PEMBAHASAN

OSP MATEMATIKA SMP

TAHUN 2020

1. **Penyelesaian:**
Inti dari masalah ini adalah menghitung jumlah total bilangan bulat tak negative (dimulai dari 0) yang telah digunakan hingga suku ke-k.

Kita definisikan n_k sebagai banyak anggota pada suku ke-k.

Suku (k)	Himpunan	Banyak Anggota (n_k)	Selisih Δn
1	$\{0, 1\}$	2	
2	$\{1, \ldots, 4\}$	4	2
3	$\{4, \ldots, 10\}$	7	3
4	$\{10, \ldots, 20\}$	11	4

Selisihnya adalah 2, 3, 4, … ini adalah barisan aritmatika dengan beda 1.
Rumus untuk n_k adalah barisan kuadrat. Dari analisis sebelumnya, kita dapatkan:

$$n_k = \frac{k^2 + k + 2}{2}$$

B_k adalah total bilangan bulat (termasuk 0) yang telah digunakan hingga suku ke-k.

$$B_k = \text{Total bilangan } (0 \text{ hingga batas atas } H_k)$$

Karena bilangannya berurutan dimulai dari 0, B_k adalah jumlah semua anggota dari n_1 hingga n_k:

$$B_k = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

Bilangan terbesar (batas atas) dari himpunan H_k adalah $B_k - 1$.
Kita mencari k sehingga 2020 berada di dalam himpunan H_k. Ini berarti:

$$B_{k-1} < 2021 \leq B_k$$

Dari analisis deret kuadrat sebelumnya, rumus kumulatif B_k adalah:

$$B_k = \sum_{i=1}^{k} \frac{i^2 + i + 2}{2} = \frac{k^3 + 3k^2 + 8k}{6}$$

Kita gunakan pendekatan (aproksimasi) $B_k \approx \frac{k^3}{6}$ dan menyamakannya dengan 2021:

$$\frac{k^3}{6} \approx 2021 \Rightarrow k^3 \approx 12126$$

Akar pangkat tiga dari 12126 adalah: $\sqrt[3]{12126} \approx 23.003$
Kita coba nilai k di sekitar 23:
Coba $k = 23$:

$$B_{23} = \frac{23^3 + 3(23^2) + 8(23)}{6} = \frac{12167 + 1587 + 184}{6} = \frac{13938}{6} = 2323$$

Coba $k = 22$:

$$B_{22} = \frac{22^3 + 3(22^2) + 8(22)}{6} = \frac{10648 + 1452 + 176}{6} = \frac{12276}{6} = 2046$$

Coba $k = 21$:

$$B_{21} = \frac{21^3 + 3(21^2) + 8(21)}{6} = \frac{9261 + 1323 + 168}{6} = \frac{10752}{6} = 1792$$

Kita cek dimana bilangan 2021 (karena kita mencari $B_{k-1} < 2021 \le B_k$):

$$1792 < 2021 \le 2046$$

- $B_{21} = 1792$. Artinya, H_{21} menggunakan bilangan hingga 1792 – 1 = 1791.
- H_{22} dimulai dari bilangan 1792.
- $B_{22} = 2046$. Artinya, H_{22} menggunakan bilangan hingga 2046 – 1 = 2045.

Karena 2020 berada dalam rentang {1792, …, 2045}, maka 2020 berada pada himpunan suku ke-22.

2. Penyelesaian:

Diketahui:

- Luas $\Delta ABC = 12$
- Titik D, E, F membagi sisi BC, AC, AB dengan perbandingan:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB} = 2$$

Misalkan perbandingan pembagian sisi tersebut adalah:

- $x = \frac{CD}{DB} = \frac{1}{2}$
- $y = \frac{AE}{EC} = \frac{1}{2}$
- $z = \frac{BF}{FA} = \frac{1}{2}$

Catatan: Teorema Routh menggunakan perbandingan dari arah berlawanan, yaitu $\frac{CD}{DB}, \frac{AE}{EC}$ dan $\frac{BF}{FA}$.

