PEMBAHASAN

OSK MATEMATIKA SMA

TAHUN 2018

1. Perhatikan penjabaran bentuk aljabar tersebut.

$$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)=0$$
$$\Leftrightarrow x^2-(a+b)x+ab+x^2-(b+c)x+bc=0$$
$$\Leftrightarrow 2x^2-(a+2b+c)x+(ab+bc)=0$$

Sehingga, jika akar-akar dari persamaan kuadrat $x^2-(a+2b+c)x+(ab+bc)=0$ adalah x_1 dan x_2, maka dengan rumus jumlah akar-akar persamaan kuadrat diperoleh:

$$x_1+x_2=\frac{a+2b+c}{2}$$

Perhatikan juga bahwa a, b, dan c adalah tiga bilangan satu digit berbeda, sehingga a + 2b + c akan maksimum apabila b adalah bilangan terbesar dan a, c masing-masing dipilih bilangan satu digit berurutan yang lebih kecil dari b.

Sehingga apabila b = 9 dan masing-masing a atau c adalah 8 atau 7, diperoleh jumlah terbesar akar-akar persamaan kuadrat tersebut adalah

$$x_1+x_2=\frac{a+2b+c}{2}=\frac{33}{2}$$

2. Perhatikan tabel 2×2 berikut!

a	b
c	d

Dengan memperhatikan bahwa hasil penjumlahan setiap baris dan kolom adalah genap, maka diperoleh kedua bilangan pada setiap baris atau kolom memiliki paritas yang sama.

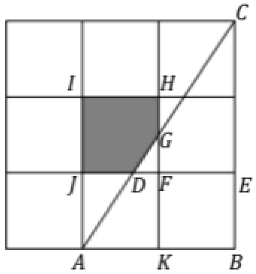
Perhatikan juga bahwa a, b, c, atau d hanya dapat diisi dengan bilangan 1, 2, atau 3.

Banyak tabel yang memenuhi dapat ditentukan dengan membagi kasus:

- untuk a, b, c, d bilangan ganjil
  maka ada tiga kemungkinan
  - keempat bilangan a, b, c, d adalah bilangan yang sama, sebanyak = ${}_2C_1=2$ cara.
  - diantara bilangan a, b, c, d ada tiga bilangan yang sama, sebanyak $\frac{4!}{3!}\times {}_2C_1=8$ cara.
  - diantara bilangan a, b, c, d ada dua bilangan yang sama, sebanyak $\frac{4!}{2!2!}=6$ cara.
- untuk a, b, c, d bilangan genap
  maka hanya ada satu kemungkinan yaitu keempat bilangan a, b, c, d adalah bilangan 2. Sehingga ada sebanyak 1 cara.

Jadi, total banyak tabel yang memenuhi adalah sebanyak 2 + 8 + 6 + 1 = 17 cara.

3. Perhatikan gambar berikut!



Perhatikan karena AB ∥ DE, maka ΔCAB ~ ΔCDE sehingga diperoleh perbandingan

$$\frac{CE}{CB} = \frac{DE}{AB} \Rightarrow DE = \frac{CE}{CB} \times AB = \frac{2}{3} \times 2 = \frac{4}{3}$$

Sehingga, karena DE = DF + FE, dan FE = 1, maka diperoleh

$$DF = DE - FE = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

Perhatikan, karena ΔDFG ~ ΔABC sehingga diperoleh perbandingan

$$\frac{FG}{BC} = \frac{DF}{AB} \Rightarrow FG = \frac{DF}{AB} \times BC = \frac{\frac{1}{3}}{2} \times 3 = \frac{1}{2}$$

Sehingga, $[DGHIJ] = [FHIJ] - [DFG] = 1 - \frac{1}{2} = \frac{11}{12}$.

4. Perhatikan, titik potong parabola $y = ax^2 - 4$ pada sumbu Y adalah di titik $(0, -4)$. Sedangkan, titik potong parabola $y = 8 - bx^2$ pada sumbu Y adalah di titik $(0, 8)$.
   Titik potong parabola $y = ax^2 - 4$ dan $y = 8 - bx^2$ pada sumbu X seharusnya adalah pada titik yang sama, agar dapat diperoleh dua titik lagi sebagai titik-titik sudut layang-layang yang lain.
   Sehingga, titik potong di sumbu X dapat ditentukan dengan

$$y_1 = y_2$$
$$\Leftrightarrow ax^2 - 4 = 8 - bx^2$$
$$\Leftrightarrow (a + b)x^2 - 12 = 0$$
$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{12}{a+b}}$$

   Jadi, titik potong kedua parabola pada sumbu X adalah di titik $\left(\sqrt{\frac{12}{a+b}}, 0\right)$ dan $\left(-\sqrt{\frac{12}{a+b}}, 0\right)$.

