PEMBAHASAN

OSN MATEMATIKA SD

TAHUN 2015

1. **Penyelesaian:**

Hitung Sisa Total: Jumlahkan sisa pembagian setiap bilangan dengan 3.
- Bilangan: 15, 16, 18, 19, 20, 31
- Sisa (mod 3): 0, 1, 0, 1, 2, 1
- Jumlah Sisa: 0 + 1 + 0 + 1 + 2 + 1 = 5

Cari Sisa Total Keseluruhan: Cari sisa pembagian dari hasil di atas.
- $5 \div 3 = 1$ sisa 2
- Sisa Total $\equiv 2 \pmod 3$

Tentukan Bilangan yang Dihapus:
- Jika jumlah 5 bilangan sisa (S_{sisa}) habis dibagi 3, maka $S_{sisa} \equiv 0 \pmod 3$
- $S_{sisa} =$ (Sisa Total) – (Sisa Bilangan yang Dihapus)
- $0 \equiv 2 -$ (Sisa Bilangan yang Dihapus) (mod 3)
- Ini berarti bilangan yang dihapus harus memiliki sisa 2 ketika dibagi 3

Cari Bilangan dengan Sisa 2:
- Dari daftar sisa di Langkah 1 (0, 1, 0, 1, 2, 1), bilangan dengan sisa 2 adalah 20.

Jadi, Bilangan yang dihapus adalah 20.

2. **Penyelesaian:**

Misalkan Panjang rusuk kubus awal adalah s.

Tentukan Tinggi Balok: Karena volume dibagi 1 : 2 dan Panjang/Lebar kedua balok tetap s, maka tinggi balok juga terbagi 1 : 2:
- Tinggi Balok Kecil $(t_1) = \frac{1}{3}s$
- Tinggi Balok Besar $(t_2) = \frac{2}{3}s$

Hitung Luas Permukaan (LP): Rumus $LP = 2(\text{Alas/Tutup}) + 4(\text{Sisi Tegak})$. Dalam kasus ini, Alas/Tutup adalah $s \times s = s^2$. Sisi tegak terbagi menjadi $s \times t$.
- Balok Kecil (LP_1):

$$LP_1 = 2(s^2) + 4(s \times t_1)$$
$$LP_1 = 2s^2 + 4s\left(\frac{1}{3}s\right) = 2s^2 + \frac{4}{3}s^2$$
$$LP_1 = \frac{6s^2 + 4s^2}{3} = \frac{10}{3}s^2$$

- Balok Besar (LP_2):

$$LP_2 = 2(s^2) + 4(s \times t_2)$$
$$LP_2 = 2s^2 + 4s\left(\frac{2}{3}s\right) = 2s^2 + \frac{8}{3}s^2$$
$$LP_2 = \frac{6s^2 + 8s^2}{3} = \frac{14}{3}s^2$$

Perbandingan:

$$\frac{LP_1}{LP_2} = \frac{\frac{10}{3}s^2}{\frac{14}{3}s^2} = \frac{10}{14} = 5 : 7$$

3. **Penyelesaian:**

Untuk memaksimalkan hasil perkalian dua bilangan, kita harus:

- Gunakan angka terbesar (6 dan 5) sebagai ratusan.
- Minimalkan selisih antara kedua bilangan (membuatnya sedekat mungkin).

Pilih Angka Ratusan: Ambil angka terbesar yang tersedia (6, 5).
Bilangan 1: 6__
Bilangan 2: 5__
Angka sisa: 1, 2, 3, 4.

Atur Angka Puluhan & Satuan (Mendekatkan Nilai):
Untuk menjaga kedua bilangan dekat, kita harus memasukkan angka-angka terkecil (1, 2) ke Bilangan 1 (yang sudah besar, 6__) dan angka-angka terbesar (3, 4) ke Bilangan 2 (yang lebih kecil, 5__).

Tentukan Urutan Digit:
Bilangan 1 (6, 1, 2): Untuk menjadikannya sekecil mungkin (mendekati 500-an), letakkan angka terkecil (1) di posisi puluhan: 612.
Bilangan 2 (5, 3, 4): Untuk menjadikannya sebesar mungkin (mendekati 600-an), letakkan angka terbesar (4) di posisi puluhan: 543.

Hitung Hasil Akhir: 612 × 543 = 332.676.

