

Pojok Olimpiade

Soal 1. Misalkan A, B, C dan D adalah empat titik berbeda pada sebuah garis, sesuai urutan tersebut. Lingkaran-lingkaran dengan diameter AC dan BD berpotongan di titik X dan Y . Garis XY memotong BC di titik Z . Misalkan P adalah sebuah titik pada garis XY yang berbeda dari Z . Garis CP memotong lingkaran dengan diameter AC di titik C dan M , dan garis BP memotong lingkaran dengan diameter BD di titik B dan N . Buktikan bahwa garis AM, DN dan XY adalah konkuren (bertemu di satu titik).

Soal 2. Misalkan a, b , dan c adalah bilangan real positif sedemikian sehingga $abc = 1$. Buktikan bahwa:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Soal 3. Tentukan semua bilangan bulat $n > 3$ sedemikian sehingga terdapat n titik A_1, A_2, \dots, A_n di sebuah bidang, dan bilangan-bilangan real r_1, r_2, \dots, r_n yang memenuhi dua kondisi berikut:

- tidak ada tiga titik dari A_1, A_2, \dots, A_n yang terletak pada satu garis lurus;
- untuk setiap tiga titik $i, j, k (1 \leq i < j < k \leq n)$, segitiga $A_i A_j A_k$ memiliki luas yang sama dengan $r_i + r_j + r_k$.

Soal 4. Temukan nilai maksimum dari x_0 sedemikian sehingga terdapat barisan bilangan real positif $x_0, x_1, \dots, x_{1995}$ yang memenuhi dua kondisi berikut:

- $x_0 = x_{1995}$;
- $x_{i+1} + \frac{2}{x_{i-1}} = 2x_i + \frac{1}{x_i}$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots, 1995$.

Soal 5. Misalkan $ABCDEF$ adalah sebuah segi enam konveks dengan $AB = BC = CD, DE = EF = FA$, dan $\angle BCD = \angle EFA = 60^\circ$.

Misalkan G dan H adalah dua titik di bagian dalam segi enam sedemikian sehingga:

$$\angle AGB = \angle DHE = 120^\circ.$$

Buktikan bahwa

$$AG + GB + GH + DH + HE \geq CF.$$

Soal 6. Misalkan p adalah bilangan prima ganjil. Temukan jumlah himpunan bagian A dari himpunan $\{1, 2, \dots, 2p\}$ sedemikian sehingga:

- A memiliki tepat p elemen, dan
- jumlah dari semua elemen di dalam A habis dibagi oleh p .

Aturan Tanda Descartes

(Vol 1 - No 4)

Misalkan $P(x)$ adalah polinomial derajat n dengan koefisien kompleks. Teorema Dasar Aljabar memberi tahu kita bahwa polinomial tersebut memiliki tepat n akar kompleks. Kita tertarik pada jumlah akar real dalam kasus di mana koefisien-koefisiennya adalah bilangan real. Kita dapat mengasumsikan bahwa koefisien utamanya adalah 1 dan suku konstantanya bukan nol.

Sebagai contoh, perhatikan:

$$p(x) = x^6 - 6x^5 + 10x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x - 12.$$

Ternyata, polinomial ini memiliki empat akar real yaitu $-1, 2$ (dengan multiplisitas 2), dan 3, serta dua akar non-real yaitu i dan $-i$.

Secara umum, kita mungkin tidak dapat menemukan akar-akar dari $P(x)$. Namun, kita dapat memperoleh beberapa informasi mengenai jumlah akar positif dari jumlah pergantian tanda pada $P(x)$. Jika kita memperhatikan urutan tanda dari koefisien non-nol $P(x)$ secara berurutan, sebuah pergantian tanda dikatakan terjadi jika tanda + langsung diikuti oleh $-$ atau sebaliknya.

Untuk $p(x)$ di atas, urutannya adalah $+ - + - + -$. Oleh karena itu, jumlah pergantian tandanya adalah 5.

Bagian pertama dari Aturan Tanda Descartes menyatakan bahwa jumlah akar positif dari $P(x)$ memiliki paritas (genap/ganjil) yang sama dengan jumlah pergantian tanda pada $P(x)$. Jelas bahwa yang terakhir bernilai genap jika dan hanya jika suku konstanta dari $P(x)$ adalah positif (karena urutan tanda dimulai dan diakhiri dengan $+$). Apa yang harus kita buktikan adalah hal yang sama berlaku untuk jumlah akar positif dari $P(x)$.