Rumus Luas ΔDEF (Teorema Routh):

$$\frac{\text{Luas}(\Delta DEF)}{\text{Luas}(\Delta ABC)} = \frac{(xyz - 1)^2}{(xy + 1)(yz + 1)(zx + 1)}$$

Karena $x = y = z = \frac{1}{2}$, dan semua titik D, E, F berada pada sisi (yaitu segmennya tidak diperpanjang), kita bisa menggunakan rumus yang lebih umum untuk kasus $x = y = z = r(r = \frac{1}{2})$:

$$\frac{\text{Luas}(\Delta DEF)}{\text{Luas}(\Delta ABC)} = \frac{(r^3 - 1)^2}{(r+1)^3} \quad \text{ATAU} \quad \frac{\text{Luas}(\Delta DEF)}{\text{Luas}(\Delta ABC)} = \frac{r^3 + 1}{(r+1)(r^2 - r + 1)}$$

Namun, cara termudah adalah menggunakan rumus dari pengurangan luas segitiga sudut karena perbandingannya sama.

Rumus kasus khusus (Perbandingan sudut sama)

Jika $\frac{BD}{DC} = \frac{CE}{EA} = \frac{AF}{FB} = k$ (dalam kasus ini $k = 2$), maka luas segitiga sudut yang terpotong adalah sama:

$$\frac{\text{Luas}(\text{Segitiga Sudut})}{\text{Luas}(\Delta ABC)} = \frac{k}{(k+1)^2}$$

Hitung luas segitiga sudut:

Kita gunakan $k = 2$:

$$\frac{\text{Luas}(\Delta AFE)}{\text{Luas}(\Delta ABC)} = \frac{AF}{AB} \cdot \frac{AE}{AC}$$

Dari $\frac{AF}{FB} = 2 \Longrightarrow AF = 2FB$. Karena $AB = AF + FB$, maka $\frac{AF}{FB} = \frac{2}{3}$.

Dari $\frac{CE}{EA} = 2 \Longrightarrow CE = 2EA$. Karena $AC = CE + EA$, maka $\frac{AE}{AC} = \frac{1}{3}$.

$$\frac{\text{Luas}(\Delta AFE)}{\text{Luas}(\Delta ABC)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

Karena perbandingannya sama untuk semua sisi ($k = 2$), maka:

$$\text{Luas}(\Delta AFE) = \text{Luas}(\Delta BDF) = \text{Luas}(\Delta CDE) = \frac{2}{9} \cdot \text{Luas}(\Delta ABC)$$

Hitung total luas segitiga sudut:

$$\text{Total Luas Sudut} = 3 \times \left(\frac{2}{9} \cdot \text{Luas}(\Delta ABC)\right) = \frac{6}{9} \cdot \text{Luas}(\Delta ABC) = \frac{2}{3} \cdot \text{Luas}(\Delta ABC)$$

$$\text{Total Luas Sudut} = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8$$

Hitung luas ΔDEF:

$$\text{Luas}(\Delta DEF) - \text{Luas}(\Delta ABC) - \text{Total Luas Sudut}$$
$$\text{Luas}(\Delta DEF) = 12 - 8$$
$$\text{Luas}(\Delta DEF) = 4$$

Jadi, Luas segitiga DEF adalah 4 satuan.

3. Penyelesaian:

Kita menggunakan notasi: $P(A,t)$ sebagai peluang seseorang berusia A tahun hidup setidaknya t tahun lagi.

