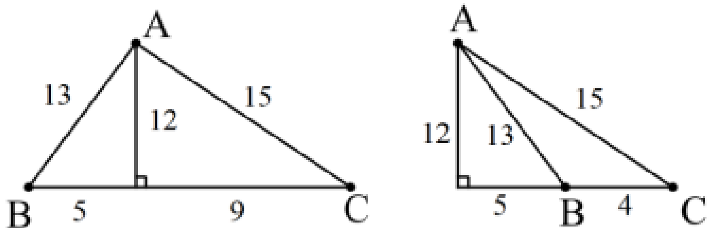
PEMBAHASAN
OSP MATEMATIKA SMA
TAHUN 2017

1. Penyelesaian:
   $a - b = ab$
   $(a-b)^2 = a^2b^2$
   $a^2 + b^2 - 2ab = a^2b^2$
   $a^2 + b^2 = a^2b^2 + 2ab$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab = \frac{a^2+b^2}{ab} - ab = \frac{a^2b^2+2ab}{ab} - ab = ab + 2 - ab = 2$$

2. Penyelesaian:
   Karena Pak RW wajib dipilih, maka kita memilih 2 Pria dari 6 Pria, kemudian karena Bu RW masuk dalam daftar pemilihan wanita, maka kita memilih 3 Wanita dari 6 Wanita.
   Jadi, banyak cara pemilihan adalah $C_2^6 \times C_3^6 = 15 \times 20 = 300$ cara.

3. Penyelesaian:



   Jadi, jumlah semua kemungkinan Panjang BC = 14 + 4 = 18.

4. Penyelesaian:
   Karena ab prima dan ba juga prima, jelas angka a dan b yang memenuhi adalah angka ganjil kecuali angka 5. Maka bilangan ab yang memenuhi adalah 11, 13, 17, 31, 37, 71, 73, 79, 97. Jadi, ada sebanyak 9 bilangan.

5. Penyelesaian:

$$f\left(\frac{x}{3}\right) = x^2 + 2x + 3$$

$$f(x) = (3x)^2 + 2(3x) + 3$$

$$= 9x^2 + 6x + 3$$

$$f(3z) = \underline{9(3z)^2 + 6(3z) + 3 = 12}_{:3}$$

$$\Leftrightarrow 3(9z^2) + 6z + 1 = 4$$

$$\Leftrightarrow 27z^2 + 6z - 3 = 0$$

$$\text{maka } z_1 + z_2 = -\frac{6}{27} = -\frac{2}{9}$$

6. Penyelesaian:

Jika hasil kali 5 bilangan dimana hasil penjumlahan factor-faktornya dapat merupakan bilangan ganjil atau pun bilangan genap, maka salah satu factor tersebut harus terdapat bilangan 12. Dimana 12 = 4.3 (dijumlahkan ganjil) bisa juga 12 = 2.6 (dijumlahkan genap).

Jelas 5 bilangan tersebut adalah :

(4.3).1.5.7 = 420 atau (6.2).1.5.7 = 420

Jadi, nilai hasil kali lima bilangan yang dimiliki Ita adalah 420.

7. Penyelesaian:

Jelas $\angle ACF = 90^o$, sehingga AF adalah diameter lingkaran.

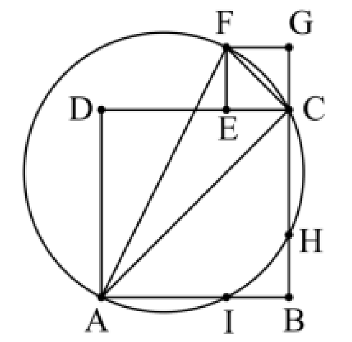
Karena AF diameter, maka $\angle FIA = 90^o$, dan

$AI = DE = 2017 - 1702 = 315$

Dengan menggunakan power of point theorem:

$\frac{BI}{AB} = \frac{BH}{BC}$, karena $AB = BC$, maka $BI = BH$

Dan $CH = AI = 315$.