Dari Teorema Dasar Aljabar, $P(x)$ adalah produk dari faktor-faktor linear dan faktor-faktor kuadrat yang tidak dapat direduksi (irreducible). Sekarang, suku

konstanta dari faktor kuadrat dengan diskriminan negatif haruslah positif. Suku konstanta dari faktor linear adalah positif jika dan hanya jika ia berhubungan dengan akar negatif. Maka dapat disimpulkan bahwa tanda dari suku konstanta $P(x)$ adalah positif jika dan hanya jika jumlah akar positif dari $P(x)$ adalah genap.

Karena jumlah pergantian tanda dari $p(x)$ adalah 5, kita dapat mengetahui bahwa ia memiliki jumlah akar positif yang ganjil tanpa perlu mencoba mencarinya.

Bagian kedua dari Aturan Tanda Descartes menyatakan bahwa jumlah akar real positif dari $P(x)$ adalah kurang dari atau sama dengan jumlah pergantian tanda pada $P(x)$. Kita akan menyusun $P(x)$ sebagai berikut. Mulailah dengan hasil kali dari semua faktor kuadrat yang tidak dapat difaktorkan (irreducible) dan semua faktor linear yang bersesuaian dengan akar-akar negatif. Apa yang harus kita buktikan adalah bahwa jumlah pergantian tanda meningkat setiap kali kita memasukkan faktor linear yang bersesuaian dengan akar positif.

Untuk setiap polinomial $Q(x)$ dengan koefisien riil, koefisien utama 1, dan suku konstanta bukan nol, kita mengelompokkan suku-suku berurutan yang memiliki tanda yang sama untuk menyatakan $Q(x)$ sebagai jumlah berselang-seling dari polinomial-polinomial dengan koefisien positif. Dengan demikian, pergantian tanda terjadi tepat di antara suku-suku yang dijumlahkan tersebut. Kami mengklaim bahwa ketika kita mengalikan $Q(x)$ dengan $x - t$ untuk suatu bilangan positif t , pergantian tanda yang asli tetap terjaga, sementara setidaknya satu pergantian tanda tambahan muncul.

Pertimbangkan setiap suku yang dijumlahkan secara bergantian. Koefisien utamanya bernilai positif. Hal ini tidak berubah setelah dikalikan dengan x .

Namun, kita mungkin harus menggabungkannya dengan $-t$ kali suku terakhir dari suku penjumlahan sebelumnya. Karena terdapat pergantian tanda di antara kedua suku penjumlahan tersebut, suku yang akan digabungkan dengannya juga bernilai positif. Hal ini membuktikan klaim pertama. Klaim kedua menyusul karena suku konstanta dari $Q(x)$ dan $(x-t)Q(x)$ memiliki tanda yang berlawanan. Ini melengkapi pembuktian Aturan Tanda Descartes (Descartes' Rule of Signs).

Mari kita ilustrasikan pembuktian bagian kedua dengan

$$p(x) = (x^2 + 1)(x + 1)(x - 2)^2(x - 3).$$

Pertama-tama kita misalkan

$$q(x) = (x^2 + 1)(x + 1) = x^3 + x^2 + x + 1.$$

Karena jumlah pergantian tandanya adalah 0, maka hanya ada satu suku penjumlahan. Kita memperoleh

$$\begin{aligned} q_1(x) &= (x-2)q(x) \\ &= (x-2)(x^3+x^2+x+1) \\ &= x^4-x^3-x^2-x-2 \\ &= x^4-(x^3+x^2+x+2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_2(x) &= (x-2)q_1(x) \\ &= (x-2)x^4 - (x-2)(x^3+x^2+x+2) \\ &= (x^5-2x^4) - (x^4-x^3-x^2-4) \\ &= x^5-3x^4+x^3+x^2+4. \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa kita telah menggabungkan suku $-x^4$ dan $-2x^4$ yang memiliki tanda yang sama. Akhirnya,

$$\begin{aligned} p(x) &= (x-3)q_2(x) \\ &= (x-3)x^5 - (x-3)(3x^4) + (x-3)(x^3+x^2+4) \\ &= (x^6-3x^5) - (3x^5-9x^4) + (x^4-2x^3-3x^2+4x-12) \\ &= x^6-6x^5+10x^4-2x^3-3x^2+4x-12. \end{aligned}$$

Kami menunjukkan bahwa dengan menggunakan argumen yang sama, kita dapat membuktikan bahwa jumlah akar negatif dari $P(x)$ tidak lebih besar dari jumlah pergantian tanda pada $P(-x)$, dan selisihnya adalah bilangan genap. Sebagai contoh, jumlah pergantian tanda pada $p(-x) = x^6 + 6x^5 + 10x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x - 12$ adalah 1, dan kita dapat menyimpulkan bahwa $p(x)$ memiliki tepat satu akar negatif.

