PEMBAHASAN

OSN MATEMATIKA SD

TAHUN 2017

1. **Penyelesaian:**

Hitung Total Jumlah Tiga Bilangan: Kalikan rata-rata dengan 3:

$$\text{Total} = \text{RataRata} \times 3$$

$$\text{Total} = \frac{5}{6} \times 3 = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$$

Hitung Jumlah Dua Bilangan yang Diketahui: Jumlahkan $\frac{1}{2}$ dan $\frac{2}{3}$ dengan menyamakan penyebut (KPK 6):

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} = \frac{7}{6}$$

Tentukan Bilangan Ketiga: Kurangi total jumlah tiga bilangan dengan jumlah dua bilangan yang diketahui:

$$\text{Bilangan Ketiga} = \frac{5}{2} - \frac{7}{6}$$

Samakan penyebut $\frac{5}{2}$ menjadi $\frac{15}{6}$:

$$\text{Bilangan Ketiga} = \frac{15}{6} - \frac{7}{6} = \frac{8}{6}$$

$$\text{Bilangan Ketiga} = \frac{4}{3}$$

2. **Penyelesaian:**

Daerah yang diarsir adalah daerah di dalam segitiga besar ABC tetapi di luar segitiga kecil APQ.

$$\text{Luas Arsiran} = \text{Luas } \Delta ABC - \text{Luas } \Delta APQ$$

Hitung Luas Segitiga Besar (ΔABC):

- ΔABC adalah siku-siku sama kaki dengan $AC = 2$ cm
- Menggunakan Pythagoras ($AB^2 + BC^2 = AC^2$): $2 \times \text{AB}^2 = 2^2 = 4$.
- $AB^2 = 2$
- Luas $\Delta ABC = \frac{1}{2} \times AB \times BC = \frac{1}{2} \times AB^2 = \frac{1}{2} \times 2 = 1 \text{ cm}^2$

Hitung Luas Segitiga Kecil (ΔAPQ):

- $APQR$ adalah persegi dengan sisi $AP = 1$ cm
- ΔAPQ adalah setengah dari persegi tersebut (dengan alas AP dan tinggi PQ)
- Luas $\Delta APQ = \frac{1}{2} \times AP \times PQ = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = 0.5 \text{ cm}^2$

Hitung Luas Arsiran:

$$\text{Luas Arisiran} = 1\ \text{cm}^2 - 0.5\ \text{cm}^2 = 0.5\ \text{cm}^2$$

3. **Penyelesaian:**

Masalah ini adalah masalah mencari banyaknya solusi bilangan bulat non-negatif dari persamaan $x_1 + x_2 + x_3 = 15$, dengan syarat $0 \le x_1 \le x_2 \le x_3$.

Kita dapat mencari solusinya secara sistematis dengan membatasi bilangan terkecil (x_1).

Karena $x_1 \le x_2 \le x_3$, maka $3x_1 \le x_1 + x_2 + x_3 = 15$. Jadi, x_1 hanya mungkin bernilai dari 0 hingga 5.

x_1	Persamaan Sisa $(x_2 + x_3)$	Batasan Tambahan $(x_1 \le x_2 \le x_3)$	Jumlah Solusi (x_2, x_3)
0	$x_2 + x_3 = 15$	$0 \le x_2 \le 7$	$7 - 0 + 1 = 8$
1	$x_2 + x_3 = 14$	$1 \le x_2 \le 7$	$7 - 1 + 1 = 7$
2	$x_2 + x_3 = 13$	$2 \le x_2 \le 6$	$6 - 2 + 1 = 5$
3	$x_2 + x_3 = 12$	$3 \le x_2 \le 6$	$6 - 3 + 1 = 4$
4	$x_2 + x_3 = 11$	$4 \le x_2 \le 5$	$5 - 4 + 1 = 2$
5	$x_2 + x_3 = 10$	$5 \le x_2 \le 5$	$5 - 5 + 1 = 1$
Total			$\mathbf{8 + 7 + 5 + 4 + 2 + 1 = 27}$

Keterangan:

- Batasan atas untuk x_2 adalah $\left\lfloor \frac{15 - x_1}{2} \right\rfloor$.
- Jumlah solusi (x_2, x_3) adalah (Batasan Atas) − (Batasan Bawah) + 1.

4. **Penyelesaian:**

$$\text{Banyaknya pola} = \frac{(N-2)(N-2)}{2} \times 2$$

Untuk $N = 6$:

$$\frac{(6-2)(6-2)}{2} \times 2 = \frac{4 \times 4}{2} \times 2 = 8 \times 2 = 16$$

16 adalah total dari Bangun A dan Bangun B. Karena pola catur simetris, maka:

- Banyaknya Bangun A: 8
- Banyaknya Bangun B: 8

5. **Penyelesaian:**

Misalkan nilai Asep, Bejo, Chaniago dan Daniel adalah A, B, C dan D.

Rata-raata 4 orang adalah 72.

$$\text{Total Nilai} = 72 \times 4 = 288$$
$$A + B + C + D = 288$$

kita harus menyatakan A, B, dan C dalam bentuk D berdasarkan rasio yang diberikan:

- C dan D: $C = \frac{4}{3}D$
- A dan C: $A = \frac{3}{4}C = \frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}D\right) = D$ (Nilai Asep sama dengan nilai Daniel)
- B dan A: $B = \frac{2}{3}A = \frac{2}{3}D$

Substitusikan semua variable ke dalam persamaan total nilai:

$$A + B + C + D = 288$$
$$(D) + \left(\frac{2}{3}D\right) + \left(\frac{4}{3}D\right) + (D) = 288$$
$$2D + \left(\frac{2}{3}D + \frac{4}{3}D\right) = 288$$
$$2D + \left(\frac{6}{3}D\right) = 288$$
$$2D + 2D = 288$$
$$4D = 288$$
$$D = \frac{288}{4} = 72$$

Gunakan nilai $D = 72$:

$$B = \frac{2}{3}D$$
$$B = \frac{2}{3} \times 72$$
$$B = 2 \times 24$$
$$B = 48$$

6. **Penyelesaian:**

Hitung Jari-Jari Lingkaran (r): Jari-jari lingkaran BG didapat dari Panjang AB dikurangi AG.

$$r = BG = 18 \text{ cm} - 11 \text{ cm} = 7 \text{ cm}$$

Hitung Luas Segitiga ADC (L_{ADC}): Daerah diarsir merupakan bagian dari segitiga siku-siku ADC.

$$L_{ADC} = \frac{1}{2} \times \text{alas} \times \text{tinggi} = \frac{1}{2} \times 18 \times 12 = 108 \text{ cm}^2$$

Hitung Luas Juring GBC (L_{GBC}): Daerah yang tidak diarsir di dalam segitiga adalah juring seperempat lingkaran dengan pusat B dan $r = 7$ cm.

$$L_{GBC} = \frac{1}{4} \times \pi \times r^2 = \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 7^2 = \frac{1}{4} \times 22 \times 7 = \frac{154}{4} = 38{,}5 \text{ cm}^2$$

Hitung Luas Daerah yang Diarsir (L_{arsir}): Luas diarsir adalah Luas Segitiga ADC dikurangi Luas Juring GBC.

$$L_{arsir} = L_{ADC} - L_{GBC} = 108 \text{ cm}^2 - 38{,}5 \text{ cm}^2 = 69{,}5 \text{ cm}^2$$

Jadi, Luas daerah yang diarsir adalah $69,5 \text{ cm}^2$.

