**PEMBAHASAN**

**OSN MATEMATIKA SMA**

**TAHUN 2025**

1. **Penyelesaian:**

Garis besar solusi ini dikomunikasikan kepada saya oleh Ketut Andra Nugraha (yang memenangkan perak dalam kontes) beberapa waktu lalu, jadi saya memutuskan untuk menyelesaikan solusinya dan mempostingnya di sini.

Kita mengklaim bahwa $f$ bersifat multiplikatif untuk bilangan prima relatif $a, b$, yaitu $f(ab) = f(a)f(b)$. Misalkan himpunan tersebut $A = (a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_k, b_k)$ adalah $k$ pasangan $a_i, b_i \leq a$ st FPB$(a_i, b_i, a) = 1$ untuk setiap $1 \leq i \leq k$ dan $B = (c_1, d_1), (c_2, d_2), \dots, (c_j, d_j)$ merupakan $j$ pasangan $c_i, d_i \leq b_{\text{st}}$ FPB$(c_i, d_i, b) = 1$ untuk setiap $1 \leq i \leq j$. Misalkan $(e, f)$ dengan $e, f \in \mathbb{N}_{\text{st}}$ FPB$(e, f, ab) = 1$.

**Klaim.** $e \equiv a_i \pmod a, e \equiv c_j \pmod b$ dan $f \equiv b_i \pmod a, f \equiv d_j \pmod b$.

**Bukti.** Misalkan $m, n, x, y \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga

$$e \equiv m \pmod a, f \equiv x \pmod a$$

dan

$$e \equiv n \pmod b, f \equiv y \pmod b$$

Cukup untuk membuktikan bahwa $m, x \in A$ dan $n, y \in B$. Asumsikan sebaliknya, maka ada bilangan prima $p$ yang membagi $a, m, x$. Jadi kita memiliki $p|e, f$, yang berarti FPB$(e, f, ab) \geq p > 1$, sebuah kontradiksi sehingga $m, x \in A$. Secara analog $n, y \in B$,, jadi klaim telah terbukti.

Dengan CRT, solusinya $(e, f)$ unik $(\text{mod } ab)$, jadi setiap pasangan $s \in A$ dan $t \in B$ menghasilkan satu solusi, artinya $f(ab) = kj = f(a)f(b)$. $\square$

Ambil sembarang bilangan prima $q$ dan bilangan asli $r$, maka kita memiliki

$$f(q^r) = (q^r - q^{r-1})^2 = q^{2r}(1 - \frac{1}{q})^2$$

Sekarang kita siap untuk mengatasi masalah ini. Misalkan $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_l^{a_l}$. Jadi kita memiliki

$$f(n) = f(p_1^{a_1}) f(p_2^{a_2}) \dots f(p_l^{a_l}) = n^2 \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)$$

Ambil pembagi prima terkecil di antara mereka, misalkan $p_t$. Karena $n \geq p_t^2$ (karena $n$ merupakan bilangan komposit), maka kita memiliki

$$f(n) \leq n^2(1 - \frac{1}{p_t^2}) \leq n^2(1 - \frac{1}{n}) = n^2 - n$$

Kesamaan ketika $n = p^2$ untuk setiap bilangan prima $p$.

2. **Penyelesaian:**
**Klaim:** Garis $CO$ adalah sumbu radikal dari lingkaran dengan diameter $DO$ dan lingkaran dengan diameter $EO$.
*Bukti:* Sudah diketahui bahwa $D$ dan $E$ adalah refleksi dari ortosenter $\triangle ABC$ terhadap sisi masing-masing. Oleh karena itu, $C$ terletak pada garis bagi tegak lurus dari segmen $DE$. Jadi, jika $X = CO \cap DE$ maka titik $X$ terletak pada kedua lingkaran ini karena sudut siku-siku dan kita memiliki klaim tersebut. Perhatikan bahwa karena $C$ terletak pada sumbu radikal,
$$CP \cdot CD = CQ \cdot CE$$
dan kita juga tahu bahwa $CD = CE$. Oleh karena itu, $CP = CQ$ juga yang menyiratkan
$$PD = CD - CP = CE - CQ = QE$$
Jadi, $\triangle OPD \cong \triangle OQE$ yang menyiratkan bahwa $OP = OQ$, seperti yang diinginkan.

