

Pojok Olimpiade

Bilangan Prima

(Vol 2 - No 1)

Masalah 1. Misalkan p adalah bilangan prima ganjil. Barisan $(a_n)_{n \geq 0}$ didefinisikan sebagai berikut: $a_0 = 0, a_1 = 1, \dots, a_{p-2} = p - 2$ dan, untuk semua $n \geq p - 1, a_n$ adalah bilangan bulat positif terkecil yang tidak membentuk barisan aritmetika panjang p dengan suku-suku sebelumnya. Buktikan bahwa, untuk semua n, a_n adalah bilangan yang diperoleh dengan menulis n dalam basis $p - 1$ dan membaca hasilnya dalam basis p .

Masalah 2. Sebuah kalkulator rusak sehingga satu-satunya tombol yang masih berfungsi adalah tombol sin, cos, tan, $\sin^{-1}, \cos^{-1},$ dan \tan^{-1} . Layar awalnya menunjukkan angka 0. Diberikan sebarang bilangan rasional positif q , tunjukkan bahwa menekan beberapa urutan tombol yang berhingga akan menghasilkan q . Asumsikan bahwa kalkulator tersebut melakukan perhitungan bilangan real dengan presisi tak hingga. Semua fungsi dinyatakan dalam radian.

Masalah 3. Diberikan sebuah segitiga ABC bukan sama kaki dan bukan siku-siku, misalkan O menyatakan titik pusat lingkaran luarnya, dan misalkan $A_1, B_1,$ dan C_1 masing-masing adalah titik tengah dari sisi $BC, CA,$ dan AB . Titik A_2 terletak pada sinar OA_1 sedemikian sehingga ΔOAA_1 serupa dengan ΔOA_2A . Titik B_2 dan C_2 pada sinar OB_1 dan OC_1 didefinisikan dengan cara yang serupa. Buktikan bahwa garis $AA_2, BB_2,$ dan CC_2 bersifat concurrent (berpotongan di satu titik), yakni ketiga garis tersebut berpotongan di satu titik.

Bilangan asli mengacu pada salah satu dari 1, 2, 3, ... Bilangan bulat mengacu pada salah satu dari ..., -2, -1, 0, 1, 2, ... Bilangan asli adalah bilangan bulat positif. Operasi penjumlahan, pengurangan, dan perkalian dapat didefinisikan di antara dua bilangan bulat, dan hasilnya tetap berupa bilangan bulat; artinya, "himpunan bilangan bulat bersifat tertutup terhadap operasi penjumlahan, pengurangan, dan perkalian.

"Teorema 1 (Algoritma Pembagian Euclid): Untuk setiap dua bilangan bulat a dan b ($b > 0$), pasti terdapat bilangan bulat q dan r yang memenuhi

$$a = bq + r, \quad 0 \leq r < b.$$

Jika dalam persamaan di atas $r = 0$, yaitu $a = bq$, maka a disebut sebagai kelipatan dari b , atau b disebut sebagai faktor (pembagi) dari a , yang dinotasikan sebagai $b|a$. Jika tidak, maka dinotasikan sebagai $b \nmid a$.

Bilangan asli dapat dibagi menjadi tiga jenis:

1: Hanya memiliki bilangan asli 1 sebagai faktornya.

p : Tepat memiliki 1 dan p sebagai faktornya; bilangan jenis ini disebut sebagai bilangan prima.

n : Selain 1 dan n , masih memiliki faktor lainnya; bilangan jenis ini disebut sebagai bilangan komposit.

Setiap bilangan bulat yang dapat habis dibagi 2 disebut sebagai bilangan genap, jika tidak, disebut sebagai bilangan ganjil.

Teorema 2 (Teorema Dasar Aritmetika (Fundamental Theorem of Arithmetic)): Setiap bilangan asli selain 1 dapat dinyatakan secara tunggal sebagai hasil kali bilangan-bilangan prima.