Hubungan Kunci:

Peluang seseorang hidup $(t_1 + t_2)$ tahun adalah hasil kali peluang hidup t_1 tahun, dan peluang hidup t_2 tahun dari usia barunya $(A + t_1)$.

$$P(A, t_1 + t_2) = P(A, t_1) \times P(A + t_1, t_2)$$

Langkah 1: Tentukan peluang hidup 5 tahun lagi dari usia 85 tahun

Kita gunakan data dari usia 75 tahun (a dan b):

- $P(75, 10) = 0.25$
- $P(75, 15) = 0.10$

Kita tahu $15 = 10 + 5$:

$$P(75, 15) = P(75, 10) \times P(75 + 10,5)$$
$$0.10 = 0.25 \times P(85,5)$$

Maka, peluang hidup 5 tahun lagi dari usia 85 tahun adalah:

$$P(85,5) = \frac{0.10}{0.25} = 0.40$$

Langkah 2: Tentukan peluang hidup 5 tahun lagi dari usia 80 tahun

Kita gunakan hasil $P(85,5)$ dan data dari usia 80 tahun (c):

- $P(80, 10) = 0.15$
- $P(85, 5) = 0.40$ (dari Langkah 1)

Kita tahu $10 = 5 + 5$:

$$P(80, 10) = P(80, 5) \times P(80 + 5, 5)$$
$$0.15 = P(80, 5) \times P(85, 5)$$
$$0.15 = P(80, 5) \times 0.40$$

Maka, peluang yang dicari $P(80, 5)$ adalah:

$$P(80, 5) = \frac{0.15}{0.40} = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$$

Peluang seseorang berusia 80 tahun akan tetap hidup setidaknya 5 tahun lagi adalah $\frac{3}{8}$ atau 0.375(37.5%).

4. Penyelesaian:

Inti dari memenangkan hadiah utama adalah peserta harus menebak semua 79 faktor yang tersembunyi di balik 79 layar dengan benar secara berurutan.

Pertama, kita tentukan berapa banyak factor dari 64^{13}.

$$64^{13} = (2^6)^{13} = 2^{78}$$

Factor dari 2^{78} adalah $2^0, 2^1, \dots, 2^{78}$.

Total jumlah factor, yang juga merupakan jumlah layer (N), adalah:

$$N = 78 + 1 = 79$$

Ada 79 layar yang harus ditebak.

Menghitung peluang sukses berurutan

"Memenangkan hadiah utama" berarti peserta berhasil menebak dengan benar di setiap layer, sehingga mereka maju dari layer 1 hingga layer 79.

Pada setiap layer, factor yang disembunyikan adalah acak (sebuah permutasi dari 79 faktor). Agar menang, tebakan peserta harus cocok dengan factor yang disembunyikan.

Layar ke-1

- Total factor yang mungkin disembunyikan: 79
- Hanya ada satu tebakan yang benar untuk factor yang tersembunyi di layer itu
- Peluang benar: $P_1 = \frac{1}{79}$

Layar ke-2

- Karena peserta maju, factor di layar 1 sudah terungkap
- Total factor yang tersisa dan mungkin disembunyikan: 78
- Peluang benar: $P_2 = \frac{1}{78}$

Layar ke-3

- Total factor yang tersisa: 77
- Peluang benar: $P_3 = \frac{1}{77}$

… dan seterusnya, hingga:

Layar ke-79

- Total factor yang tersisa: 1
- Peluang benar: $P_{79} = \frac{1}{1}$

Total peluang untuk memenangkan hadiah utama adalah peluang berhasil menebak dengan benar di layar 1 dan layar 2 dan … dan layar 79. Kita kalikan semua peluang ini:

$$\text{Peluang Total} = P_1 \times P_2 \times P_3 \times \dots \times P_{79}$$

$$\text{Peluang Total} = \frac{1}{79} \times \frac{1}{78} \times \frac{1}{77} \times \ldots \times \frac{1}{1}$$
$$\text{Peluang Total} = \frac{1}{79 \times 78 \times 77 \times \ldots \times 1}$$

Hasil dari perkalian berurutan dari 79 hingga 1 adalah 79 faktorial (79!).

$$\text{Peluang Total} = \frac{1}{79!}$$

Jadi, peluang peserta untuk memenangkan hadiah utama babak final Kuis Otak Atik tersebut adalah $\frac{1}{79!}$.

5. **Penyelesaian:**

Memaksimalkan $\frac{1}{ab}$ sama artinya dengan meminimalkan ab.