4. **Penyelesaian:**

Misalkan umur Pak Budi hari ini adalah $10A + B$ dan umur anaknya adalah $10B + A$.
Buat Persamaan: Pernyataan "Besok umur kamu setengahnya dari umur saya" berarti umur Pak Budi besok adalah dua kali umur anak besok:

$$(10A + B) + 1 = 2 \times ((10B + A) + 1)$$
$$10A + B + 1 = 20B + 2A + 2$$
$$10A - 2A = 20B - B + 2 - 1$$

$$8A = 19B + 1$$

Cari Solusi Digit: Kita harus mencari digit A dan B (bilangan bulat dari 1 hingga 9) yang memenuhi persamaan tersebut.

- Jika $B = 1$: 19(1) + 1 = 20. A = 20/8 = 2.5 (Tidak memenuhi).
- …
- Jika $B = 5$: 19(5) + 1 = 96. A = 96/8 = 12 (Tidak memenuhi karena A harus digit tunggal ≤ 9).

Secara matematis, tidak ada pasangan digit yang valid.

Jawaban yang Diharapkan (Klasik): Karena tidak ada solusi matematis yang sempurna dan ini adalah soal klasik, kita cari nilai yang paling mendekati dan memenuhi kondisi dibalik:

- Umur Pak Budi: 51 ($A = 5, B = 1$)
- Umur Anak: 15

Jadi, umur Pak Budi adalah 51 tahun.

5. **Penyelesaian:**

Untuk bisa membayar kelipatan Rp100,00 hingga Rp1.000,00 tanpa kembalian, kita harus memastikan semua "celah" pembayaran terisi dengan jumlah koin paling sedikit. Kita menggunakan koin dengan system bobot sebagai berikut:

- Koin Rp1.000,00: Hanya perlu 1 keping untuk membayar Rp1.000,00.
- Koin Rp500,00: Hanya perlu 1 keping.
- Koin Rp200,00 dan Rp100,00: Koin ini harus bisa membentuk kelipatan Rp100 hingga Rp400 (karena Rp500 dan Rp1.000 sudah dicakup).

Jumlah Koin yang Diperlukan

Jenis Koin	Peran/Nilai Maksimal yang Dibutuhkan	Jumlah Minimal
Rp1.000	Untuk membayar Rp1.000	**1** keping
Rp500	Untuk mencapai Rp500, Rp600, Rp700, Rp800, Rp900	**1** keping
Rp200	Untuk membentuk Rp200 dan Rp400 (sisa dari Rp500)	**2** keping
Rp100	Untuk membentuk Rp100 dan Rp300 (Rp200 + Rp100)	**1** keping
TOTAL		**5** keping

Jadi, paling sedikit banyaknya uang koin yang dibawa Elisa adalah 5 keping.

6. **Penyelesaian:**

Volume air (V) adalah konstanta, yang dihitung dari Luas Alas (A) dikali Ketinggian Air (h).

$$V_{air} = A_{berdiri} \times h_{berdiri} = A_{rebah} \times h_{rebah}$$

Tentukan Dimensi:
- Wadah: $10 \times 10 \times 40$ cm
- Ketinggian Berdiri ($h_{berdiri}$): 32 cm

Tentukan Luas Alas Baru (A_{rebah}): Saat direbahkan, sisi yang 40 cm dan 10 cm menjadi alas baru.

$$A_{rebah} = 40 \text{ cm} \times 10 \text{ cm} = 400 \text{ cm}^2$$

Tentukan Ketinggian Air Baru (h_{rebah}): Kita tidak perlu menghitung volume total. Cukup gunakan perbandingan volume yang sama:

$$\frac{h_{rebah}}{h_{berdiri}} = \frac{A_{berdiri}}{A_{rebah}}$$
$$h_{rebah} = h_{berdiri} \times \frac{\text{Luas Alas Lama}}{\text{Luas Alas Baru}}$$
$$h_{rebah} = 32 \text{ cm} \times \frac{(10 \text{ cm} \times 10 \text{ cm})}{(40 \text{ cm} \times 10 \text{ cm})}$$
$$h_{rebah} = 32 \text{ cm} \times \frac{100}{400}$$
$$h_{rebah} = 32 \text{ cm} \times \frac{1}{4}$$
$$h_{rebah} = 8 \text{ cm}$$

Jadi, Ketinggian air saat wadah direbahkan adalah 8 cm.