Dari Teorema 2, dapat terlihat bahwa bilangan prima adalah dasar dari bilangan

asli. Beberapa bilangan prima pertama diperoleh melalui metode Saringan Eratosthenes. Sebagai contoh, jika ingin menemukan bilangan prima yang tidak lebih dari 50, maka pertama-tama carilah bilangan prima yang tidak melebihi $\sqrt{50}$, yaitu 2, 3, 5, dan 7. Kemudian susunlah angka 1, 2, ..., 50 sebagai berikut:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,
11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20,
21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30,
31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40,
41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50,

Hapus angka 1; hapus kelipatan 2 yaitu 4, 6, ..., 50; dari angka yang tersisa hapus kelipatan 3 yaitu 9, ..., 45; dan dari angka yang tersisa hapus kelipatan 5 dan 7 (pertahankan angka 5 dan 7 itu sendiri). Angka yang terakhir tersisa semuanya adalah bilangan prima: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47.

Tabel bilangan prima semuanya dibuat berdasarkan metode ini yang kemudian dikembangkan. Contohnya, Kulik pernah menyusun tabel bilangan prima yang tidak lebih dari 10^8 tabel bilangan. Sejak adanya komputer, tabel bilangan prima menjadi jauh lebih besar. Pada awal tahun enam puluhan, Amerika Serikat telah menyimpan 5×10^8 bilangan prima pertama di dalam komputer. Namun bagaimanapun juga, hingga saat ini kita tetap hanya mengetahui sejumlah terhingga bilangan prima, meskipun terdapat teorema terkenal berikut ini:

Teorema 3 (Euclid): Bilangan prima jumlahnya tak terhingga.

Bukti: Kita gunakan metode pembuktian kontradiksi (reductio ad absurdum). Jika jumlah bilangan prima terhingga, maka mereka dapat diurutkan secara berurutan sebagai p_1, p_2, \dots, p_s . Misalkan

$N = p_1 p_2 \dots p_s + 1$. Jika N adalah bilangan prima, maka $N > p_s$, kontradiksi. Jika N adalah bilangan komposit, maka p_1, p_2, \dots, p_s semuanya bukan faktor dari N , karena jika ya, maka mereka harus bisa membagi habis 1, hal ini tidak mungkin. Oleh karena itu, N memiliki faktor prima yang berbeda dari p_1, p_2, \dots, p_s , kontradiksi. Dengan demikian, bilangan prima jumlahnya tak terhingga. Teorema terbukti.

Saat ini, bilangan-bilangan prima besar yang diketahui semuanya merupakan bilangan prima dengan bentuk khusus. Bilangan prima yang berbentuk

$$M_p = 2^p - 1, \text{ di mana } p \text{ adalah bilangan prima.}$$

disebut sebagai Bilangan Prima Mersenne (Mersenne Prime). Ketika $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11213, 19937, 21701, 23209, 44497, 86243, 132049, 216091$, maka M_p adalah bilangan prima. Yang terbesar,

$$2^{216091} - 1$$

memiliki total 65.050 digit, dan ini merupakan bilangan prima terbesar yang diketahui saat ini (pada waktu teks ini ditulis). Namun, apakah ada tak terhingga banyaknya Bilangan Prima Mersenne? Hal ini masih menunggu untuk diklarifikasi.

Selain itu, ada juga Bilangan Fermat (Fermat Number)

$$F_n = 2^{2^n} + 1.$$

Ketika $n = 0, 1, 2, 3, 4$, F_n semuanya adalah bilangan prima. Fermat pernah menduga bahwa ketika $n = 0, 1, 2, \dots$, maka F_n akan selalu berupa bilangan prima. Namun, Euler membuktikan bahwa:

$$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 641 \times 6700417.$$

Sehingga dugaan Fermat tersebut terbantahkan.

Berikut ini akan dibahas dua masalah utama dalam teori bilangan:

I. Masalah Distribusi Bilangan Prima. Misalkan $\pi(x)$ menyatakan jumlah bilangan prima yang tidak melebihi x . Sebagai contoh, $\pi(50) = 15$, $\pi(100) = 25$, dan seterusnya. Salah satu masalah inti dalam teori distribusi bilangan prima adalah mempelajari sifat-sifat $\pi(x)$: Bagaimana cara kita mengestimasi $\pi(x)$? Teorema 3 dapat dituliskan sebagai:

$$\pi(x) \rightarrow \infty$$

Teorema 4. (Chebychev): Ketika $n \geq 2$, maka:

$$\frac{n}{8 \log n} \leq \pi(n) \leq \frac{12n}{\log n}$$

Di mana $\log n$ menyatakan logaritma natural dari n .

