PEMBAHASAN

OSP MATEMATIKA SMA

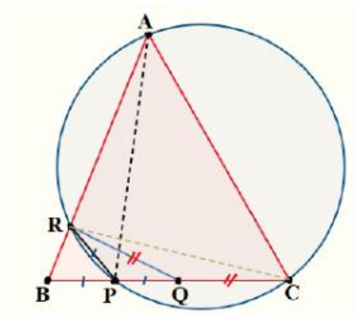
TAHUN 2025

ISIAN SINGKAT.

1. **Penyelesaian:**
Misalkan (a, b) menyatakan muncul mata dadu pertama dan kedua berturut-turut.
Misal: $S = \{3, 5, 8, 13, 21, 34\} \to a, b \in S$
Pasangan (a, b) dengan $a + b \in S$ yaitu:
$$(a, b) = \{(3,5), (5,3), (5,8), (8,5), (8,13), (13,8), (13,21), (21,13)\}$$
Jadi, ada 8 kemungkinan.

2. **Penyelesaian:**
Rumus suku ke-n dari barisan geometri adalah $u_n = ar^{n-1}$, maka
$$u_1 + \frac{u_2}{u_1} = a + r = 149 \Leftrightarrow a = 149 - r \text{ dan}$$
$$\underbrace{ar + ar^3 + ar^5 + ar^7 + \cdots}_{\substack{\text{deret geometri tak hingga,} \\ \text{suku pertama } ar, \ \text{rasio } r^2}} = 31 \Leftrightarrow \frac{ar}{1 - r^2} = 31 \Leftrightarrow \frac{(149 - r)r}{1 - r^2} = 31$$
$$\Leftrightarrow 30r^2 + 149r - 31 = 0$$
Selanjutnya difaktorkan menjadi $(5r - 1)(6r + 31) = 0$. Agar hasilnya konvergen maka $|r| \le 1$, sehingga diperoleh $r = \frac{1}{5}$ dan $a = \frac{744}{5}$. Jadi,
$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots = \frac{a}{1 - r} = \frac{\frac{744}{5}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{744}{4} = 186$$
Jadi, hasilnya adalah 186.

3. **Penyelesaian:**
Perhatikan gambar berikut.



Karena $PB = PQ = PR$ maka ada lingkaran yang melalui titik B, Q, R dan berpusat di P seperti pada gambar. Karena $ARPC$ segiempat talibusur, maka $\angle ACR = \angle APR = 54^o$ (sebab menghadap busur AR).
Misal $\angle QCR = \angle QRC = x$, maka $\angle PRQ = \angle PQR = 2x$, $\angle BPR = 4x$ dan $\angle PBR = \angle PRB = 90^o - 2x$.
$\angle BAC = \angle RAC = 180^o - \angle RPC = 180^o - \angle RPQ = 4x$. Jumlah sudut pada segitiga $ABC = 180^o$, maka $90^o - 2x + 54^o + x + 4x = 180^o$, diperoleh $x = 12^o$ dan $\angle ABC = \angle PRB = 90^o - 24^o = 66^o$.
Jadi, besar $\angle ABC = 66^o$.

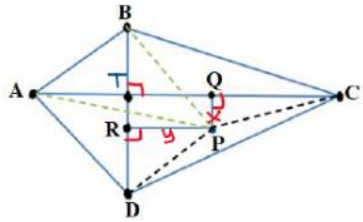
4. **Penyelesaian:**
WLOG, $a \le b \le c$, maka $2^a + 2^b + 2^c = 4^d \Leftrightarrow 1 + 2^{b-a} + 2^{c-a} = 2^{2d-c}$
Agar d maksimum maka $2d > c$, sehingga LHS harus genap, akibatnya $b - a = 0$, diperoleh
$$2 + 2^{c-a} = 2^{2d-c} \Leftrightarrow 1 + 2^{c-a-1} = 2^{2d-c-1}$$
Agar d maksimum maka $2d > c + 1$, sehingga LHS harus genap, akibatnya $c - a - 1 = 0$, diperoleh $b = a$ dan $c = a + 1$, sehingga persamaan menjadi
$$2^a + 2^a + 2^{a+1} = 2^{2d} \Leftrightarrow 2^{a+2} = 2^{2d}, \text{diperoleh } d = \frac{a+2}{2}$$
Diketahui $a + b + c + d \le 500$, maka $a + a + a + 1 + \frac{a+2}{2} \le 500$, diperoleh $a \le 142$.
Jadi, d maksimum adalah $\frac{144}{2} = 72$.

