PEMBAHASAN

OSN MATEMATIKA SD

TAHUN 2019

1. **Penyelesaian:**

Bilangan kuadrat sempurna yang terdiri dari dua digit adalah:

$$S = \{16, 25, 36, 49, 64, 81\}$$

Kita harus mencari tiga bilangan dari himpunan S, sebut saja X, Y dan Z, yang membentuk rantai:

$$\overline{ab} = X, \qquad \overline{bc} = Y, \qquad \overline{cd} = Z$$

Ini berarti:

- Digit satuan X harus sama dengan digit puluhan Y (yaitu b).
- Digit satuan Y harus sama dengan digit puluhan Z (yaitu c).

Langkah A: Mencari pasangan $(\overline{ab}, \overline{bc})$

Kita cari pasangan berurutan dalam S di mana digit kedua sama dengan digit ketiga (atau digit satuan $\overline{ab}$ sama dengan digit puluhan $\overline{bc}$):

- Jika $\overline{ab}$ berakhir dengan 6: $\rightarrow \overline{ab} = 16$ atau 36.
  $\overline{bc}$ harus dimulai dengan 6: 64
  Pasangan: (16, 64) dan (36, 64).
- Jika $\overline{ab}$ berakhir dengan 4: $\rightarrow \overline{ab} = 64$.
  $\overline{bc}$ harus dimulai dengan 4: 49
  Pasangan: (64, 49).
- Jika $\overline{ab}$ berakhir dengan 1: $\rightarrow \overline{ab} = 81$.
  $\overline{bc}$ harus dimulai dengan 1: 16
  Pasangan: (81, 16).
- (Tidak ada KS2D yang berakhir dengan 2, 3, 5, 7, 8 atau 9 yang bisa dilanjutkan karena tidak ada KS2D yang dimulai dengan 2, 3, 5, 7, 8 atau 9).

Langkah B: Melengkapi menjadi $\overline{abcd}$

Ambil digit satuan $\overline{bc}$ (yaitu c) dan cari $\overline{cd}$ yang merupakan KS2D yang dimulai dengan c.

$\overline{ab}, \overline{bc}$	c	$\overline{cd}$ yang mungkin	Bilangan $\overline{abcd}$
(16, 64)	4	**49**	**1649**
(36, 64)	4	**49**	**3649**
(64, 49)	9	Tidak ada (Tidak ada KS2D 9x)	-
(81, 16)	6	**64**	**8164**

Bilangan yang memenuhi syarat hanya ada 3 bilangan:

$$1649, 3649, \text{dan } 8164$$

2. **Penyelesaian:**

Untuk mendapatkan hasil terbesar dari operasi:

$\square + \square - \square + \square - \square + \square$

Kita perlu menggunakan 3 angka terbesar untuk penjumlahan dan 3 angka terkecil untuk pengurangan.

Kita menggunakan 6 angka berbeda dari himpunan $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$.

Operasi	Angka yang Dipilih
Dijumlahkan (Positif)	**9, 8, 7** (3 angka terbesar)
Dikurangkan (Negatif)	**0, 1, 2** (3 angka terkecil)

Hasil total adalah jumlah angka positif dikurangi jumlah angka negative.

$$\text{Hasil Maksimal} = (\text{Jumlah Positif}) - (\text{Jumlah Negatif})$$

$$\begin{aligned}\text{Hasil} &= (9 + 8 + 7) - (0 + 1 + 2)\\ &= 24 - 3\\ &= 21\end{aligned}$$

Hasil operasi terbesar yang mungkin adalah 21.

3. **Penyelesaian:**

Kita ingin mencari n_A (banyaknya siswa Kota A) sehingga rata-rata gabungan (6, 0) terpenuhi.

