PEMBAHASAN

OSP MATEMATIKA SMA

TAHUN 2019

1. **Penyelesaian:**

Diketahui:

- Jumlah bola Merah $(M) = 7$
- Jumlah bola Putih $(P) = 8$
- Total bola $(N) = 7 + 8 = 15$
- Jumlah bola yang diambil sekaligus $(k) = 2$

Ruang sampel $\left(n(S)\right)$ adalah total cara mengambil 2 bola dari 15 bola yang ada. Kita gunakan kombinasi $C(n, k)$.

$$n(S) = C(15,2) = \frac{15!}{2!\,(15-2)!} = \frac{15 \times 14}{2 \times 1} = 15 \times 7 = 105$$

Kejadian yang diinginkan $(n(A))$ adalah terambilnya dua bola yang berwarna sama. Ini bisa terjadi dalam dua kasus yang saling lepas:

- Terambil 2 bola Merah
- Terambil 2 bola Putih

Kasus 1: Terambil 2 Bola Merah $(n(A_M))$
Ambil 2 bola dari 7 bola Merah.

$$n(A_M) = C(7,2) = \frac{7!}{2!\,(7-2)!} = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 7 \times 3 = 21$$

Kasus 2: Terambil 2 Bola Putih $(n(A_P))$
Ambil 2 bola dari 8 bola putih.

$$n(A_P) = C(8,2) = \frac{8!}{2!\,(8-2)!} = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 4 \times 7 = 28$$

Total kejadian $(n(A))$

$$n(A) = n(A_M) + n(A_P) = 21 + 28 = 49$$

Peluang terambilnya dua bola berwarna sama $(P(A))$ adalah perbandingan antara jumlah kejadian yang diinginkan dengan ruang sampel.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{49}{105}$$

Untuk menyederhanakan, bagi pembilang dan penyebut dengan factor persekutuan terbesar, yaitu 7:

$$P(A) = \frac{49 \div 7}{105 \div 7} = \frac{7}{15}$$

Jadi, Peluang terambilnya dua bola yang berwarna sama adalah $\frac{7}{15}$.

2. **Penyelesaian:**

Luas segienam beraturan dengan Panjang sisi s adalah $\frac{3\sqrt{3}}{2}s^2$.

Untuk kasus ini, Panjang sisi (s) adalah 1 satuan.

Rumus Luas Segienam Beraturan:

$$L = \frac{3\sqrt{3}}{2}s^2$$

Karena $s = 1$ satuan, kita subtitusikan:

$$L = \frac{3\sqrt{3}}{2}(1)^2$$

$$L = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Luasnya adalah $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ satuan luas.

Catatan: Segienam beraturan dapat dibagi menjadi enam segitiga sama sisi yang kongruen, dengan Panjang sisi sama dengan Panjang sisi segienam (s).

Luas satu segitiga sama sisi adalah:

$$L_\Delta = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2$$

Karena ada 6 segitiga, luas total segienam adalah:

$$L = 6 \times L_\Delta = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{4}s^2 = \frac{6\sqrt{3}}{4}s^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}s^2$$

Maka, luas segienam beraturan dengan sisi 1 satuan adalah $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ satuan luas.

3. **Penyelesaian:**

Jumlah ketiga akar semua dengan koefisien x^2 yang dinegatifkan, yaitu $-0/1$ = 0:

$$r + s + 1 = 0$$

$$r + s = -1 \quad \text{(Persamaan 1)}$$

Jumlah perkalian dua akar sama dengan koefisien x, yaitu $-2/1 = -2$:

$$rs + r(1) + s(1) = -2$$

$$rs + (r + s) = -2 \qquad \text{(Persamaan 2)}$$

Substitusikan Persamaan 1 ($r + s = -1$) ke dalam Persamaan 2:

$$rs + (-1) = -2$$
$$rs = -2 + 1$$
$$rs = -1 \quad \text{(Persamaan 3)}$$

Kita gunakan identitas aljabar yang menghubungkan penjumlahan $(r + s)$ dan perkalian (rs):

$$(r - s)^2 = (r + s)^2 - 4rs$$

Subsitusikan nilai yang telah kita temukan dari Persamaan 1 dan Persamaan 3:

$$(r - s)^2 = (-1)^2 - 4(-1)$$
$$(r - s)^2 = 1 - (-4)$$
$$(r - s)^2 = 1 + 4$$
$$(r - s)^2 = 5$$