5. **Penyelesaian:**
Nilai $f(x)$, untuk $x = 1, 2, 3, 4, 5$ berpola $x^2 + 3$. Misalkan $g(x) = f(x) - (x^2 + 3)$, maka 1, 2, 3, 4, 5 akar-akar dari $g(x) = 0$. Karena f monik maka $g(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$.
$$f(6) - (6^2 + 3) = g(6) = 5! = 120 \Leftrightarrow f(6) = 120 + 39 = 159$$
Jadi, nilai dari $f(6)$ adalah 159.

6. **Penyelesaian:**
Misalkan $f(n)$ adalah banyak bilangan n digit yang memenuhi soal, g_n adalah banyaknya n digit yang memenuhi soal dan diakhiri dengan dua digit yang sama, sedangkan h_n adalah banyaknya n digit yang memenuhi soal dan diakhiri dengan dua digit yang berbeda.
Maka $g_n = f_{n-1}$ dan $h_n = g_{n-1} = f_{n-2}$. Sehingga,
$$f_n = g_n + h_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \text{dengan } f_2 = 4, f_3 = 6.$$
Sehingga, diperoleh $f_8 = 68$

7. Penyelesaian:

Perhatikan gambar berikut.



$AQ : CQ = 5 : 3 \rightarrow AQ = 5m, CQ = 3m$
$BR : DR = 7 : 2 \rightarrow BR = 7n, DR = 2n$
$[ABCD] = 288 \rightarrow AC \cdot BD = 576$
$\rightarrow 8m \cdot 9n = 576 \rightarrow m \cdot n = 8$ ... (i)

Misal: $PQ = x$ dan $PR = y \rightarrow AT = 5m - y$ dan $BT = 7n - x$

$[ABP] = [ABT] + [ATP] + [BTP]$
$= \frac{1}{2} \cdot (5m - y) \cdot (7n - x) + \frac{1}{2}(5m - y)x + \frac{1}{2}(7n - x) \cdot y$
$= \frac{1}{2}[35mn - xy] = \frac{35}{2}mn - \frac{1}{2}xy$

$[COP] = [CDT] - [PRQT] - [CPQ] - [PDR]$
$= \frac{1}{2}(3m + y) \cdot (2n + k) - xy - \frac{1}{2}(3mx) - \frac{1}{2}(2ny)$
$= \frac{6}{2}mn - \frac{1}{2}xy$

Selisih Luas = $[ABP] - [CDP] = \left(\frac{35}{2}mn - \frac{1}{2}xy\right) - \left(\frac{6}{2}mn - \frac{1}{2}xy\right)$
$= \frac{29}{2}mn = \frac{29}{2}(8) = 116$

Jadi, Selisihnya adalah 116.

8. Penyelesaian:

Untuk persoalan ini kita bagi 2 kasus berdasarkan mod 19, yaitu:

- Kasus 1:

Jika $a \equiv 0 \pmod{19}$, maka $b^3 \equiv 0 \pmod{19^2}$, akibatnya $b \equiv 0 \pmod{19}$. Karena $1 \leq a, b \leq 19^2$, maka ada $19^2 = 361$ pasangan (a, b) sehingga $19 | a^4 + b^3$.

- Kasus 2:

Jika $19 \nmid a$, maka $19 \nmid b$, berdasarkan FLT, maka $a^{18} \equiv b^{18} \equiv 1 \pmod{19}$.

Ada $\frac{18}{\text{FPB}(18,4)} = 9$ nilai berbeda a^4 (mod 19) dan $\frac{18}{\text{FPB}(18,3)} = 6$ nilai berbeda b^3 (mod 19). Banyaknya residu tak nol yang termasuk a^4 dan $-b^3$ = FPB(9, 6) = 3.

Jika $a^4 \equiv t$ (mod 19) dan $b^3 \equiv -t$ (mod 19), maka ada 2 solusi a (sebab FPB(18, 4) = 2) dan 3 solusi b (sebab FPB(18, 3) = 3). Jadi, total ada $3 \times 2 \times 3 = 18$ pasangan (a, b) sehingga $19|a^4 + b^3$. Misalkan (a, b) solusi dari $19|a^4 + b^3$ dan $1 \leq a, b \leq 19^2$, maka dapat ditulis $a \equiv k + 19x$, $b \equiv m + 19y$, dan $k^4 + m^3 = 19p$ dengan k, x, m, y, p bilangan asli $0 \leq x, y < 18$ dan akibatnya

$$a^4 + b^3 \equiv 19p + (4k^3x + 3m^3y)19 \equiv 0 \pmod{19^2}$$

Ini mengakibatkan $p + 4k^3x + 3m^3y \equiv 0 \pmod{19} \Leftrightarrow y \equiv -(p + 4k^3x)(3m^3)^{-1}$ (mod 19). Setiap x tepat satu solusi y, sehingga ada 18 pasangan (x, y) yang memenuhi. Jadi, untuk kasus ini ada $18 \times 19 = 342$ pasangan (a, b) sehingga $19|a^4 + b^3$.