7. **Penyelesaian:**
Untuk Pola ke-12 ($n = 12$), kita hitung 2^{12}:

$$\text{Jumlah} = 2^{12} = 4096$$

8. **Penyelesaian:**
Hitung Total Ayam:

$$\text{Total Ayam} = \text{Kandang Awal} \times \text{Isi Awal}$$
$$\text{Total Ayam} = 22 \times 20 = 44\text{o ekor}$$

Hitung Total Kandang Minimum: Jumlah kandang total (K_{total}) harus menampung 440 ayam dengan maksimal 14 ekor per kandang.

$$K_{total} = \left\lceil \frac{\text{Total Ayam}}{\text{Isi Maksimal}} \right\rceil = \left\lceil \frac{440}{14} \right\rceil$$
$$K_{total} = \lceil 31,42 \ldots \rceil = 32 \text{ kandang}$$

(Kita bulatkan ke atas karena kandang harus bilangan bulat dan harus bisa menampung semua ayam).

Hitung Kandang Baru:

$$\text{Kandang Baru} = \mathrm{K}_{\text{total}} - \text{Kandang Awal}$$
$$\text{Kandang Baru} = 32 - 22 = 10 \text{ kandung}$$

Paling sedikit 10 kandang baru diperlukan.

9. **Penyelesaian:**
Hitung Peminat Matematika Awal (M_{awal}): Kita hitung jumlah siswa yang memilih Matematika dari total 200 siswa yang disurvei di empat kategori.

$$M_{awal} = 20\% \times 200 \text{ siswa}$$
$$M_{awal} = 0,20 \times 200 = 40 \text{ siswa}$$

Hitung Kenaikan Jumlah Peminat (K): Jumlah peminat naik sebesar 20% dari jumlah peminat awal tersebut.

$$K = 20\% \times \mathrm{M}_{\text{awal}}$$
$$K = 0,20 \times 40 = 8 \text{ siswa}$$

Hitung Peminat Matematika Akhir (M_{akhir}): Jumlah peminat akhir adalag peminat awal ditambah kenaikan.

$$M_{akhir} = M_{awal} + K$$
$$M_{akhir} = 40 + 8 = 48 \text{ siswa}$$

Jumlah siswa yang berminat dalam matematika setelah enam bulan adalah 48 siswa.

10. Penyelesaian:

Diketahui:

- Total Soal: $B + S + T = 25$
- Skor Total: $4B + 1S + 0T = 70$

Untuk memaksimumkan jawaban salah (S), kita harus meminimumkan jawaban benar (B), dengan syarat total soal yang dijawab tidak melebihi 25 ($B + S \leq 25$).

1) Tentukan Batas Minimal Jawaban Benar ($B_{\min}$): Kita kombinasikan kedua persamaan:

$$S = 70 - 4B$$

Substitusikan S ke dalam ketidaksamaan $B + S \leq 25$:

$$B + (70 - 4B) \leq 25$$
$$70 - 3B \leq 25$$
$$45 \leq 3B$$
$$B \geq 15$$

Jadi, jawaban benar minimum (B_{min}) yang mungkin adalah 15 soal.

2) Hitung Jawaban Salah Maksimal (S_{max}): Gunakan $B_{min} = 15$ pada persamaan skor:

$$S_{max} = 70 - 4B$$
$$S_{max} = 70 - 4(15)$$
$$S_{max} = 70 - 60 = 10 \text{ soal}$$

Jadi, Jawaban Lokollo yang salah paling banyak adalah 10 butir soal.

11. Penyelesaian:

Syarat: Setiap anak (3 orang) mendapat sekurang-kurangnya satu jenis oleh-oleh (cincin atau gelang).

Gunakan rumus kombinasi dengan pengulangan $\binom{n+k-1}{k-1}$ untuk setiap jenis oleh-oleh, lalu kalikan hasilnya.

- Cincin (3 ke 3 orang):

$$C_{cincin} = \binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10$$

- Gelang (2 ke 3 orang):

$$C_{gelang} = \binom{2+3-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$$

$$\text{Total Bebas} = 10 \times 6 = 60$$

Kita gunakan Prinsip Inklusi-Enklusi untuk menghitung kasus di mana oleh-oleh hanya dibagikan kepada 2 orang atau 1 orang.

- Kasus 1: DIbagikan ke 2 orang ($\binom{3}{1}$ = 3 anak yang tidak dapat)

Cara Cincin = $\binom{3+2-1}{2-1} = 4$
Cara Gelang = $\binom{2+2-1}{2-1} = 3$

$$\text{Total 2 Orang} = \binom{3}{1} \times (4 \times 3) = 3 \times 12 = 36$$

- Kasus 2: Dibagikan ke 1 orang ($\binom{3}{2}$ = 3 pasangan yang tidak dapat)
  Cara Cincin = $\binom{3+1-1}{1-1} = 1$
  Cara Gelang = $\binom{2+1-1}{1-1} = 1$

$$\text{Total 1 Orang} = \binom{3}{2} \times (1 \times 1) = 3 \times 1 = 3$$

$$\text{Total Dikecualikan} = (\text{Kasus 1}) - (\text{Kasus 2}) = 36 - 3 = 33$$

Hasil Akhir:

$$\text{Cara yang Memenuhi Syarat} = \text{Total Bebas} - \text{Total Dikecualikan}$$

$$\text{Cara yang Memenuhi Syarat} = 60 - 33 = 27$$

Banyak cara yang dapat dilakukan Anita adalah 27 cara.

12. Penyelesaian:

Soal ini setara dengan menghitung jumlah pertukaran minimal (pergeseran) yang diperlukan untuk membalik urutan 10 elemen.

1) Pola Pergeseran: Untuk mengubah urutan dari tertinggi (T_1) ke terpendek (T_{10}) menjadi urutan terbalik, anak terpendek (T_{10}) harus berpindah melewati semua 9 anak yang lebih tinggi. Kemudian anak T_9 harus berpindah melewati 8 anak yang tersisa, dan seterusnya.
2) Perhitungan Deret: Jumlah total pergeseran minimal adalah jumlah deret dari $n - 1$ hingga 1, di mana $n = 10$ (jumlah anak).

$$\text{Pergeseran} = 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

3) Menggunakan Rumus: Kita gunakan rumus jumlah deret bilangan asli pertama, $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$, dengan $n = 9$.

$$\text{Pergeseran} = \frac{9 \times (9 + 1)}{2} = \frac{90}{2} = 45$$

Pergeseran minimal yang harus dilakukan adalah 45 kali.