3. **Penyelesaian:**
Nyatakan jalur dari label pertama ke label terakhir sebagai urutan panah yang menghubungkan dua label berurutan dari label yang lebih kecil ke label yang lebih besar.
Misalkan $A_n, B_n, C_n, D_n$, masing-masing adalah jumlah cara sehingga gerakan terakhir adalah $\rightarrow$(pada baris pertama), $\rightarrow$(pada baris kedua), $\uparrow$(pada kolom terakhir), dan $\downarrow$ (pada kolom terakhir). Selanjutnya, misalkan $X_n = A_n + B_n + C_n + D_n$.
Kita dapat melihat bahwa $A_{n+3} = X_n + B_n$, $B_{n+3} = X_n + A_n$, $C_{n+3} = X_n - C_n$ dan $D_{n+3} = X_n - D_n$ dengan $A_1 = D_1 = 1$ dan $B_1 = C_1 = 0$.
Masalah ini meminta untuk membuktikan bahwa $A_{25} + D_{25} = B_{25} + C_{25}$. Namun, karena $A_{n+3} + C_{n+3} = 2X_n + B_n - C_n$ dan $B_{n+3} - C_{n+3} = A_n + C_n$ sementara $B_{n+3} + D_{n+3} = 2X_n + A_n - D_n$ dan $A_{n+3} - D_{n+3} = B_n + D_n$, dan juga $A_1 + C_1 = B_1 + D_1$ dan $A_1 - D_1 = B_1 - C_1$, kita dapat menyimpulkan bahwa semua angka $n = 3k + 1$ juga akan memenuhi $A_n + C_n = B_n + D_n$.

4. **Penyelesaian:**
**Lemma:** $\dfrac{x-1}{\sqrt{2x^2+2} - \sqrt{x} - 1} > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ untuk $x > 1$.
**Bukti:** Misalkan $x = a^2$.
Cukup untuk menunjukkan bahwa $\sqrt{2}(a^2-1) + a + 1 \overset{?}{>} \sqrt{2a^4+2}$ atau
$$2(a^2-1)^2 + (a+1)^2 + 2\sqrt{2}(a-1)(a+1)^2 \overset{?}{>} 2a^4 + 2 \iff (a-1)(2\sqrt{2}(a+1)^2 - 3a - 1) > 0$$
Oleh karena itu hasilnya terbukti.

**Klaim:** $a_n > b_n$ menyiratkan $b_{n+1} > a_{n+1}$ yang menghasilkan $a_{n+2} > b_{n+2} \ldots$

**Bukti:** Jika $a_n > b_n$, maka

$$b_{n+1} = \frac{\sqrt{a_n}\sqrt{2a_n+2b_n}}{2} \overset{CS}{\geq} \frac{\sqrt{a_n}(\sqrt{a_n}+\sqrt{b_n})}{2} \geq \frac{\sqrt{b_n}(\sqrt{a_n}+\sqrt{b_n})}{2} = a_{n+1}$$

dan jika $a_n < b_n$, maka

$$b_{n+1} = \frac{\sqrt{a_n}\sqrt{2a_n+2b_n}}{2} \leq \frac{\sqrt{b_n}(\sqrt{a_n}+\sqrt{b_n})}{2} = a_{n+1}$$

karena $2y\sqrt{xy} \geq 2x^2$ dan $xy + y^2 \geq 2xy$ menyiratkan $xy + y^2 + 2y\sqrt{xy} \geq 2x^2 + 2xy$ atau $\sqrt{xy} + y \geq \sqrt{2x^2 + 2xy}$ untuk $a_n = x, b_n = y$.$\square$

Perhatikan bahwa $a_n = b_n$ menghasilkan $a_{n+1} = b_{n+1}$ sehingga kita dapat mengasumsikan bahwa $a_n \neq b_n$.

**Klaim:** Jika $a_n \leq b_n$, maka

$$a_{n+1} - b_{n+1} \leq \frac{b_n - a_n}{2}$$

**Bukti:** Misalkan $a_n = x, b_n = y$.

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{\sqrt{xy} + y - \sqrt{2x^2 + 2xy}}{2} \leq \frac{y - x}{2}$$

Karena $2x^2 + 2xy \geq x^2 + xy + 2x\sqrt{xy} = (x + \sqrt{xy})^2$. $\square$

**Klaim:** Jika $a_n \geq b_n$, maka

$$b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{a_n - b_n}{\sqrt{2}}$$

**Bukti:** Misalkan $a_n = x, b_n = y$ lagi.

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{\sqrt{2x^2 + 2xy} - \sqrt{xy} - y}{2} \overset{?}{\leq} \frac{x - y}{\sqrt{2}}$$

atau karena ketidaksetaraan tersebut homogen, asumsikan $y = 1$ untuk mendapatkan

$$\frac{x - 1}{\sqrt{2x^2 + 2} - \sqrt{x} - 1} \overset{?}{>} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

dan ini adalah lemma pertama kita.$\square$

Jika $a_1 > b_1$, maka

$$b_2 - a_2 \leq \frac{a_1 - b_1}{\sqrt{2}}$$

dan

$$a_3 - b_3 \leq \frac{b_2 - a_2}{2}$$

dan $\ldots$ dan

$$a_{19} - b_{19} \leq \frac{b_{20} - a_{20}}{2}$$

oleh karena itu mengalikan ini menghasilkan

$$b_{20} - a_{20} \leq \frac{a_1 - b_1}{(\sqrt{2})^{10}.2^9} < \frac{5}{2^{14}} < \frac{1}{2025}$$