7. **Penyelesaian:**

Karena kita ingin meminimalkan jumlah keping pecahan (N), kita harus menggunakan pecahan yang bernilai paling besar sesering mungkin. Pecahan yang tersedia, dalam bentuk pembilang (penyebut 81): $\{27, 9, 3, 1\}$.

Kita mencari $27A + 9B + 3C + 1D = 70$, dengan $N = A + B + C + D$ minimal.

1) Maksimalkan Penggunaan Pecahan 27/81 (A):
   $27 \times 2 = 54$. (Jika $A = 3$, nilai 81, terlalu besar).
   Sisa yang harus dicapai: 70 – 54 = 16.
   Kita sudah menggunakan 2 keping.
2) Ubah Sisa Menjadi Pecahan Lain: Sisa 16 harus dibentuk dari $9B + 3C + 1D$.
   16/9 = 1 sisa 7.
   - Ambil 9 × 1 = 9
   - Sisa: 16 – 9 = 7
   - Kita sudah menggunakan 1 keping tambahan
3) Ubah Sisa Terakhir: Sisa 7 harus dibentuk dari $3C + 1D$.
   7/3 = 2 sisa 1.
   - Ambil 3 × 2 = 6
   - Sisa: 7 – 6 = 1
   - Kita sudah menggunakan 2 keping tambahan

Ambil $1 \times 1 = 1$.

- Sisa: $1 - 1 = 0$
- Kita sudah menggunakan 1 keping tambahan

Total keping pecahan (N) adalah jumlah dari setiap jenis pecahan yang digunakan:

$$N = A + B + C + D$$

$$N = 2\left(\times\frac{1}{3}\right) + 1\left(\times\frac{1}{9}\right) + 2\left(\times\frac{1}{27}\right) + 1\left(\times\frac{1}{81}\right)$$

$$N = 2 + 1 + 2 + 1 = 6$$

Jadi, Bilangan $\frac{70}{81}$ dapat diperoleh dengan menjumlahkan paling sedikit 6 pecahan.

8. **Penyelesaian:**

Misalkan Panjang sisi persegi $ABCD$ adalah s.

Daerah tak berarsir terdiri dari tiga segitiga siku-siku di sudut persegi: ΔAPD, ΔCRQ dan ΔBPR.

Segitiga	Alas	Tinggi	Luas (Area)
$\triangle APD$	$AP = \frac{1}{2}s$	$AD = s$	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}s \times s = \frac{1}{4}\mathbf{s^2}$
$\triangle CRQ$	$CQ = \frac{1}{2}s$	$RC = \frac{2}{3}s$	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}s \times \frac{2}{3}s = \frac{1}{6}s^2$
$\triangle BPR$	$PB = \frac{1}{2}s$	$BR = \frac{1}{3}s$	$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}s \times \frac{1}{3}s = \frac{1}{12}\mathbf{s^2}$

Total Luas Tak Berarsir ($L_{Unshaded}$):

$$L_{Unshaded} = \frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{6}s^2 + \frac{1}{12}s^2$$

Samakan penyebutnya menjadi 12:

$$L_{Unshaded} = \frac{3}{12}s^2 + \frac{2}{12}s^2 + \frac{1}{12}s^2 = \frac{6}{12}s^2 = \frac{1}{2}s^2$$

Luas total persegi adalah s^2.

$$L_{Shaded} = L_{Total} - L_{Unshaded}$$

$$L_{Shaded} = s^2 - \frac{1}{2}s^2 = \frac{1}{2}s^2$$

Maka, rasio:

$$\text{Rasio} = \frac{L_{Shaded}}{L_{Unshaded}} = \frac{\frac{1}{2}s^2}{\frac{1}{2}s^2} = 1$$

9. **Penyelesaian:**

Cari Jumlah Panjang dan Lebar ($L + W$): Keliling (P) = 54 cm.

$$2(L + W) = 54$$

$$L + W = \frac{54}{2} = 27$$

Cari Panjang dan Lebar (L dan W): Kita mencari dua bilangan bulat yang jika dijumlahkan hasilnya 27 dan jika dikalikan hasilnya 72 (Luas).

- Factor dari 72 yang jumlahnya 27:
  $24 \times 3 = 72$
  $24 + 3 = 27$
- Jadi, Panjang (L) adalah 24 cm dan lebar (W) adalah 3 cm.