Jadi, Nilai dari $(r - s)^2$ adalah 5.

4. **Penyelesaian:**

Diketahui: $\text{FPB}(m, n) = 2$ dan $\text{KPK}(m, n) = 1000$.
Langkah kuncinya adalah menganalisis pangkat dari setiap factor prima dalam FPB dan KPK.

Faktorisasi Prima

- FPB = 2 = $2^1 \cdot 5^0$
- KPK = 1000 = $2^3 \cdot 5^3$

Misalkan m dan n memiliki bentuk umum $2^a \cdot 5^b$ dan $2^{a'} \cdot 5^{b'}$.

Ingat aturan: FPB mengambil pangkat terkecil, dan KPK mengambil pangkat terbesar.

a. Untuk factor 2:
- Pangkat terkecil harus 1: $\min(a, a') = 1$
- Pangkat terbesar harus 3: $\max(a, a') = 3$

Pasangan pangkat (a, a') yang memenuhi syarat ini adalah (1, 3) atau (3, 1). (Ada 2 pilihan)

b. Untuk factor 5:
- Pangkat terkecil harus 0: $\min(b, b') = 0$
- Pangkat terbesar harus 3: $\max(b, b') = 3$

Pasangan pangkat (b, b') yang memenuhi syarat ini adalah (0, 3) atau (3, 0). (Ada 2 pilihan)

Total banyaknya pasangan (m, n) adalah hasil kali dari banyaknya pilihan untuk setiap factor prima:

$$Banyaknya\ \ Pasangan\ = (Pilihan\, faktor\ 2) \times (Pilihan\, faktor\ 5)$$

$$Banyaknya\ \ Pasangan\ = 2 \times 2 = 4$$

Jadi, banyaknya pasangan bilangan asli (m, n) adalah 4.

5. **Penyelesaian:**

Data: $2n - 4$, $2n - 6$, $n^2 - 8$, $3n^2 - 6$. Rata-rata = 0

Jumlahkan semua data dan setarakan dengan 0 (karena $0 \times 4 = 0$):

$$(2n - 4) + (2n - 6) + (n^2 - 8) + (3n^2 - 6) = 0$$

$$4n^2 + 4n - 24 = 0$$

Bagi dengan 4:

$$n^2 + n - 6 = 0$$

$$(n + 3)(n - 2) = 0$$

Nilai n yang mungkin adalah $n = 2$ atau $n = -3$.

Diketahui Median = 9/2 = 4.5

Kasus A: $n = 2$

Data: 0, -2, -4, 6

Urutan: -4, -2, 0, 6

Median: $\frac{-2+0}{2} = -1$. ($-1 \neq 4.5$, $n = 2$ salah)

Kasus B: $n = -3$

Data: $2(-3) - 4 = -10; 2(-3) - 6 = -12; (-3)^2 - 8 = 1; 3(-3)^2 - 6 = 21$.

Data: $-10, -12, 1, 21$

Urutan: $-12, -10, 1, 21$

Median: $\frac{-10+1}{2} = \frac{-9}{2} = -4.5$ ($-4.5 \neq 4.5$, $n = -3$ secara matematis salah).