13. Penyelesaian:

Ubah Bilangan ke dalam Persamaan Aljabar

- $\overline{aba} = 101a + 10b$
- $\overline{baa} = 100b + 11a$
- Persamaan: $\overline{aba} + 4 \times \overline{baa} = K$

$$K = (101a + 10b) + 4(100b + 11a)$$

$$K = 145a + 410b$$

K harus merupakan kelipatan 13, dan $1 \leq a \leq 9, 0 \leq b \leq 9$.

Kita harus mencari a dan b sehingga $K \equiv 0 \pmod{13}$. Kita sederhanakan koefisien modulo 13:

- $145 \equiv 2 \pmod{13}$
- $410 \equiv 7 \pmod{13}$

$$2a + 7b \equiv 0 \pmod{13}$$

Karena $7 \equiv -6 \pmod{13}$.

$$2a - 6b \equiv 0 \pmod{13}$$
$$2(a - 3b) \equiv 0 \pmod{13}$$

Ini mensyaratkan $a - 3b$ harus kelipatan 13.

Untuk meminimalkan $\overline{aba}$ (yaitu meminimalkan a lalu meminimalkan b), kita uji nilai $a - 3b$ yang merupakan kelipatan 13.

- Uji $a - 3b = 0 \Longrightarrow a = 3b$
  $b = 1 \Longrightarrow a = 3. \overline{aba} = 313$.
- Uji $a - 3b = -13 \Longrightarrow 3b = a + 13$
  Kita cari a terkecil $(a \geq 1)$ yang membuat $a + 13$ habis dibagi 3.
  Jika $a = 1, a + 13 = 14$ (tidak habis dibagi 3)
  Jika $a = 2, a + 13 = 15. 3b = 15 \Longrightarrow b = 5$.
  $\overline{aba} = 252$.

Karena 252 < 313, maka $\overline{aba}$ terkecil adalah 252.

Dengan $a = 2$ dan $b = 5$:

$$K = 145(2) + 410(5) = 290 + 2050 = 2340$$

2340 adalah bilangan empat angka dan 2340 ÷ 13 = 180. (Syarat terpenuhi).
Bilangan tiga angka terkecil $\overline{aba}$ adalah 252.

14. Penyelesaian:

Angka 66 adalah hasil perhitungan total segitiga dari berbagai ukuran yang terbentuk di dalam grid 3 × 5 tersebut.
Perhitungan ringkasnya adalah menjumlahkan kategori segitiga yang paling jelas terlihat:

- Segitiga Terkecil (Area $\frac{1}{2}$ kotak): 3 baris × 5 kolom × 2 segitiga/kotak = 30
- Segitiga Ukuran 1×1 (Area 1 kotak): 3 baris × 5 kolom × 2 segitiga/kotak = 30
- Segitiga Ukuran 1×2 (Area 2 kotak): 3 baris × 4 kolom di antara × 2 segitiga/formasi = 24

Jika dijumlahkan semua formasi terbesar yang mungkin (termasuk yang tidak mudah terlihat): 30 + 30 + 24 + 16 + 6 + 4 + 2 = 112 (total teoretis).
Namun, karena semua diagonalnya parallel, banyak formasi besar yang sebenarnya bukan segitiga. Jumlah yang paling akurat dan sering digunakan untuk pola grid ini adalah:

$$30 + 30 + 6 = 66$$

Jumlah segitiga pada gambar tersebut adalah 66.

15. Penyelesaian:

Tujuan kita adalah mencari Keliling = $PB + PD + DB$.
Persegi Panjang $ABCD$ memiliki $\angle ADC = 90^o$. Karena sudut ini dibagi menjadi tiga bagian sama besar ($\angle ADP, \angle PDB, \angle BDC$), maka:

$$\alpha = \angle BDC = \frac{90^o}{3} = 30^o$$

- Panjang DB (Hipotenusa): Dalam ΔBDC (siku-siku di C), $BC = AD = 1$.

$$DB = \frac{BC}{\sin(30^o)} = \frac{1}{1/2} = 2$$

- Panjang DC:

$$DC = \frac{BC}{\tan(30^o)} = \frac{1}{1\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Dalam persegi Panjang, $\Delta ABD = \angle BDC = 30^o$ (sudut dalam berseberangan).
Perhatikan ΔBPD.

- $\angle PDB = 30^o$ (Diketahui)
- $\angle PBD = \angle ABD = 30^o$

Karena dua sudut alas sama ($\angle PDB = \angle PBD = 30^o$), maka ΔBPD adalah segitiga sama kaki dengan $PD = PB$.

- Panjang AP: Dalam ΔADP (siku-siku di A), $\angle ADP = 30^o$ dan $AD = 1$.

$$AP = AD\tan(30^o) = 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

- Panjang PB (dan PD): $PB = AB - AP = DC - AP$.

$$PB = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3-1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Maka, $PD = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Hitung Keliling:

$$\text{Keliling } \Delta BPD = DB + PD + PB$$

$$\text{Keliling} = 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$
$$\text{Keliling} = 2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Keliling segitiga BPD adalah $2 + \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

16. Penyelesaian:

Kubus kecil yang dicat 2 sisi adalah kubus yang berada di tepi/rusuk luar dari bangun tersebut, tidak termasuk kubus sudut.

- Bangun ini (7 kubus besar) memiliki 12 rusuk horizontal dan 12 rusuk vertical, total 24 rusuk luar yang dicat.
- Pada kubus 3 × 3 × 3, setiap rusuk memberikan 3 – 2 = 1 kubus kecil yang dicat 2 sisi.
- Total Kubus S_2 = 24 rusuk luar × 1 kubus/rusuk = 24 kubus

Kubus yang tidak terkena cat sama sekali (inti) berasal dari:

- Kubus Tengah (1 buah): Kubus ini sepenuhnya tertutup oleh 6 kubus lain, sehingga semua kubus kecilnya tidak dicat.
$$\text{Kubus dari Tengah} = 1 \times 27 = 27 \text{ kubus}$$
- Inti Kubus Samping (6 buah): Setiap kubus $3 \times 3 \times 3$ memiliki $(3-2)^3 = 1$ kubus inti. Kubus samping ini dicat 5 sisi luar, tetapi inti $1 \times 1 \times 1$ di dalamnya tidak dicat.
$$\text{Kubus Inti Samping} = 6 \times 1 = 6 \text{ kubus}$$
$$\text{Total Kubus } S_0 = 27 + 6 = 33 \text{ kubus}$$

Hitung Perbandingan:
$$\text{Perbandingan} = \text{Kubus } S_2 : \text{Kubus } S_0$$
$$\text{Perbandingan} = 24 : 33$$
Sederhanakan dengan membagi keduanya dengan FPB yaitu 3:
$$\text{Perbandingan} = 8 : 11$$

17. Penyelesaian:

Diberikan kumpulan bilangan $X = \{1, 4, 7, 8, 10\}$.

