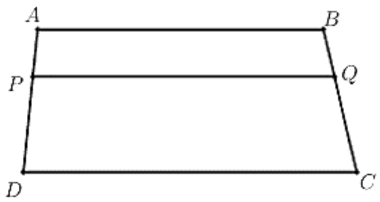
PEMBAHASAN
OSP MATEMATIKA SMA
TAHUN 2025

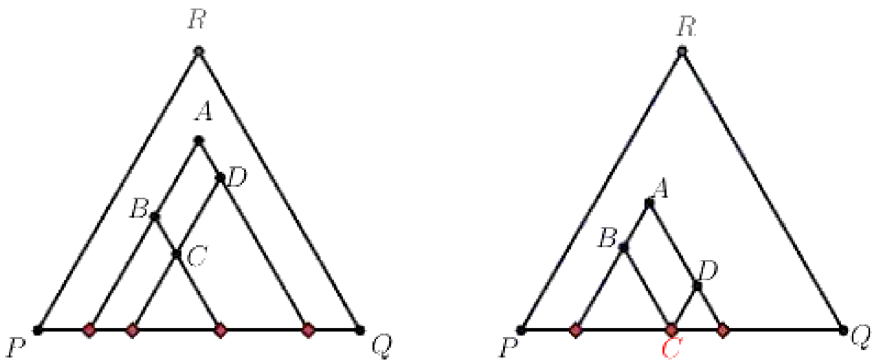
1. **Penyelesaian:**
Dari Ketaksamaan Cauchy-Schwarz,
$$(a^2+b^2+c^2)(1^2+2^2+3^2) \geq 73^2 \Longrightarrow a^2+b^2+c^2 \geq 381$$
Nilai minimum ini dapat dicapai ketika $a=5, b=10$, dan $c=16$.

2. **Penyelesaian:**



Misalkan $AP=ax, PD=(1-x)a, BQ=bx$, dan $QC=(1-x)b$. Dari informasi pada soal didapat
$$6+ax+bx=7+a+b-ax-bx \text{ dan } a+b=10.$$
Selesaikan, didapat $x=\frac{11}{20}$. Panjang $PQ=\frac{6\times 9+7\times 11}{20} \Longrightarrow 20PQ=131$.

3. **Penyelesaian:**
Misalkan segitiga sama sisi tersebut adalah PQR dan jajargenjangnya adalah $ABCD$. Perhatikan bahwa ada tepat satu sisi, sebut saja PQ, yang tidak sejajar dengan sisi jajargenjang. Segmen PQ berpotongan dengan garis AB, BC, CD, DA di tiga atau empat titik berbeda.



Sebaliknya, dari empat titik berbeda pada PQ, kita bisa membuat tepat satu jajargenjang yang tidak memiliki sisi yang sejajar dengan PQ dan keempat sisinya memotong PQ di empat titik tersebut. Demikian juga dari tiga berbeda pada PQ, kita memiliki tepat satu jajargenjang dengan sifat serupa. Dengan ini, banyaknya jajargenjang adalah banyaknya pemilihan empat atau tiga titik pada suatu sisi segitiga PQR, yaitu

$$3 \times \left(\binom{22}{4} + \binom{22}{3}\right) = 3\binom{23}{4} = \frac{3 \times 23 \times 22 \times 21 \times 20}{24}$$

Jadi, $k = 1265$.

4. **Penyelesaian:**

Kuadratkan dan sederhanakan soal menjadi

$$b = 15a - \frac{15}{a}$$

Karena a, b adalah bilangan asli maka $a = 1{,}3{,}5{,}15$. Dengan ini, b yang memenuhi adalah 0, 40, 72, 14.

Jadi, jumlah b asli yang dicari adalah 40 + 72 + 224 = 336.

5. **Penyelesaian:**

Karena $2024 = 2 \cdot 6! + 4 \cdot 5! + 4 \cdot 4! + 1 \cdot 3! + 1 \cdot 2! + 0 \cdot 1!$, maka bilangan yang dicari adalah 3672154.

6. **Penyelesaian:**

Gunakan sifat jika $a \equiv b \pmod{m}$ maka $P(a) \equiv P(b) \pmod{m}$. Perhatikan $114 = 2 \times 3 \times 19$.