Berdasarkan 2 kasus di atas, total ada 361 + 342 = 703 pasangan (a, b) yang memenuhi $19|a^4 + b^3$.

ESAI

1. **Penyelesaian:**
   Misalkan n bilangan bulat berurutan tersebut adalah $k + 1, k + 2, k + 3, \dots, k + n$, maka

$$kn + 1 + 2 + \cdots + k = 2025$$
$$kn + \frac{n(n+1)}{2} = 2025$$
$$n(2k + n + 1) = 4050$$

   Jelas bahwa n haruslah factor positif dari 4050. Jika n genap maka $2k + n + 1$ ganjil dan sebaliknya. Karena 4050 hanya dapat dinyatakan sebagai perkalian genap dan ganjil, maka semua factor positif dari 4050 selain 1 pasti memenuhi nilai dari n dan k pasti suatu bilangan bulat.
   Karena 40450 = $2^1 \times 3^4 \times 5^2$, maka banyaknya n yang mungkin adalah (1 + 1)(4 + 1)(2 + 1) – 1 = 29.

2. **Penyelesaian:**
   a) Misalkan $t = a + b$. Karena a, b bilangan real positif, maka $t \geq 0$ dan

$$(a - b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow (a - b)^2 + 4ab \geq 4ab \Leftrightarrow (a + b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow \frac{t^2}{4} \geq ab$$

   Diketahui $a + b + c = ab + bc + ca$, maka $ab = t + c(1 - t)$.
   Andaikan $t \leq 1$, karena $c > 0$, maka $ab = t + c(1 - t) \geq t$ dan $\frac{t}{4} - \frac{t^2}{4} = \frac{t(1-t)}{4} \geq 0$, akibatnya

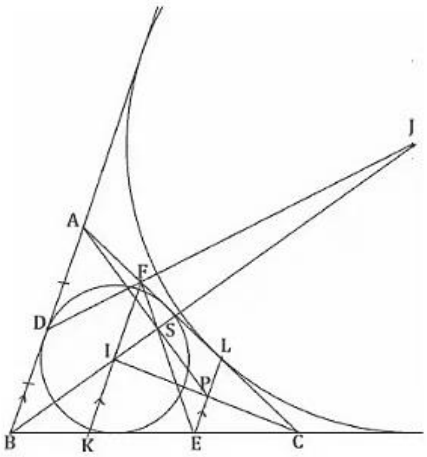
$$\frac{t}{4} \geq \frac{t^2}{4} \geq ab \geq t \text{ (karena } t \geq 0, \text{maka kontradiksi)}$$

Sehingga haruslah $t = a + b > 1$. Dengan cara yang sama, maka $b + c > 1$ dan $c + a > 1$. Jadi, terbukti $\min\{a + b, b + c, c + a\} > 1$. (Q.E.D)

b) Ada. Ambil $a = b = k$ dengan $\frac{1}{2} < k < 1$, maka $k + k + c = k^2 + kc + ck$, diperoleh $c = \frac{2k-k^2}{2k-1} > 0$. Perhatikan bahwa $3k - 3k^2 = 3k(1 - k) > 0 \Leftrightarrow k^2 + k > 4k^2 - 2k = 2k(2k - 1)$.
Karena $2k - 1 > 0$, maka $\frac{k^2+k}{2k-1} > 2k$. Akibatnya, $k + c = k + \frac{2k-k^2}{2k-1} = \frac{k^2+k}{2k-1} > 2k$, sehingga $\min\{a + b, b + c, c + a\} = \min\{2k, k + c, c + k\} = 2k$. Pilih $k = \frac{1+p}{2}$, dengan $p \in \left(0, \frac{1}{2025}\right)$, maka $\min\{a + b, b + c, c + a\} = 1 + p < 1 + \frac{1}{2025}$ (Q.E.D).