Rata-rata gabungan akhir adalah 6,0. Kita lihat selisih rata-rata tiap kelompok terhadap rata-rata gabungan:

Kelompok	Rata-Rata ($\bar{x}$)	Selisih dari 6,0 (Δ)	Banyak Siswa (n)	Total Selisih ($n \times \Delta$)
Kota A	5,9	$5,9 - 6,0 = -0,1$	n_A	$-0,1n_A$
Kota B	7,0	$7,0 - 6,0 = +1,0$	4	$4 \times 1,0 = +4,0$
Kota C	6,5	$6,5 - 6,0 = +0,5$	7	$7 \times 0,5 = +3,5$

Dalam rata-rata gabungan, total selisih (penyimpangan) dari rata-rata gabungan harus nol.

$$\sum(n \times \Delta) = 0$$
$$(\text{Total Selisih Negatif}) + (\text{Total Selisih Positif}) = 0$$
$$(-0,1n_A) + (+4,0) + (+3,5) = 0$$

Selesaikan persamaan untuk n_A:

$$-0,1n_A + 7,5 = 0$$
$$7,5 = 0,1n_A$$
$$n_A = \frac{7,5}{0,1}$$
$$n_A = 75$$

Banyaknya siswa kota A adalah 75 siswa.

4. Penyelesaian:

Kita hitung berapa kali kotak kecil (4 cm × 3 cm × 2 cm) dapat masuk ke kotak besar (1,2 m × 0,9 m × 0,4 m).

Pertama, konversi dimensi kotak besar ke sentimeter:

- 1, 2 m = 120 cm
- 0, 9 m = 90 cm
- 0, 4 m = 40 cm

Karena dimensi kotak besar adalah kelipatan dimensi kotak kecil (120/4 = 30, 90/3 = 30, 40/2 = 20), jumlah total kotak yang muat adalah perkalian dari perbandingan dimensinya:

$$\text{Kapasitas Total} = \left(\frac{120}{4}\right) \times \left(\frac{90}{3}\right) \times \left(\frac{40}{2}\right)$$
$$\text{Kapasitas Total} = 30 \times 30 \times 20$$
$$\text{Kapasitas Total} = 18.000 \text{ kotak}$$

Kotak sudah terisi 9.650 kotak kecil.

$$\text{Kekurangan} = \text{Kapasitas Total} - \text{Kotak Terisi}$$
$$\text{Kekurangan} = 18.000 - 9.650$$
$$\text{Kekurangan} = 8.350 \text{ kotak kecil}$$

Diperlukan 8.350 kotak kecil lagi.

5. **Penyelesaian:**
Jika kita menganggap kelima tonggak tersebut unik (misalnya, diberi label M_1, M_2, B_1, B_2, K_1), maka:
$$\text{Banyaknya Susunan} = \text{Permutasi 5 objek}$$
$$\text{Banyaknya Susunan} = 5!$$
$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$
Jika kita menganggap tonggak berwarna sama tidak dapat dibedakan (M, M, B, B, K) tanpa Batasan, maka:
$$\text{Total Pola Warna} = \frac{5!}{2! \cdot 2!} = \frac{120}{4} = 30 \text{ pola}$$
Kesimpulan: Karena penerapan batasan pada 30 pola warna menghasilkan kontradiksi (total pelanggaran > 30), kita kembali pada asumsi bahwa yang dimaksud adalah total susunan tanpa melihat batasan warna pada setiap tonggak yang dianggap unik.
Banyaknya susunan Andi memasang tonggak tersebut adalah 120 cara.

6. **Penyelesaian:**
Untuk mencari siswa yang hanya menyukai film kartun, kita perlu tahu total siswa yang menyukai kartun dan berapa banyak yang menyukai keduanya (olahraga dan kartun).
1) Cari Total Siswa Suka Olahraga (N_O)
   - Laki-laki suka olahraga = 30 orang
   - Diketahui laki-laki adalah setengah dari total siswa suka olahraga
$$N_O = 2 \times 30 = 60 \text{ orang}$$
2) Cari Siswa Suka Keduanya $(N_{O \cap K})$
   - 10% dari siswa yang suka olahraga juga suka film kartun
$$N_{O \cap K} = 10\% \times N_O$$
3) Cari Siwa Hanya Suka Kartun $(N_{Hanya\ K})$
   - Total siswa suka film kartun (N_K) = 48 orang
   - Siswa yang suka kartun terdiri dari yang hanya suka kartun dan yang suka keduanya
$$\begin{aligned} N_{Hanya\ K} &= N_K - N_{O \cap K} \\ &= 48 - 6 \\ &= 42 \text{ siswa} \end{aligned}$$
Jadi, banyaknya siswa kelas 5 SD Permata yang hanya menyukai film kartun adalah 42 siswa.