Perkembangan Geometri Yunani

Kata "geometri" dalam bahasa Latin adalah geometria, di mana "geo-" berarti "bumi" (sama dengan arti "geo-" dalam geography dan geology), sedangkan "metria" berkaitan dengan kata "metric" dalam bahasa Inggris modern yang berarti "pengukuran". Gabungan kedua bagian ini menjadi "ilmu pengukuran tanah", ternyata di Mesir Kuno, Sungai Nil meluap setahun sekali dan menghancurkan lahan pertanian di sepanjang tepian sungai. Setelah banjir surut, pemerintah mengukur luas lahan pertanian untuk menetapkan kembali batas-batasnya guna menentukan pajak yang harus dibayar oleh setiap rumah tangga; geometri pun lahir dalam situasi seperti ini. Belakangan, pengetahuan ini merambah ke Yunani dan secara bertahap berkembang menjadi sebuah teori yang lengkap.

Sejarah matematika Yunani dapat dibagi menjadi tiga periode: tahap pertama dimulai dari Mazhab Ionia hingga Mazhab Plato; tahap kedua adalah periode awal Aleksandria, dimulai dari Euklides hingga penaklukan Yunani oleh Romawi; dan tahap terakhir adalah periode akhir Aleksandria.

Pada periode pertama, Yunani memiliki enam mazhab utama, di antaranya mazhab Pythagoras berpantang makan daging (vegetarian) adalah yang paling tersohor. "Teorema Pythagoras" mereka merupakan alat yang sangat penting dalam bidang sains. Selama periode ini, banyak matematikawan membuat penemuan-penemuan penting; meskipun belum membangun serangkaian doktrin yang lengkap, mereka telah meletakkan landasan yang baik bagi teori-teori matematika Archimedes dan tokoh lainnya di masa depan.

Matematikawan terbesar pada periode kedua dapat dikatakan adalah Euclides (Euclid). Euclides sangat memahami esensi geometri Plato. Melalui deduksi dan penalaran yang ketat, ia menulis buku "Elemen" (Elements). Buku Elemen membangun teori geometri yang lengkap dan menduduki posisi dominan dalam geometri sebelum Descartes memperkenalkan "Geometri Koordinat" pada tahun 1637. Buku ini juga merupakan

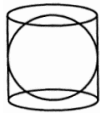
contoh paling awal dari sistem matematika deduktif yang dibangun menggunakan metode aksiomatik—yang disebut "Metode Aksiomatik" adalah berawal dari beberapa "aksioma" yang diakui secara umum dan tidak perlu dibuktikan lagi, kemudian melalui penalaran logis menghasilkan kesimpulan yang terverifikasi. Hal ini dapat dikatakan sebagai langkah penting umat manusia dari memahami hal-hal secara intuitif menuju pemikiran abstrak!

Matematikawan besar lainnya pada periode awal Aleksandria adalah Archimedes. Dalam karyanya yang berjudul "Pengukuran Lingkaran" (Measurement of a Circle), Archimedes menggunakan poligon sisi-96 luar dan dalam untuk memperoleh dua nilai perkiraan untuk konstanta lingkaran π :

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$$

Andaikata jari-jari lingkaran adalah 1, maka keliling lingkaran tepat bernilai 2π . Nilai ini harus lebih besar dari keliling heksagon (segi enam) dalam, di mana keliling heksagon tersebut adalah 6. Oleh karena itu, diperoleh batas bawah π adalah 3. Dengan prinsip yang sama, menggunakan heksagon luar lingkaran, dapat diperoleh batas atas π adalah 3,4641. Jika kita mengganti heksagon tersebut dengan poligon sisi-12, sisi-24, ..., maka keliling poligon (baik dalam maupun luar) akan semakin mendekati lingkaran, dan batas atas serta batas bawah yang sesuai juga akan mendekati nilai π yang sebenarnya. Archimedes menggunakan poligon sisi-96 luar dan dalam untuk memperoleh $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$.