8. Penyelesaian:
   Misalkan,
   $\sqrt{x} = a$
   $\sqrt{y} = b$
   Maka persamaan menjadi:
   $$a^2 + b^2 = a + b + ab$$
   $$\underline{a^2 - ab + b^2 - a - b = 0}_{\times 2}$$
   $$2a^2 - 2ab + 2b^2 - 2a - 2b = 0$$
   $$(a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2a) + (b^2 - 2b) = 0$$
   $$(a-b)^2 + (a-1)^2 - 1 + (b-1)^2 - 1 = 0$$
   $$(a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 = 2$$
   $$p^2 + q^2 + r^2 = 2$$
   Untuk $p, q, r, a, b, x, y \in$ bilangan asli, jelas nilai (p^2, q^2, r^2) yang memenuhi adalah (1, 1, 0), (1, 0, 1) dan (0, 1, 1). Jadi, ada 3 pasang.

9. Penyelesaian:
   $$x^2y^2 + 4x^2 + y^2 + 1 = 6xy$$
   $$(xy-1)^2 + (2x-y)^2 = 0$$
   Maka :
   $$2x - y = 0 \Rightarrow y = 2x$$
   $$xy - 1 = 0$$
   $$x(2x) - 1 = 0$$
   $$2x^2 = 1 \quad \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$
   $$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \frac{2}{\sqrt{2}}$$
   $$x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = -\frac{2}{\sqrt{2}}$$
   $$x - y = \frac{1}{\sqrt{2}} = M$$
   Maka, $M - m = \sqrt{2}$

10. Penyelesaian:
   Misalkan: Menyala = 1, Padam = 0
   2017 = 5 (403) + 2
   Menit ke-403 : $n(1)$ = 2015, $n(0)$ = 2
   Kemudian pilih 4 lampu yang menyala dan 1 lampu yang padam, maka:
   Menit ke-404 : $n(1)$ = 2012, $n(0)$ = 5
   Kemudian pilih 5 lampu Padam, maka:
   Menit ke-405 : $n(1)$ = 2017, $n(0)$ = 0
   Jadi, untuk menyalakan semua lampu Ani paling sedikit membutuhkan 405 menit.

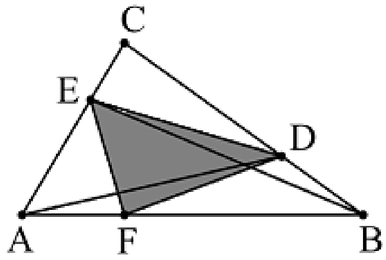
11. Penyelesaian:

Misal : $[ABC] = x$

$$[CDE] = \frac{1}{k+1}[BEC] = \frac{1}{k+1}\cdot\frac{k}{k+1}[ABC] = \frac{kx}{(k+1)^2}$$

$$[AEF] = \frac{k}{k+1}[ABE] = \frac{k}{k+1}\cdot\frac{1}{k+1}[ABC] = \frac{kx}{(k+1)^2}$$

$$[BDF] = \frac{1}{k+1}[ABD] = \frac{1}{k+1}\cdot\frac{k}{k+1}[ABC] = \frac{kx}{(k+1)^2}$$



$$\frac{[DEF]}{[ABC]} = \frac{[ABC]-[CDE]-[AEF]-[BDF]}{[ABC]}$$

$$= \frac{x - \frac{3kx}{(k+1)^2}}{x} = \frac{k^2-k+1}{k^2+2k+1}$$

12. Penyelesaian:

$I_k = 10\ldots064 = 10^{k+2} + 2^6 = 2^6(2^{k-4}, 5^{k+2} + 1)$

Maka nilai maksimum untuk $N(k)$ adalah 6.

13. Diketahui $x, y, z \in \mathbb{R}, x + \frac{1}{y} = 4, y + \frac{1}{z} = 1$

dan $z + \frac{1}{x} = \frac{7}{3}$.

Tulis $A = xyz$.