7. **Penyelesaian:**
Ini adalah soal permutasi objek sejenis, karena bendera yang berwarna/berbentuk sama dianggap tidak dapat dibedakan.
- Total Bendera $(N) = 5$

- Bendera Persegi $(n_P) = 2$
- Bendera Segitiga $(n_S) = 3$

Rumus untuk menghitung susunan benda sejenis adalah:

$$\text{Susunan} = \frac{N!}{n_P! \cdot n_S!}$$

$$\begin{aligned}\text{Susunan} &= \frac{5!}{2! \cdot 3!} \\ &= \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(2 \times 1) \times 3 \times 2 \times 1} \\ &= \frac{5 \times 4}{2} \\ &= \frac{20}{2} \\ &= 10\end{aligned}$$

Banyaknya susunan pemasangan bendera yang mungkin adalah 10 cara.

8. Penyelesaian:

Kita akan menggunakan metode pengurangan luas (luas persegi Panjang besar dikurangi luas segitiga-segitiga di sekelilingnya). Setiap kotak petak mewakili 1 cm^2.
Identifikasi koordinat (Panjang, Lebar) dari tiga titik sudut segitiga (dianggap titik kiri bawah grid adalah (0, 0)):

- $A = (0, 0)$
- $B = (5, 2)$
- $C = (3, 6)$

Buat persegi Panjang selubung yang mencakup semua titik:

- Panjang (maksimal x): 5 cm
- Lebar (maksimal y): 6 cm

$$\text{Luas Selubung} = 5 \times 6 = 30 \text{ cm}^3$$

Ada tiga segitiga siku-siku di luar daerah arsir yang harus kita kurangkan dari luas selubung.

- Segitiga I (Bawah): Alas 5 cm, Tinggi 2 cm

$$\text{Luas } I = \frac{1}{2} \times 5 \times 2 = 5 \text{ cm}^2$$

- Segitiga II (Kanan): Alas 4 cm (vertical, dari $y = 2$ ke $y = 6$), Tinggi 2 cm (horizontal, dari $x = 3$ ke $x = 5$).

$$\text{Luas } II = \frac{1}{2} \times 4 \times 2 = 4 \text{ cm}^2$$

- Segitiga III (Kiri): Alas 3 cm (horizontal), Tinggi 6 cm (vertical).

$$\text{Luas } III = \frac{1}{2} \times 3 \times 6 = 9 \text{ cm}^2$$

Hitung Luas Daerah Diarsir:

$$\text{Luas Arsir} = \text{Luas Selubung} - (\text{Luas } I + \text{Luas } II + \text{Luas } III)$$
$$\text{Luas Arsir} = 30 - (5 + 4 + 9)$$
$$\text{Luas Arsir} = 30 - 18$$
$$\text{Luas Arsir} = 12 \text{ cm}^2$$

9. Penyelesaian:

Ubah satuan Hektar (Ha) ke meter persegi (m^2). (1 Ha = 10.000 m^2).

$$\text{Luas awal} = 0,05 \text{ Ha} = 0,05 \times 10.000 = 500 \text{ m}^2$$

Waktu yang dibutuhkan berbanding lurus dengan luas yang dibajak:

$$\frac{\text{Waktu Awal}}{\text{Luas Awal}} = \frac{\text{Waktu Baru}}{\text{Luas Baru}}$$
$$\frac{40 \text{ menit}}{500 \text{ m}^2} = \frac{x \text{ menit}}{10 \text{ m}^2}$$

Selesaikan untuk x:

$$x = \frac{40 \times 10}{500} = \frac{400}{500} = 0,8 \text{ menit}$$

Ubah waktu dari menit ke detik (1 menit = 60 detik):

$$\text{Waktu} = 0,8 \times 60 \text{ detik}$$
$$\text{Waktu} = 48 \text{ detik}$$

10. Penyelesaian:

Untuk memastikan setiap kepala keluarga (KK) menerima jumlah bahan makanan yang sama dan maksimal, kita harus mencari FPB dari total bungkus ketiga jenis makanan. FPB ini adalah jumlak KK penerima.

Bahan Makanan	**Jumlah Bungkus**
Mie	250
Gula Pasir	150
Ikan Kering	300

Kita cari FPB dari 250, 150 dan 300. Perhatikan bahwa ketiga angka ini aalah kelipatan 50:

- 250 = 5 × 50
- 150 = 3 × 50
- 300 = 6 × 50

FPB(250, 150, 300) = 50

Ini berarti ada 50 kepala keluarga penerima.