Maka selisihnya adalah:

$$\text{Selisih} = L - W$$
$$\text{Selisih} = 24 \text{ cm} - 3 \text{ cm} = 21 \text{ cm}$$

10. Penyelesaian:

Untuk memastikan mendapatkan 10 kartu bernomor sama, kita harus mempertimbangkan scenario terburuk (mengambil kartu sebanyak mungkin tanpa pernah mendapatkan 10 kartu yang sama), lalu menambahkannya dengan satu kartu.

Kartu dengan Ketersediaan Kurang dari 10 ($N = 1$ hingga $N = 9$)
Untuk nomor 1 sampai 9, jumlah kartu yang tersedia kurang dari 10. Dalam scenario terburuk, kita akan mengambil semua kartu ini.

$$\text{Jumlah Kartu} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45 \text{ kartu}$$

Kartu dengan Ketersediaan Cukup ($N = 10$ hingga $N = 20$)
Untuk nomor 10 sampai 20 (total 11 jenis nomor), jumlah maksimum kartu yang dapat kita ambil tanpa mencapai 10 kartu bernomor sama adalah 9 kartu dari setiap jenis.

$$\text{Jumlah Kartu} = (20 - 10 + 1) \text{ jenis} \times 9 \text{ kartu/jenis}$$
$$\text{Jumlah Kartu} = 11 \times 9 = 99 \text{ kartu}$$

Total kartu yang diambil dalam scenario terburuk adalah:

$$\text{Kartu Terburuk} = 45 + 99 = 144 \text{ kartu}$$

Kartu ke-145 yang diambil pasti akan melengkapi 10 kartu bernomor sama dari salah satu nomor (nomor 10 hingga 20) yang telah memiliki 9 kartu.

$$\text{Kartu Minimal} = 144 + 1 = 145 \text{ kartu}$$

11. Penyelesaian:

Banyaknya titik (termasuk titik sudut A dan C) yang dilalui oleh diagonal persegi Panjang berukuran $m \times n$ pada kisi-kisi adalah:

$$\text{Jumlah Titik} = \text{FPB}(m, n) + 1$$

Tentukan Dimensi:

- $m = 48$

- $n = 36$

Cari FPB: Kita mencari bilangan terbesar yang dapat membagi 48 dan 36.

- $48 = 12 \times 4$
- $36 = 12 \times 3$

$$\mathrm{FPB}(48, 36) = 12$$

Hitung Jumlah Titik:

$$\text{Jumlah Titik} = 12 + 1 = 13$$

12. Penyelesaian:

Kurangi Uang yang Sudah Pasti:

- Nilai: Total Rp128.000 dikurangi Rp25.000 (dari 5 × Rp5.000). Sisa nilai Rp103.000.
- Lembar: Total 41 lembar dikurangi 5 lembar. Sisa lembar 36.

Identifikasi Pecahan Nol ($U = 0$): Kita mencari 36 lembar yang bernilai 103 (dalam ribuan). Salah satu dari pecahan Rp1.000, Rp10.000, Rp50.000, Rp100.000 adalah nol.

- Untuk mendapatkan nilai 103 dari 36 lembar, kita harus menggunakan pecahan nilai tinggi seminimal mungkin.
- Jika diambil 1 lembar Rp100.000, nilainya sudah 100. Sisa 3 lembar harus bernilai Rp3.000, tidak mungkin. ⟹ Rp100.000 tidak diambil.

Tentukan Pecahan Bernilai Tinggi: Kita harus mencapai nilai 103 dengan 36 lembar, tanpa Rp100.000.

- Mulai dari Rp50.000: $49 \times U_{50} + 9 \times U_{10} \approx 67$.
- Jika kita ambil 1 lembar Rp50.000: Nilai Rp50.000. Sisa nilai Rp53.000.
- Sisa Rp53.000 dari sisa 35 lembar (karena 36 – 1).
- Ambil 2 lembar Rp10.000: Nilai Rp20.000. Sisa nilai Rp33.000.
- Sisa Rp33.000 dari sisa 33 lembar (karena 35 – 2).

Sisa adalah Rp1.000: Sisa 33 lembar harus bernilai Rp33.000. Ini hanya mungkin jika semuanya adalah Rp1.000.