Jelas $z + \frac{1}{x} = \frac{7}{3} \Leftrightarrow z = \frac{7x-3}{3x}, y + \frac{1}{z} = 1 \Leftrightarrow y = \frac{z-1}{z}$, dan

$$x + \frac{1}{y} = 4 \Leftrightarrow x + \frac{z}{z-1} = 4 \Leftrightarrow x + \frac{\frac{7x-3}{3x}}{\frac{7x-3}{3x}-1} = 4 \Leftrightarrow x + \frac{\frac{7x-3}{3x}}{\frac{7x-3-3x}{3x}} = 4 \Leftrightarrow x + \frac{7x-3}{4x-3} = 4$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 3x + 7x - 3 = 16x - 12 \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2x)^2 - 2(2x) \times 3 + 9 = 0 \Leftrightarrow (2x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Jadi $z = \frac{\frac{21}{2}-3}{\frac{9}{2}} = \frac{15}{2} \times \frac{2}{9} = \frac{5}{3}$ dan $y + \frac{3}{5} = 1 = \frac{2}{5}$.

Jadi $A = xyz = \frac{3}{2} \times \frac{5}{3} \times \frac{2}{5} = 1$.

14. Tulis $X = \langle x_i \rangle_{i=1,\ldots,10}$ dengan $x_i < x_{i+1}$.

Percobaan: membuat barisan bilangan di X.

Tulis A: tidak ada siswa yang diapit oleh siswa lain yang lebih tinggi darinya.

$A^C_{x_i - x_j}$: siswa ke-i sampai ke-j menempati urutan pertama.

Kasus $A_{x_1 - x_{10}}$:

Jelas $\langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10} \rangle$

Jelas $n\left(A_{x_1-x_{10}}\right) = 1 = 2^0$.

Kasus $A_{x_1-x_8}$:

x_{10}	x_9

Jelas $n\left(A_{x_1-x_{10}}\right) = 1 = 2^0$.

Kasus $A_{x_1-x_7}$:

x_9	x_{10}	x_8
x_{10}	x_9	x_8

Jelas $n\left(A_{x_1-x_{10}}\right) = 2 = 2^1$

Kasus $A_{x_1-x_6}$:

x_8	x_9	x_{10}	x_7
x_8	x_{10}	x_9	x_7
x_9	x_{10}	x_8	x_7
x_{10}	x_9	x_8	x_7

Jelas $n\left(A_{x_1-x_{10}}\right) = 8 - 4 = 2^3 - 2^2$.

Kasus $A_{x_1-x_5}$:

x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_6
x_7	x_8	x_{10}	x_9	x_6
x_7	x_9	x_{10}	x_8	x_6
x_7	x_{10}	x_9	x_8	x_6
x_9	x_{10}	x_8	x_7	x_6
x_{10}	x_9	x_8	x_7	x_6
x_8	x_9	x_{10}	x_7	x_6
x_8	x_{10}	x_9	x_7	x_6

Jelas $n\left(A_{x_1-x_5}\right) = 8 = 2^3$.

Jadi $n(A) = 2^0 + 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7$

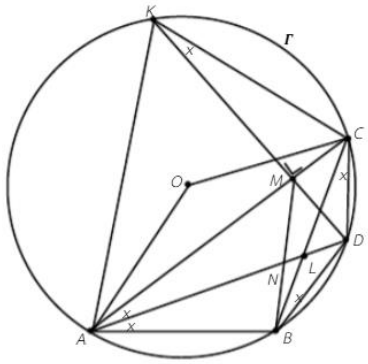
$= 1 + 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128$

$= 246$

15. Diketahui Γ: lingkaran luar $\Delta ABC, \angle BAD = \angle CAD$,

$$DK \perp AC, \text{ dan } \frac{BL}{LC} = \frac{1}{2}$$

Tulis O: titik pusat Γ, R: ukuran jari-jari Γ, dan $X = \frac{AM}{MC}$.



Jelas bahwa

$\frac{BL}{LC} = \frac{AB}{AC} \Leftrightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow AC = 2AB,$
$AM \times MC = KM \times MD,$
$AL \times LD = BL \times LC,$
$KM^2 = KC^2 - MC^2, KM^2 = KA^2 - AM^2,$
$KC^2 - KA^2 = (MC+AM)(MC-AM)$

16. Tulis $n = \overline{abcd}$

Diketahui $7\left|\overline{abcd}, 7\right|\overline{dcba}, \overline{abcd} = 37w + S, \overline{dcba} = 37x + S$ dan $\overline{dcba} > \overline{abcd}$

Jelas $7|(\overline{dcba} - \overline{abcd})$ dan $37|(\overline{dcba} - \overline{abcd})$.