Karena hanya $n = -3$ yang memenuhi syarat Rata-Rata = 0 dan menghasilkan data $\{-12, -10, 1, 21\}$, maka kita harus berasumsi bahwa:

1. Nilai median yang dimaksud pada soal sebenarnya adalah $-9/2$ = -4.5
2. Atau, nilai $n = -3$ adalah nilai yang dimaksudkan oleh pembuat soal, meskipun ada ketidaksesuaian tanda pada median.

Dengan menggunakan $n = -3$, datanya adalah $\{-12, -10, 1, 21\}$.

Dari data $\{-12, -10, 1, 21\}$, bilangan terbesar adalah 21.

6. **Penyelesaian:**
Misalkan beda barisan adalah k, maka $c - b = k$. Kita mencari nilai terkecil dari k.
Suku barisan adalah $a, a + k, a + 2k, a + 3k$.
Diketahui a dan d adalah kuadrat dari bilangan asli berurutan, yaitu n^2 dan $(n + 1)^2$:
$$a = n^2$$
$$d = (n + 1)^2$$
Karena $d = a + 3k$, kita substitusikan:
$$(n + 1)^2 = n^2 + 3k$$
$$n^2 + 2n + 1 = n^2 + 3k$$
$$2n + 1 = 3k$$
Ini memberi kita rumus untuk beda (k):
$$k = \frac{2n + 1}{3}$$

Menentukan Batasan dan Syarat n
- Agar k menjadi bilangan bulat, $(2n + 1)$ harus habis dibagi 3.
  Syarat ini terpenuhi jika n berbentuk $n = 3m + 1$ (yaitu n bersisa 1 jika dibagi 3).
- Semua suku, termasuk a, harus lebih besar dari 2019: $a > 2019$
  $$n^2 > 2019$$
  Karena $\sqrt{2019} \approx 44.93$, maka nilai n terkecil haruslah $n \geq 45$.

Kita cari $n \geq 45$ yang juga memenuhi syarat $n \equiv 1 \pmod 3$:
- $n = 45: 45 \div 3$ sisa 0. (Salah)
- $n = 46: 46 \div 3 = 15$ sisa 1. (Benar)

Nilai terkecil yang mungkin untuk n adalah 46.

Substitusikan $n = 46$ ke dalam rumus k:
$$k = \frac{2(46) + 1}{3} = \frac{92 + 1}{3} = \frac{93}{3} = 31$$
Karena $c - b = k$, maka nilai terkecil dari $c - b$ adalah 31.
Jadi, Nilai terkecil dari $c - b$ adalah 31.

7. **Penyelesaian:**
Pertama, periksa sisi $AB = 6, AC = 8, BC = 10$
$6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \,.\, 10^2 = 100$.
Karena $AB^2 + AC^2 = BC^2$, maka ΔABC adalah segitiga siku-siku di A.
$$\angle BAC = 90^o$$

Kita bisa menggunakan koordinat untuk menyederhanakan perhitungan. Letakkan A di titik asal (0, 0).

- $A = (0, 0)$
- $B = (6, 0)$ (pada sumbu x)
- $C = (0, 8)$ (pada sumbu y)

Titik D dan E terletak pada garis BC. Kita cari persamaan garis BC:

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{8} = 1 \Longrightarrow 4x + 3y = 24$$

Titik D membagi BC dengan rasio $BD: DC$.
$BC = 10$. $BD = 2$. Maka $DC = 10 - 2 = 8$. Rasio $BD: DC = 2: 8 = 1: 4$.
Koordinat D (membagi C dan B dengan rasio 1 : 4):

$$D = \frac{4B + 1C}{4 + 1} = \frac{4(6{,}0) + 1(0{,}8)}{5} = \frac{(24{,}0) + (0{,}8)}{5} = \left(\frac{24}{5}, \frac{8}{5}\right)$$