- Perhatikan $P(0) \equiv P(-13)$ (mod 13). Jadi, $P(0) \equiv 11$ (mod 13).
- Perhatikan $P(6) \equiv P(-13) \not\equiv 0$ (mod 19) dan $P(57) \equiv P(38) \equiv P(0)$ (mod 19). Kemudian dari $19|P(6)P(38)P(57) + 19$ didapat
$$19|P(6)P(0)^2 \Longrightarrow 19|P(0)$$
- Perhatikan $P(6) \equiv P(57) \equiv P(0)$ (mod 3) dan $P(38) \equiv P(-13) \equiv 2$ (mod 3). Dengan cara yang sama, kita dapatkan
$$3|2P(0)^2 + 1 \Longrightarrow P(0) = 1{,}2 \pmod{3}$$
- Perhatikan $P(6) \equiv P(38) \equiv P(0)$ (mod 2) dan $P(57) \equiv P(-13) \equiv 1$ (mod 2). Dengan cara yang sama, kita dapatkan
$$2|P(0)^2 + 1 \Longrightarrow P(0) = 1 \pmod{2}$$

Dari $P(0) \geq 0$, dan empat informasi terakhir, didapat $P(0)$ terkecil adalah 323. Contoh polinom yang memenuhi adalah $P(x) = -12x + 323$.

7. **Penyelesaian:**

Perhatikan bahwa karena 17 merupakan bilangan prima, maka m harus berbentuk 17^k atau $(-17)^k$ dan n haruslah factor dari 324.

- Kasus 1: $m > 0$

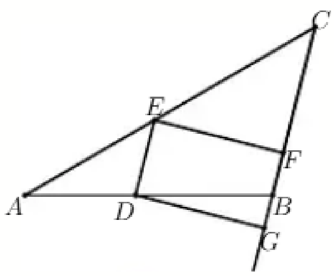
Perhatikan bahwa untuk setiap n factor dari $324 = 2^2 \cdot 3^4$, maka $m = 17^{\frac{324}{n}}$ memenuhi persamaan. Terdapat $3 \cdot 5 = 15$ solusi.

- Kasus 2: $m < 0$, maka $m = (-17)^k$
  Karena m negative, maka haruslah k ganjil. Perhatikan bahwa untuk setiap k factor ganjil dari $324 = 2^2 \cdot 3^4, m = (-17)^k$ dan $n = \frac{324}{k}$ memenuhi. Maka terdapat 5 solusi.

Maka banyaknya pasangan bilangan bulat (m, n) yang memenuhi adalah 15 + 5 = 20.

8. Penyelesaian:

Kita mengasumsikan kedua titik sudut lainnya ada pada segmen AB dan AC. Misalkan $DEFG$ adalah persegi Panjang dengan titik D, E pada segmen AB, AC, berturut-turut dan titik F, G pada BC.



Misalkan $AE/AC = x$ maka $DE = xBC$. Dari hokum sinus pada ΔABC, diperoleh $\sin C = \frac{8}{BC}$ sehingga $EF = \frac{SCE}{BC}$. Dengan ini, luas $DEFG$ adalah

$$8xCE = 8x(1-x)AC \leq 2AC = 46$$

Ketaksamaan terakhir adalah AM-GM dan nilai maksimum tercapai saat E adalah titik tengah AC.

9. Penyelesaian:

Misalkan a_n, b_n, c_n, d_n adalah banyaknya subhimpunan dari $\{1,2, \ldots, n\}$ dengan jumlah elemen kongruen dengan 0, 1, 2, 3 dalam modulo 4, berturut-turut. Jumlah elemen pada himpunan kosong didefinisikan sebagai nol. Dengan perhitungan langsung, didapat $a_2 = b_2 = c_2 = d_2 = 1$. Dengan meninjau subhimpunan yang memuat $n+1$ dan yang tidak, didapat $a_{n+1} = a_n + x$ dengan $x \in \{a_n, b_n, c_n, d_n\}$. Demikian juga untuk b_{n+1}, c_{n+1}, dan d_{n+1}. Dari sini bisa disimpulkan secara induktif bahwa $a_n = b_n = c_n = d_n$ untuk semua $n \geq 2$. Karena $a_{21} + b_{21} + c_{21} + d_{21} = 2^{21}$ maka $a_{21} = 2^{19}$. Karena himpunan kosong terhitung pada a_{21} maka banyaknya yang dicari adalah $2^{19} - 1$.

Jadi, $k = 19$ dan $m = 1$. Jawaban yang diinginkan adalah 191.

10. Penyelesaian:

Tulis kondisi pada soal menjadi $2a_{n+1} + a_n = a_n\sqrt{4a_n - 3}$. Kuadratkan dan sederhanakan menjadi

$$\frac{a_n^3}{a_n^2 + a_n a_{n+1} + a_{n+1}^2} = 1$$

Untuk semua $n \geq 1$. Dengan ini, nilai yang dicari adalah 2023.

11. Penyelesaian:

Misalkan $|A| = x, |B| = y, |A \cap B| = z$ maka

$$144 = 2^x + 2^y - 2^z$$

Tanpa mengurangi keberlakuan secara umum, asumsikan $x \geq y \geq z$. Karena,

$$2^x \leq 2^x + 2^y - 2^z < 2^x + 2^y \leq 2 \times 2^x \Longrightarrow 2^x \leq 144 < 2^{x+1} \Longrightarrow x = 7$$

Dengan ini, $2^Y - 2^z = 16$. Jelas bahwa $y > z$, maka $v_2(2^y - 2^z) = z$. Dari sini disimpulkan $z = 4$ dan $y = 5$.