dan jika $a_1 < b_1$, maka

$$a_{20} - b_{20} < \frac{5}{(\sqrt{2})^9.2^{10}} = \frac{1}{2025}$$

seperti yang diinginkan.■

**5. Penyelesaian:**

Misalkan $\mathcal{B}$ adalah himpunan bagian dari yang berelemen $10$-$X$. Sekarang misalkan

$$S = \{(B, i) \mid B \in \mathcal{B}, 1 \le i \le n, B \subseteq A_i\}.$$

Maka

$$|S| \ge 2|\mathcal{B}| = 2\binom{22}{10}$$

karena setiap $B \in \mathcal{B}$ terkandung dalam setidaknya dua $A_i$. Tetapkan $i$.
Maka jumlah himpunan bagian dari yang berelemen $10$-$A_i$ adalah

$$\binom{15}{10}$$

Dengan menjumlahkan atas $i = 1, 2, \ldots, n$, kita memiliki

$$|S| = \sum_{i=1}^{n} |\{B \mid B \in \mathcal{B}, B \subseteq A_i\}| = n\binom{15}{10}.$$

Jadi kita memiliki

$$n\binom{15}{10} \ge 2\binom{22}{10} \Leftrightarrow n \ge \frac{1292}{3} = 430\frac{2}{3}$$

Oleh karena itu, $n \ge 431$.□

**6. Penyelesaian:**

Misalkan $P(x, y)$ adalah pernyataan yang diberikan.

Kita memiliki $f(x+y) > \max(f(x), y) \ge y$, jadi untuk setiap $a$, dengan menetapkan $y = a - x$ dan $x$ sedekat mungkin dengan $a$ di sisi kiri memberikan $f(a) \ge a$, jadi $f(x) \ge x$ untuk setiap $x$.

$P(x, x) : f(2x) = x + f(x)$.

$P(x, 2x) : f(3x) = \max(f(x), 2x) + x$.

$P(2x, x) : f(3x) = f(2x) + \min(f(x), 2x) = x + f(x) + \min(f(x), 2x)$.

Membandingkan memberikan bahwa

$$\max(f(x), 2x) = f(x) + \min(f(x), 2x) > f(x),$$

jadi $\max(f(x), 2x) = 2x$ dan ini sama dengan

$$f(x) + \min(f(x), 2x) = 2f(x),$$

jadi $f(x) = x$, seperti yang diinginkan.

**7. Penyelesaian:**

Perhatikan bahwa $n$ adalah asri jika dan hanya jika dapat dinyatakan sebagai $(a+25)(b+20)-500$ untuk beberapa bilangan bulat positif $a, b$.

a) Untuk setiap bilangan prima $P > 20^{25}+500$ (pasti ada bilangan prima seperti itu karena ada bilangan prima yang tak terhingga banyaknya), kami menyatakan bahwa $P-500$ bukan asri. Jika itu asri, maka bilangan bulat positif $a, b$ memenuhi $(a+25)(b+20)=P,$ yang tidak mungkin karena $P$ adalah bilangan prima.

b) Cukup untuk menunjukkan bahwa ada 26 bilangan bulat positif berurutan yang dapat dinyatakan sebagai $(a+25)(b+20)$ untuk bilangan bulat positif $a, b$ (mengambil masing-masing bilangan ini minus 500 akan memberikan urutan bilangan asri berurutan). Kami menyatakan bahwa $46!+21, 46!+22, \ldots, 46!+46$ berhasil.

Tetapkan bilangan bulat apa pun $x \in [21, 46]$. Kami menunjukkan bahwa $46!+x$ dapat dinyatakan sebagai $(a+25)(b+20)$ untuk bilangan bulat positif $a, b$. Ambil $b = x - 20$ dan

$$a = \frac{46!}{x} - 24,$$

yang keduanya merupakan bilangan bulat positif. Mudah untuk melihat bahwa

$$(a+25)(b+20) = 46! + x.$$

**8. Penyelesaian:**

Abaikan $\angle OCB = 90^\circ$ syarat tersebut. Kita tetap akan menunjukkan $MH$ bahwa garis singgungnya adalah $(FOG)$.

Perhatikan bahwa $AD, BE, CF$ garis-garis tersebut berpotongan di titik Gergonne (Anda juga dapat menunjukkannya melalui Ceva), oleh karena itu, $(G, F; A, B) = -1$. Maka kita memiliki

$$\angle AHG = \angle OHG = \angle OFG = \angle OGF = \angle OHF = \angle AHF,$$

sehingga $AH$ merupakan garis bagi sudut $\angle GHF$.

Ini menyiratkan $\angle AHB = 90^\circ$. Oleh karena itu, $MH^2 = MA^2 = (AB/2)^2$. Tetapi karena $(G, F; A, B) = -1$, kita harus memiliki $MG \cdot MF = (AB/2)^2$, oleh karena itu, $MG \cdot MF = MH^2$, yang menyiratkan $MH$ bahwa garis singgungnya adalah $(FOG)$. $\square$