Kita perhatikan persamaan yang diberikan: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2020$

Untuk dua bilangan real positif $\frac{1}{a}$ dan $\frac{1}{b}$, hasil penjumlahannya akan menghasilkan nilai minimum untuk perkaliannya $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b})$ ketika kedua suku tersebut sama (berdasarkan Ketaksamaan AM-GM).

Oleh karena itu, $\frac{1}{ab}$ mencapai nilai maksimum saat:

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$$

Substitusikan kondisi $a = b$ ke dalam persamaan kendala:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 2020$$
$$\frac{2}{a} = 2020$$
$$a = \frac{2}{2020} = \frac{1}{1010}$$

Jadi, nilai a dan b yang menghasilkan maksimum adalah:

$$a = b = \frac{1}{1010}$$

Substitusikan nilai a dan b ke dalam ekspresi yang diminta $(2a - b)$:

$$2a - b = 2\left(\frac{1}{1010}\right) - \left(\frac{1}{1010}\right)$$
$$2a - b = \frac{2}{1010} - \frac{1}{1010}$$
$$2a - b = \frac{1}{1010}$$

Jadi, nilai dari $2a - b$ adalah $\frac{1}{1010}$.

6. **Penyelesaian:**
Pola peletakan bilangan adalah spiral berlawanan arah jarum jam.
Kita cari n genap sedemikian sehingga n^2 mendekati 2020.
- $\sqrt{2020} \approx 44.94$
- Kita ambil $n = 44$ (bilangan genap di bawahnya)
- $n^2 = 44^2 = 1936$

Untuk bilangan kuadrat genap n^2:
- Kolom $(b) = \frac{n}{2}$
- Baris $(a) = \frac{3n}{2}$

Menggunakan $n = 44$:
- Kolom $b = \frac{44}{2} = 22$
- Baris $a = \frac{3\times 44}{2} = 3 \times 22 = 66$

Jadi, 1936 terletak di Baris 66, Kolom 22.

Bilangan 2020 berada 2020 – 1936 = 84 langkah setelah 1936.
Dari $n^2 = 1936$, pergerakan spiral berlanjut:
1. Ke kanan (sebanyak $n = 44$ langkah)
2. Ke atas (sebanyak $n = 44$ langkah)

Segmen Ke Kanan (Langkah 1 sampai 44):
- Bilangan: 1937 sampai 1936 + 44 = 1980
- Posisi 1980 (akhir segmen Kanan):
  - Baris tetap: 66
  - Kolom bertambah 44: 22 + 44 = 66
- Kita sudah menggunakan 44 langkah. Sisa langkah: 84 – 44 = 40 langkah

Segmen Ke Atas (Langkah 45 dan seterusnya):
- Segmen ini dimulai dari 1981 di Kolom 66
- Bilangan 2020 adalah langkah ke 40 dalam segmen ini (1980 + 40 = 2020)
- Posisi 2020:
  - Kolom b tetap: 66
  - Baris a berkurang 40 dari baris awal segmen (66): 66 – 40 = 26

Jadi, bilangan 2020 terletak di Baris $a = 26$ dan Kolom b = 66

$$a + b = 26 + 66 = 92$$

Jadi, Nilai $a + b$ adalah 92.

7. **Penyelesaian:**

Daerah yang diarsir (hijau) adalah hasil dari penjumlahan dan pengurangan luas setengah lingkaran, dimulai dari yang terbesar dan bergantian mengurangi atau menambah lapisan di bawahnya.

$$L_{hijau} = L_{AE} - L_{AD} + L_{AC} - L_{AB} - L_{CD} + L_{DE}$$

Catatan: Setengah lingkaran AB, CD dan DE memiliki diameter yang sama ($D = 4$ cm) dan jari-jari yang sama ($r = 2$ cm).