   Padahal luas layang-layang adalah 24, sehingga

$$L = \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$$
$$\Leftrightarrow 24 = \frac{1}{2} \times |8 - (-4)| \times \left|\sqrt{\frac{12}{a+b}} - \left(-\sqrt{\frac{12}{a+b}}\right)\right|$$
$$\Leftrightarrow 24 = \frac{1}{2} \times 12 \times \sqrt{\frac{12}{a+b}}$$
$$\Leftrightarrow 2 = \sqrt{\frac{12}{a+b}}$$

$$\Leftrightarrow 4 = \frac{12}{a+b}$$
$$\Leftrightarrow a + b = 3$$

5. Perhatikan, bilangan asli n dapat dinyatakan sebagai $nn = a_1 \cdot 10^0 + a_2 \cdot 10^1 + a_3 \cdot 10^2 + \cdots$, maka jika s(n) didefinisikan sebagai hasil penjumlahan dari semua digit-digit dari n, maka diperoleh
$$s(n) = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$$
Misalkan, $p = n - s(n)$, maka
$$\begin{aligned} p &= n - s(n) \\ &= (a_1 \cdot 10^0 + a_2 \cdot 10^1 + a_3 \cdot 10^2 + \cdots) - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots) \\ &= a_1 (10^0 - 1) + a_2 (10^1 - 1) + a_3 (10^2 - 1) + \cdots \\ &= 9a_1 + 99a_2 + 999a_3 + \cdots \\ &= 9(a_1 + 11a_2 + 111a_3 + \cdots) \end{aligned}$$
Sehingga, $9|n - s(n)$. Jadi bilangan asli d adalah faktor bulat positif dari 9, yaitu 1, 3, dan 9. Jadi, ada sebanyak 3 buah bilangan d yang memenuhi.

6. Perhatikan,
$$x^3 + y^3 + 2018 = 30y^2 - 300y + 3018$$
$$\Leftrightarrow x^3 + y^3 - 30y^2 + 300y - 1000 = 0$$
$$\Leftrightarrow x^3 + (y - 10)^3 = 0$$
Sehingga. diperoleh
$$x = -(y - 10)$$
$$\Leftrightarrow x + y = 10$$
Karena, x, y adalah bilangan prima, maka dua buah bilangan prima yang jumlahnya 10 adalah 3 dan 7. Mengingat x < y, sehingga dapat diperoleh x = 3 dan y = 7.
Jadi, x yang memenuhi adalah 3.

7. Perhatikan, misal kedua bilangan tersebut adalah x dan y, karena x adalah bilangan kelipatan 3 dan y adalah bilangan kelipatan 7, maka untuk m dan n adalah suatu bilangan asli, x dan y dapat dinyatakan sebagai
$$x = 7m$$
$$y = 3n$$
Karena selisih kedua bilangan adalah 10, dan x > y, maka x − y = 10. Ini sama saja dengan persamaan 7m − 3n = 10.
Nilai m dan n dapat ditentukan menggunakan pembalikan algoritma Euclid, yaitu
$$7 = 2 \times 3 + 1$$
Sehingga,
$$1 = 7 - 2 \times 3$$
Dengan mengalikan 10 kedua ruas diperoleh
$$10 = 70 - 60$$
Sehingga, diperoleh m = 10 dan n = 20.
Sehingga, solusi umumnya adalah

$$m = 10 - 3t \Rightarrow x = 70 - 21t$$
$$n = 20 - 7t \Rightarrow y = 60 - 21t$$

Diperoleh pasangan bilangan dua digit x, y yang memenuhi adalah

$$(x, y) = \{(28, 18), (49, 39), (70, 60), (91, 81)\}$$

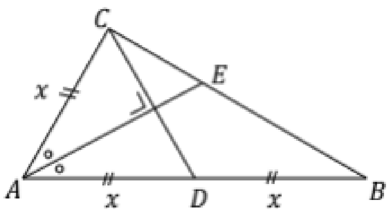
Perhatikan bahwa jumlah semua faktor prima adalah 17, maka $17 = 3 + p + q + 7$.
Maka $p + q = 7$, sehingga bilangan prima p, q yang memenuhi hanyalah 2 dan 5.
Sehingga, jelas diantara pasangan x, y yang memiliki faktor prima 5 hanyalah $x = 70$ dan $y = 60$.
Jadi, jumlah kedua bilangan tersebut adalah $x + y = 70 + 60 = 130$.

8. Perhatikan, dengan menggunakan konsep distribusi binomial, misal p = peluang kejadian muncul angka, maka $p = \frac{1}{4}$ dan $1 - p = \frac{3}{4}$.
   Apabila satu koin ditos n kali, maka peluang muncul tepat dua angka sama dengan peluang muncul tepat tiga angka dapat dinyatakan sebagai

$$P(X = 2) = P(X = 3)$$
$$\Leftrightarrow {}_nC_2 \cdot p^2 \cdot (1 - p)^{(n-2)} = {}_nC_3 \cdot p^3 \cdot (1 - p)^{(n-3)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!\,2!} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{(n-2)} = \frac{n!}{(n-3)!\,3!} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{(n-3)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)!}{(n-2)!\cdot 2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)!}{(n-3)!\cdot 3!} \cdot \frac{1}{4}$$
$$\Leftrightarrow \frac{3}{2} = \frac{n-2}{6}$$
$$\Leftrightarrow 18 = 2n - 4$$
$$\Leftrightarrow 22 = 2n$$
$$\Leftrightarrow n = 11$$

   Jadi, nilai n yang memenuhi adalah 11.