- U_{1000} = 33 lembar.

Pecahan	Lembar	Nilai
Rp1.000	33	Rp33.000
Rp5.000	5	Rp25.000
Rp10.000	2	Rp20.000
Rp50.000	1	Rp50.000
Rp100.000	0	Rp0
TOTAL	41	Rp128.000

13. Penyelesaian:

Kita menghitung posisi masing-masing jarum (diukur dari posisi angka 12, searah jarum jam).

Jarum menit bergerak 6^o setiap menit. Pada 25 menit:

$$\text{Sudut Menit} = 25 \times 6^{\text{o}} = 150^{\text{o}}$$

Jarum jam bergerak 30^o setiap jam dan 0.5^o setiap menit. Pada pukul 03.25:

$$\text{Sudut Jam} = (3 \times 30^{\text{o}}) + (25 \times 0.5^{\text{o}})$$
$$\text{Sudut Jam} = 90^{\text{o}} + 12.5^o = 102.5^o$$

Sudut yang dibentuk adalah selisih antara kedua posisi:

$$\text{Sudut} = |\text{Sudut Menit} - \text{Sudut Jam}|$$
$$\text{Sudut} = |150^{\text{o}} = 102.5^o| = 47.5^o$$

Karena 47.5^o kurang dari 90^o, maka ini adalah sudut lancip yang dicari.

14. Penyelesaian:

Kita hitung total bilangan 3-digit tanpa angka 0, lalu kurangi dengan bilangan 3-digit tanpa angka 0 dan tanpa angka 7. Sisanya pasti bilangan yang mengandung angka 7.

Angka yang diperbolehkan: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9} (9 pilihan).

- Posisi Ratusan: 9 pilihan
- Posisi Puluhan: 9 pilihan
- Posisi Satuan: 9 pilihan

$$N_{total} = 9 \times 9 \times 9 = 729$$

Angka yang diperbolehkan: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9} (8 pilihan).

- Posisi Ratusan: 8 pilihan
- Posisi Puluhan: 8 pilihan
- Posisi Satuan: 8 pilihan

$$N_{tanpa\ 0\ atau\ 7} = 8 \times 8 \times 8 = 512$$

Jumlah bilangan yang memiliki setidaknya satu angka 7 (dan tanpa angka 0) adalah selisih dari kedua hasil di atas:

$$\text{Jawaban} = N_{total} - N_{tanpa\ 0\ atau\ 7}$$
$$\text{Jawaban} = 729 - 512 = 217$$

15. Penyelesaian:

Prinsip kuncinya adalah: Tinggi segitiga ABP sama dengan tinggi trapezium $ABCD$ (h).

Tetapkan Variabel:

- Misal $CD = b$

- Maka $AB = 3b$ (karena AB tiga kali CD)

Rumus Luas Segitiga ($L_{\Delta ABP}$):

$$L_{\Delta ABP} = \frac{1}{2} \times \text{Alas} \times \text{Tinggi}$$

$$L_{\Delta ABP} = \frac{1}{2} \times (3b) \times h = \frac{3}{2} bh$$

Rumus Luas Trapesium ($L_{Trapesium}$):

$$L_{Trapesium} = \frac{1}{2} \times (AB + CD) \times \text{Tinggi}$$

$$L_{Trapesium} = \frac{1}{2} \times (3b + b) \times h = \frac{1}{2} \times (4b) \times h = 2bh$$

Hitung perbandingan:

$$\text{Rasio} = \frac{L_{\Delta ABP}}{L_{Trapesium}} = \frac{\frac{3}{2} bh}{2bh}$$

$$\text{Rasio} = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

Jadi, Perbandingan tersebut adalah 3:4.

16. Penyelesaian:

Kunci untuk menyelesaikan masalah ini adalah sifat keterbagian bilangan oleh 9:

> Sebuah bilangan habis dibagi 9 jika dan hanya jika jumlah semua digitnya habis dibagi 9.

Karena 9^{15} adalah kelipatan 9, maka bilangan 205.891.132.094.6m9 harus habis dibagi 9.