Diketahui $AB = BC = CD = DE = 4$ cm. Jari-jari (r) adalah setengah dari diameter:

- $r_{AE} = \frac{4+4+4+4}{2} = 8$
- $r_{AD} = \frac{4+4+4}{2} = 6$
- $r_{AC} = \frac{4+4}{2} = 4$
- $r_{AB} = r_{CD} = r_{DE} = \frac{4}{2} = 2$

Kita akan menghitung koefisien $\frac{1}{2}r^2$ dari setiap setengah lingkaran (karena $L = \frac{1}{2}\pi r^2$):

$$L_{hijau} = \left(\frac{1}{2}r_{AE}^2 - \frac{1}{2}r_{AD}^2 + \frac{1}{2}r_{AC}^2 - \frac{1}{2}r_{AB}^2 - \frac{1}{2}r_{CD}^2 + \frac{1}{2}r_{DE}^2\right)\pi$$

Kita faktorkan $\frac{1}{2}$ dan π:

$$L_{hijau} = \frac{1}{2}(r_{AE}^2 - r_{AD}^2 + r_{AC}^2 - r_{AB}^2 - r_{CD}^2 + r_{DE}^2)\pi$$

Substitusikan nilai r:

$$L_{hijau} = \frac{1}{2}(8^2 - 6^2 + 4^2 - 2^2 - 2^2 + 2^2)\pi$$

Sederhanakan Perhitungan

$$L_{hijau} = \frac{1}{2}(64 - 36 + 16 - 4 - 4 + 4)\pi$$

Sederhanakan angka di dalam kurung:

$$L_{hijau} = \frac{1}{2}(64 - 36 + 16 - 4)\pi$$
$$L_{hijau} = \frac{1}{2}(28 + 16 - 4)\pi$$
$$L_{hijau} = \frac{1}{2}(44 - 4)\pi$$
$$L_{hijau} = \frac{1}{2}(40)\pi$$
$$L_{hijau} = 20\pi \text{ cm}^2$$

Karena luas daerah hijau dinotasikan sebagai $a\pi$ cm^2, maka:

$$a\pi = 20\pi$$
$$a = 20$$

8. **Penyelesaian:**
Dalam teori bilangan, jumlah yang melibatkan bilangan bebas kuadrat dan factor prima biasanya merujuk pada Fungsi Mobius $\mu(n)$.
Fungsi Mobius ($\mu(n)$) didefinisikan sebagai:
   - $\mu(n) = 1$ jika $n = 1$
   - $\mu(n) = 0$ jika n adalah bilangan tak bebas kuadrat (memiliki factor kuadrat selain 1, seperti 4, 8, 9, 12, …).
   - $\mu(n) = (-1)^k$ jika n adalah bilangan bebas kuadrat dengan k factor prima.

Kita diminta menghitung jumlah parsial dari $\mu(n)$ hingga $n = 101$, yaitu $M(101) = \sum_{n=1}^{101} \mu(n)$.
Perhitungan ini tidak memiliki rumus sederhana, tetapi kita dapat menggunakan nilai-nilai Fungsi Mobius yang sudah ditetapkan dalam literatur matematika:
1. Jumlah hingga 100: Berdasarkan nilai-nilai standar dari Fungsi Penjumlahan Mobius, jumlah parsial hingga $n = 100$ adalah:
$$M(100) = \sum_{n=1}^{100} \mu(n) = 3$$
(Perhitungan ini diperoleh dengan menjumlahkan secara langsung, di mana semua bilangan tak bebas kuadrat menghasilkan 0, dan bilangan bebas kuadrat lainnya bergantian menghasilkan 1 atau -1).
2. Nilai $\mu(101)$: Kita perlu menghitung nilai $\mu(101)$.
   - 101 adalah bilangan prima (tidak dapat dibagi oleh bilangan prima kecil 2, 3, 5, 7).
   - Ini berarti 101 adalah bilangan bebas kuadrat dengan $k = 1$ faktor prima.
   - Maka, $\mu(101) = (-1)^k = (-1)^1 = -1$.
3. Jumlah Total: Jumlah hingga 101 adalah jumlah hingga 100 ditambah $\mu(101)$:
$$M(101) = M(100) + \mu(101)$$
$$M(101) = 3 + (-1) = 2$$

9. **Penyelesaian:**
Kita akan mencari bilangan $N < 20$ yang tidak bisa diwakili oleh bentuk $x^2 - y^2 + z^2$, di mana x, y, z adalah bilangan bulat positif (≥ 1).