Kelipatan 7: 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70, …

Kasus $u\left|\overline{dcba} - \overline{abcd}\right) = 7$:

Pasang (a, b) yang mungkin adalah: $(4,7), (2,5)$ atau $(6,9)$.

Kasus $(a, b) = (2,5)$:

Jelas $7|\overline{2bc5}, 7|\overline{5bc2}$ dan $37|(\overline{5cb2} - \overline{2bc5})$.

Jelas $7|(b + c + 7)$.

Nilai $b + c$ yang mungkin adalah: 0, 7 atau 14.

Pasang (b, c) yang mungkin: (0,0), (0,7), (7,0), (1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3), (5,9),

(9,5), (6,8), (8,6), atau (7,7).

Jelas 5002 – 2005 = 2093

5702 – 2075 = 3627

17. Diketahui $\langle a_1 \rangle_{i \geq 1}$ barisan bilangan real,

$a_1 = 20{,}17$.

$\langle a_1, a_2, \ldots, a_{11} \rangle$ barisan aritmatika,

$\langle \lfloor a_1 \rfloor, \lfloor a_2 \rfloor, \ldots, \lfloor a_{10} \rfloor \rangle$ barisan aritmatika, dan $\langle \lfloor a_1 \rfloor, \lfloor a_2 \rfloor, \ldots, \lfloor a_{11} \rfloor \rangle$ bukan barisan aritmatika.

Tulis $x = (a_2 - a_1 - \lfloor a_2 - a_1 \rfloor)_{min}$.

Jelas $\lfloor a_1 \rfloor = \lfloor 20{,}17 \rfloor = 20$.

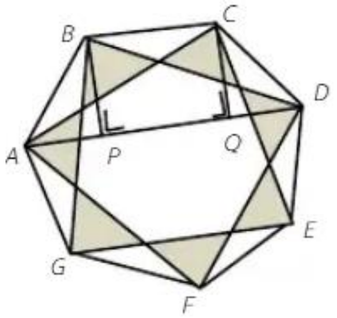
Tulis b: beda barisan $\langle a_1, a_2, \ldots, a_{11} \rangle$ dan

d: beda barisan $\langle \lfloor a_1 \rfloor, \lfloor a_2 \rfloor, \ldots, \lfloor a_{10} \rfloor \rangle$.

Jelas $b \geq 1$.
Tulis $b = m + \alpha$ untuk suatu $m \in \mathbb{N}$ dan $0 < \alpha < 1$.
Jelas $a_2 = a_1 + b = 20{,}17 + b$ dan $\lfloor a_2 \rfloor = \lfloor a_1 + b \rfloor + d = \lfloor 20{,}17 + b \rfloor + d$.
Jadi, $x \ = a_2 - a_1 - \lfloor a_2 - a_1 \rfloor$
$= b - \lfloor b \rfloor$
$= m + \alpha - \lfloor m + \alpha \rfloor$
$= m + \alpha - m$
$= \alpha$
Jadi, $(a_2 - a_1 - \lfloor a_2 - a_1 \rfloor)_{min} = 0$.

18. Tulis $P = \{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ dan $K = \{K_1, K_2, K_3, K_4\}$.
Dipunyai tiap K_i menyediakan 3 jenis makanan dan untuk setiap 3 pembeli di P paling sedikit ada 1 kedai yang 3 jenis makanannya dibeli.
Tulis $x = n_{max}$.
Jelas $\binom{n}{3} \times 3 \leq 3n \Leftrightarrow \frac{(n-3)! \times (n-2)(n-1)n}{(n-3)! \times 3} \leq 3n \Leftrightarrow \frac{(n-2)(n-1)}{3} \leq 3 \Leftrightarrow n^2 - 3n + 2 \leq 9$
$\Leftrightarrow n^2 - 3n - 7 \leq 0 \Leftrightarrow n^2 - 2n \times \frac{3}{2} + \frac{9}{4} - \frac{37}{4} \leq 0 \Leftrightarrow \left(n - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{37}}{2}\right)^2 \leq 0$
$\Leftrightarrow \left(n - \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{37}}{2}\right)\left(n - \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{37}}{2}\right) \leq 0$
$\Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{37}}{2} \leq n \leq \frac{3+\sqrt{37}}{2}$
$\Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{37}}{2} \leq n \leq \frac{9}{2}$.
Jadi, $n_{max} = 4$.