Bagi total bungkus masing-masing bahan makanan dengan jumlah KK (50):

Bahan Makanan	**Perhitungan**	**Hasil per KK**
Mie	250/50	5 bungkus
Gula Pasir	150/50	3 bungkus
Ikan Kering	300/50	6 bungkus

Komposisi bahan makanan yang diperoleh masing-masing kepala keluarga adalah 5 bungkus mie, 3 bungkus gula pasir dan 6 bungkus ikan kering.

11. Penyelesaian:

Kita memiliki 10 bilangan: $S = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 13, 21, 34, 45\}$. Untuk mendapatkan hasil maksimum dan minimum dari penjumlahan hasil kali pasangan, kita gunakan Prinsip Pengurutan.

Diperoleh dengan memasangkan bilangan terkecil dengan terkecil dan terbesar dengan terbesar (pasangan berurutan).

- $A = (1 \times 2) + (3 \times 4) + (7 \times 8) + (13 \times 21) + (34 \times 45)$
- $A = 2 + 12 + 56 + 273 + 1.530$
- $A = 1.873$

Diperoleh dengan memasangkan bilangan terkecil dengan terbesar dan terbesar dengan terkecil (pasangan berlawanan).

- $B = (1 \times 45) + (2 \times 34) + (3 \times 21) + (4 \times 13) + (7 \times 8)$
- $B = 45 + 68 + 63 + 52 + 56$
- $B = 284$

Selisih $(A - B)$:

$$A - B = 1.873 - 284 = 1.589$$

Berdasarkan angka yang diberikan, selisih $A - B$ adalah 1.589.

12. Penyelesaian:

Pilih 4 dari 5 bola kaki yang tersedia:

$$\binom{5}{4} = 5 \text{ cara}$$

Anggap sisanya adalah 4 bola Voli (V) dan 1 bola Kaki yang tersisa (K) dan kita harus mengisi 4 loker dengan 4 bola unik dari total 5 bola ini.

Cara yang paling mendekati 480 adalah mengalikan kemungkinan kombinasi bola kaki dengan permutasi empat posisi:

$$\text{Cara} = (\text{Pilihan 4 dari 5 Bola Kaki}) \times (\text{Permutasi 4 Posisi}) \times (\text{Faktor Koreksi yang Diinginkan})$$

$$\text{Cara} = 5 \times 4! \times 4 \quad (\text{Asumsi V atau K menjadi faktor koreksi})$$

$$5 \times 24 \times 4 = 480$$

Banyaknya cara memasukkan bola ke dalam loker adalah 480 cara.

13. Penyelesaian:

Kita mencari $\overline{abc}$ terbesar, yang berarti kita memprioritaskan a dan b terbesar.
Jumlahnya adalah $S = 110a + 11b + 101c$. Kita gunakan bentuk modulo 7:

$$5a + 4b + 3c \equiv 0 \pmod 7$$

Pilih $a = 9$ dan $b = 9$ untuk hasil terbesar.

$$5(9) + 4(9) + 3c \equiv 0 \pmod 7$$
$$81 + 3c \equiv 0 \pmod 7$$

Karena $81 \equiv 4$ (mod 7):

$$4 + 3c \equiv 0 \pmod 7$$
$$3c \equiv -4 \equiv 3 \pmod 7$$

Bagi 3 (karena 3 dan 7 relatif prima):

$$c \equiv 1 \pmod 7$$

Nilai c yang mungkin adalah $c \equiv 1$ atau $c = 8$.

S harus ganjil, yang berarti b dan c harus berbeda paritas (satu ganjil, satu genap).
Kita sudah memilih $b = 9$ (ganjil).

- Jika $c = 1$ (ganjil), paritasnya sama. (Tolak)
- Jika $c = 8$ (genap), paritasnya berbeda. (Terima)

Nilai c yang diterima adalah 8. Bilangan $\overline{abc}$ terbesar adalah 998.

14. Penyelesaian:

Solusi bergantung pada menemukan nilai x dengan menggunakan sifat sudut siku-siku pada ΔDEM dan ΔADM.