Bentuk $x^2 - y^2$ (dengan $x, y \geq 1$) dapat menghasilkan:
$$K = x^2 - y^2$$

1. Semua Bilangan Ganjil ≥ 3: Selalu bisa diwakili (contoh: $3 = 2^2 - 1^2$, $5 = 3^2 - 2^2$).
2. Semua Kelipatan 4 yang ≥ 8: Selalu bisa diwakili (contoh: $8 = 3^2 - 1^2$, $12 = 4^2 - 2^2$).
3. Bilangan Genap $4k + 2$ (yaitu 2, 6, 10, 14, 18, …) TIDAK BISA diwakili sebagai $x^2 - y^2$ dengan x, y bilangan bulat.

Sekarang, kita mencari $N = K + z^2$, di mana $z^2 \geq 1$.

Mencari Bilangan N yang Tidak Terpenuhi (B)

Kita cari $N \in \{1, 2, \dots, 19\}$ sehingga $N = x^2 - y^2 + z^2$ tidak memiliki solusi dengan $x, y, z \geq 1$.

Bilangan yang paling sulit dipenuhi adalah yang paling kecil atau yang termasuk dalam pola yang tidak dapat diwakili oleh $x^2 - y^2$.

N	Coba $z^2 = 1 (z = 1)$	Coba $z^2 = 4 (z = 2)$	Anggota A?
1	$K = 1 - 1 = 0$. 0 tidak bisa diwakili.	$K = 1 - 4 = -3$. $x^2 - y^2$ tidak mungkin negative.	YA $(1 = 1^2 - 1^2 + 1^2)$
2	$K = 2 - 1 = 1$. 1 hanya $1^2 - 0^2$. (Gagal $y \geq 1$)	$K = 2 - 4 = -2$. (Gagal)	TIDAK $(2 \in B)$
3	$K = 3 - 1 = 2$. 2 tidak bisa diwakili.	$K = 3 - 4 = -1$. (Gagal)	TIDAK $(3 \in B)$
4	$K = 4 - 1 = 3$. $3 = 2^2 - 1^2$.	-	YA $(4 = 2^2 - 1^2 + 1^2)$
5	$K = 5 - 1 = 4$. $4 = 2^2 - 0$ (gagal $y \geq 1$).	$K = 5 - 4 = 1$. 1 hanya $1^2 - 0^2$. (Gagal $y \geq 1$)	YA $(5 = 3^2 - 2^2 + 0$ salah, $5 = 4^2 - 3^2 + 1^2$. $5 \in A)$
6	$K = 6 - 1 = 5$. $5 = 3^2 - 2^2$.	-	YA $(6 = 3^2 - 2^2 + 1^2)$
7	$K = 7 - 1 = 6$. 6 tidak bisa diwakili.	$K = 7 - 4 = 3$. $3 = 2^2 - 1^2$.	YA $(7 = 2^2 - 1^2 + 2^2)$
8	$K = 8 - 1 = 7$. $7 = 4^2 - 3^2$.	-	YA $(8 = 4^2 - 3^2 + 1^2)$
9	$K = 9 - 1 = 8$. $8 = 3^2 - 1^2$.	-	YA $(9 = 3^2 - 1^2 + 1^2)$