19. Diketahui $ABCDEFG$ beraturan.



Jelas $\angle ABC = \frac{(7-2) \times 180^o}{7} = \frac{900^o}{7}$,
$\angle CAB = \angle ACB = \frac{180^o - \frac{900^o}{7}}{2} = \frac{180^o}{7}$,
$\angle DAB = \angle ADC = \frac{360^o - \frac{1800^o}{7}}{2} = \frac{360^o}{7}$, dan

$\angle ABP = 90^o - \frac{360^o}{7} = \frac{270^o}{7}$.

Jelas $\cos\frac{360^o}{7} = \frac{DQ}{CD} \Leftrightarrow DQ = BC \times \cos\frac{360^o}{7}$.

Jadi $\frac{AD}{BC} = \frac{BC + 2BC\cos\frac{360^o}{7}}{BC} = 1 + 2\cos\frac{360^o}{7}$

$= 1 + 2\left(1 - \sin^2\frac{180^o}{7}\right)$

$= 3 - 2\sin^2\frac{180^o}{7}$

20. Tulis $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}$, $a_i \in \mathbb{B}$, dan $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ dengan $x_i \neq x_j \forall i \neq j$.
Diketahui $f(0) = 39$ dan $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = \cdots = f(x_n) = 2017$.
Tulis $g(x) = f(x) - 2017$
Jelas $g(x) = f(0) - 2017$
= 39 – 2017
= – 1978 dan
$g(x_1) = g(x_2) = g(x_3) = \cdots = g(x_n)$
$= 2017 - 2017$
$= 0$
Tanpa mengurangi keumuman, andaikan $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n$.
Kasus n genap:
Tulis $g(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n) + m$ untuk suatu $m \in \mathbb{R}$.
Jelas $g(0) = -1978 \quad \Leftrightarrow x_1x_2x_3 \dots x_n + m = -1978$
$\Leftrightarrow m = -1978 - x_1x_2x_3 \dots x_n$.
Jadi $g(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n) - x_1x_2x_3 \dots x_n - 1978$ dan
$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n) - x_1x_2x_3 \dots x_n - 1978 + 2017$
$\Leftrightarrow f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n) - x_1x_2x_3 \dots x_n + 39$
Jelas $f(x_1) = 2017 \quad \Leftrightarrow -x_1x_2x_3 \dots x_n + 39 = 2017$
$\Leftrightarrow -x_1x_2x_3 \dots x_n = 1978$
$\Leftrightarrow -x_n^n = 1978$ suatu kontradiksi.
Kasus n ganjil:
Tulis $\Leftrightarrow g(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n) + m$ untuk suatu $m \in \mathbb{R}$.
Jelas $g(0) = -1978 \quad \Leftrightarrow -x_1x_2x_3 \dots x_n + m = -1978$
$\Leftrightarrow m = x_1x_2x_3 \dots x_n - 1978$
Jadi $g(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n) + x_1x_2x_3 \dots x_n - 1978$ dan
$f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n) + x_1x_2x_3 \dots x_n - 1978 + 2017$
$\Leftrightarrow f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_n) + x_1x_2x_3 \dots x_n + 39$
Jelas $f(x_1) = 2017 \quad \Leftrightarrow x_1x_2x_3 \dots x_n + 39 = 2017$
$\Leftrightarrow x_1x_2x_3 \dots x_n = 1978$

$$\Leftrightarrow x_1^n \leq 1978$$

Jadi $n_{max} = 1978$ apabila $x_1 = 1$.

21. Diketahui papan catur 5×9 berikut ini:

0	0	0	0	0	1			1
0	0	0	0	1	1			2
0	0	0	1	1	1			3
0	0	1	1	1	1	1	1	6
0	1	1	1	1	1	1	1	7
0	1	2	3	4	5			

Tulis $X = \{0,1\}$.

Percobaan: isi tiap persegi satuan dengan bilangan di X.