Pencapaian Archimedes lainnya adalah perhitungan volume; sebagai contoh, volume sebuah bola adalah dua pertiga dari volume silinder yang melingkupinya. Archimedes juga menemukan bahwa luas permukaan bola tepat dua pertiga dari luas permukaan silinder luar tersebut. Ia sangat mengagumi teorema ini, sehingga ia berpesan kepada kerabatnya untuk memahat bentuk geometris ini pada batu nisannya (lihat gambar).



Bagian terakhir adalah periode akhir Aleksandria. Para matematikawan pada periode ini, berdasarkan buku "Elemen" (Elements) karya Euclides, melakukan banyak pekerjaan penyempurnaan dan perbaikan, dan geometri bidang yang kita pelajari sekarang juga terbentuk secara bertahap pada masa ini. Sampai di sini, para siswa hendaknya memahami bahwa disiplin ilmu ini merupakan kristalisasi dari kebijaksanaan kolektif dan hasil kerja keras jangka panjang dari banyak matematikawan.

Pojok Soal

Masalah 16. Misalkan a, b, c, p adalah bilangan riil, dengan a, b, c tidak semuanya sama, sedemikian sehingga $a + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{c} = c + \frac{1}{a} = p$. Tentukan semua nilai p yang mungkin dan buktikan bahwa $abc + p = 0$.

Masalah 17. Tentukan semua himpunan bilangan bulat positif x, y dan z sedemikian sehingga $x \leq y \leq z$ dan $x^y + y^z = z^x$

Masalah 18. Untuk bilangan riil a, b, c definisikan $f(a, b, c) = a + b - |a - b| - |a + b + |a - b| - 2c|$. Tunjukkan bahwa $f(a, b, c) > 0$ jika dan hanya jika $f(b, c, a) > 0$ jika dan hanya jika $f(c, a, b) > 0$.

Masalah 19. Misalkan A adalah sebuah titik di dalam suatu lingkaran yang diberikan dan titik tersebut berbeda dari pusat lingkaran. Pertimbangkan semua tali busur (tidak termasuk diameter) yang melewati A . Apakah lokus (tempat kedudukan) dari perpotongan garis-garis singgung pada ujung-ujung tali busur tersebut?

Masalah 20. Untuk $n > 1$, misalkan $2n$ buah pion catur diletakkan pada sembarang $2n$ kotak di sebuah papan catur berukuran $n \times n$. Tunjukkan bahwa terdapat 4 pion di antaranya yang membentuk titik-titik sudut dari sebuah jajaran genjang. (Perhatikan bahwa jika $2n - 1$ pion diletakkan pada kotak-kotak di kolom pertama dan baris pertama, maka tidak akan terbentuk jajaran genjang. Jadi, $2n$ adalah kemungkinan terbaik.)

Solusi

Masalah 11. Sederhanakan

$$\sum_{n=1}^{1995} \tan n \tan(n+1).$$

Solusi. Dari $\tan 1 = \tan[(n+1) - n] = \frac{\tan(n+1) - \tan n}{1 + \tan n \tan(n+1)}$, kita mendapatkan

$$\sum_{n=1}^{1995} \tan(n) \tan(n+1) = \sum_{n=1}^{1995} \left(\frac{\tan(n+1) - \tan(n)}{\tan 1} - 1 \right) = \frac{\tan 1996 - \tan 1}{\tan 1} - 1995 = \frac{\tan 1996}{\tan 1} - 1996.$$

Masalah ini mengilustrasikan metode teleskopik dalam menjumlahkan suatu deret, yaitu dengan cara tertentu menuliskan a_n sebagai $b_{n+1} - b_n$, sehingga penjumlahan a_n akan menghasilkan banyak pembatalan (saling menghilangkan) yang memberikan jawaban sederhana.

Masalah 12. Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan bulat $n > 12$, terdapat sebuah segitiga siku-siku yang sisi-sisinya adalah bilangan bulat dan luasnya berada di antara n dan $2n$.

Solusi. Pertimbangkan segitiga A dengan sisi-sisi $3d, 4d, 5d$, yang memiliki luas $6d^2$. Maka untuk n dalam interval $(3d^2 + 1, 6d^2 - 1)$, segitiga A memiliki luas di antara n dan $2n$. Untuk $d \geq 3$, berlaku $6d^2 - 1 - [3(d+1)^2 + 1] = 3(d-1)^2 - 8 > 0$. Jadi, interval-interval $(3d^2 + 1, 6d^2 - 1)$ dengan $d = 3, 4, 5, \dots$ mencakup semua bilangan bulat positif n yang lebih besar dari atau sama dengan 28. Untuk $d = 2$, segitiga A memiliki luas 24, yang menangani kasus $n = 13, 14, \dots, 23$. Akhirnya, kasus $n = 24, 25, 26, 27$ ditangani oleh segitiga dengan sisi-sisi 5, 12, 13 yang memiliki luas 30.