Teorema ini jauh lebih presisi dibandingkan Teorema 3. Pembuktiannya tidak akan dibahas di sini. Gauss dan Legendre pernah menduga bahwa:

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

Artinya, ketika $x \rightarrow \infty$, rasio antara $\pi(x)$ dan $\frac{x}{\log x}$ mendakati 1.

Perlu diperhatikan: Bentuk dugaan Gauss sedikit berbeda dengan persamaan di atas. Oleh karena itu, ketika x bernilai besar, penggunaan $\frac{x}{\log x}$ untuk mengestimasi $\pi(x)$ seharusnya sangat presisi. Sebagai contoh:

x	$\pi(x)$	$\frac{x}{\log x}$
1,000	168	145
10,000	1229	1086
100,000	9592	8686
1,000,000	78498	72382
10,000,000	664579	620417

Dugaan Gauss dan Legendre dibuktikan secara independen oleh Hadamard dan

de la Vallée Poussin. Orang-orang menyebutnya sebagai Teorema Bilangan Prima. Yaitu:

Teorema 5 (Teorema Bilangan Prima (Prime Number Theorem)): $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$.

Masalah penting lainnya mengenai bilangan prima adalah masalah estimasi panjang jarak antara dua bilangan prima yang berturut-turut. Terdapat apa yang disebut sebagai Postulat Bertrand: Ketika $x \geq 1$, pasti terdapat sebuah bilangan prima di antara x dan $2x$. Postulat ini juga dibuktikan oleh Chebychev, yaitu:

Teorema 6 (Chebychev): Ketika $x \geq 1$, pasti terdapat sebuah bilangan prima di antara x dan $2x$.

Teorema 6 masih dapat ditingkatkan lebih jauh. Sebagai langkah lanjutan dari Teorema 3, kita dapat mempertimbangkan masalah bilangan prima dalam Barisan Aritmetika (Arithmetic Progression): Jika l, q adalah bilangan bulat positif, dan memenuhi $(l, q) = 1$ (artinya faktor persekutuan terbesar (l, q) sama dengan 1), apakah dalam barisan:

$$l, l + q, l + 2q, \dots$$

terdapat tak terhingga banyaknya bilangan prima? Ketika $l = q = 1$, dengan demikian diperoleh himpunan bilangan asli. Dari Teorema 3, kita tahu bahwa terdapat tak terhingga banyaknya bilangan prima. Masalah mengenai apakah dalam barisan aritmetika terdapat tak terhingga banyaknya bilangan prima diselesaikan oleh Dirichlet, yaitu:

Teorema 7 (Dirichlet): Terdapat tak terhingga banyaknya bilangan prima dalam suatu barisan aritmetika. Kita juga dapat bertanya: Bagaimana estimasi batas atas untuk bilangan prima terkecil $P(l, q)$ dalam suatu barisan aritmetika? Linnik adalah yang pertama membuktikan:

Teorema 8 (Linnik): $P(l, q) \leq c_1 q^{c_2}$, di mana c_1, c_2 adalah dua buah konstanta.

Matematikawan Tiongkok, Pan Chengdong, adalah yang pertama memberikan estimasi $c_2 = 5448$. Saat ini, estimasi terbaik $c_2 = 5.5$ diperoleh oleh Heath-Brown.

II. Dugaan Goldbach (Goldbach Conjecture). Dalam korespondensi antara Goldbach dan Euler, diajukan dugaan sebagai berikut:

- (i) Setiap bilangan genap ≥ 6 adalah jumlah dari dua bilangan prima ganjil.
- (ii) Setiap bilangan ganjil ≥ 9 adalah jumlah dari tiga bilangan prima ganjil.

Dugaan (ii) merupakan konsekuensi (turunan) dari dugaan (i). Faktanya, jika (i) benar dan n adalah bilangan ganjil ≥ 9 , maka $n - 3$ adalah bilangan genap ≥ 6 . Berdasarkan (i), kita tahu bahwa $n - 3$ adalah jumlah dari dua bilangan prima p_1 dan p_2 , yakni $n - 3 = p_1 + p_2$. Maka $n = 3 + p_1 + p_2$, sehingga (ii) terbukti. Vinogradov adalah yang pertama secara fundamental membuktikan dugaan (ii), yaitu:

Teorema 9 (Vinogradov): Setiap bilangan ganjil yang cukup besar adalah jumlah dari tiga bilangan prima ganjil.