Tulis B_i: jumlah bilangan-bilangan di kolom ke-i,

K_j: jumlah bilangan-bilangan di kolom ke-j, dan

H: himpunan bilangan-bilangan beda di antara B_i dan K_j.

Jelas pada 6 kolom pertama maksimal ada 6 K_j beda, yaitu: 0, 1, 2, 3, 4, dan 5.

Jadi, $B_4 = 6$ dan $B_5 = 7$.

Jadi, $n_{max}(H) = 8$, yaitu:

$H = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$

22. Bilangan asli $k > 2$ dikatakan cantik jika untuk setiap bilangan asli $n \geq 4$ dengan $5n + 1$ bilangan kuadrat sempurna, dapat ditemukan bilangan asli $a_1, a_2, a_3, \dots, a_k$ sehingga

$$n + 1 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2$$

Tentukan bilangan cantik terkecil.

Definisi: $k \in \mathbb{N}, k > 2$ cantik

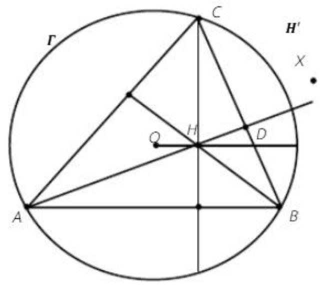
$\Leftrightarrow \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geq 4, 5\,n + 1 = m^2$,

$\exists a_1, a_2, a_3, \dots, a_k \in \mathbb{N}$ sehingga

$n + 1 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2$.

Tulis $X = \{x \in \mathbb{N} | x \text{ cantik}\}$.

23. Diberikan segitiga ABC yang ketiga garis tingginya berpotongan di titik H. Tentukan semua titik X pada sisi BC sehingga pencerminan H terhadap titik X terletak pada lingkaran luar segitiga ABC.



Diketahui

H: titik tinggi ΔABC,

O: titik pusat Γ (lingkaran luar ΔABC), dan
R: ukuran jari-jari Γ.
Ambil sembarang $X \in BC$.
Tulis $H \xrightarrow{X} H'$ sehingga $H' \in \Gamma$.

24. Diketahui $a, b, c \in \mathbb{R}$ dan $|a|, |b|, |c| \leq 1$.
Buktikan: $\sqrt{|a-b|} + \sqrt{|b-c|} + \sqrt{|c-a|} = 2 + \sqrt{2}$
Tulis $X = \sqrt{|a-b|} + \sqrt{|b-c|} + \sqrt{|c-a|}$
Bukti:
Ambil sembarang $a, b, c \in \mathbb{R}$.
Jelas $|a-b| < |a| + |b|, |b-c| < |c| + |b|$ dan $|a-c| < |a| + |c|$
$\Leftrightarrow |a-b| \leq 2, |b-c| \leq 2$ dan $|a-c| \leq 2$
$\Leftrightarrow \sqrt{|a-b|} \leq \sqrt{2}, \sqrt{|b-c|} \leq \sqrt{2}$, dan $\sqrt{|a-c|} \leq \sqrt{2}$
$\Leftrightarrow \sqrt{|a-b|} + \sqrt{|b-c|} + \sqrt{|a-c|} \leq 2\sqrt{2} + \sqrt{2}$
$\Leftrightarrow \sqrt{|a-b|} + \sqrt{|b-c|} + \sqrt{|a-c|} \leq 2 + \sqrt{2}$.

25. Pada suatu papan catur berukuran $2017 \times n$, Ani dan Banu melakukan permainan. Pemain pertama memilih suatu persegi dan kemudian mewarnainya dengan warna merah. Pemain berikutnya memilih suatu persegi dari daerah yang belum diberi warna merah dan kemudian mewarnainya dengan warna merah. Persegi yang dipilih boleh sebarang ukuran namun harus tepat menutup sejumlah persegi satuan pada papan catur. Kemudian kedua pemain bergantian melakukan hal tersebut. Seorang pemain dikatakan menang, jika pemain berikutnya tidak bisa lagi melanjutkan permainan. Jika Ani mendapat giliran pertama, tentukan semua nilai $n \geq 2017$ sehingga Ani mempunyai strategi untuk memenangkan permainan.