Z_1Z_2Z_3$ adalah sama sisi jika dan hanya jika $\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1} = \frac{w_3-w_1}{w_2-w_1} = -\omega^2$. (Perhatikan bahwa $-\omega^2 = \pm(\cos 60^o + i\sin 60^o)$.)

Persamaan ini dapat disederhanakan menjadi $z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3 = 0$ dengan memanfaatkan $1 + \omega + \omega^2 = 0$. Oleh karena itu, sebuah segitiga $\Delta Z_1Z_2Z_3$ adalah sama sisi jika dan hanya jika $z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3 = 0$. Disini $\omega = (-1 + i\sqrt{3})/2$ ketika Z_1, Z_2, Z_3 berada dalam arah berlawanan jarum jam dan $\omega = (-1 - i\sqrt{3})/2$ ketika Z_1, Z_2, Z_3, berada dalam arah searah jarum jam.

Contoh 1. (Teorema Segitiga Napoleon)

Diketahui ΔABC. Gambarlah segitiga-segitiga sama sisi DBA, ECB, FAC pada sisi-sisi luar yang berlawanan dari AB, BC, CA terhadap ΔABC, secara berturut-turut. Misalkan G, H, I adalah titik berat (centroid) dari $\Delta DBA, \Delta ECB, \Delta FAC$, secara berturut-turut. Tunjukkan bahwa ΔGHI adalah sama sisi.

Solusi. Karena $d+\omega b+\omega^2 a=0, e+\omega c+\omega^2 b=0, f+\omega a+\omega^2 c=0$ dan $\omega^3=1$, kita memiliki

$$\begin{aligned} &g+\omega h+\omega^2 i \\ &= (a+d+b)/3+\omega(b+e+c)/3+\omega^2(c+f+a)/3 \\ &= [(d+\omega b+\omega^2 a)+\omega(e+\omega c+\omega^2 b) \\ &\quad +\omega^2(f+\omega a+\omega^2 c)]/3 = 0. \end{aligned}$$

Contoh 2. Diketahui sebuah segitiga lancip $A_1A_2A_3$, misalkan H_1, H_2, H_3 adalah titik-titik kaki dari garis tinggi yang ditarik dari A_1, A_2, A_3, secara berturut-turut. Tunjukkan bahwa setiap segitiga $A_1H_2H_3$, $A_2H_3H_1, A_3H_1H_2$ sebangun dengan $\Delta A_1A_2A_3$.

Solusi. Atur koordinat sedemikian sehingga $A_1=(0,0), A_2=(t,0)$ dan $A_3=(x,y)$, yakni, $a_1=0, a_2=t, a_3=x+iy$. Amati bahwa $A_1H_2=A_1A_2\cos\angle A_1=\frac{tx}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Maka $h_2=\left(\frac{tx}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\left(\frac{a_3}{|a_3|}\right)=\frac{tx(x+iy)}{x^2+y^2}$. Selain itu, $h_3=x$. Sekarang

$$\frac{h_2-a_1}{h_3-a_1}=\frac{t(x+iy)}{x^2+y^2}=\frac{t}{x-iy}=\frac{\bar{a}_2-\bar{a}_1}{\bar{a}_3-\bar{a}_1}$$

Jadi, pada kenyataannya, $\Delta A_1H_2H_3$ sebangun dengan (hasil pencerminan dari) $\Delta A_1A_2A_3$. Dengan mengubah indeks, kita juga mendapatkan kesebangunan untuk dua segitiga lainnya.

Contoh 3. Sebuah segitiga $A_1A_2A_3$ dan sebuah titik P_0 diberikan pada sebuah bidang. Untuk $s\geq 4$, definisikan $A_s=A_{s-3}$. Untuk $k\geq 0$, definisikan P_{k+1} sebagai hasil rotasi dari P_k dengan pusat di A_{k+1} sebesar sudut 120^o searah jarum jam. Buktikan bahwa jika $P_{1986}=P_0$, maka $\Delta A_1A_2A_3$ adalah sama sisi.