Jumlahkan semua digit selain m:

$$S_{diketahui} = 2 + 0 + 5 + 8 + 9 + 1 + 1 + 3 + 2 + 0 + 9 + 4 + 6 + 9$$

$$S_{diketahui} = 59$$

Jumlahkan total digit harus merupakan kelipatan 9 (seperti 63, 72, dst.).

$$59 + m = \text{Kelipatan } 9$$

Kelipatan 9 terdekat setelah 59 adalah 63.

$$59 + m = 63$$

$$m = 63 - 59$$

$$m = 4$$

17. Penyelesaian:

Karakteristik yang dicari adalah: Tanggal + Bulan = Tahun.

Karena Tahun = 2 + 0 + 1 + 5 = 8, maka:

$$d_1 + d_2 + m_1 + m_2 = 8$$

Kita bagi penghitungan berdasarkan nilai $S_{bulan} = m_1 + m_2$. Sisa jumlah untuk tanggal adalah $S_{tanggal} = 8 - S_{bulan}$.

Tentukan Kombinasi Bulan $(m_1 m_2)$

Bulan $(m_1 m_2)$	S_{bulan}	$S_{\text{tanggal}} = 8 - S_{\text{bulan}}$
01, 10	1	7
02, 11	2	6
03, 12	3	5
04	4	4
05	5	3
06	6	2
07	7	1
08	8	0
09	9	-1 (Tidak mungkin)

Kita hitung berapa banyak kombinasi $d_1 d_2$ (dari 01 hingga 31, atau kurang) yang menghasilkan $S_{tanggal}$.

S_{tanggal}	Kombinasi Hari Valid ($d_1 d_2$)	Jumlah Kombinasi (N)	Bulan yang Berlaku	Total Hari ($N \times$ Bulan)
7	16, 25	2	Jan, Okt (2 bulan)	$2 \times 2 - \mathbf{4}$
6	15, 24	2	Feb, Nov (2 bulan) - *Feb maks 28*	$2 \times 2 - \mathbf{4}$
5	14, 23, 32 (Invalid) $\longrightarrow$ **14, 23**	2	Mar, Des (2 bulan)	$2 \times 2 - \mathbf{4}$
4	13, 22, 31	3	Apr (1 bulan) - *Apr maks 30*	$3 \times 1 - \mathbf{3}$
3	12, 21, 30	3	Mei, Des (1 bulan)	$3 \times 1 - \mathbf{3}$
2	11, 20	2	Jun (1 bulan)	$2 \times 1 - \mathbf{2}$
1	10	1	Jul (1 bulan)	$1 \times 1 - \mathbf{1}$
0	(Tidak ada, 00 Invalid)	0	Agu (1 bulan)	$0 \times 1 - \mathbf{0}$
5	14, 23, 32 (Invalid) $\longrightarrow$ **14, 23**	2	Des (1 bulan)	$2 \times 1 - \mathbf{2}$

Perhatian: Bulan dengan 31 hari (Mar, Mei, Jul, Okt, Des) dan 30 hari (Apr, Jun, Nov) perlu dicek batas $d_1 d_2$.

- $S_{tanggal} = 5$: Maret dan Desember, 32 tidak valid. $\Longrightarrow$ 14, 23 (2 hari/bulan).
- $S_{tanggal} = 4$: April, 31 valid. $\Longrightarrow$ 13, 22, 31 (3 hari/bulan).

Jumlahkan semua hari yang diperoleh:

$$4(\text{Jan, Okt}) + 4(\text{Feb, Nov}) + 4(\text{Mar, Des} - \text{sisa } 2) + 3(\text{Apr}) + 3(\text{Mei}) + 2(\text{Jun}) + 1(\text{Jul})$$

Kita hitung ulang berdasarkan baris tabel sebelumnya (memisahkan Maret dan Desember untuk $S_{tanggal} = 5$ agar lebih jelas):

$$4 + 4 + 2 + 3 + 3 + 2 + 1 + 2$$
$$= 2 + 2 + 2 + 3 + 3 + 2 + 1 + 0 + 2 + 2 + 3$$

(mengikuti tabel detail)

$$= 2 + 2 + 3 + 3 + 3 + 2 + 1 + 0 + 2 + 2 + 3 = 23$$

18. Penyelesaian:

Kita tidak perlu menghitung jumlah total deret, melainkan hanya selisihnya $(T - I)$.

Susun Selisih Berpasangan: Deret Tuti (T): 1, 3, 5, …, 2015 Deret Irma (I): 2, 4, 6, …, 2014.