9. Perhatikan gambar segitiga berikut



   CD merupakan garis berat dan AE merupakan garis bagi, keduanya berpotongan saling tegak lurus.
   Perhatikan segitiga ADC sama kaki, sehingga AD = AC. Misal AD = AC = DB = x.
   Perhatikan juga, karena sisi-sisi segitiga merupakan bilangan asli yang berurutan, maka selisih dari dua sisi segitiga adalah 1 atau 2.
   Kasus pertama, selisih dua sisi segitiga adalah 1, sehingga $2x - x = 1 \Rightarrow x = 1$
   Karena $x = 1$, maka $b = 1$, $c = 2$, sehingga

   - $a = 0$, tidak memenuhi karena sisi segitiga tidak mungkin nol
   - $a = 3$, tidak mungkin karena tidak memenuhi ketaksamaan $b + c > a$

Kasus kedua, selisih dua sisi segitiga adalah 2, sehingga $2x - x = 2 \Rightarrow x = 2$
Karena $x = 2$, maka $b = 2$, $c = 4$, sehingga

- $a = 3$, memenuhi.

Sehingga, sisi segitiga adalah $a = 3$, $b = 2$, $c = 4$.
Jadi keliling segitiga adalah $a + b + c = 3 + 2 + 4 = 9$.

10. Perhatikan, anggap $p(x) = ax^n + q(x)$, $a \neq 0$, $q(x)$ suku banyak derajat k dengan $0 \leq k < n$, maka

$$p(x)^2 + p(x^2) = 2x^2$$
$$\Leftrightarrow (ax^n + q(x))^2 + (a(x^2)^n + q(x^2)) = 2x^2$$
$$\Leftrightarrow a^2x^{2n} + 2ax^nq(x) + q(x)^2 + ax^{2n} + q(x^2) = 2x^2$$
$$\Leftrightarrow (a^2 + a)x^{2n} + 2ax^nq(x) + q(x)^2 + q(x^2) = 2x^2$$

Sehingga, dengan memperhatikan kesamaan di atas, maka kemungkinan yang terjadi adalah

- $(a^2 + a)x^{2n} = 2x^2$, maka $n = 1$ dengan $a^2 + a = 2$.
- $(a^2 + a)x^{2n} + 2ax^nq(x) = 2x^2$ apabila $a^2 + a = 0$ maka $n + k = 2$.
  Perhatikan, $n + k = 2 \Rightarrow k = 2 - n$, maka
  $$0 \leq k < n \Rightarrow 0 \leq 2 - n < n$$
  $$\Leftrightarrow n \leq 2 < 2n$$
  $$\Leftrightarrow 1 < n \leq 2$$

Jelas bahwa $n = 2$.
Jadi, suku banyak $p(x)^2 + p(x^2) = 2x^2$, agar kesamaan berlaku maka

- $p(x)$ adalah suku banyak berderajat satu.
- $p(x)$ adalah suku banyak derajat dua.

Kasus pertama, $p(x)$ adalah suku banyak berderajat satu.
Misal, $p(x) = ax + b$, $a \neq 0$, maka

$$p(x)^2 + p(x^2) = 2x^2$$
$$\Leftrightarrow (ax + b)^2 + (ax^2 + b) = 2x^2$$
$$\Leftrightarrow a^2x^2 + 2abx + b^2 + ax^2 + b = 2x^2$$
$$\Leftrightarrow (a^2 + a)x^2 + 2abx + (b^2 + b) = 2x^2$$

Sehingga, dari kesamaan suku banyak diperoleh

$$2ab = 0 \Rightarrow a = 0\ (TM) \text{ atau } b = 0$$

$$a^2 + a = 2 \Rightarrow a^2 + a - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (a + 2)(a - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow a = -2 \text{ atau } a = 1$$

Dari kasus ini $p(x)$ yang memenuhi hanya jika $b = 0$, sehingga

- Apabila $a = -2$, jadi $p(x)$ yang memenuhi adalah $p(x) = -2x$, sehingga karena $p(1) = -2 \neq 1$, maka $p(10) = -2(10) = -20$.

- Apabila $a = 1$, jadi $p(x)$ yang memenuhi adalah $p(x) = x$, sehingga karena $p(1) = 1$, dan mengingat $p(1) \neq 1$, maka $p(x) = x$ tidak memenuhi. Sehingga tidak ada nilai $p(10)$ yang memenuhi.