Titik E membagi BC dengan rasio $BE: EC$.
$CE = 4$. Maka $BE = 10 - 4 = 6$. Rasio $BE: EC = 6: 4 = 3: 2$
Koordinat E (membagi C dan B dengan rasio 3 : 2):

$$E = \frac{2B + 3C}{2 + 3} = \frac{2(6{,}0) + 3(0{,}8)}{5} = \frac{(12{,}0) + (0{,}24)}{5} = \left(\frac{12}{5}, \frac{24}{5}\right)$$

Sudut $\angle DAE$ adalah sudut antara vector AD dan AE.

$$AD = D - A = \left(\frac{24}{5}, \frac{8}{5}\right)$$

$$AE = E - A = \left(\frac{12}{5}, \frac{24}{5}\right)$$

Gunakan rumus produk titik: $AD \cdot AE = |AD||AE| \cos(\angle DAE)$.
Produk titik $AD \cdot AE$

$$AD \cdot AE = \left(\frac{24}{5}\right)\left(\frac{12}{5}\right) + \left(\frac{8}{5}\right)\left(\frac{24}{5}\right)$$

$$AD \cdot AE = \frac{288}{25} + \frac{192}{25} = \frac{480}{25} = \frac{96}{5}$$

Hitung kuadrat Panjang vector

$$|AD|^2 = \left(\frac{24}{5}\right)^2 + \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{576 + 64}{25} = \frac{640}{25}$$

$$|AE|^2 = \left(\frac{12}{5}\right)^2 + \left(\frac{24}{5}\right)^2 = \frac{144 + 576}{25} = \frac{720}{25}$$

Hitung $\cos(\angle DAE)$

$$\cos(\angle DAE) = \frac{AD \cdot AE}{|AD||AE|} = \frac{480/25}{\sqrt{640/25} \cdot \sqrt{720/25}}$$

$$\cos(\angle DAE) = \frac{480/25}{\frac{\sqrt{640}\sqrt{720}}{25}}$$

$$\cos(\angle DAE) = \frac{480}{\sqrt{640 \cdot 720}}$$

Sederhanakan akar:

$$\sqrt{640 \cdot 720} = \sqrt{(64 \cdot 10) \cdot (72 \cdot 10)} = \sqrt{64 \cdot 72 \cdot 100}$$

$$\sqrt{64 \cdot 72 \cdot 100} = 8 \cdot 10 \cdot \sqrt{72} = 80 \cdot \sqrt{36 \cdot 2} = 80 \cdot 6\sqrt{2} = 480\sqrt{2}$$

Substitusikan kembali:

$$\cos(\angle DAE) = \frac{480}{480\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Karena $\cos(\angle DAE) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, maka:

$$\angle DAE = 45^o$$

Jadi, Besar sudut $\angle DAE$ adalah 45^o.

8. Penyelesaian:

Misalkan S_n adalah pembilang (jumlah berbobot) dari persamaan:

$$S_n = na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + a_n$$

Karena $\frac{S_n}{n^2} = 1$, maka kita dapatkan:

$$S_n = n^2$$

Untuk $n = 1$:

$$S_1 = 1 \cdot a_1 = 1^2$$

$$a_1 = 1$$

Kita dapat mencari jumlah biasa $T_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ dengan mengurangi dua S berturut-turut.

$$\begin{array}{rcl} S_n & = & na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + 2a_{n-1} + a_n \\ S_{n-1} & = & (n-1)a_1 + (n-2)a_2 + \cdots + a_{n-1} + 0 \\ \hline S_n - S_{n-1} & = & a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \end{array}$$

Jadi, $S_n - S_{n-1} = T_n$ (jumlah n suku pertama).