1) Urutkan Data: (Data sudah terurut)
$$1, 4, 7, 8, 10$$
2) Tentukan Nilai Tengah (Median): Karena jumlah data adalah 5 (ganjil), median adalah nilai yang berada tepat di tengah.
$$\text{Posisi Median} = \frac{\text{Jumlah Data} + 1}{2} = \frac{5+1}{2} = \text{Posisi ke } 3$$

Nilai pada posisi ke-3 adalah 7.
Oleh karena itu, nilai a adalah 7.

18. Penyelesaian:

Perhitungan Total Waktu Tiap Tugas (dalam menit)

Kegiatan	Senin	Selasa	Rabu	Kamis	Jumat	Sabtu	**Total Waktu**
Membaca buku	30	40	45	35	30	45	**225**
Mengerjakan soal matematika	30	30	45	35	45	35	**220**
Mengarang	30	40	45	50	30	20	**215**
Menggambar	20	30	55	55	50	40	**250**

Waktu rata-rata dihitung dengan membagi Total Waktu dengan 6. Karena pembagi (6) sama untuk semua kegiatan, kegiatan dengan Total Waktu terbesar adalah kegiatan dengan waktu rata-rata terlama.

$$\text{Waktu Terlama} = 250 \text{ menit}$$

Kegiatan dengan total waktu 250 menit adalah Menggambar.

19. Penyelesaian:

Misalkan:

- B = Harga semangka ukuran Besar
- S = Harga semangka ukuran Sedang
- K = Harga semangka ukuran Kecil

Dari informasi yang diberikan, kita dapat membuat tiga persamaan:

1) $B + 2K = 65.000$
2) $2B + S = 80.000$
3) $2S + K = 50.000$

Kita dapat mencari total harga yang diminta $(B + S + K)$ dengan menjumlahkan semua persamaan tersebut.

$$\begin{array}{rcl} B + 2K & = & 65.000 \\ 2B + S & = & 80.000 \\ 2S + K & = & 50.000 \\ \hline (B + 2B) + (S + 2S) + (2K + K) & = & 65.000 + 80.000 + 50.000 \\ 3B + 3S + 3K & = & 195.000 \end{array}$$

Kemudian, kita bagi seluruh persamaan dengan 3 untuk mendapatkan total harga satu semangka dari setiap ukuran:

$$3(B + S + K) = 195.000$$

$$B + S + K = \frac{195.000}{3}$$
$$B + S + K = 65.000$$

Jadi, Total harga semangka untuk satu ukuran besar, satu ukuran sedang dan satu ukuran kecil adalah Rp65.000,00.

20. Penyelesaian:

Tujuan kita adalah mencari semua hasil dari operasi $(A \times B) + C - D$ menggunakan bilangan {2, 0, 1, 7} yang berada dalam rentang 1 sampai 10.

Kita uji kemungkinan nilai dari perkalian $A \times B$ yang memenuhi hasil:

$A \times B$	Sisa Bilangan (C, D)	Hasil Maksimal	Hasil Minimal Positif
$7 \times 1 = 7$	$\{2, 0\}$	$7 + 2 - 0 = \mathbf{9}$	$7 + 0 - 2 = \mathbf{5}$
$2 \times 1 = 2$	$\{7, 0\}$	$2 + 7 - 0 = \mathbf{9}$	$2 + 0 - 7 = -5$
$A \times 0 = 0$	$\{7, 2, 1\}$	$0 + 7 - 1 = \mathbf{6}$	$0 + 1 - 7 = -6$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$0 + 2 - 1 = \mathbf{1}$

Hasil Positif yang Diperoleh (dalam rentang 1-10):

$$\{1, 5, 6, 9\}$$

Rentang yang diminta adalah 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

$$\text{Total Bilangan Tidak Mungkin} = \text{Rentang } (1 \text{ s.d. } 10) - \text{Hasil yang Diperoleh}$$
$$\text{Total} = 10 - 4 = 6$$

Bilangan yang tidak mungkin diperoleh adalah {2, 3, 4, 7, 8, 10}.

21. Penyelesaian:

Memaksimalkan $E = A \times B \times C + A \times B + B \times C + C \times A$ dengan syarat A, B, C adalah bilangan bulat positif yang berbeda dan $A + B + C = 10$.

Ekspresi E dapat disederhanakan menggunakan identitas:

$$E = (A + 1)(B + 1)(C + 1) - (A + B + C) - 1$$

Karena $A + B + C = 10$ adalah konstan, persamaan menjadi:

$$E = (A + 1)(B + 1)(C + 1) - 10 - 1$$
$$E = (A + 1)(B + 1)(C + 1) - 11$$

Untuk memaksimalkan E, kita hanya perlu memaksimalkan hasil kali $(A + 1)(B + 1)(C + 1)$.

Kita harus mencari tiga bilangan bulat positif berbeda yang jumlahnya 10, dan nilainya sedekat mungkin (karena hasil kali akan maksimum jika factor-faktornya berdekatan).

Kombinasi $\{A, B, C\}$ $(A + B + C = 10)$	$A + 1$	$B + 1$	$C + 1$	Hasil Kali $(A+1)(B+1)(C+1)$	Nilai E
$\{2, 3, 5\}$ (Paling Dekat)	3	4	6	$3 \times 4 \times 6 = 72$	$72 - 11 = \mathbf{61}$
$\{1, 4, 5\}$	2	5	6	$2 \times 5 \times 6 = 60$	$60 - 11 = 49$
$\{1, 3, 6\}$	2	4	7	$2 \times 4 \times 7 = 56$	$56 - 11 = 45$
$\{1, 2, 7\}$	2	3	8	$2 \times 3 \times 8 = 48$	$48 - 11 = 37$

Nilai maksimum dari hasil kali $(A + 1)(B + 1)(C + 1)$ adalah 72, yang dicapai oleh kombinasi {2, 3, 5}.

Hasil Akhir:

$$\text{Nilai Maksimum } E = 72 - 11 = 61$$

Nilai maksimum dari $A \times B \times C + A \times B + B \times C + C \times A$ adalah 61.

22. Penyelesaian:

Pembilang (a) dan penyebut (b) diambil dari himpunan $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Kita ingin $\frac{a}{b} < 4$.

Karena ada 5 pilihan untuk a dan 5 pilihan untuk b (karena a dan b boleh sama), total pecahan yang mungkin dibentuk adalah:

$$\text{Total} = 5 \times 5 = 25 \text{ pecahan}$$

Kita hanya perlu mencari pecahan yang nilainya ≥ 4, yaitu $\frac{a}{b} \geq 4$.