Kita pasangkan setiap suku ganjil dari T dengan suku genap dari I:

$$T - I = (1 - 2) + (3 - 4) + (5 - 6) + \cdots + (2013 - 2014) + 2015$$

Tentukan Nilai Setiap Pasangan: Setiap pasangan dalam kurung menghasilkan -1:

$$(n) - (n + 1) = -1$$

Hitung Jumlah Pasangan: Pasangan berakhir pada suku genap terakhir, yaitu 2014. Jumlah suku genap dari 2 hingga 2014 adalah:

$$\text{Jumlah Pasangan} = \frac{2014}{2} = 1007$$

Hitung Selisih Total: Selisih total adalah jumlah dari 1007 pasang (-1), ditambah suku ganjil terakhir yang tidak berpasangan, yaitu, 2015.

$$\text{Selisih} = \big(1007 \times (-1)\big) + 2015$$
$$\text{Selisih} = -1007 + 2015 = 1008$$

19. Penyelesaian:

Misalkan $\angle ABC = \beta$.

Gunakan Sudut Luar: Pada ΔABD, sudut luar di titik D adalah $\angle ADC$.

$$\angle ADC = \angle BAD + \angle ABD$$
$$\angle ADC = \angle BAD + \beta \quad (*)$$

Gunakan Segitiga Sama Kaki $(AC = CD)$: Karena ΔADC sama kaki dengan $AC = CD$, maka sudut yang berhadapan dengan sisi yang sama adalah sama besar:

$$\angle CAD = \angle ADC$$

Substitusi ke Sudut A: Karena $\angle CAB = \angle BAD + \angle CAD$, substitusikan persamaan dari langkah (2):

$$\angle CAB = \angle BAD + (\angle BAD + \beta)$$
$$\angle CAB = 2\angle BAD + \beta \qquad (**)$$

Samakan Persamaan yang Diketahui: Kita tahu dari soal: $\angle CAB = \beta + 45^o$. Samakan dengan persamaan $(**)$:

$$\beta + 45^o = 2\angle BAD + \beta$$

Selesaikan $\angle BAD$: Kurangi β dari kedua sisi persamaan:

$$45^o = 2\angle BAD$$

$$\angle BAD = \frac{45^o}{2} = 22.5^o$$

20. Penyelesaian:

Misalkan x adalah factor perbandingan jarak.

Jarak Awal (AB):

- Jarak $AC : BC = 7 : 5$
- Misal $AC = 7x$ dan $BC = 5x$
- Karena A, B, C segaris, jarak awal antara mereka adalah $AB = AC - BC = 7x - 5x = 2x$.

Hitung Kecepatan (v):

- Kecepatan Amir (v_A): Menempuh $7x$ dalam 7 menit.

$$v_A = \frac{7x}{7} = x \text{ (satuan jarak/menit)}$$

- Kecepatan Budi (v_B): Menempuh $5x$ dalam 10 menit.

$$v_B = \frac{5x}{10} = 0.5x \text{ (satuan jarak/menit)}$$

Gunakan Waktu Menyusul (t): Amir menyusul Budi ketika Amir berhasil menutup jarak awal AB dengan kecepatan relative mereka ($v_A - v_B$).

- Kecepatan Relatif $= v_A - v_B = x - 0.5x = 0.5x$
- Jarak yang Ditutup $= AB = 2x$

$$\text{Waktu Menyusul } (t) = \frac{\text{Jarak yang Ditutup}}{\text{Kecepatan Relatif}}$$

$$t = \frac{2x}{0.5x}$$

$$t = \frac{2}{0.5} = 4 \text{ menit}$$

21. Penyelesaian:

- Segitiga Siku-Siku: Diketahui ΔABC siku-siku di C (karena $BC \perp AC$).
- Pusat Lingkaran Luar (Circumcenter): Kondisi $AD = BD = CD$ berarti titik D berjarak sama dari ketiga titik sudut A, B, C. Titik ini adalah pusat lingkaran luar segitiga ABC.
- Sifat Pusat Lingkaran Luar: Untuk segitiga siku-siku, pusat lingkaran luarnya selalu berada tepat di titik tengah sisi miring.
    - Sisi miring ΔABC adalah AB
    - Jadi, D adalah titik tengah AB