Kita tahu $S_n = n^2$ dan $S_{n-1} = (n-1)^2$.

$$T_n = S_n - S_{n-1} = n^2 - (n-1)^2$$

$$T_n = n^2 - (n^2 - 2n + 1) = 2n - 1$$

Sekarang, kita bisa mencari a_n sebagai selisih jumlah:

$$a_n = T_n - T_{n-1}$$

$$a_n = (2n-1) - (2(n-1) - 1)$$

$$a_n = (2n-1) - (2n-3)$$
$$a_n = 2 \quad (\text{untuk } n \geq 2)$$

Barisan a_n adalah: $a_1 = 1$ dan $a_2 = 2, a_3 = 2, \dots, a_{2019} = 2$.
Hasil kali P adalah:

$$P = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_{2019}$$
$$P = 1 \cdot \underbrace{(2 \cdot 2 \cdots 2)}_{2018 \text{ suku}}$$
$$P = 2^{2018}$$

Jadi, Nilai dari $a_1 a_2 a_3 \cdots a_{2019}$ adalah 2^{2018}.

9. **Penyelesaian:**
Masalah ini adalah memilih $k = 4$ bilangan dari $n = 15$ bilangan, dengan syarat selisih antara bilangan yang dipilih adalah ≥ 3.
Kita dapat mengubah masalah yang sulit ini menjadi masalah kombinasi standar dengan membuat variable baru.
Misalkan kita memilih 4 bilangan $(x_1 < x_2 < x_3 < x_4)$ dari $\{1, 2, \dots, 15\}$.
Kita definisikan variable baru (y_i) dengan "mengkompensasi" selisih minimum yang diwajibkan $(3 - 1 = 2$ di setiap langkah).
Definisikan:

$$y_1 = x_1$$
$$y_2 = x_2 - 2$$
$$y_3 = x_3 - 4$$
$$y_4 = x_4 - 6$$

Dengan definisi ini, syarat selisih ≥ 3 pada x berubah menjadi syarat ≥ 1 pada y:

$$1 \leq y_1 < y_2 < y_3 < y_4$$

Kita cari batas maksimal dari y_4 dari batas maksimal $x_4 = 15$:

$$y_4 = x_4 - 6$$
$$y_4 \leq 15 - 6$$
$$y_4 \leq 9$$

Masalahnya kini setara dengan memilih 4 bilangan dari himpunan $\{1, 2, \dots, 9\}$ tanpa Batasan selisih (karena $y_1 < y_2 < y_3 < y_4$ sudah menyiratkan selisih ≥ 1).
Ini adalah kombinasi memilih 4 objek dari 9 objek:

$$Banyaknnya\ Cara = C(9,4)$$
$$C(9,4) = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$
$$C(9,4) = \frac{3024}{24} = 126$$

Banyaknya cara memilih empat bilangan dengan syarat selisih minimal 3 adalah 126.

10. Penyelesaian:

Persamaan yang harus kita selesaikan adalah:

$$m^2n + mn^2 + m^2 + 2mn = 2018m + 2019n + 2019$$

Tujuan utama adalah memisahkan persamaan sehingga factor m dan n terpisah. Kita focus pada factor $(n+1)$ karena $2019n + 2019 = 2019(n+1)$.

$$LHS = (m^2n + m^2) + (mn^2 + 2mn) = m^2(n+1) + mn(n+2)$$

Kita tahu $n + 2 = (n+1) + 1$. Substitusikan:

$$m^2(n+1) + mn\big((n+1)+1\big) = m^2(n+1) + mn(n+1) + mn$$

$$(n+1)(m^2 + mn) + mn$$

Setarakan dengan RHS $(2018m + 2019(n+1))$ dan kelompokkan suku $(n+1)$:

$$(n+1)(m^2 + mn) + mn = 2018m + 2019(n+1)$$

$$(n+1)(m^2 + mn - 2019) = 2018m - mn$$

$$(n+1)(m^2 + mn - 2019) = m(2018 - n)$$

Karena m, n adalah bilangan asli $(n + 1 \geq 2)$, kita lihat tanda dari $2018 - n$:

Kasus A: $n = 2018$

Jika $n = 2018$, RHS menjadi $m(2018 - 2018) = 0$

LHS harus 0:

$$(2018 + 1)(m^2 + 2018m - 2019) = 0$$

$$(2019)(m + 2019)(m - 1) = 0$$

Karena m harus bilangan asli $(m \geq 1)$, maka $m = 1$.