Mengenai dugaan (i), hingga saat ini hanya ada beberapa pembuktian nilai numerik yang menunjukkan bahwa dugaan tersebut kemungkinan besar benar. Sebagai contoh, seseorang telah memverifikasi melalui komputer bahwa dugaan (i) berlaku untuk semua bilangan genap yang tidak melebihi 3×10^8 . Brun adalah orang pertama yang memperbaiki metode Saringan Eratosthenes dan membuktikan hasil berikut:

Teorema 10 (Brun): Setiap bilangan genap besar adalah jumlah dari dua bilangan yang masing-masing merupakan

hasil kali dari maksimal 9 faktor prima, yang dicatat sebagai (9, 9).

Hasil dan metode Brun telah dikembangkan dan diperbaiki oleh banyak matematikawan. Saat ini, hasil terbaik dibuktikan oleh matematikawan Tiongkok, Chen Jingrun, yaitu:

Teorema 11 (Chen Jingrun): Setiap bilangan genap besar adalah jumlah dari sebuah bilangan prima dan sebuah bilangan yang memiliki maksimal dua faktor prima, yang dicatat sebagai (1, 2).

Secara serupa, terdapat pula apa yang disebut sebagai Dugaan Bilangan Prima Kembar (twin primes): pasangan bilangan prima yang berselisih 2, seperti (3, 5); (5, 7); (11, 13); ... ; (10016957, 10016959); ... ; ($10^9 + 7, 10^9 + 9$); ... Diketahui terdapat 1.224 pasangan bilangan prima kembar yang kurang dari 100.000 dan terdapat 8.164 pasangan yang kurang dari 1.000.000. Saat ini, pasangan bilangan prima kembar terbesar yang diketahui adalah:

$$260497545 \times 2^{6025} - 1, 260497545 \times 2^{6025} + 1.$$

Sebuah dugaan terkenal menanyakan: Apakah terdapat tak terhingga banyaknya pasangan bilangan prima kembar?. Ini merupakan pendalaman dari Teorema 3 (Euclid) dan hingga kini belum terbukti. Dugaan ini memiliki kaitan internal yang mendalam dengan Dugaan Goldbach (i). Perhatikan persamaan Diofantin:

$$ax + by = c.$$

Di mana a, b, c adalah bilangan bulat yang diberikan. Bagaimanakah solusi bilangan prima (x, y) untuk persamaan ini?. Ketika $a = b = 1$ dan c adalah bilangan genap ≥ 6 , maka keterlarutan persamaan ini setara dengan Dugaan Goldbach (i). Ketika $a = 1, b = -1, c = 2$, adanya tak terhingga banyaknya solusi setara dengan Dugaan Bilangan Prima Kembar. Menggunakan metode yang

digunakan Chen Jingrun untuk membuktikan (1, 2), dapat dibuktikan bahwa:

Teorema 12 (Chen Jingrun): Terdapat tak terhingga banyaknya bilangan prima p sedemikian sehingga $p + 2$ adalah hasil kali dari maksimal dua bilangan prima.

Pojok Olimpiade

(Lanjutan hal 1)

Masalah 4. Misalkan q_0, q_1, q_2, \dots adalah barisan tak hingga dari bilangan bulat yang memenuhi dua kondisi berikut:

- i. $m - n$ membagi $q_m - q_n$ untuk $m > n \geq 0$,
- ii. terdapat suatu polynomial P sedemikian sehingga $|q_n| < P(n)$ untuk semua n .

Buktikan bahwa terdapat suatu polynomial Q sedemikian sehingga $q_n = Q(n)$.

Masalah 5. Misalkan dalam suatu masyarakat tertentu, setiap pasangan orang dapat diklasifikasikan sebagai ramah (amicable) atau bermusuhan (hostile). Kita katakan bahwa setiap anggota dari pasangan yang ramah adalah teman satu sama lain, dan setiap anggota dari pasangan yang bermusuhan adalah musuh satu sama lain. Misalkan masyarakat tersebut memiliki n orang dan q pasangan ramah, dan untuk setiap set yang terdiri dari tiga orang, setidaknya satu pasangan di antaranya adalah bermusuhan. Buktikan bahwa setidaknya ada satu anggota masyarakat yang musuh-musuhnya mencakup $q(1 - 4q/n^2)$ atau lebih sedikit pasangan ramah.