Kasus kedua, $p(x)$ adalah suku banyak berderajat dua.
Misal, $p(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ maka

$$\begin{aligned} p(x)^2 + p(x^2) &= 2x^2 \\ \Leftrightarrow \quad (ax^2 + bx + c)^2 + (ax^4 + bx^2 + c) &= 2x^2 \\ \Leftrightarrow a^2x^4 + ax^4 + 2abx^3 + b^2x^2 + 2acx^2 + bx^2 + 2bc\,x + c^2 + c &= 2x^2 \\ \Leftrightarrow \quad (a^2 + a)x^4 + 2abx^3 + (b^2 + 2ac + b)x^2 + 2bcx + (c^2 + c) &= 2x^2 \end{aligned}$$

Sehingga, dari kesamaan suku banyak diperoleh

$$\begin{aligned} a^2 + a = 0 \Rightarrow \quad & a(a+1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & a = 0\ (TM) \text{ atau } a = -1 \end{aligned}$$

$$2ab = 0 \Rightarrow a = 0\ (TM) \text{ atau } b = 0$$

$$\begin{aligned} b^2 + 2ac + b = 2 \Rightarrow\ & 2ac = 2 \\ \Leftrightarrow\ & -2c = 2 \\ \Leftrightarrow\ & c = -1 \end{aligned}$$

Dari kasus ini $p(x)$ yang memenuhi adalah $p(x) = -x^2 - 1$, sehingga $p(10) = -(10)^2 - 1 = -101$.
Jadi jumlah semua nilai $p(10)$ yang mungkin adalah $-20 - 101 = -121$.

11. Perhatikan, kita akan mencoba menguraikan kombinasi linear dari bilangan 143 terhadap bilangan 9 dan 13, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} 9p + 13q = 143 \quad &\Rightarrow 9p = 143 - 13q \\ &\Leftrightarrow 9 \cdot p = 13 \cdot (11 - q) \end{aligned}$$

Sehingga, terdapat dua penyelesaian bulat untuk $9p + 13q = 143$, dengan p, q bilangan cacah.

- $p = 13$, sehingga $11 - q = 9 \Rightarrow q = 2$, sehingga $(p_1, q_1) = (13, 2)$
- $p = 0$, sehingga $11 - q = 0 \Rightarrow q = 11$, sehingga $(p_2, q_2) = (0, 11)$

Padahal, untuk $x_{n+13} = x_{n+4} + 2x_n$, rumus umumnya untuk $n = 9p + 13q$ adalah

$$x_n = \sum_{i=1}^{k} 2^{q_i} \cdot \binom{p_i + q_i - 1}{p_i}$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} x_n &= 2^2 \cdot \binom{14}{13} + 2^{11} \cdot \binom{10}{0} \\ &= 4 \cdot 14 + 2048 \cdot 1 \\ &= 56 + 2048 \\ &= 2104 \end{aligned}$$

12. Perhatikan, misal $0 \leq \delta < 1$, maka untuk setiap z bilangan real berlaku:

$$z = \lfloor z \rfloor + \delta_z$$

Dari persamaan $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + y = 43{,}8$, diperoleh

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + y = 43{,}8 \Rightarrow \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + \lfloor y \rfloor + \delta_y = 43{,}8$$

$$\Leftrightarrow \quad \lfloor x \rfloor + 2\lfloor y \rfloor + \delta_y = 43{,}8$$

Sehingga diperoleh, $\lfloor x \rfloor + 2\lfloor y \rfloor = 43$ dan $\delta_y = 0{,}8$.

Dan dari persamaan $x + y - \lfloor x \rfloor = 18{,}4$ diperoleh

$$\begin{aligned} x + y - \lfloor x \rfloor = 18{,}4 &\Rightarrow \lfloor x \rfloor + \delta x + \lfloor y \rfloor + \delta_y - \lfloor x \rfloor = 18{,}4 \\ &\Leftrightarrow \lfloor y \rfloor + \delta_x + \delta_y = 18{,}4 \\ &\Leftrightarrow \lfloor y \rfloor + \delta_x + 0{,}8 = 18{,}4 \\ &\Leftrightarrow \lfloor y \rfloor + \delta_x = 17{,}6 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh $\lfloor y \rfloor = 17$, dan $\delta_x = 0{,}6$.

Perhatikan kembali bahwa $\lfloor x \rfloor + 2\lfloor y \rfloor = 43$, sehingga diperoleh

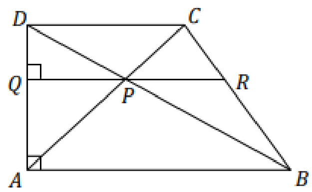
$$\begin{aligned} \lfloor x \rfloor + 2\lfloor y \rfloor = 43 &\Rightarrow \lfloor x \rfloor + 2(17) = 43 \\ &\Leftrightarrow \lfloor x \rfloor + 34 = 43 \\ &\Leftrightarrow \lfloor x \rfloor = 9 \end{aligned}$$

Jadi, diperoleh nilai x dan y adalah

$$x = \lfloor x \rfloor + \delta_x = 9 + 0{,}6 = 9{,}6$$
$$y = \lfloor y \rfloor + \delta_y = 17 + 0{,}8 = 17{,}8$$

Jadi, nilai $10(x + y) = 10(9{,}6 + 17{,}8) = 10(27{,}4) = 274$.