10	$K = 10 - 1 = 9$. $9 = 5^2 - 4^2$.	-	YA $(10 = 5^2 - 4^2 + 1^2)$
11	$K = 11 - 1 = 10$. 10 tidak bisa diwakili.	$K = 11 - 4 = 7$. $7 = 4^2 - 3^2$.	YA $(11 = 4^2 - 3^2 + 2^2)$
12	$K = 12 - 1 = 11$. $11 = 6^2 - 5^2$.	-	YA $(12 = 6^2 - 5^2 + 1^2)$
13	$K = 13 - 1 = 12$. $12 = 4^2 - 2^2$.	-	YA $(13 = 4^2 - 2^2 + 1^2)$
14	$K = 14 - 1 = 13$. $13 = 7^2 - 6^2$.	-	YA $(14 = 7^2 - 6^2 + 1^2)$
15	$K = 15 - 1 = 14$. 14 tidak bisa diwakili.	$K = 15 - 4 = 11$. $11 = 6^2 - 5^2$.	YA $(15 = 6^2 - 5^2 + 2^2)$
16	$K = 16 - 1 = 15$. $15 = 4^2 - 1^2$.	-	YA $(16 = 4^2 - 1^2 + 1^2)$
17	$K = 17 - 1 = 16$. $16 = 5^2 - 3^2$.	-	YA $(17 = 5^2 - 3^2 + 1^2)$
18	$K = 18 - 1 = 17$. $17 = 9^2 - 8^2$.	-	YA $(18 = 9^2 - 8^2 + 1^2)$
19	$K = 19 - 1 = 18$. 18 tidak bisa diwakili.	$K = 19 - 4 = 15$. $15 = 4^2 - 1^2$.	YA $(19 = 4^2 - 1^2 + 2^2)$

Ada kesalahan dalam analisis awal (dan juga dalam analisis yang sering beredar untuk soal ini). Bentuk $x^2 - y^2$ (perbedaan dua kuadrat) tidak dapat menghasilkan 1, 2, 6, 10, 14, 18, … dengan $x, y \geq 1$.

Mari kita ulangi pengecekan untuk bilangan N yang sulit, yaitu $N \in \{2, 3\}$

- $N = 2$: Kita butuh $x^2 - y^2 = 2 - z^2$.
  - Jika $z = 1$, $x^2 - y^2 = 1$. Hanya bisa $1^2 - 0^2$. (Gagal $y \geq 1$).
  - Jika $z = 2$, $x^2 - y^2 = 2 - 4 = -2$. (Gagal $x > y$).
  - 2 bukan anggota A.
- $N = 3$: Kita butuh $x^2 - y^2 = 3 - z^2$.
  - Jika $z = 1$, $x^2 - y^2 = 2$. 2 tidak bisa diwakili oleh $x^2 - y^2$.
  - Jika $z = 2$, $x^2 - y^2 = 3 - 4 = -1$. (Gagal).
  - 3 bukan anggota A.

Koreksi Pengecekan Anggota B (yang TIDAK dapat diwakili)

Himpunan B adalah himpunan bilangan bulat positif < 20 yang bukan anggota A. Bilangan N yang sulit diwakili dalam bentuk $x^2 - y^2 + z^2$ adalah bilangan $4k + 2$ dan $4k + 3$ yang kecil.

Kita telah menemukan bahwa 2 dan 3 bukan anggota A. Mari kita periksa bilangan genap $4k + 2$ lainnya:

- $N = 6$: $x^2 - y^2 = 6 - z^2$.
    - $z = 1$: $x^2 - y^2 = 5$. $5 = 3^2 - 2^2$. Solusi: $6 = 3^2 - 2^2 + 1^2$. YA.
- $N = 10$: $x^2 - y^2 = 10 - z^2$.
    - $z = 1$: $x^2 - y^2 = 9$. $9 = 5^2 - 4^2$. Solusi: $10 = 5^2 - 4^2 + 1^2$. YA.
- $N = 14$: $x^2 - y^2 = 14 - z^2$.
    - $z = 1$: $x^2 - y^2 = 13$. $13 = 7^2 - 6^2$. Solusi: $14 = 7^2 - 6^2 + 1^2$. YA.
- $N = 18$: $x^2 - y^2 = 18 - z^2$.
    - $z = 1$: $x^2 - y^2 = 17$. $17 = 9^2 - 8^2$. Solusi: $18 = 9^2 - 8^2 + 1^2$. YA.

Finalisasi Himpunan B

Satu-satunya bilangan yang TIDAK dapat diwakili adalah N di mana untuk setiap $z^2 \geq 1$, nilai $N - z^2$ tidak dapat diwakili oleh $x^2 - y^2$ (yaitu $N - z^2 \in \{1, 2, 6, 10, 14, 18, \ldots\}$ dan $N - z^2$ tidak dapat diwakili oleh 1).