Sistem Perwakilan Berbeda

Misalkan di sebuah sekolah terdapat beberapa klub. Di klub sains, anggotanya adalah Bob dan Cathy. Di klub tari, anggotanya adalah Bob, Mary, Joe, dan Emma. Di klub bridge, anggotanya adalah Joe, Emma, Paul, dan Cathy. Di klub debat, anggotanya adalah Bob dan Cathy. Misalkan seorang perwakilan harus dipilih dari setiap klub dan tidak ada dua klub yang diperbolehkan memiliki perwakilan yang sama. Apakah hal ini memungkinkan?

Dalam contoh tersebut, salah satu kemungkinannya adalah memilih Bob untuk sains, Mary untuk tari, Joe untuk bridge, dan Cathy untuk debat. Kita menyebut kumpulan Bob, Mary, Joe, dan Cathy sebagai sistem perwakilan yang berbeda (SDR) untuk keempat klub tersebut karena masing-masing mewakili klub yang berbeda.

Jika sebuah klub drama baru dibentuk dengan hanya beranggotakan Bob dan Cathy, maka tidak ada SDR (sistem perwakilan yang berbeda) untuk kelima klub tersebut karena klub sains, debat, dan drama secara kolektif hanya memiliki dua anggota. Sejauh ini, menentukan apakah ada SDR untuk klub-klub tersebut atau tidak masih tergolong sederhana karena jumlah klubnya tidak terlalu banyak. Jika jumlah klub bertambah, maka masalahnya akan menjadi sulit. Tentu saja, kita ingin mengetahui apakah ada metode untuk mengetahui apakah sebuah SDR tersedia atau tidak. Selain itu, kita juga ingin tahu, ketika SDR tersebut ada, bagaimana cara menemukannya.

Misalkan ada n klub. Dari situasi klub drama di atas, kita mempelajari bahwa jika ke- n klub ini memiliki sebuah SDR, maka setiap set dari m ($m \leq n$) klub secara kolektif harus memiliki setidaknya m anggota. Ini memberi kita syarat perlu

(necessary condition) untuk diperiksa. Faktanya, ada sebuah teorema terkenal dari Philip Hall yang menegaskan bahwa syarat tersebut juga merupakan syarat cukup (sufficient condition).

Teorema Hall. Sebuah SDR untuk n buah klub ada jika dan hanya jika setiap kumpulan dari m ($m \leq n$) klub secara kolektif memiliki setidaknya m anggota.

Secara singkat, berikut adalah cara mendapatkan SDR secara induktif ketika syarat tersebut terpenuhi. Jika kita beruntung bahwa setiap kumpulan k ($k < n$) klub secara kolektif memiliki lebih dari k anggota, maka pilihlah satu anggota sebagai perwakilan untuk sebuah klub dan hapus anggota ini dari $n - 1$ klub lainnya. Syarat untuk $n - 1$ klub tersebut akan tetap terpenuhi. Secara induktif, kita dapat menemukan SDR untuk $n - 1$ klub ini.

Jika kita tidak beruntung dan terdapat k ($k < n$) klub yang secara kolektif memiliki tepat k anggota. Karena $k < n$, secara induktif kita dapat menemukan sebuah SDR untuk k klub ini. Sekarang, hapus k anggota tersebut dari $n - k$ klub lainnya. Setelah penghapusan, kita dapat memeriksa bahwa syarat untuk $n - k$

klub yang tersisa akan tetap terpenuhi. (Ini dikarenakan setiap j dari klub yang tersisa ini secara kolektif akan berisi anggota dari gabungan $j + k$ klub, dikurangi k anggota yang telah dihapus. Artinya, setiap set dari j ($j \leq n - k$) klub yang tersisa memiliki setidaknya $(j + k) - k = j$ anggota.) Jadi, secara induktif kita dapat menemukan sebuah SDR untuk $n - k$ klub yang tersisa.

Untuk penerapan SDR lainnya, pertimbangkan situasi di mana terdapat n laki-laki dan n perempuan dalam sebuah pesta. Setiap laki-laki mengenal beberapa perempuan dan sebaliknya. Kapan kita bisa menjodohkan setiap laki-laki dengan satu perempuan unik yang ia kenal? Ini menjadi sederhana jika Anda memahami Teorema Hall. Untuk setiap laki-laki, bentuklah sebuah "klub penggemar" yang terdiri dari semua perempuan yang ia kenal. Penjodohan dapat dilakukan jika dan hanya jika terdapat sebuah SDR untuk n klub penggemar tersebut, yaitu: setiap kumpulan m ($m \leq n$) laki-laki secara kolektif harus mengenal setidaknya m perempuan.