13. Perhatikan trapesium $ABCD$ berikut.



P adalah titik potong diagonal AC dan BD. Misal,

$$\frac{AB}{DC} = m \Rightarrow AB = m \cdot DC$$

Sehingga, dari perbandingan luas segitiga APD dan trapesium $ABCD$ diperoleh

$$\frac{[APD]}{[ABCD]} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AD \cdot PQ}{\frac{1}{2} \cdot AD \cdot (AB + DC)}$$
$$\frac{4}{25} = \frac{PQ}{AB + DC}$$
$$\frac{4}{25} = \frac{PQ}{(1 + m)DC}$$

Padahal, dari kesebangunan segitiga ABD dan segitiga CAB, diperoleh $PQ = PR$. Sedangkan, dari kesebangunan APQ dan ACD serta BPR dan BDC diperoleh.

$$\frac{AQ}{DQ} = \frac{PQ}{DC - PQ} = \frac{AB - PR}{PR}$$

Maka,

$$\begin{aligned} PQ^2 = (DC - PQ)(AB - PQ) &\Rightarrow PQ^2 = (DC - PQ)(m \cdot DC - PQ) \\ &\Leftrightarrow PQ^2 = m \cdot DC^2 - (1 + m) \cdot DC \cdot PQ + PQ^2 \\ &\Leftrightarrow (1 + m) \cdot DC \cdot PQ = m \cdot DC^2 \\ &\Leftrightarrow \frac{PQ}{DC} = \frac{m}{(1 + m)} \end{aligned}$$

Sehingga,

$$\frac{4}{25}=\frac{PQ}{(1+m)DC}\Rightarrow \qquad \frac{4}{25}=\frac{m}{(1+m)^2}$$
$$\Leftrightarrow \quad 4(1+m)^2=25m$$
$$\Leftrightarrow \quad 4+8m+4m^2=25m$$
$$\Leftrightarrow \quad 4m^2-17m+4=0$$
$$\Leftrightarrow (4m-1)(m-4)=0$$
$$\Leftrightarrow \quad m=\frac{1}{4} \text{ atau } m=4$$

Jadi, perbandingan $\frac{AB}{DC}=\frac{1}{4}$ atau $\frac{AB}{DC}=4$.

14. Pertama, kita akan memeriksa banyak bilangan dengan memeriksa digit pada tempat terbesar, yaitu tempat jutaan.
    - Bilangan 1XXXXXX menyumbang sebanyak 6! = 720 bilangan. Jadi bilangan ke-1 sampai dengan bilangan ke-720 adalah berformat 1XXXXXX.
    - Bilangan 2XXXXXX menyumbang sebanyak 6! = 720 bilangan. Jadi bilangan ke-721 sampai dengan bilangan ke-1440 adalah berformat 2XXXXXX.
    - Bilangan 3XXXXXX menyumbang sebanyak 6! = 720 bilangan. Jadi bilangan ke-1441 sampai dengan bilangan ke-2160 adalah berformat 3XXXXXX. Sehingga bilangan ke-2018 berada pada format 3XXXXXX.

    Selanjutnya akan diperiksa digit pada tempat ratusan ribu.
    - Bilangan 31XXXXX menyumbang sebanyak 5! = 120 bilangan. Jadi bilangan ke-1441 sampai dengan bilangan ke-1560 adalah berformat 31XXXXX.
    - Bilangan 32XXXXX menyumbang sebanyak 5! = 120 bilangan. Jadi bilangan ke-1561 sampai dengan bilangan ke-1680 adalah berformat 32XXXXX.
    - Bilangan 34XXXXX menyumbang sebanyak 5! = 120 bilangan. Jadi bilangan ke-1681 sampai dengan bilangan ke-1800 adalah berformat 34XXXXX.
    - Bilangan 35XXXXX menyumbang sebanyak 5! = 120 bilangan. Jadi bilangan ke-1801 sampai dengan bilangan ke-1920 adalah berformat 35XXXXX.
    - Bilangan 36XXXXX menyumbang sebanyak 5! = 120 bilangan. Jadi bilangan ke-1921 sampai dengan bilangan ke-2040 adalah berformat 36XXXXX. Sehingga bilangan ke-2018 berada pada format 36XXXXX.

    Selanjutnya akan diperiksa digit pada tempat puluhan ribu.
    - Bilangan 361XXXX menyumbang sebanyak 4! = 24 bilangan. Jadi bilangan ke-1921 sampai dengan bilangan ke-1944 adalah berformat 361XXXX.
    - Bilangan 362XXXX menyumbang sebanyak 4! = 24 bilangan. Jadi bilangan ke-1945 sampai dengan bilangan ke-1968 adalah berformat 362XXXX.
    - Bilangan 364XXXX menyumbang sebanyak 4! = 24 bilangan. Jadi bilangan ke-1969 sampai dengan bilangan ke-1992 adalah berformat 364XXXX.
    - Bilangan 365XXXX menyumbang sebanyak 4! = 24 bilangan. Jadi bilangan ke-1993 sampai dengan bilangan ke-2016 adalah berformat 365XXXX.

- Bilangan 367XXXX menyumbang sebanyak 4! = 24 bilangan. Jadi bilangan ke-2017 sampai dengan bilangan ke-2040 adalah berformat 367XXXX. Sehingga bilangan ke-2018 berada pada format 367XXXX.