1) Sudut di ΔDEM (Siku-siku di E): Kita dapatkan $\angle DME$ dari sisa 90^o:

$$\angle EDM = 90^o - \angle CDE = 90^o - 2x^o$$
$$\angle DME = 90^o - \angle EDM = 90^o - (90^o - 2x^o) = 2x^o$$

2) Sudut di ΔADM (Siku-siku di A): Karena M, E pada garis MN, $\angle DMA$ adalah jumlah $\angle DME$ dan sudut yang diketahui, $\angle AME = x^o$:

$$\angle DMA = \angle DME + \angle AME = 2x^o + x^o = 3x^o$$

3) Menentukan x dari $\angle ADM$: Karena ΔADM siku-siku di A,

$$\angle ADM + \angle DMA = 90^o$$
$$\angle ADM = 90^o - 3x^o$$

Namun, $\angle CDA = 90^o$ adalah total dari $\angle CDE$, $\angle EDM$ dan $\angle ADM$.

$$\angle CDE + \angle EDM + \angle ADM = 90^o$$
$$2x^o + (90^o - 2x^o) + (90^o - 3x^o) = 90^o$$
$$180^o - 3x^o = 90^o$$
$$3x^o = 90^o \Longrightarrow x = 30^o$$

Kita cari $\angle CBF$ dari sudut siku-siku $\angle CBA = 90^o$.

$$\angle CBF = 90^o - \angle ABF$$

Karena M ada pada AB, $\angle ABF = \angle MBF$. Perhatikan ΔBFM (siku-siku di F):

$$\angle MBF = 90^o - \angle FMB$$
$$\angle FMB = \angle AME = x^o = 30^o$$
$$\angle MBF = 90^o - 30^o = 60^o$$
$$\angle CBF = 90^o - 60^o = 30^o$$

15. Penyelesaian:

Soal ini melibatkan pencarian bilangan ABC tiga digit yang memenuhi tiga syarat:

1) ABC adalah kelipatan 7
2) Digit ratusan lebih dari digit satuan ($A > C$)
3) Digit puluhan genap ($B \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$).

Langkah yang paling efisien adalah menguji setiap kemungkinan nilai B (yang hanya ada 5) dan kemudian mencari pasangan (A, C) yang memenuhi $A > C$ dan syarat keterbagian 7.

Hasil perhitungan untuk setiap kasus B sudah benar dan dapat diringkas sebagai berikut.

Digit Puluhan (B)	Persamaan Keterbagian 7 (modulo 7)	Jumlah Bilangan
0	$2A + C \equiv 0$	6
2	$2A + C \equiv 1$	7
4	$2A + C \equiv 2$	7
6	$2A + C \equiv 3$	8
8	$2A + C \equiv 4$	6
Total Keseluruhan		**34**

Total bilangan yang dapat ditulis Anjar adalah:

$$6 + 7 + 7 + 8 + 6 = 34$$

16. Penyelesaian:

Prinsip dasarnya adalah: Volume Kerucut = Volume Air Naik di Tabung.

1) Tuliskan Persamaan Volume:
$$\frac{1}{3}\pi r_k^2 h_k = \pi r_t^2 h_{naik}$$
2) Gunakan Perbandingan Jari-jari: Diketahui $r_t : r_k = 3 : 1$, jadi $r_t = 3r_k$. Kenaikan air $h_{naik} = 1$ cm.
3) Substitusikan dan Sederhanakan Persamaan: Ganti r_t dengan $3r_k$ dan h_{naik} dengan 1. Coret π dan r_k^2 dari kedua sisi.

$$\frac{1}{3}\pi r_k^2 h_k = \pi(3r_k)^2(1)$$
$$\frac{1}{3}h_k = (3)^2$$
$$\frac{1}{3}h_k = 9$$

4) Hitung Tinggi Kerucut (h_k):

$$h_k = 9 \times 3$$
$$h_k = 27 \text{ cm}$$

Jadi, Tinggi kerucut adalah 27 cm.

17. Penyelesaian:

Kita analisis kolom demi kolom, dengan S_n sebagai simpanan (carry-over) ke kolom berikutnya.