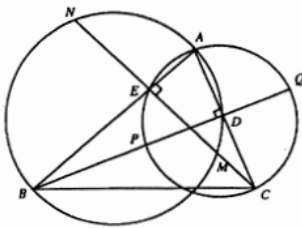
Pojok Soal

Soal 21. Tunjukkan bahwa jika sebuah polinomial $P(x)$ memenuhi

$$P(2x^2 - 1) = \frac{P(x)^2}{2} - 1,$$

maka polinomial tersebut haruslah konstan.

Soal 22. Sebuah segitiga lancip ABC diberikan pada sebuah bidang. Lingkaran dengan diameter AB memotong garis tinggi CE dan perpanjangannya pada titik M dan N , dan lingkaran dengan diameter AC memotong garis tinggi BD dan perpanjangannya pada titik P dan Q . Buktikan bahwa titik-titik M, N, P, Q terletak pada satu lingkaran yang sama.



Soal 23. Tentukan semua barisan $\{a_1, a_2, \dots\}$ sedemikian hingga $a_1 = 1$ dan $|a_n - a_m| \leq 2mn/(m^2 + n^2)$ untuk semua bilangan bulat positif m dan n .

Soal 24. Dalam sebuah pesta, n laki-laki dan n perempuan dipasangkan. Teramati bahwa pada setiap pasangan, perbedaan tingginya kurang dari 10 cm. Tunjukkan bahwa perbedaan tinggi antara laki-laki tertinggi ke- k dan perempuan tertinggi ke- k juga kurang dari 10 cm untuk $k = 1, 2, \dots, n$.

Soal 25. Apakah ada bilangan bulat positif n sedemikian hingga empat digit pertama dari sisi kiri $n!$ (dalam representasi basis 10) adalah 1995?

Solusi

Soal 16. Misalkan a, b, c, p adalah bilangan real, dengan a, b, c tidak semuanya bernilai sama, sedemikian hingga

$$a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a} = p.$$

Tentukan semua nilai p yang mungkin dan buktikan bahwa $abc + p = 0$.

Solusi. Karena $ca + 1 = ap$ dan $bc + 1 = cp$, kita mendapatkan $ap^2 = cap + p = a(bc + 1) + p = abc + a + p$. Oleh karena itu, $a(p^2 - 1) = abc + p$. Dengan cara yang sama, $b(p^2 - 1) = abc + p$ dan $c(p^2 - 1) = abc + p$. Karena a, b, c tidak semuanya bernilai sama, maka $p = \pm 1$ dan kemudian $abc + p = 0$. Kedua nilai p tersebut memungkinkan dengan mempertimbangkan $(a, b, c) = (2, -1, 1/2)$ dan $(-2, 1, -1/2)$.

Soal 17. Tentukan semua himpunan bilangan bulat positif x, y dan z sedemikian hingga $x \leq y \leq z$ dan $x^y + y^z = z^x$.

Solusi. Karena $3^{1/3} > 4^{1/4} > 5^{1/5} > \dots$ kita mendapatkan $y^z \geq z^y$ jika $y \geq 3$. Maka dari itu, persamaan tersebut tidak memiliki solusi jika $y \geq 3$. Karena $1 \leq x \leq y$, satu-satunya nilai yang mungkin untuk (x, y) adalah $(1, 1)$, $(1, 2)$, dan $(2, 2)$. Nilai-nilai ini mengarah pada persamaan: $1 + 1 = z$, $1 + 2^2 = 2$, dan $4 + 2^2 = z^2$. Persamaan ketiga tidak memiliki solusi karena $2^z \geq z^2$ untuk $z \geq 4$, dan $(2, 2, 3)$ bukan merupakan solusi untuk $x^y + y^z = z^x$. Persamaan kedua juga tidak memiliki solusi karena $2^z > z$. Persamaan pertama menghasilkan solusi tunggal yaitu $(1, 1, 2)$.

Soal 18. Untuk bilangan real a, b, c definisikan $f(a, b, c) = a + b - |a - b| - |a + b + |a - b| - 2c|$. Tunjukkan bahwa $f(a, b, c) > 0$ jika dan hanya jika $f(b, c, a) > 0$ jika dan hanya jika $f(c, a, b) > 0$.