Selanjutnya akan diperiksa secara manual digit pada tempat ribuan.

- Bilangan 3671245 adalah bilangan ke-2017.
- Bilangan 3671254 adalah bilangan ke-2018.

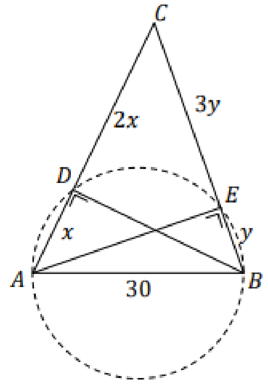
Jadi, bilangan ke-2018 adalah 3671254.

15. Perhatikan, dari $Bezout's\ Theorem$, yaitu "Jika a dan b dua bilangan bulat yang keduanya taknol maka terdapat bilangan bulat x dan y sehingga $FPB(a.\ b) = ax + by$".
Sehingga banyaknya anggota S yang dapat dinyatakan adalah banyaknya $0 \leq xb + ya \leq ab$; $xb + ya \in \mathbb{Z}$ yang memiliki solusi $x, y \in \mathbb{Z}$.
Dengan membagi kasus, yaitu

Kasus 1.
Apabila a dan b adalah relative prima, maka dari $Bezout's\ Theorem$, semua $k \in \mathbb{Z}$ dapat dinyatakan dalam $xb + ya$ sehingga haruslah $ab + 1 = 2018$, sehingga
$$ab + 1 = 2018 \Rightarrow ab = 2017$$
Sehingga, diperoleh penyelesaian $(a, b) = \{(1,2017), (2017,1)\}$.

Kasus 2.
Apabila $FPB(a, b) = d > 1$, maka $a, b > 1$. Sehingga dari $Bezout's\ Theorem$, semua (dan hanya) dk, $k \in \mathbb{Z}$ dapat dinyatakan dalam $xb + ya$. Semua dk ada sebanyak $\left\lfloor \frac{ab}{d} \right\rfloor + 1 = a\left(\frac{b}{d}\right) + 1$, sehingga
$$a\left(\frac{b}{d}\right) + 1 = 2018 \Rightarrow a\left(\frac{b}{d}\right) = 2017 \Rightarrow a = 2017$$
Sehingga diperoleh penyelesaian $(a, b) = \{(2017,2017)\}$
Jadi, banyaknya pasangan bilangan asli (a, b) yang memenuhi adalah 3 buah.

16. Perhatikan, gambar segitiga ABC dan lingkaran Γ.



Misal,

$AD = x$, karena $AD = \frac{1}{3}AC$ maka $AC = 3AD$, sehingga $AC = 3x$, akibatnya $CD = 2x$.
$BE = y$, karena $BE = \frac{1}{4}BC$ maka $BC = 4BE$, sehingga $BC = 4y$, akibatnya $CE = 3y$.
Berdasarkan power of point diperoleh

$$\begin{aligned} & CD \times CA = CE \times CB \\ \Leftrightarrow\ & 2x \times 3x = 3y \times 4y \\ \Leftrightarrow\ & 6x^2 = 12y^2 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 = 2y^2 \end{aligned}$$

Luas ΔABC dapat dicari menggunakan sisi alas AC dan tinggi BD. Sehingga kita akan mencari AC dengan terlebih dahulu mencari nilai AD, lalu mencari BD dengan menggunakan aturan Pythagoras pada ΔABD.
BD dapat dicari dengan memandang aturan Pythagoras pada ΔABD dan ΔBDC, yaitu:

$$\begin{aligned} & BD^2 = BD^2 \\ \Leftrightarrow\ & AB^2 - AD^2 = BC^2 - CD^2 \\ \Leftrightarrow\ & 30^2 - x^2 = (4y)^2 - (2x)^2 \\ \Leftrightarrow\ & 900 - x^2 = 16y^2 - 4x^2 \\ \Leftrightarrow\ & 900 - x^2 = 8x^2 - 4x^2 \\ \Leftrightarrow\ & 900 = 5x^2 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 = 180 \end{aligned}$$

Sehingga, $BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{30^2 - x^2} = \sqrt{900 - 180} = \sqrt{720} = 12\sqrt{5}$.
Mengingat $AD = x = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$, maka $AC = 3AD = 3x = 18\sqrt{5}$.
Jadi, luas ΔABC adalah $L = \frac{1}{2} \times AC \times BD = \frac{1}{2} \times 18\sqrt{5} \times 12\sqrt{5} = 108 \times 5 = 540$.

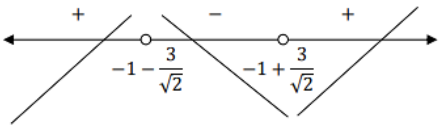
17. Perhatikan $f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x}{2y-x} + \frac{2y}{2x-y} = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)}{2-\left(\frac{x}{y}\right)} + \frac{2}{2\left(\frac{x}{y}\right)-1}$, dan misal $\frac{x}{y} = p$, maka $f(p) = \frac{p}{2-p} + \frac{2}{2p-1}$.