Jadi, $|A \cup B| = x + y - z = 8$.

12. Penyelesaian:

a. Tinjau persamaan

$$n(n + 2022) + 2 = (n + 1010)^2$$

Memiliki solusi $n = \frac{1010^2}{2} - 1$. Karena hanya diminta suatau n yang memenuhi, selesai.

b.
- Untuk $a = 1$: Karena $n(n+1) + 2$ kuadrat saat $n = 1$ maka $a = 1$ tidak memenuhi.
- Untuk $a = 2$: Karena $(n+1)^2 < n(n+2) + 2 < (n+2)^2$ maka $n(n+2) + 2$ bukan bilangan kuadrat untuk setiap bilangan asli n. Jadi, $a = 2$ memenuhi.
- Untuk $a = 3$: Karena $(n+1)^2 < n(n+3) + 2 < (n+2)^2$ maka $n(n+3) + 2$ bukan bilangan kuadrat untuk setiap bilangan asli n. Jadi, $a = 3$ memenuhi.
- Untuk $a \equiv 0 \pmod 4$: Perhatikan bahwa $n(n+a) + 2 \equiv n^2 + 2 \equiv 2{,}3 \pmod 4$ bukanlah bilangan kuadrat. Jadi, $a = 4k$ memenuhi untuk setiap k asli.

Sekarang kita perlu meninjau semua $a \geq 5$ dan $a \not\equiv 0 \pmod 4$. Akan dibuktikan selalu ada bilangan asli k sehingga persamaan

$$n(n + a) + 2 = (n + k)^2$$

Memiliki solusi n asli. Untuk a genap, ambil $k = \frac{a}{2} - 1$. Untuk a ganjil, ambil $k = \frac{a-1}{2}$. Mudah diperiksa bahwa nilai k tersebut memberikan solusi n asli.

Jadi, hanya $a = 2, 3$ dan $4k$, dengan k bilangan asli, yang memenuhi kondisi soal.

13. Penyelesaian:

Misalkan $xy - 2x + 5y = k$. Maka, $xy = k + 2x - 5y$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} 3 &= 5x^2 + 4xy + 11y^2 \\ &= 5x^2 + 2xy + 2xy + 11y^2 \\ &= 5x^2 + 2xy + 2(k + 2x - 5y) + 11y^2 \\ &= 5x^2 + 2xy + 2k + 4x - 10y + 11y^2 \end{aligned}$$

Persamaan terakhir dapat ditulis ulang menjadi

$$k = \frac{13}{4} - \frac{1}{2}\left((2x+1)^2 + (x+y)^2 + 10\left(y - \frac{1}{2}\right)^2\right)$$

Karena tidak ada bilangan kuadrat yang negative maka $k \leq \frac{13}{4}$. Perhatikan bahwa

$$k = \frac{13}{4} \Leftrightarrow 2x + 1 = x + y = y - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ dan } y = \frac{1}{2}.$$

Dapat dicek bahwa $x = -\frac{1}{2}$ dan $y = \frac{1}{2}$ memenuhi $5x^2 + 4xy + 11y^2 = 3$. Jadi, nilai maksimum dari $xy - 2x + 5y$ adalah $\frac{13}{4}$.

14. Penyelesaian:

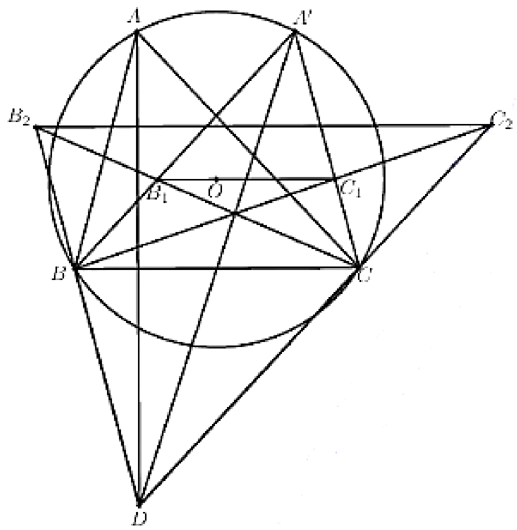
Karena BC adalah garis sumbu AD maka cukup dibuktikan bahwa pusat lingkaran luar ΔDB_2C_2 ada pada garis BC.

Misalkan A' adalah titik potong BB_1 dan CC_1. Dengan ini, $A'CDB$ adalah jajargenjang. Akibatnya $\angle BA'C = \angle BDC = \angle BAC$, sehingga A' ada pada lingkaran luar ABC.