Solusi. Kita mendapati $f(a, b, c) > 0$ jika dan hanya jika $|a + b + |a - b| - 2c| < a + b - |a - b|$. Dengan menerapkan fakta bahwa $|x| < y$ jika dan hanya jika $x < y$ dan $-x < y$ pada pertidaksamaan terakhir dan menyederhanakannya, kita melihat bahwa $f(a, b, c) > 0$ jika dan hanya jika $|a - b| < c$ dan $c < a + b$.

Dengan menerapkan fakta tersebut kembali pada $|a - b| < c$ dan memindahkan suku-sukunya, kita melihat bahwa $f(a, b, c) > 0$ jika dan hanya jika $a < b + c$ dan $b < c + a$ dan $c < a + b$. Pernyataan tersebut pun terbukti.

Soal 19. Misalkan A adalah sebuah titik di dalam sebuah lingkaran yang diberikan dan titik tersebut bukan merupakan titik pusat. Pertimbangkan semua tali busur (tidak termasuk diameter) yang melewati A . Apakah lokus (tempat kedudukan) dari titik potong garis-garis singgung di titik-titik ujung tali busur tersebut?

Solusi. Misalkan O adalah titik pusat dan r adalah jari-jarinya. Misalkan A' adalah titik pada perpanjangan OA di luar A sedemikian hingga $OA \times OA' = r^2$. Misalkan BC adalah salah satu tali busur yang melewati A , dan garis singgung di B dan C berpotongan di D' . Berdasarkan simetri, D' berada pada garis OD , di mana D adalah titik tengah dari BC . Karena $\angle OBD' = 90^\circ$, maka $OD \times OD' = OB^2$ (yang mana $= OA \times OA'$). Dengan demikian, $\triangle OAD$ sebangun dengan $\triangle OD'A'$. Karena $\angle ODA = 90^\circ$, maka D' berada pada garis L yang tegak lurus terhadap OA di titik A' .

Sebaliknya, untuk D' pada L , misalkan tali busur yang melalui A dan tegak lurus terhadap OD' memotong lingkaran di B dan C . Misalkan D adalah titik potong antara tali busur tersebut dengan OD' . Sekarang, $\triangle OAD$ dan $\triangle OD'A'$ adalah segitiga siku-siku yang sebangun. Sehingga $OD \times OD' = OA \times OA' = OB^2 = OC^2$, yang berarti $\angle OBD' = \angle OCD' = 90^\circ$. Oleh karena itu, D' berada pada lokus tersebut. Ini menunjukkan bahwa lokusnya adalah garis L .

Soal 20. Untuk $n > 1$, misalkan $2n$ buah bidak catur ditempatkan pada $2n$ kotak sembarang di papan catur berukuran $n \times n$. Tunjukkan bahwa terdapat 4 bidak di antaranya yang membentuk titik-titik

sudut sebuah jajaran genjang. (Catatan: jika $2n - 1$ bidak ditempatkan pada kotak-kotak di kolom pertama dan baris pertama, maka tidak ada jajaran genjang yang terbentuk. Jadi, $2n$ adalah nilai terbaik yang memungkinkan.)

Solusi. Misalkan m adalah jumlah baris yang memiliki setidaknya 2 bidak. (Maka setiap baris dari $n - m$ baris sisanya mengandung paling banyak 1 bidak.) Untuk setiap baris dari m baris ini, tentukan kotak paling kiri yang berisi bidak. Catat jarak (yaitu, jumlah kotak) antara bidak ini dengan bidak lainnya di baris yang sama. Jarak-jarak tersebut hanya bisa bernilai $1, 2, \dots, n - 1$ karena terdapat n kolom.

Karena jumlah bidak di m baris ini secara keseluruhan adalah setidaknya $2n - (n - m) = n + m$, maka terdapat setidaknya $(n + m) - m = n$ jarak yang dicatat secara keseluruhan untuk m baris tersebut. Berdasarkan prinsip rumah burung dara (pigeonhole principle), setidaknya dua dari jarak-jarak ini bernilai sama. Ini menyiratkan bahwa setidaknya ada dua baris yang masing-masing berisi 2 bidak dengan jarak yang sama. Keempat bidak ini menghasilkan sebuah jajaran genjang.