Sehingga, $f'(p) = \frac{2}{(2-p)^2} - \frac{4}{(2p-1)^2} = \frac{2(2p-1)^2 - 4(2-p)^2}{(2-p)^2(2p-1)^2} = \frac{4p^2+8p-14}{(2-p)^2(2p-1)^2}$

Diperoleh titik stasioner $f(p)$ adalah saat $f'(p) = 0$, yaitu

$$\begin{aligned} f'(p) = 0 \Rightarrow\ & \frac{4p^2 + 8p - 14}{(2-p)^2(2p-1)^2} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 4p^2 + 8p - 14 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & p^2 + 2p - \frac{7}{2} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & p^2 + 2p + 1 = \frac{9}{2} \\ \Leftrightarrow\ & (p+1)^2 = \frac{9}{2} \\ \Leftrightarrow\ & p + 1 = \pm\frac{3}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow\ & p = -1 \pm \frac{3}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

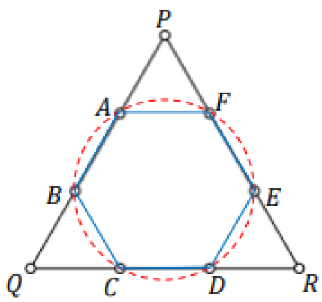
Perhatikan garis bilangan dari $f'(p)$



Sehingga, $p=-1+\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}-2}{2}$ adalah titik balik minimum dan karena $\frac{1}{2}<p<2$ maka nilai minimum dari $f(p)$ adalah $f\left(-1+\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$, yaitu

$$\begin{aligned}
f\left(-1+\frac{3}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{\left(\frac{3\sqrt{2}-2}{2}\right)}{2-\left(\frac{3\sqrt{2}-2}{2}\right)}+\frac{2}{2\left(\frac{3\sqrt{2}-2}{2}\right)-1}\\
&= \frac{3\sqrt{2}-2}{6-3\sqrt{2}}+\frac{2}{3\sqrt{2}-3}\\
&= \frac{3\sqrt{2}-2}{6-3\sqrt{2}}+\frac{2\sqrt{2}}{6-3\sqrt{2}}\\
&= \frac{5\sqrt{2}-2}{6-3\sqrt{2}}\\
&= \frac{5\sqrt{2}-2}{6-3\sqrt{2}}\times\frac{6+3\sqrt{2}}{6+3\sqrt{2}}\\
&= \frac{18+24\sqrt{2}}{18}\\
&= 1+\frac{4\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

18. Perhatikan gambar berikut!



Dari keenam titik yang bukan titik sudut segitiga dapat dibuat sebuah lingkaran yang di dalamnya terdapat segienam beraturan.
Sepasang titik sudut segienam beraturan yang saling berhadapan dapat membentuk garis yang merupakan diameter lingkaran, yaitu AD, BE, dan CF.
Sehingga, apabila sepasang titik sudut yang berhadapan memiliki warna yang sama, maka jika satu titik dipilih dari empat titik yang lain pada lingkaran berwarna sama, maka jelas tiga titik berwarna sama tersebut akan terbentuk segitiga siku-siku. Ingat kembali bahwa sudut keliling yang menghadap ke diameter lingkaran pastilah siku-siku.
Sekarang, coba perhatikan bahwa kondisi terburuk yang mungkin terjadi adalah dua pasang titik sudut segienam beraturan yang saling berhadapan memiliki warna berbeda. Misalnya, A dan D berwarna merah, sedangkan B dan E berwarna biru, maka jika satu saja titik yang lain dari C atau F diberi warna apapun, pastilah akan terbentuk segitiga siku-siku dengan titik-titik sudutnya sewarna.

Kondisi terburuk lain yang mungkin terjadi adalah A, B, C dan D, E, F berlainan warna, maka jika satu saja titik sudut segitiga Q, R diberi warna apapun, pastilah akan terbentuk segitiga siku-siku dengan titik-titik sudutnya sewarna.
Sehingga peluang bahwa dari kesembilan titik tersebut, terdapat tiga titik yang warnanya sama dan membentuk segitiga siku-siku adalah 1.