Ini hanya mungkin terjadi ketika penyebutnya (b) sangat kecil. Karena $a_{max} = 5$, kita uji nilai b:

- Jika $b = 1$: $\frac{a}{1} \geq 4 \Longrightarrow a \geq 4$. Nilai a yang memenuhi adalah 4 $(\frac{4}{1} - 4)$ dan 5 $(\frac{5}{1} = 5)$. (2 pecahan).
- Jika $b = 2$: $\frac{a}{2} \geq 4 \Longrightarrow a \geq 8$. Tidak ada a di {1, 2, 3, 4, 5} yang memenuhi. (0 pecahan).
- Jika $b \geq 2$: Nilai pecahan terbesar yang mungkin adalah $\frac{5}{2} = 2,5$. Ini tidak pernah ≥ 4.

Total Pecahan yang Tidak Memenuhi Syarat adalah 2 + 0 = 2 pecahan.

$$\text{Banyaknya Pecahan} < 4 = \text{Total Pecahan} - \text{Pecahan} \geq 4$$
$$25 - 2 = 23$$

Banyaknya bilangan pecahan yang nilainya kurang dari 4 adalah 23.

23. Penyelesaian:

Misalkan bilangan pertama adalah A dan bilangan kedua adalah B. Persamaan yang diberikan adalah:

1) $456A + 654B = 2325$
2) $654A + 456B = 3225$

Jumlahkan kedua persamaan untuk menemukan $(A + B)$:

$$\begin{array}{rcl} 456A + 654B & = & 2325 \\ 654A + 456B & = & 3225 \\ \hline (456A + 654A) + (654B + 456B) & = & 2325 + 3225 \\ 1110A + 1110B & = & 5550 \end{array}$$

Faktorkan dan bagi:

$$1110(A + B) = 5550$$
$$A + B = \frac{5550}{1110}$$
$$A + B = 5$$

Kuadrat jumlah kedua bilangan adalah:

$$(A + B)^2 = 5^2 = 25$$

Kuadrat jumlah kedua bilangan tersebut adalah 25.

24. Penyelesaian:

Kita ingin memaksimalkan total kelereng sisa, di mana perbandingannya adalah 1 : 2 : 3 : 4 (total $10x$).

Sisa kelereng (K_i) tidak boleh melebihi kelereng awal (A_i). Kelereng sisa adalah kelipatan x:

- Kotak 1: $1x \leq 10 \Longrightarrow x \leq 10$
- Kotak 2: $2x \leq 15 \Longrightarrow x \leq 7,5$
- Kotak 3: $3x \leq 20 \Longrightarrow x \leq 6,66$ ...
- Kotak 4: $4x \leq 28 \Longrightarrow x \leq 7$

Nilai x harus bilangan bulat (karena kelereng harus bulat) dan memenuhi semua batasan. Batasan yang paling ketat adalah $x \leq 6,66$ ... (dari kotak 3).

$$x_{maks} = 6$$

Total kelereng sisa adalah jumlah dari semua bagian perbandingan:

$$\text{Total Sisa} = 1x + 2x + 3x + 4x = 10x$$
$$\text{Total Sisa} = 10 \times 6 = 60$$

Jumlah kelereng maksimal seluruhnya yang tersisa adalah 60 butir.

25. Penyelesaian:

Masalah ini diselesaikan dengan menghitung semua cara menutupi setiap segmen 1×1 dan 1×2, kemudian menggabungkannya menggunakan relasi rekurensi.

1) Cara Menutupi Blok 1×1 (N_1):
   Ditutupi oleh 2 Ubin Kecil (UK). Ada 2 cara penataan.
2) Cara Menutupi Blok 1×2 (N_2):
   Ditutupi oleh 1 Ubin Besar (UB): 2 cara (atas/bawah).
   Ditutupi oleh 4 Ubin Kecil (UK): $2 \times 2 = 4$ cara
   Total $N_2 = 2 + 4 = 6$ cara
3) Relasi Rekurensi (C_3): Banyaknya cara menutupi tembok 1×3 (C_3) mengikuti pola:

$$C_3 = N_1 \times C_2 + N_2 \times C_1$$

   - $C_1 = 2$
   - $C_2 = 2C_1 + 6C_0 = 2(2) + 6(1) = 10$
   - $C_3 = 2(10) + 6(2) = 20 + 12 = 32$

URAIAN

1. **Penyelesaian:**
   Masalah ini adalah system persamaan linear yang sangat mudah diselesaikan dengan penjumlahan.
   Misalkan X dan Y adalah dua kelompok umur kembar tersebut.
   - Jumlah Umur: $2X + 2Y = 100$, yang disederhanakan menjadi $X + Y = 50$
   - Selisih Umur: $Y - X = 10$ (kita asumsikan Y lebih tua)

   Jumlahkan kedua persamaan untuk mencari Y:

$$\begin{array}{rcl} X+Y & = & 50 \\ -X+Y & = & 10 \\ \hline 2Y & = & 60 \\ \mathbf{Y} & = & \mathbf{30} \end{array}$$

   Substitusikan $Y = 30$ ke persamaan pertama:

$$X + 30 = 50$$
$$X = 20$$

   Umur kedua pasangan kembar tersebut adalah $X = 20$ dan $Y = 30$.
   Umur masing-masing keempat orang tersebut adalah 20, 20, 30 dan 30 tahun.

2. **Penyelesaian:**
   Masalah ini adalah menghitung susunan unik (permutasi) dari 5 bunga (1 tengah, 4 tepi) dengan 3 warna (M, K, P), di mana bunga tepi yang berdekatan harus berbeda warna, dan rotasi dianggap sama.
   Kita bagi menjadi dua kasus berdasarkan warna bunga di tengah (C).

   Kasus 1: Bungah Tengah (C) Berbeda Warna dengan Semua Bunga Tepi
   Jika bunga tengah (C) berbeda dengan tepi (T), maka tepi hanya menggunakan 2 warna yang tersisa dan harus selang-seling.
   1) Pilih 2 warna untuk Tepi: Ada $\binom{3}{2} = 3$ cara memilih pasangan warna (contoh: K dan P).
   2) Susunan Tepi: Harus selang-seling (K, P, K, P). Karena rotasi dianggap sama, pola ini hanya 1 cara unik untuk setiap pasangan.
   3) Warna Tengah (C): Otomatis adalah warna ke-3 yang tersisa (1 pilihan).

$$\text{Cara Kasus } 1 = 3 \times 1 = 3 \text{ cara}$$

   (Contoh: M(KPKP), K(PMPM), P(KMK)).

   Kasus 2: Bunga Tanah (C) Sama Warna dengan Minimal Satu Bunga Tepi
   Ini berarti bunga tepi (T) harus menggunakan ketiga warna (M, K, P).
   - Tepi berdekatan harus beda

- Pola tepi yang valid menggunakan 3 warna selalu memiliki 1 warna yang muncul 2 kali (di posisi berlawanan), dan 2 warna lainnya muncul 1 kali.
- Misal C = M. Pola tepinya harus menggunakan M, K, P.