3. Penyelesaian:

a) Misalkan $Q = AC \cap BJ$. Karena J titik pusat lingkaran singgung luar dari segitiga ABC yang menyinggung sisi CA (bukan perpanjangan sisi CA), maka JB garis bagi dalam $\angle ABC$ dan JA garis bagi luar $\angle BAC$. Akibatnya, $\frac{QJ}{JB} = \frac{QA}{AB}$. Karena I pusat lingkaran dalam, maka AI garis bagi dalam $\angle BAC$ dan IB bagi dalam $\angle ABC$, akibatnya, $\frac{AB}{QA} = \frac{BI}{IQ}$ dan B, I, J kolinier.
Akan dibuktikan IF sejajar AB. Dengan kata lain, akan dibuktikan $\frac{AF}{FQ} = \frac{BI}{IQ}$.
Perhatikan gambar berikut!

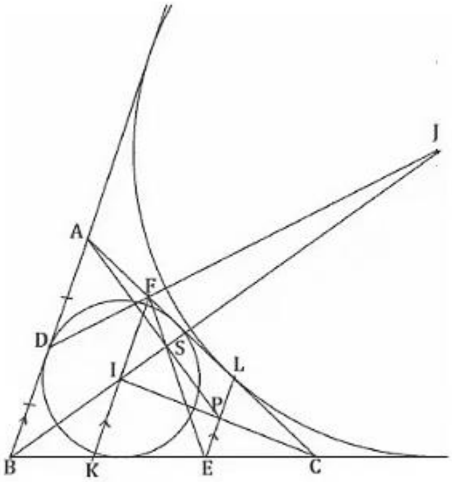


Bukti:
Dengan menelause ΔBAQ, tranv D, F, J, maka

$$\frac{BD}{DA} \cdot \frac{AF}{FQ} \cdot \frac{QJ}{JB} = 1$$
$$\frac{1}{1} \cdot \frac{AF}{FQ} \cdot \frac{QA}{AB} = 1$$

$$\frac{AF}{FQ} = \frac{QA}{AB}$$
$$\frac{AF}{FQ} = \frac{BI}{IQ}$$
$$(\text{Q.E.D})$$

b) Misalkan $FI \cap BC = K, EP \cap AC = L$ dan $AP \cap FE = S$. Akan dibuktikan AP, BJ dan EF konkuren. Dengan kata lain akan dibuktikan BJ melalui S. Dari poin (a), karena B, I, J kolinier, maka dengan invers menelause, cukup dibuktikan bahwa $\frac{ES}{SF} \cdot \frac{FI}{IK} \cdot \frac{KB}{BE} = 1$. Perhatikan gambar berikut!



Bukti:

Dari poin(a) sudah ditentukan bahwa FI sejajar AB. Karena AB sejajar PE, maka PK sejajar LE. Akibatnya,

$$\frac{LP}{PE} = \frac{FI}{IK} \text{ dan } \frac{FA}{AL} = \frac{KB}{BE}$$

Dengan menelause maka ΔLEF, tranv A, S, P

$$\frac{LP}{PE} \cdot \frac{ES}{SF} \cdot \frac{FA}{AL} = 1$$
$$\frac{FI}{IK} \cdot \frac{ES}{SF} \cdot \frac{KB}{BE} = 1$$
$$(\text{Q.E.D})$$

4. **Penyelesaian:**

Misalkan $P_1, P_2, \dots, P_{10}$ adalah titik latis di dalam segitiga. Tinjau koordinat titik latis dalam modulo 3.

$$(x, y) \to (x \bmod 3, y \bmod 3)$$

maka ada $3^2 = 9$ kemungkinan berbeda.

Jika ada 10 titik maka menurut PHP ada 2 titik berbeda, WLOG, misalkan $P_1(x_1, y_1)$ dan $P_2(x_2, y_2)$ sehingga $x_1 \equiv x_2$ (mod 3) dan $y_1 \equiv y_2$ (mod 3).
Perhatikan bahwa $2x_1 + x_2 \equiv 2y_1 + y_2 \equiv x_1 + 2x_2 \equiv y_1 + 2y_2 \equiv 0 \pmod 3$, akibatnya jika kita ambil 2 titik pada garis P_1P_2 dan keduanya berada diantara P_1 dan P_2 dengan rasio 1 : 2 dan 2 : 1, maka kedua titik ini merupakan titik latis. Karena P_1 dan P_2 berada di dalam segitiga maka kedua titik yang kita ambil tersebut juga terletak di dalam segitiga.
Jadi, ada 4 titik di dalam segitiga yang segaris, yaitu $P_1, \frac{2P_1+P_2}{3}, \frac{P_1+2P_2}{3}$ dan P_2. (Q. E. D).