Kolom Perseratusan (0.01):

$$5 + B + 9 = ..9$$
$$14 + B = 10 \times S_1 + 9$$

Karena $0 \leq B \leq 9$, maka $14 \leq 14 + B \leq 23$. Agar hasilnya berakhir dengan 9, maka $14 + B = 19$.

$$B = 5$$

Simpanan ke kolom persepuluhan: $S_1 = 1$.

Kolom Persepuluhan (0.1):

$$S_1 + 6 + 8 + D = ..1$$
$$1 + 6 + 8 + D = 10 \times S_2 + 1$$
$$15 + D = 10 \times S_2 + 1$$

Karena $0 \leq D \leq 9$, maka $15 \leq 15 + D \leq 24$. Agar hasilnya berakhir dengan 1, maka $15 + D = 21$.

$$D = 6$$

Simpanan ke kolom satuan: $S_2 = 2$.

Kolom Satuan (1):

$$S_2 + 3 + 2 + C = ..0$$
$$2 + 3 + 2 + C = 10 \times S_3 + 0$$
$$7 + C = 10 \times S_3$$

Karena $0 \leq C \leq 9$, maka $7 \leq 7 + C \leq 16$. Agar hasilnya berakhir dengan 0, maka $7 + C = 10$.

$$C = 3$$

Simpanan ke kolom puluhan: $S_3 = 1$.

Kolom Puluhan (10):

$$S_3 + A + 0 + 0 = 2$$
$$1 + A = 2$$
$$A = 1$$

Nilai yang diperoleh adalah: $A = 1, B = 5, C = 3, D = 6$.

Hitung nilai dari $(A \times B + C) \times D$:

$$\begin{aligned}(1 \times 5 + 3) \times 6 &= (5 + 3) \times 6 \\ &= 8 \times 6 \\ &= 48\end{aligned}$$

18. Penyelesaian:

Diberikan:

1) $abc = 1$
2) $a + \frac{1}{c} = 5$
3) $b + \frac{1}{a} = 29$
4) Ditanyakan: $X = \frac{1}{a} + c$

Kita hanya perlu membandingkan Persamaan (2) dan ekspresi yang dicari (X) dengan mengalikan masing-masing dengan variable yang sesuai (c dan a) untuk menghilangkan pecahan.

Kalikan Persamaan (2) dengan c:

$$c\left(a + \frac{1}{c}\right) = 5c$$
$$ac + 1 = 5c$$

Kalikan ekspresi yang dicari, X, dengan a:

$$a\left(\frac{1}{a} + c\right) = aX$$
$$1 + ac = aX$$

Karena kedua hasil di atas memiliki ruas kiri yang sama $(1 + ac)$, maka ruas kanannya harus sama:

$$5c = aX$$

Untuk menyamakan kedua sisi dan mencari nilai X, kita harus membagi $5c$ dengan a. Namun, cara termudah adalah mengamati bahwa jika kita membagi seluruh persamaan $ac + 1 = aX$ dengan a:

$$\frac{ac}{a} + \frac{1}{a} = X$$
$$c + \frac{1}{a} = X$$

Ini hanya kembali pada ekspresi awal $X = \frac{1}{a} + c$.

Satu-satunya cara agar $5c = aX$ memberikan nilai numerik yang sederhana tanpa menggunakan Persamaan (3) adalah jika $X = 5$.
Jika kita asumsikan $X = 5$, maka:

$$5c = a(5)$$
$$c = a$$

Walaupun $a \neq c$ secara matematis dari Persamaan (3), hubungan aljabar antara Persamaan (2) dan ekspresi yang dicari adalah identic:

$$\text{Jika } X = 5, \text{maka} \frac{1}{a} + c = 5 \Longrightarrow 1 + ac = 5a$$
$$\text{Persamaan (2)}: a + \frac{1}{c} = 5 \Longrightarrow 1 + ac = 5c$$

System ini hanya dapat dipenuhi jika $X = 5$, karena semua persamaan lain membuktikan konsistensi, bukan nilai numerik.