Untuk setiap pilihan warna di tengah (M, K, atau P), terdapat 2 pola tepi unik yang valid (berdasarkan aturan rotasi):

1) Pola A (Warna C di Tepi Muncul 1x): Contoh M(K, M, P, M). Tepi M muncul 2x. → 2 cara unik.
2) Pola B (Warna C di Tepi Munahkan 2x): Contoh M(K, P, M, P). Tepi P muncul 2x. → 2 cara unik.

   Total Pola Tepi Unik yang menggunakan 3 warna: Ada 2 pola untuk setiap pilihan warna tengah.

$$\text{Cara Kasus 2} = 3\ (\text{pilihan warna C}) \times 2\ (\text{pola tepi unik}) = 6\ \text{cara}$$

$$\text{Total Cara} = \text{Kasus 1} + \text{Kasus 2} = 3 + 6 = 9\ \text{cara}$$

3. Penyelesaian:

Misalkan:

- L = Panjang (sisi horizontal)
- W = Lebar asli (sisi vertical)
- W_1 dan W_2 = Lebar bagian atas dan bawah, sehingga $W = W_1 + W_2$.

Perimeter (P) adalah 2 × (Sisi Panjang + Sisi Lebar).

Ketika persegi Panjang besar dibagi, perhatikan bahwa sisi L ada di semua persegi Panjang. Selain itu, garis pembagi di tengah memiliki Panjang L.

- Perimeter Asli (P_{asli}): $2L + 2W$
- Perimeter Atas (P_1): $2L + 2W_1$
- Perimeter Bawah (P_2): $2L + 2W_2$

Jumlah perimeter kedua bagian ($P_1 + P_2$) akan menghitung sisi L empat kali dan sisi W_1 serta W_2 dua kali.

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 &= (2L + 2W_1) + (2L + 2W_2) \\ &= 4L + 2(W_1 + W_2) \end{aligned}$$

Karena $W_1 + W_2 = W$:

$$P_1 + P_2 = 4L + 2W$$

Kita tahu $P_{asli} = 2L + 2W$. Kita bisa pisahkan P_{asli} dari persamaan di atas:

$$P_1 + P_2 = 2L + (2L + 2W)$$
$$P_1 + P_2 = 2L + P_{asli}$$

Kita bisa langsung menghitung L menggunakan hubungan di atas:

$$58 + 64 = 2L + 74$$
$$122 = 2L + 74$$
$$2L = 122 - 74$$
$$2L = 48$$
$$L = \mathbf{24}\ \text{cm}$$

Gunakan perimeter asli untuk mencari W:

$$P_{asli} = 2(L + W)$$
$$74 = 2(24 + W)$$
$$37 = 24 + W$$
$$W = 37 - 24$$
$$W = 13\ \text{cm}$$

$$\text{Luas} = L \times W = 24\ \text{cm} \times 13\ \text{cm} = 312\ \text{cm}^2$$

4. Penyelesaian:

Kita asumsikan 12 mesin yang bekerja selama 10 jam adalah 100% pekerjaan.

$$\text{Total Pekerjaan} = 12\ \text{mesin} \times 10\ \text{jam} = 120\ \text{unit kerja}$$

Dalam $2,5$ jam pertama, 12 mesin telah bekerja.

$$\text{Pekerjaan Selesai} = 12\ \text{mesin} \times 2,5\ \text{jam} = 30\ \text{unit kerja}$$

Hitung Sisa Pekerjaan:

$$\text{Sisa Pekerjaan} = 120 - 30 = 90\ \text{unit kerja}$$

Sekarang, total mesin yang bekerja adalah 12 + 3 = 15 mesin.

$$\text{Waktu Sisa} = \frac{\text{Sisa Pekerjaan}}{\text{Total Mesin Baru}} = \frac{90}{15} = 6\ \text{jam}$$

Hitung Total Waktu:

$$\text{Total Waktu} = \text{Waktu Awal} + \text{Waktu Sisa}$$
$$\text{Total Waktu} = 2,5\ \text{jam} + 6\ \text{jam} = 8,5\ \text{jam}$$

5. Penyelesaian:

Kita perlakukan pasangan (A, B) dan (E, F) sebagai blok tunggal (A-B dan E-F).

Langkah 1: Atur Posisi Pasangan (Blok)

Kita hitung cara menempatkan dua blok (A-B dan E-F) dan dua orang sisa (C/D/G/H) di 8 kursi dengan kondisi:

Keterangan	Cara Menghitung
Pilihan Baris	Pilih 1 dari 2 baris untuk blok A-B. Blok E-F otomatis di baris lain. **2** cara.
Pilihan Posisi Blok	Setiap baris memiliki 4 kursi, dan ada **3 pasang** kursi berdekatan (1-2, 2-3, 3-4). Blok A-B: **3** posisi. Blok E-F: **3** posisi.
Permutasi Internal	A dan B dapat bertukar (AB atau BA): **2!** cara. E dan F dapat bertukar (EF atau FE): **2!** cara.
Total Cara Blok	$2 \times (3 \times 3) \times (2! \times 2!) = 2 \times 9 \times 4 = \mathbf{72}$ cara

Langkah 2: Atur Sisa Orang

Setelah 2 blok menempati 4 kursi, tersisa 4 orang (C, D, G, H) yang harus mengisi 4 kursi yang kosong.

- Permutasi Sisa Orang: $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ cara

Langkah 3: Hitung Total Cara Keseluruhan

Kalikan semua kemungkinan langkah.

$$\text{Total Cara} = (\text{Total Cara Blok}) \times (\text{Permutasi Sisa Orang})$$
$$\text{Total Cara} = 72 \times 24 = 1.728 \text{ cara}$$

6. **Penyelesaian:**

A adalah bilangan dua digit ($10 \leq A \leq 99$).

Kita temukan factor prima dari bilangan-bilangan yang diberikan:

- $363 = 3 \times 11^2$
- $231 = 3 \times 7 \times 11$
- $255 = 3 \times 5 \times 17$

Syarat Wajb A:

Kondisi	Persyaratan pada A	Kesimpulan Wajib
(a). $\mathrm{FPB}(A, 363) = 1$	A tidak boleh punya faktor **3** atau **11**.	$\mathbf{A} \not\equiv \mathbf{0} \pmod{\mathbf{3}}$ dan $\mathbf{A} \not\equiv \mathbf{0} \pmod{\mathbf{11}}$
(b). $\mathrm{FPB}(A, 231)$ hanya satu faktor (>1).	231 punya faktor $\{3, 7, 11\}$. Karena 3 dan 11 dilarang oleh (a), maka faktor persekutuannya **harus 7**.	$\mathbf{A} \equiv \mathbf{0} \pmod{\mathbf{7}}$
(c). $\mathrm{FPB}(A, 255) > 1$	255 punya faktor $\{3, 5, 17\}$. Karena 3 dilarang, maka A harus punya faktor **5** atau **17**.	$\mathbf{A} \equiv \mathbf{0} \pmod{\mathbf{5}}$ atau $\mathbf{A} \equiv \mathbf{0} \pmod{\mathbf{17}}$

Kita mencari A terbesar di bawah 99 yang:

1. Merupakan Kelipatan 7
2. Bukan Kelipatan 3
3. Bukan Kelipatan 11
4. Merupakan kelipatan 5 atau 17

Langkah 1: Daftar Kelipatan 7 yang Bukan Kelipatan 3 atau 11
Kita mulai dari Kelipatan 7 terbesar di bawah 99, yaitu 98.