Solusi. Kita memiliki $p_{k+1}-a_{k+1}=\omega(p_k-a_{k+1})$, dimana $\omega=\cos 120^o - i\sin 120^o=(-1-i\sqrt{3})/2$. Dengan menjumlahkan kelipatan yang sesuai dari persamaan-persamaan ini (sedemikian sehingga semua p_k saling meniadakan), kita perhatikan:

$$\begin{aligned} &(p_{1986}-a_{1986})+\omega(p_{1985}-a_{1985})+\omega^2(p_{1984}-a_{1984}) \\ &+\cdots+\omega^{1985}(p_1-a_1) \\ &=\omega(p_{1985}-a_{1986})+\omega^2(p_{1984}-a_{1985}) \\ &\quad+\omega^3(p_{1983}-a_{1984})+\cdots+\omega^{1986}(p_0-a_1). \end{aligned}$$

Dengan mencoret suku-suku yang sama dikedua ruas, serta memperhatikan bahwa $\omega^{1986}p_0=p_0=p_{1986}$, lalu memindahkan semua suku di ruas kiri ke ruas kanan, kita mendapatkan:

$$\begin{aligned} 0&=(1-\omega)(a_{1986}+\omega a_{1985}+\omega^2 a_{1984}+\cdots+\omega^{1985}a_1) \\ &=662(1-\omega)(a_3+\omega a_2+\omega^2 a_1) \end{aligned}$$

berdasarkan definisi dari a_k dan fakta bahwa $\omega^3=1$. Karena $\omega\neq 1$, maka $\Delta A_1A_2A_3$ adalah sama sisi.

Kriptaritmetika dan Alfametik

Sebuah kriptaritmetika atau alfametik adalah teka-teki untuk menemukan digit asli dalam sebuah persamaan terenkripsi yang dibuat dengan mengganti digit-digit berbeda dengan huruf-huruf berbeda dalam soal aritmetika sederhana. Berikut adalah sebuah contoh. Perhatikan alfametik

```
   AT
+   A
  TEE
```

di mana setiap huruf mewakili satu digit yang berbeda. Teka-tekinya adalah menemukan digit asli yang diwakili setiap huruf sehingga hasil aritmetikanya benar.

Untuk menyelesaikan teka-teki ini, kita dapat menalar sebagai berikut. Karena T adalah "simpanan" (carry) dari kolom "puluhan", T harus bernilai sama dengan 1 dan dengan demikian kita mendapatkan

```
   A1
+   A
  1EE
```

Sekarang, pada kolom puluhan, karena A ≠ E, maka harus ada simpanan (carry) dari kolom satuan, yaitu A + 1 = 10 + E. Dengan demikian, A = 9 dan E = 0. Oleh karena itu, solusinya adalah:

```
   91
+   9
  100
```

Kita dapat memeriksa solusi kita bahwa secara aritmetika sudah benar dan setiap huruf memang mewakili digit yang berbeda (dengan A=9, E=0, dan T=1). Selain itu, dari penalaran kita, kita melihat bahwa solusi untuk teka-teki ini adalah tunggal (unik).

Ada banyak alfametik menarik yang masuk akal dalam bahasa Inggris atau bahasa lainnya. Berikut adalah satu teka-teki dengan solusi unik. Apakah menurut Anda Anda bisa menyelesaikannya?

```
  FORTY
    TEN
+   TEN
  SIXTY
```

Bagaimana dengan kriptaritmetika ini di mana frasa "Qui Trouve Ceci" berarti "Siapa yang bisa menyelesaikan ini?" Setiap huruf mewakili digit yang berbeda dan setiap tanda # mewakili digit apa pun (tidak harus berbeda).

```
         CECI
QUI ) TROUVE
      ###
       ###
       ###
        ###
        ##E
         ###
         ###
           V
```

Pojok Soal

Masalah 11. Sederhanakan

$$\sum_{n=1}^{1995} \tan(n)\tan(n+1).$$

(Catatan: Terdapat jawaban dengan dua suku yang melibatkan tan 1, tan 1996, dan bilangan bulat.)

Masalah 12. Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan bulat $n > 12$, terdapat sebuah segitiga siku-siku dengan panjang sisi-sisi bilangan bulat dan luasnya berada di antara n dan $2n$.