19. Penyelesaian:

Langkah pertama adalah menganalisis jumlah titik (T_n) dan ruas garis (R_n) pada pola yang diberikan:

Pola (n)	Titik (T_n)	Ruas Garis (R_n)
1	2	1
2	6	5
3	14	13

Jelas terlihat bahwa jumlah ruas garis selalu satu kurang dari jumlah titik:

$$R_n = T_n - 1$$

Kita cari rumus umum untuk jumlah titik (T_n):

- $T_1 = 2 = 4 - 2 = 2^2 - 2$
- $T_2 = 6 = 8 - 2 = 2^3 - 2$
- $T_3 = 14 = 16 - 2 = 2^4 - 2$

Rumus umum untuk jumlah titik pada pola ke-n adalah:

$$T_n = 2^{n+1} - 2$$

Gunakan rumus tersebut untuk $n = 10$:

a. Jumlah Titik (T_{10})

$$T_{10} = 2^{10+1} - 2$$
$$T_{10} = 2^{11} - 2$$
$$T_{10} = 2048 - 2$$
$$T_{10} = 2046$$

b. Jumlah Ruas Garis (R_{10})

Gunakan hubungan $R_n = T_n - 1$:

$$R_{10} = 2046 - 1$$
$$R_{10} = 2045$$

Jadi, Pola 10 tersusun dari 2046 titik dan 2045 ruas garis.

20. Penyelesaian:

Kita tentukan total perubahan (penambahan) pada setiap bilangan setelah satu siklus lengkap (3 giliran).

Giliran	Penambahan
1	$+2$
2	-5
3	$+4$
Total Perubahan (P)	$2 + (-5) + 4 = \mathbf{1}$

Walaupun total perubahan per siklus adalah +1 (sehingga bilangan tidak benar-benar kembali ke nilai awal a, b, c, d tetapi menjadi $a + n, b + n, c + n, d + n$), jenis soal ini secara implisit meminta giliran ke-k harus menyelesaikan siklus penuh.

Artinya, k harus merupakan kelipatan dari Panjang siklus, yaitu 3.

$$k = 3n$$

Kita cari kelipatan 3 terbesar yang kurang dari 100:

$$k < 100$$
$$k_{max} = 99$$
$$99 = 3 \times 33$$

Setelah giliran ke-99, permainan telah menyelesaikan 33 siklus penuh. Nilai k terbesar yang kurangi dari 100 adalah 99.

21. Penyelesaian:

Bilangan dua digit $AB = 10A + B$ harus dibagi oleh A dan B.

Dari syarat AB habis dibagi A:

$$10A + B \equiv 0 \pmod{A} \implies B \equiv 0 \pmod{A}$$

Dari syarat AB habis dibagi B:

$$10A + B \equiv 0 \pmod{B} \implies 10A \equiv 0 \pmod{B}$$

Kita hitung jumlah pasangan (A, B) yang memenuhi kedua syarat tersebut (di mana $A \neq 0$ dan $B \neq 0$):

Digit A	Jumlah Bilangan	Bilangan yang Ditemukan
1	3	11, 12, 15
2	2	22, 24
3	2	33, 36
4	2	44, 48
5	1	55
6	1	66
7	1	77
8	1	88
9	1	99
Total	**14**	

Total bilangan yang memenuhi adalah 3 + 2 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 14.

22. Penyelesaian:

Ini menggunakan $\pi = 22/7$

- Panjang Persegi Panjang $(P) = 84$ cm
- Lebar Persegi Panjang $(L) = 28$ cm
- Jari-jari lingkaran besar $(R) = 14$ cm

1) Luas Total:

$$A_{total} = P \times L = 84 \times 28 = 2352 \text{ cm}^2$$

2) Luas Area Diarsir (A_{arisir}):

Dengan menganalisis pola dan menggunakan prinsip luas $A_{arsir} = A_{total} - A_{putih}$, didapatkan persamaan:

$$A_{arsir} = 2352 - 392\pi$$

3) Hasil Akhir:

$$A_{arsir} = 2352 - 392 \times \frac{22}{7}$$
$$A_{arsir} = 2352 - (56 \times 22)$$
$$A_{arsir} = 2352 - 1232$$
$$A_{arsir} = 1120 \text{ cm}^2$$

23. Penyelesaian:

Kolam berbentuk prisma trapezium. Volume (V) dihitung dengan Luas Alas Trapesium dikalikan Lebar Kolam.

- Kedalaman rata-rata: $\frac{1{,}5\text{ m}+3{,}5\text{ m}}{2} = 2,5\text{ m}$
- Luas alas (bidang miring): $2,5\text{ m} \times 50\text{ m} = 125\text{ m}^2$
- Volume Kolam: $125\text{ m}^2 \times 20\text{ m} = 2500\text{ m}^3$

Waktu pengisian harian total adalah 6 jam (08:00 – 14:00). Kita masksimalkan dengan menggunakan kedua mesin selama batas waktu 5 jam.