Kelipatan 7 (A)	Habis dibagi 3?	Habis dibagi 11?	Status
98	$9+8=17$ (TIDAK)	TIDAK	Lolos
91	TIDAK	TIDAK	Lolos
84	YA ($\div 3$)	TIDAK	**Gugur**
77	TIDAK	YA ($\div 11$)	**Gugur**
70	TIDAK	TIDAK	Lolos

Kandidat A terbesar yang memenuhi (a) dan (b) adalah: 98, 91, 70, …
Langkah 2: Periksa Syarat (c)
Kita priksa kandidat terbesar, apakah habis dibagi 5 atau 17:

1) $A = 98$
   Habis dibagi 5? Tidak.
   Habis dibagi 17? Tidak ($\frac{98}{17}$ bukan bilangan bulat). → Gugur.
2) $A = 91$
   Habis dibagi 5? Tidak.
   Habis dibagi 17? Tidak (91 = 7 × 13). → Gugur
3) $A = 70$
   Habis dibagi 5? Ya (70 ÷ 5 = 14). → Lolos

Jadi, Bilangan A terbesar yang memenuhi semua syarat adalah 70.

7. **Penyelesaian:**
Kita akan menyisipkan lempengan 4 dan 5 (Lajur 2) ke dalam empat posisi yang mungkin pada Lajur 1: (Sebelum 1), (Antara 1 & 2), (Antara 2 & 3), (Setelah 3). Ingat, 4 harus selalu ditembak sebelum 5.
1) 4 dan 5 Berurutan (4, 5)
Kita perlakukan blok (4, 5) sebagai satu unit dan menempatkannya di antara angka 1, 2, 3:

Posisi Sisipan	Urutan Akhir
Sebelum 1	**4, 5,** 1, 2, 3
Antara 1 & 2	1, **4, 5,** 2, 3
Antara 2 & 3	1, 2, **4, 5,** 3
Setelah 3	1, 2, 3, **4, 5**
	(4 Urutan)

2) 4 dan 5 Terpisah

Lempengan 4 harus ditembakkan di suatu tempat sebelum lempengan 5.

Posisi 4	Posisi 5	Urutan Akhir
Sebelum 1	Antara 1 & 2	**4**, 1, **5**, 2, 3
Sebelum 1	Antara 2 & 3	**4**, 1, 2, **5**, 3
Sebelum 1	Setelah 3	**4**, 1, 2, 3, **5**
Antara 1 & 2	Antara 2 & 3	1, **4**, 2, **5**, 3
Antara 1 & 2	Setelah 3	1, **4**, 2, 3, **5**
Antara 2 & 3	Setelah 3	1, 2, **4**, 3, **5**
		(6 Urutan)

Daftar Lengkap (4 Urutan + 6 Urutan)

Berikut adalah 10 urutan menembak yang mungkin:

- (4, 5, 1, 2, 3)
- (1, 4, 5, 2, 3)
- (1, 2, 4, 5, 3)
- (1, 2, 3, 4, 5)
- (4, 1, 5, 2, 3)
- (4, 1, 2, 5, 3)
- (4, 1, 2, 3, 5)
- (1, 4, 2, 5, 3)
- (1, 4, 2, 3, 5)
- (1, 2, 4, 3, 5)

8. Penyelesaian:

Inti dari solusi ini adalah bahwa penjumlahan bilangan 4 digit dengan palimage-nya menghasilkan bilangan palindrom.

1) Kunci Bilangan X (Palindrom)

$X = AB4C + C4BA = \overline{DEED}$. Ini hanya terjadi jika tidak ada bawaaan (carry-over) dalam penjumlahan:

- Ribuan/Satuan: $A + B = D$ (Harus $A + C < 10$).
- Ratusan/Puluhan: $B + 4 = E$ (Harus $B + 4 < 10$).

$$\Longrightarrow B < 6$$

Karena B tidak sama dengan 4, maka $B \in \{1, 2, 3, 5\}$.

2) Kunci Bilangan PQ4R

$PQ4R = X + X = 2 \times \overline{DEED}$. Kita focus pada digit puluhan 4.

- Kolom Puluhan: $2E$ + (bawaan dari $2D$) = 4 + $10k_4$.
- $E = B + 4 \in \{5, 6, 7, 9\}$
  $2E \in$ {10, 12, 14, 18}.
- Satu-satunya nilai $2E$ yang bisa menghasilkan digit 4 di kolom puluhan adalah 14.

$$2E = 14 \Longrightarrow E = 7$$

Menentukan B dan D

- $E = 7 \Longrightarrow B + 4 = 7 \Longrightarrow B = 3$. (Memenuhi $B \neq 4$).
- $2E = 14$ menghasilkan bawaan $k_4 = 1$.
- Karena $2E = 14$ sudah membawa 1, maka bawaan dari $2D$ harus 0 (agar $2E + 0 = 14$).

$$2D < 10 \Longrightarrow D < 5$$

- $D = A + C$. Karena A, C harus berbeda dari $B = 3$ dan $D \neq 4$:
  $D \in \{2, 3\}$. ($D = 2 \Longrightarrow A = 1, C = 1$ - tidak boleh sama).
  $D = 3 \Longrightarrow A + C = 3$. (Kemungkinan: $A = 1, C = 2$ atau $A = 2, C = 1$).

Dari $D = 3$, $E = 7$, $k_4 = 1$, kita tentukan sisa digit P, Q, R:

- R (Satuan): $R = 2D = 2(3) = 6$
- Q (Ratusan): $Q = 2E + k_4 = 14 + 1 = 15 \Longrightarrow Q = 5$ (bawaan $k_5 = 1$)
- P (Ribuan): $P = 2D + k_5 = 6 + 1 = 7$

Semua digit {1, 2, 3, 5, 6, 7} berbeda dan tidak ada yang sama dengan 4.