Masalah 13. Misalkan $x_k, y_k (k = 1, 2, \ldots, 1995)$ adalah bilangan-bilangan positif dan $x_1 + x_2 + \cdots + x_{1995} = y_1 + y_2 + \cdots + y_{1995} = 1$. Buktikan bahwa:

$$\sum_{k=1}^{1995} \frac{x_k y_k}{x_k + y_k} \leq \frac{1}{2}$$

Masalah 14. Jika ΔABC sebangun langsung dengan $\Delta A'B'C'$, dan $\Delta AA'A'', \Delta BB'B'', \Delta\, CC'C''$ juga saling sebangun langsung, tunjukkan bahwa $\Delta A''B''C''$ sebangun langsung dengan ΔABC.

Masalah 15. Apakah terdapat barisan tak hingga bilangan riil tidak nol $a_0, a_1, a_2, \ldots$ sehingga untuk setiap n, polinomial $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ memiliki tepat n akar riil yang berbeda?

****

Solusi

Masalah 6. Untuk polynomial kuadrat $P(x) = ax^2 + bx + c$ dengan koefisien riil yang memenuhi $|P(x)| \leq 1$ untuk $-1 \leq x \leq 1$, tentukan nilai maksimum yang mungkin dari b dan berikan satu polynomial yang mencapai koefisien b maksimal tersebut.

Solusi. Karena $b = (P(1) - P(-1))/2 \leq 2/2 = 1$, maka nilai maksimum yang mungkin bagi b paling banyak adalah 1. Sekarang, polynomial $P(x) = x^2/2 + x - 1/2 = (x+1)^2/2 - 1$ memenuhi kondisi $|P(x)| \leq 1$ untuk $-1 \leq x \leq 1$ karena $0 \leq x + 1 \leq 2$. Jadi, nilai maksimum dari b adalah 1. (Komentar: Dengan mengganti $-1 \leq x \leq 1$ menjadi $0 \leq x \leq 1$, soal ini pernah muncul dalam ujian Putnam tahun 1968.).

Masalah 7. Jika bilangan bulat positif a, b, c memenuhi $a^2 + b^2 = c^2$, tunjukkan bahwa setidaknya terdapat tiga segitiga siku-siku tidak kongruen dengan sisi-sisi bilangan bulat yang memiliki hipotenusa (sisi miring) semuanya sama dengan c^3.

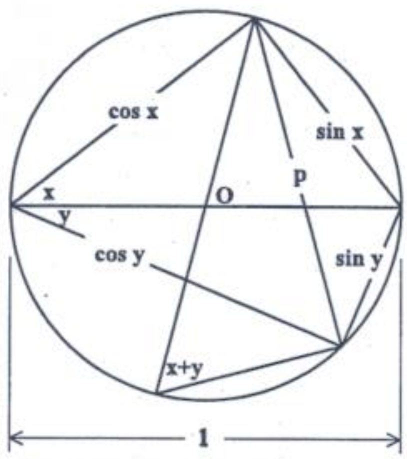
Solusi. Tanpa mengurangi keumuman, asumsikan $a \geq b$. Segitiga pertama berasal dari $(c^3)^2 = (a^2 + b^2)c^4 = (ac^2)^2 + (bc^2)^2$. Segitiga kedua berasal dari $(c^3)^2 = (a^2 + b^2)^2 c^2 = [(a^2 - b^2)c]^2 + [2abc]^2$. Segitiga ketiga berasal dari $(c^3)^2 = (a^2 + b^2)^3 = [a|a^2 - 3b^2|]^2 + [b(3a^2 - b^2)]^2$.

Untuk segitiga pertama dan kedua, $2abc = ac^2$ atau bc^2 menyiratkan $c = 2b$ atau $2a$. Substitusi $c = 2b$ atau $2a$ ke dalam $a^2 + b^2 = c^2$ akan menghasilkan kontradiksi $\sqrt{3} = a/b$ atau b/a. Jadi, kedua segitiga ini tidak mungkin kongruen.

Demikian pula, untuk segitiga pertama dan ketiga, karena $b(3a^2 - b^2) = ac^2$ atau bc^2 akan menghasilkan $\sqrt{2} = (a+b)/a$ atau c/a melalui aljabar sederhana, kedua segitiga ini tidak mungkin kongruen.