Bilangan yang bukan anggota A adalah 2 dan 3. Semua bilangan lain $\in \{1, 4, 5, 6, 7, \ldots, 19\}$ adalah anggota A.

- B = Bilangan bulat positif < 20 yang bukan anggota A.
- $B = \{2, 3\}$

Jadi, banyak anggota B adalah 2.

10. Penyelesaian:

Pertama, kita hitung Rata-rata $(\overline{X})$ dan Median (M) kecepatan di Bulan Maret setelah penyesuaian dari Februari.

Kecepatan Maret

Pengembang	Unduh Feb	Unduh Mar	Unggah Feb	Unggah Mar
A	45	45	25	25 + 5 = 30
B	75	75	34	34 + 5 = 39
C	45	45	18	18 + 5 = 23
D	98	98 – 10 = 88	37	37
E	52	52	32	32
Total		**305**		**161**

Statistic Maret

Statistik	Pengunduhan	Pengunggahan
Rata-rata ($\overline{X}$)	305/5 = 61	161/5 = 32,2
Median (M)	52 (Data: 45, 45, 52, 75, 88)	32 (Data: 23, 30, 32, 37, 39)

Perubahan kecepatan di Bulan April adalah kenaikan dari nilai Median Maret, dan besarnya tergantung perbandingan dengan Rata-rata Maret ($\overline{X} = 61$ dan $\overline{X} = 32,2$).

Kondisi	Persentase
Kecepatan $< \overline{X}$	10% dari Median
Kecepatan $\geq \overline{X}$	5% dari Median

A. Rata-rata Kenaikan Pengunduhan ($\overline{\Delta}_a$)
- Median Pengunduhan $M_{Unduh} = 52$
- Pengembang yang kecepatannya < 61 (kenaikan 10%): A (45), C (45), E (52) → 3 Pengembang.
  - Kenaikan 10% dari 52 adalah 5, 2 Mbps.
- Pengembang yang kecepatannya ≥ 61 (kenaikan 5%): B (75), D (88) → 2 Pengembang.
  - Kenaikan 5% dari 52 adalah 2, 6 Mbps.

$$\overline{\Delta}_a = \frac{(3 \times 5,2) + (2 \times 2,6)}{5} = \frac{15,6 + 5,2}{5} = \frac{20,8}{5} = 4,16 \text{ Mbps}$$

B. Rata-rata Kenaikan Pengunggahan $\left(\overline{\Delta}_b\right)$
- Median Pengunggahan $M_{Unggah} = 32$
- Pengembang yang kecepatannya < 32, 2 (kenaikan 10%): A (30), C (23), E (32) → 3 Pengembang.
  - Kenaikan 10% dari 32 adalah 3, 2 Mbps
- Pengembang yang kecepatannya ≥ 32, 2 (kenaikan 5%): B (39), D (37) → 2 Pengembang.
  - Kenaikan 5% dari 32 adalah 1, 6 Mbps

$$\overline{\Delta}_b = \frac{(3 \times 3,2) + (2 \times 1,6)}{5} = \frac{9,6 + 3,2}{5} = \frac{12,8}{5} = 2,56 \text{ Mbps}$$

Karena rata-rata April (a dan b) adalah rata-rata Maret ditambah rata-rata kenaikannya, kita dapat menghitung selisihnya sebagai berikut:

$$a - b = \left(\overline{X}_{\text{Unduh, Mar}} - \overline{X}_{\text{Unggah, Mar}}\right) + \left(\overline{\Delta}_a - \overline{\Delta}_b\right)$$

1. Selisihh rata-rata Maret: 61 – 32, 2 = 28, 8 Mbps
2. Selisih rata-rata Kenaikan: 4, 16 – 2, 56 = 1, 6 Mbps

$$a - b = 28,8 + 1,6 = 30,4 \text{ Mbps}$$