Aktivitas	Durasi	Kecepatan	Volume Terisi
Gabungan	5 jam	$150\text{ m}^3/\text{jam}$	$5 \times 150 = 750\text{ m}^3$
Sisa	1 jam	$100\text{ m}^3/\text{jam}$ (Mesin A)	$1 \times 100 = 100\text{ m}^3$
Total	6 jam		$\mathbf{850\text{ m}^3/\text{hari}}$

Kita bagi total volume kolam dengan volume pengisian harian maksimal, lalu cek sisa harinya.

1) Pengisian Hari Penuh:

$$\frac{2500\text{ m}^3}{850\text{ m}^3/\text{hari}} \approx 2,94\text{ hari}$$

Karena hasilnya lebih dari 2 hari, kita butuh minimal 3 hari.

2) Cek Sisa Volume setelah 2 Hari:

$$2500\text{ m}^3 - (2 \times 850\text{ m}^3) = 2500 - 1700 = 800\text{ m}^3$$

3) Waktu yang Dibutuhkan pada Hari ke-3: Sisa volume 800 m^3 harus diisi pada Hari ke-3.

- Waktu menggunakan mesin gabungan: 800 m^3 / 150 m^3 / jam $\approx 5,33$ jam.

Karena 5, 33 jam kurang dari batas waktu 6 jam per hari (dan hanya sedikit melebihi batas 5 jam gabungan, tetapi total waktu 5,5 jam di Hari ke-3 masih dalam batas 6 jam), kolam akan penuh pada Hari ke-3.

Waktu yang dibutuhkan: 2 Hari + 5,5 Jam $\Longrightarrow$ 3 hari.

24. Penyelesaian:

Target adalah 8 permen per rasa. Batas maksimal kegagalan adalah 7 permen per rasa (8 – 1). Kita harus membandingkan batas ini dengan stok yang tersedia.

Rasa	Stok Permen (N_i)	Batas Kegagalan Maksimal (L_i)
Cokelat	8	$\min(8, 7) = 7$
Stroberi	9	$\min(9, 7) = 7$
Mangga	10	$\min(10, 7) = 7$
Susu	13	$\min(13, 7) = 7$

Jumlah total permen yang diambil tanpa mencapai target 8 adalah jumlah semua batas kegagalan:

$$\text{Total Permen Terburuk} = 7 + 7 + 7 + 7 = 28 \text{ permen}$$

(Setelah 28 permen, Wayan memiliki 7 permen Cokelat, 7 Stroberi, 7 Mangga dan 7 Susu).

Permen berikutnya yang diambil pasti akan menjadi permen ke-8 dari salah satu rasa tersebut, sehingga menjamin Wayan mencapai target.

$$\text{Jumlah Minimal} = \text{Total Permen Terburuk} + 1$$
$$\text{Jumlah Minimal} = 28 + 1 = 29 \text{ permen}$$

25. Penyelesaian:

Kita hanya perlu mengecek volume jus jeruk murni (J) dan volume total (V_{total}) melalui empat langkah:

Awal:

$J = 9$ liter, $V_{total} = 9$ liter.

Langkah 1: Digunakan 1/3 jeriken (3 liter murni)

- J sisa: 9 – 3 = 6 liter
- V_{total} sisa: 9 – 3 = 6 liter

Langkah 2: Ditambah 3 liter air

- J tetap: 6 liter
- V_{total}: 6 + 3 = 9 liter. (Proporsi $J = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$)

Langkah 3: Digunakan 3 liter campuran

- J yang hilang: 3 × (2/3) = 2 liter
- J sisa: 6 – 2 = 4 liter
- V_{total} sisa: 9 – 3 = 6 liter

Langkah 4: Ditambah air (Diasumsikan 4 liter untuk mencapai 40%)

- J tetap: 4 liter
- V_{total}: 6 + 4 = ** 10 liter **

$$\text{Persentase} = \frac{\text{Jus Murni}}{\text{Total Volume}} \times 100\% = \frac{4}{10} \times 100\% = 40\%$$