Akhirnya, untuk segitiga kedua dan ketiga, $b(3a^2 - b^2) = (a^2 - b^2)c$ atau $2abc$ akan menghasilkan $\sqrt{5} = (c-b)/b$ atau $(c+a)/a$ (sekali lagi melaluiu aljabar sederhana). Jadi, kedua segitiga ini tidak mungkin kongruen.

Pembuktian Tanpa Kata



$$\sin(x+y) = p = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

Masalah 8. Misalkan $a_1 = a_2 = 1$ dan $a_n = (a_{n-1}^2 + 2)/a_{n-2}$ untuk $n = 3, 4, \ldots$ Tunjukkan bahwa a_n adalah bilangan bulat untuk $n = 3, 4, \ldots$

Solusi. Karena $a_1 = a_2 = 1$ dan $a_n a_{n-2} = a_{n-1}^2 + 2$ untuk semua bilangan bulat $n \geq 3$, kita mendapatkan $a_n \neq 0$ dan $a_n a_{n-2} - a_{n-1}^2 = 2 = a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2$ untuk $n \geq 3$. Dengan menyusun ulang suku-sukunya, kita memperoleh $(a_{n+1} + a_{n-1})/a_n$ = $(a_n + a_{n-2})/a_{n-1}$. Oleh karena itu, nilai dari $(a_n + a_{n-2})/a_{n-1}$ adalah konstan untuk $n \geq 3$. Karena $(a_3 + a_1)/a_2$ = 4, maka kita memiliki $(a_n + a_{n-2})/a_{n-1}$ = 4, yaitu, $a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}$ untuk $n \geq 3$. Ini menunjukkan bahwa a_n sebenarnya adalah bilangan bulat ganjil untuk semua $n \geq 1$.

Masalah 9. Pada sisi AD dan BC dari sebuah segi empat konveks $ABCD$ dengan $AB < CD$, tentukan titik F dan E, secara berturut-turut, sedemikian sehingga $AF/FD = BE/EC = AB/CD$. Andaikan EF ketika diperpanjang melewati F bertemu garis BA di P dan bertemu garis CD di Q. Tunjukkan bahwa $\angle BPE = \angle CQE$.

Solusi. Pertama-tama, konstruksikan jajaran genjang $ABGF$ dan $CDFH$. Karena BG, AD, dan CH sejajar, maka $\angle GBE = \angle HCE$. Selain itu, $BG/CH = AF/DF = AB/CD = BE/CE$. Jadi, ΔBGE sebangun dengan ΔCHE. Maka G, E, H haruslah segaris (kolinear) dan $GE/HE = AB/CD = GF/HF$. Oleh karena itu, $\angle GFE = \angle HFE$ atau $\angle BPE = \angle CQE$.

Masalah 10. Tunjukkan bahwa setiap bilangan bulat $k > 1$ memiliki kelipatan yang kurang dari k^4 dan dapat ditulis dalam basis 10 dengan paling banyak empat digit berbeda. [Petunjuk: Pertama, pertimbangkan angka-angka yang hanya terdiri dari digit 0 dan 1 saja.]

Solusi. Pilih n sedemikian sehingga $2^{n-1} \leq k < 2^n$. Misalkan S adalah himpunan bilangan bulat non-negatif yang kurang dari 10^n yang hanya dapat ditulis dengan digit 0 atau 1 saja. Maka S memiliki 2^n elemen dan angka terbesar m di dalam S terdiri dari n angka satu. Karena $2^n > k$ berdasarkan Prinsip Lubang Burung Merpati (pigeonhole principle), terdapat dua angka x, y di dalam S yang memiliki sisa bagi yang sama saat dibagi dengan k, yaitu $x \equiv y$ (mod k). Maka $|x - y|$ adalah kelipatan dari k dan:

$$|x - y| \leq m < 10^{n-1} \times 1.2 < 16^{n-1} \leq k^4.$$

Terakhir, dengan mempertimbangkan kasus-kasus pengurangan digit 0,1 dengan digit 0,1 lainnya beserta kemungkinan simpanan (carries), kita dapat melihat bahwa $|x - y|$ hanya dapat ditulis dengan digit 0, 1, 8, dan 9 saja.