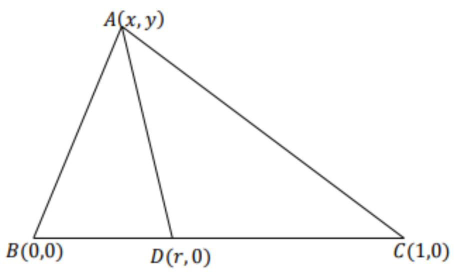
19. Perhatikan, teorema tentang bilangan prima yaitu "Setiap bilangan prima p dan $p > 3$, maka p dapat dinyatakan sebagai $p = 6n \pm 1$, dengan n adalah bilangan asli".
Untuk $a > 3$, $b > 3$, berarti $b = 6n \pm 1$, $n \geq 1$, maka $a^4 + b^4 + 13 \equiv 1 + 1 + 13 \equiv 15 \equiv 0(\text{mod } 3)$
Untuk $a = 2$, $b \leq 3$, maka $a^4 + b^4 + 13 \equiv 1 + 1 + 13 \equiv 15 \equiv 0(\text{mod } 5)$
Jadi untuk $a = 2$, $b \leq 3$, maka $a^4 + b^4 + 13$ adalah bukan bilangan prima.
Begitu pula untuk $b = 2$, $a \leq 3$, maka $a^4 + b^4 + 13$ adalah bukan bilangan prima.
Untuk $a = b = 3$, maka maka $a^4 + b^4 + 13 \equiv 1 + 1 + 13 \equiv 15 \equiv 0(\text{mod } 5)$
Jadi untuk $a = b = 3$, maka $a^4 + b^4 + 13$ adalah bukan bilangan prima.
Untuk $a = 2$, $b > 3$, berarti $b = 6n \pm 1$, $n \geq 1$, maka $a^4 + b^4 + 13 \equiv 0 + 1 + 13 \equiv 14 \equiv 0(\text{mod } 2)$
Jadi untuk $a = 2$, $b > 3$, maka $a^4 + b^4 + 13$ adalah bukan bilangan prima.
Begitu pula untuk $b = 2$, $a > 3$, maka $a^4 + b^4 + 13$ adalah bukan bilangan prima.
Untuk $a = 3$, $b > 3$, berarti $b = 6n \pm 1$, $n \geq 1$,

- Untuk $b = 6n + 1$, maka misal n berbentuk $5k + a$, dengan $k \geq 0$. Disini, $a \neq 4$ sebab jika $a = 4$, maka b tak prima.
  Maka, $a^4 + b^4 + 13 \quad \equiv (81 + 6(5k + a) + 1)^4 + 13) \text{ (mod } 5)$
  $\equiv ((a + 1)^4 + 4) \text{ (mod } 5)$
  $\equiv 0 \text{ (mod } 5)$, untuk $a \neq 4$
- Untuk $b = 6n - 1$, maka misal n berbentuk $5k + a$, dengan $k \geq 0$. Disini, $a \neq 1$ sebab jika $a = 1$, maka b tak prima, kecuali untuk $n = 1$.
  Maka, $a^4 + b^4 + 13 \quad \equiv (81 + 6(5k + a) - 1)^4 + 13) \text{ (mod } 5)$
  $\equiv ((a + 1)\ 4 - 1) \text{ (mod } 5)$
  $\equiv 0 \text{ (mod } 5)$, untuk $a \neq 1$

  Maka, solusi satu-satunya adalah jika $n = 1$, sehingga $a^4 + b^4 + 13$ adalah bilangan prima terbesar untuk $a = 3$, $b = 5$.

Jadi, $a^4 + b^4 + 13 = 3^4 + 5^4 + 13 = 81 + 625 + 13 = 719$.

20.



Perhatikan,

$|AC| = p = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(x^2+y^2) - 2x + 1}$

$|AB| = q = \sqrt{x^2 + y^2}$

$|BC| = 1$

$|DB| = r$

$|DC| = 1 - r$

$|DA| = \sqrt{(x-r)^2 + y^2}$.

Sehingga, keliling ΔABC adalah

$$\begin{aligned} k &= |BC| + |AC| + |AB| \\ &= 1 + p + q \end{aligned}$$

Perhatikan juga bahwa pada ΔABC berlaku

$$\begin{aligned} & |DA|^2 = |DB| \cdot |DC| \\ \Leftrightarrow\ & (x-r)^2 + y^2 = r(1-r) \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - 2xr + r^2 + y^2 = r - r^2 \\ \Leftrightarrow\ & 2r^2 - (2x+1)r + (x^2+y^2) = 0 \end{aligned}$$

Ingat, bahwa agar tepat diperoleh satu titik $D(r, 0)$ maka penyelesaian r real kembar ($D = 0$)

$$\begin{aligned} D = 0 \Rightarrow\ & b^2 - 4ac = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \left(-(2x+1)\right)^2 - 4(2)(x^2+y^2) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (2x+1)^2 - 8(x^2+y^2) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{(2x+1)^2}{8} = (x^2+y^2) \end{aligned}$$

Padahal, $0 < r < 1$, sehingga

$$\begin{aligned} 0 < r < 1 \Rightarrow\ & 0 < \frac{2x+1}{4} < 1 \\ \Leftrightarrow\ & 0 < 2x + 1 < 4 \\ \Leftrightarrow\ & -1 < 2x < 3 \\ \Leftrightarrow\ & -\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Jadi, keliling ΔABC adalah

$$\begin{aligned} k &= 1 + p + q \\ &= 1 + \sqrt{(x^2+y^2) - 2x + 1} + \sqrt{(x^2+y^2)} \\ &= 1 + \sqrt{\frac{(2x+1)^2}{8} - 2x + 1} + \sqrt{\frac{(2x+1)^2}{8}} \\ &= 1 + \sqrt{\frac{(2x-3)^2}{8}} + \sqrt{\frac{(2x+1)^2}{8}} \\ &= 1 + \left(-\frac{(2x-3)}{2\sqrt{2}}\right) + \frac{2x+1}{2\sqrt{2}} \\ &= 1 + \sqrt{2} \end{aligned}$$