Masalah 13. Misalkan $x_k, y_k (k = 1, 2, \dots, 1995)$ adalah bilangan positif dan $x_1 + x_2 + \dots + x_{1995} = y_1 + y_2 + \dots + y_{1995} = 1$.

Buktikan bahwa

$$\sum_{k=1}^{1995} \frac{x_k y_k}{x_k + y_k} \leq \frac{1}{2}.$$

Solusi. Karena $x_k y_k / (x_k + y_k) \leq (x_k + y_k) / 4$ (setara dengan $(x_k - y_k)^2 \geq 0$ melalui aljabar sederhana), kita mendapatkan

$$\sum_{k=1}^{1995} \frac{x_k y_k}{x_k + y_k} \leq \sum_{k=1}^{1995} \frac{x_k + y_k}{4} = \frac{1}{2}$$

Masalah 14. Jika ΔABC dan $\Delta A'B'C'$ (secara langsung) serupa satu sama lain, dan $\Delta AA'A'', \Delta BB'B'', \Delta CC'C''$ juga (secara langsung) serupa satu sama lain, maka tunjukkan bahwa $\Delta A''B''C''$ dan ΔABC sebangun.

Solusi: Kita akan menggunakan huruf besar untuk titik-titik dan huruf kecil untuk bilangan kompleks yang bersesuaian. Karena $\Delta AA'A'', \Delta BB'B'', \Delta CC'C''$ (secara langsung) serupa satu sama lain, maka:

$$\frac{a'' - a}{a' - a} = \frac{b'' - b}{b' - b} = \frac{c'' - c}{c' - c} = r.$$

Maka $a'' = ra' + (1-r)a, b'' = rb' + (1-r)b, c'' = rc' + (1-r)c$. Karena $\Delta ABC, \Delta A'B'C'$ (secara langsung) serupa satu sama lain, maka:

$$\frac{b-a}{c-a} = \frac{b'-a'}{c'-a'}$$

Maka,

$$\frac{b''-a''}{c''-a''} = \frac{r(b'-a') + (1-r)(b-a)}{r(c'-a') + (1-r)(c-a)} = \frac{b-a}{c-a},$$

yang setara dengan $\Delta A''B''C''$ serupa (secara langsung) dengan ΔABC .

Masalah 15. Apakah ada barisan tak hingga a_0, a_1, a_2, \dots dari bilangan real bukan nol sedemikian sehingga untuk $n = 1, 2, 3, \dots$, polynomial

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

memiliki tepat n akar real yang berbeda?

Solusi. Ya. Ambil $a_0 = 1, a_1 = -1$ dan lanjutkan dengan induksi. Misalkan a_0, \dots, a_n telah dipilih sedemikian sehingga $P_n(x)$ memiliki n akar real yang berbeda dan $P_n(x) \rightarrow \infty$ atau $-\infty$ saat $x \rightarrow \infty$ bergantung pada apakah a_n positif atau negative. Misalkan akar-akar dari $P_n(x)$ berada dalam interval $(-T, T)$. Biarkan $a_{n+1} = (-1)^{n+1}/M$, di mana M dipilih menjadi sangat besar sehingga T^{n+1}/M menjadi sangat kecil. Maka $P_{n+1}(x) = P_n(x) + (-x)^{n+1}/M$ sangat dekat dengan $P_n(x)$ pada $[-T, T]$ karena $|P_{n+1}(x) - P_n(x)| \leq T^{n+1}/M$ untuk setiap x pada $[-T, T]$. Oleh karena itu, $P_{n+1}(x)$ memiliki perubahan tanda yang sangat dekat dengan setiap akar $P_n(x)$ dan memiliki tanda yang sama dengan $P_n(x)$ pada T . Karena $P_n(x)$ dan $P_{n+1}(x)$ memiliki tanda yang berbeda saat $x \rightarrow \infty$, maka harus ada perubahan tanda lain di luar T . Jadi, $P_{n+1}(x)$ harus memiliki $n+1$ akar real.