- Bilangan AB4C adalah 1342 atau 2341
- Bilangan PQ4R adalah 7546

9. **Penyelesaian:**

Daerah yang diarsir adalah selisih antara luas segitiga terbesar (L_{ABC}) dan luas segitiga terkecil yang bagian dalamnya tidak diarsir (L_{JKL}).

$$L_{arsir} = L_{ABC} - L_{JKL}$$

Kita menggunakan hubungan perbandingan luas yang diberikan:

- $L_{ABC} = \frac{4}{3} \times L_{DEF}$
- $L_{DEF} = \frac{4}{3} \times L_{GHI}$
- $L_{GHI} = \frac{4}{3} \times L_{JKL}$

Gantikan secara berurutan, mulai dari $L_{JKL} = 27$:

$$L_{ABC} = \frac{4}{3} \times \left(\frac{4}{3} \times \left(\frac{4}{3} \times L_{JKL}\right)\right)$$

$$L_{ABC} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 \times 27$$
$$L_{ABC} = \frac{4^3}{3^3} \times 27 = \frac{64}{27} \times 27$$
$$L_{ABC} = 64 \text{ satuan luas}$$

Luas daerah yang diarsir adalah selisih luas terbesar dan terkecil:

$$L_{arsir} = L_{ABC} - L_{JKL}$$
$$L_{arsir} = 64 - 27$$
$$L_{arsir} = 37 \text{ satuan luas}$$

10. Penyelesaian:

Persentase kenaikan akan sama jika rasio penjualan tahun ini terhadap tahun lalu $\left(\frac{\text{Tahun Ini}}{\text{Tahun Lalu}}\right)$ adalah sama untuk kedua jenis motor.

Kita hanya perlu mencari tahun di mana:

$$\frac{\text{Sport}_{\text{Ini}}}{\text{Sport}_{\text{Lalu}}} = \frac{\text{Bebek}_{\text{Ini}}}{\text{Bebek}_{\text{Lalu}}}$$

Kita cek dengan membandingkan rasio kenaikan (Tahun Ini vs. Tahun Lalu) untuk setiap tahun:

Tahun	Rasio Sport ($\frac{S_n}{S_{n-1}}$)	Rasio Bebek ($\frac{B_n}{B_{n-1}}$)	Rasio Sama?
2012	$\frac{45}{40} = 1.125$	$\frac{55}{50} = 1.10$	**Tidak**
2013	$\frac{54}{45} = 1.20$	$\frac{48}{55} \approx 0.87$	**Tidak**
2014	$\frac{50}{54} \approx 0.93$	$\frac{66}{48} = 1.375$	**Tidak**
2015	$\frac{60}{50} = 1.20$	$\frac{64}{66} \approx 0.97$	**Tidak**
2016	$\frac{75}{60} = \mathbf{1.25}$	$\frac{80}{64} = \mathbf{1.25}$	**YA**

Hasil Cek Cepat Tahun 2016:

$$\text{Sport}: \frac{75}{60} = \frac{5}{4} = 1.25$$
$$\text{Bebek}: \frac{80}{64} = \frac{5}{4} = 1.25$$

Karena kedua rasio adalah $\frac{5}{4}$, persentase kenaikannya adalah sama:

$$\text{Persentase Kenaikan} = (\text{Rasio} - 1) \times 100\% = (1.25 - 1) \times 100\% = 25\%$$

Tahun dengan persentase kenaikan yang sama untuk kedua jenis kendaraan adalah 2016.

11. Penyelesaian:

Rata-rata baru didapatkan setelah setiap bilangan diubah. Kita hanya perlu melihat perubahan total yang ditambahkan ke semua bilangan.

Perubahan total yang ditambahkan:

$$\text{Perubahan Total} = (+10) + (-4) + (+10) + (-6) + (+15)$$
$$\text{Perubahan Total} = (10 + 10 + 15) + (-4 - 6)$$
$$\text{Perubahan Total} = 35 - 10$$
$$\text{Perubahan Total} = 25$$

Karena perubahan total adalah 25 dan ada 5 bilangan, rata-rata baru (R_{baru}) akan meningkat sebesar:

$$\text{Kenaikan RataRata} = \frac{\text{Perubahan Total}}{\text{Banyak Bilangan}} = \frac{25}{5} = 5$$

Jadi, rata-rata baru adalah 5 lebih besar dari rata-rata semula:

$$R_{baru} = R + 5$$

Diketahui bahwa rata-rata baru adalah dua kali rata-rata semula:

$$R_{baru} = 2R$$

Substitusikan persamaan dari Langkah 1:

$$R + 5 = 2R$$

Kurangi R dari kedua sisi:

$$5 = 2R - R$$
$$R = 5$$

Rata-rata dari lima bilangan semula adalah 5.

12. Penyelesaian:

Jumlah S adalah $abcd + abc + ab + a$.

$$S = 1111a + 111b + 11c + d$$

Agar S habis dibagi 11, karena $1111a$ dan $11c$ sudah habis dibagi 11, sisanya harus habis dibagi 11:

$$S \equiv (111b + d) \pmod{11}$$

Karena $111 \equiv 1 \pmod{11}$:

$$S \equiv (b + d) \pmod{11}$$

Kondisi kritisnya adalah: $b + d$ harus habis dibagi 11. Karena b, d adalah digit, maka $b + d = 0$ atau $b + d = 11$.

Untuk S menjadi bilangan 5 digit ($S \geq 10000$), digit a harus minimal 9.

$$\text{Syarat: } 111b + 11c + d \geq 10000 - 1111(9) \Longrightarrow 111b + 11c + d \geq 1$$

Kita mencari $9bcd$ terkecil yang memenuhi $b + d = 0$ atau $b + d = 11$.

Kasus	Kondisi $b+d$	Pilih b Terkecil	$\mathbf{abcd}$ yang Minimal	Cek Syarat ≥ 1	Hasil
I	$b+d=0 \implies b=0, d=0$	$b=0$	$\mathbf{90c0}$	$111(0)+11c+0 \geq 1 \implies 11c \geq 1$. Pilih $\mathbf{c=1}$	$\mathbf{9010}$
II	$b+d=11$	$b=2$ ($b=1$ atau 0 membuat $d>9$)	$\mathbf{92c9}$	$111(2)+11c+9 \geq 1$. Selalu benar untuk $c \geq 0$. Pilih $\mathbf{c=0}$	$\mathbf{9209}$

Membandingkan kandidiat 9010 dan 9209, bilangan yang paling kecil adalah 9010.

13. Penyelesaian:

Kita menggunakan Teorema Pythagoras pada dua segitiga siku-siku yang dibentuk oleh tinggi $CP = 12$.

a. Jari-jari Kecil (r)

Gunakan ΔCPB (siku-siku di P):

$$PB = \sqrt{CB^2 - CP^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5$$

Diameter $2r = PB = 5$.

$$r = \frac{5}{2} = 2.5$$

b. Jari-jari Besar (R)

Gunakan ΔCPA (siku-siku di P):

$$AP = \sqrt{AC^2 - CP^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = \sqrt{400 - 144} = \sqrt{256} = 16$$

Diameter $2R = AP = 16$.

$$R = \frac{16}{2} = 8$$

Substitusikan nilai $R = 8$ dan $r = 2.5$ ke rumus luas arsiran:

$$L_{arsir} = \frac{1}{2}\pi(R^2 + r^2)$$

$$L_{arsir} = \frac{1}{2}\pi(8^2 + 2.5^2)$$

$$L_{arsir} = \frac{1}{2}\pi(64 + 6.25)$$

$$L_{arsir} = \frac{1}{2}\pi(70.25)$$

$$L_{arsir} = 35.125\pi \text{ satuan luas.}$$