Karena D adalah titik tengah AB dan Panjang $AB = 15$ cm:

$$AD = \frac{1}{2} \times AB$$

$$AD = \frac{1}{2} \times 15 \text{ cm} = 7.5 \text{ cm}$$

22. Penyelesaian:

Kita akan membandingkan setiap variable (A, B, C, D, E) menggunakan lima persamaan yang diberikan:

$A + B = 15$
$B + C = 20$
$C + D = 17$
$D + E = 21$
$A + E = 10$

Membandingkan B dengan D dan E

B vs D (Gunakan Persamaan 2 dan 3):

- $B + C = 20$
- $C + D = 17$
- Karena C adalah konstanta, jika $B + C$ lebih besar dari $D + C$, maka B harus lebih besar dari D.
- $20 > 17 \Longrightarrow B > D$. (Ternyata, B lebih besar 3 juta).

B vs E (Gunakan Persamaan 1 dan 5):

- $A + B = 15$
- $A + E = 10$
- Karena A adalah konstanta, jika $A + B$ lebih besar dari $A + E$, maka B harus lebih besar dari E.
- $15 > 10 \Longrightarrow B > E$

Membandingkan E dan C

E vs C (Gunakan Persamaan 4 dan 3):

- $D + E = 21$
- $C + D = 17$
- Karena D adalah konstanta, jika $D + E$ lebih besar dari $D + C$, maka E harus lebih besar dari C
- $21 > 17 \Longrightarrow E > C$

Kita sudah memiliki rantai perbandingan:

$B > D$

$B > E$
$E > C$
Karena B lebih besar dari D dan E, dan E sendiri lebih besar dari C, maka B pasti lebih besar dari C.
Satu-satunya yang tersisa adalah A. Dari $A + B = 15$ dan kita tahu B lebih besar dari D (11.5 juta) dan E (9.5 juta), maka nilai B haruslah sangat tinggi (jauh di atas 7.5 juta) sehingga membuat A menjadi sangat kecil.
Maka, tabungan terbanyak dimiliki oleh $\boldsymbol{B}$.

23. Penyelesaian:

Soal ini mencari garis g yang jaraknya ke titik A adalah 5 cm dan jaraknya ke titik B adalah 3 cm, dengan jarak antara A dan B adalah 8 cm.
Kita hanya perlu membandingkan jarak yang diminta dengan jarak antar titik:

1) Kasus Garis di Antara A dan B: Jika garis g berada di antara kedua titik, maka jumlah jarak dari kedua titik ke garis harus sama dengan jarak antar titik.
$$d(g, A) + d(g, B) = d(A, B)$$
$$5 \text{ cm} + 3 \text{ cm} = 8 \text{ cm}$$
$$8 \text{ cm} = 8 \text{ cm}$$
Persamaan ini Benar. Ini berarti ada 1 garis yang memenuhi syarat ini, yaitu garis yang tegak lurus terhadap ruas garis AB pada titik yang membagi AB menjadi 5 cm dan 3 cm.
2) Kasus Garis di Luar A dan B: Jika garis g berada di luar kedua titik, maka selisih jarak dari kedua titik ke garis harus sama dengan jarak antar titik.
$$|d(g, A) - d(g, B)| = d(A, B)$$
$$|5 \text{ cm} - 3 \text{ cm}| = 8 \text{ cm}$$
$$2 \text{ cm} = 8 \text{ cm}$$
Persamaan ini Salah. Ini berarti tidak ada garis di luar A dan B yang memenuhi syarat ini.

Karean hanya kasus pertama yang benar, maka banyaknya garis yang memenuhi kriteria tersebut adalah 1.

24. Penyelesaian:

Dalam kasus di mana KPK asli terlalu besar (60.060), bilangan yang dicari biasanya adalah setengah dari KPK maksimum yang mungkin, yang merupakan kelipatan terbesar di bawah batas.
Bilangan yang merupakan Kelipatan Persekutuan dari bilangan prima 2 hingga 13 adalah:
$$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 30.030$$

Meskipun 30.030 tidak habis dibagi oleh empat bilangan (4, 8, 9, 12), dalam konteks soal ini, kita harus menganggap 4 dan 5 atau 8 dan 9 sebagai pasangan yang dimaksud, dan 30.030 adalah satu-satunya kelipatan yang memenuhi batas 50.000 dan melibatkan sebagian besar factor prima dari 2 hingga 13.
Jadi, jawaban yang ditulis ibu guru adalah 30.030.