Perhatikan bahwa $\Delta BB_2C \sim \Delta C_1CB_1$, $\Delta CC_2B \sim \Delta B_1BC_1$, dan $\Delta A'B_1C_1 \sim \Delta A'BC$. Dengan ini

$$\frac{BB_2}{CC_2} = \frac{BB_2}{BC} \times \frac{BC}{CC_2} = \frac{CC_1}{C_1B_1} \times \frac{B_1C_1}{BB_1} = \frac{CC_1}{BB_1} = \frac{A'C}{A'B} = \frac{DB}{DC}.$$

Akibatnya $\Delta DBC \sim \Delta DB_2C_2$.



Perhatikan juga bahwa,

$$\frac{DB_2}{BB_2}=\frac{DC}{BB_1}=\frac{A'B}{BB_1}=\frac{A'C}{CC_1}$$

Dengan ini, pasangan titk (B,C) pada ΔDB_2C_2 berkorespondesi dengan pasangan titik (C_1,B_1) pada $\Delta A'CB$. Karena titik pusat lingkaran luar $\Delta A'CB$, yaitu O, ada pada B_1C_1 maka titik pusat lingkaran luar ΔDB_2C_2 ada pada BC. Terbukti.

15. Penyelesaian:

Perhatikan bahwa jumlah bilangan adalah invariant dan prosedur ini akan berhenti jika selisih bilangan terbesar dan terkecil di papan adalah nol atau satu.

Kemungkinan pertama tidak mungkin terjadi karena jumlah bilangan mula-mula adalah 11×23 yang tidak habis dibagi 22.

Untuk kemungkinan kedua, misalkan bilangan yang tersisa adalah x dan $x+1$ dengan banyaknya masing-masing adalah k dan $22-k$, berturut-turut. Kita punya persamaan,

$$11\times 23=kx+(22-k)(x+1)\Longrightarrow 231=22x-k.$$

Dengan ini, $k=11 \pmod{22}$. Karena $0\le k\le 22$ maka $k=11$ dan $x=11$. Jadi, prosedur harus berakhir saat bilangan yang tersisi adalah

$$\underbrace{11,11,\dots,11}_{11\ kali},\underbrace{12,12,\dots,12}_{11\ kali}.$$

Sekarang perhatikan nilai

$$S(x_1,x_2,\dots,x_{22})=\sum_{i=1}^{22}\left(x_i-\frac{23}{2}\right)^2$$

Dengan $x_1,x_2,\dots,x_{22}$ adalah bilangan di papan. Untuk setiap dua langkah berurutan yang mengganti pasangan (a,b) menjadi $(a+1,b-1)$ didapat nilai S yang berubah (turun) sebesar

$$\left(a-\frac{23}{2}\right)^2+\left(a-\frac{23}{2}\right)^2-\left(a-\frac{21}{2}\right)^2-\left(b-\frac{25}{2}\right)^2=2(b-a-1)\ge 2.$$

Karena $S(1,2,\dots,22)=\frac{1771}{2}$ dan $S(11,\dots,11,12,\dots,12)=\frac{11}{2}$ maka banyaknya langkah maksimum adalah

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1771}{2}-\frac{11}{2}\right)=440.$$

Untuk konfigurasi 440 langkah dapat dilakukan dengan cara berikut:

Perhatikan bilangan-bilangan

$$a,a+1,\dots,b-1,b.$$

Dengan memilih pasangan-pasangan $(a,a+2),(a+1,a+3),(a+2,a+4),\dots,(b-2,b)$, secara berturut-turut, kita telah melakukan $b-a-1$ langkah dan pada akhirnya kita hanya mengubah satu buah a menjadi $a+1$ dan satu buah b menjadi $b-1$. Dengan observasi tersebut, kita bisamembuat susunan langkah berikut:

- Dari 1, 2, 3, …, 22, lakukan 20 langkah untuk mendapatkan 2, 2, 3, 4, 5, …, 19, 20, 21, 22.
- Dari konfigurasi sebelumnya, lakukan 18 langkah untuk mendapatkan 2, 3, 3, 4, 5, …, 19, 20, 20, 21.
- Lanjutkan 18 langkah lagi untuk mendapatkan 3, 3, 3, 4, 5, …, 18, 19, 20, 20, 20. Sampai sini, kita melakukan dua kali 18 langkah untuk mengubah dua buah 2 di poin pertama menjadi dua buah 3 di poin ini.
- Lanjutkan dengan 3×16 langkah berikutnya untuk mengubah tiga buah 3 menjadi tiga buah 4.
- Dan seterusnya.

Dengan ini, banyaknya langkah adalah

$$20 + 2(18) + 3(16) + 4(14) + 5(12) + 6(10) + 7(8) + 8(6) + 9(4) + 10(2) = 440.$$