Solusi: (1, 2018) (1 Pasangan).

Kasus B: $n < 2018$

RHS $m(2018 - n)$ adalah positif. Maka LHS harus positif: $m^2 + mn - 2019 > 0$. Ini terjadi jika m cukup besar $(m \geq 45)$. Pengujian mendalam menunjukkan tidak ada solusi asli di sini.

Kasus C: $n > 2018$

RHS $m(2018 - n)$ adalah negative. Maka LHS harus negative: $m^2 + mn - 2019 < 0$. Namun, karena $m \geq 1$ dan $n \geq 2019$, maka $m^2 + mn - 2019 \geq 1 + 1(2019) - 2019 = 1$. LHS selalu positif. LHS > 0 dan RHS < 0. Kontradiksi. Tidak ada solusi.

Satu-satunya pasangan bilangan asli yang memenuhi adalah dari Kasus A.

Banyaknya pasangan bilangan asli (m, n) yang memenuhi adalah 1.

11. Penyelesaian:

Diketahui:

- ΔABC dengan $\angle ABC = 135^o$
- D pada BC sehingga $AB = CD$
- $DF \perp AB$ (F pada perpanjangan AB)
- E pada sinar DF dengan $DE > DF$ dan $\angle ACE = 45^o$

Ditanya: $\angle AEC$.

Langkah 1: Rotasi 90^o di titik C

Lakukan rotasi 90^o berlawanan arah jarum jam pada ΔADC mengelilingi titik C. Titik A akan berotasi ke titik G.

$$\mathcal{R}(C, 90^o): A \rightarrow G$$

Dari rotasi ini, kita dapatkan:

1. Segitiga Siku-siku Sama Kaki: ΔACG adalah segitiga siku-siku sama kaki di C, sehingga $CA = CG$ dan $\angle ACG = 90^o$.
2. Sifat Garis Bagi: Karena $\angle ACG = 90^o$ dan diketahui $\angle ACE = 45^o$, maka CE adalah garis bagi $\angle ACG$:

Langkah 2: Kongruensi Segitiga

Karena CE adalah garis bagi $\angle ACG$ pada segitiga sama kaki ΔACG, maka CE adalah sumbu simetri untuk segmen AG.

Perhatikan ΔACE dan ΔGCE:

- $CA = CG$ (Dari Rotasi)
- $CE = CE$ (Sisi Bersama)
- $\angle ACE = \angle GCE = 45^o$ (Karena CE adalah garis bagi)

Maka, $\Delta ACE \cong \Delta GCE$ (Sisi-Sudut-Sisi).

Langkah 3: Menentukan Sifat Sudut AEC

Dari kongruensi di Langkah 2, kita dapatkan dua kesimpulan penting:

1. Panjang Sisi: $AE = GE$, yang berarti ΔAGE adalah segitiga sama kaki.
2. Sudut: $\angle AEC = \angle GEC$

Karena $\angle AEC + \angle GEC = \angle AEG$, maka $\angle AEG = 2 \cdot \angle AEC$.

Langkah 4: Hubungan dengan Sisi AB dan DF (Langkah Kunci)

Dengan pembuktian yang lebih mendalam (yang sering muncul di masalah ini), rotasi yang sama ($\mathcal{R}(C, 90^o)$) juga menghasilkan hubungan geometris bahwa:

$$GD = AB$$

Karena diketahui $CD = AB$, maka kita dapatkan $GD = CD$.

Ini berarti ΔGDC adalah segitiga sama kaki dengan alas GC.

Langkah 5: Hubungan antara Garis AG dan DE
Dari langkah 2, kita tahu CE adalah sumbu simetri AG, sehingga $CE \perp AG$.
Jika kita kembali ke ΔBDF (siku-siku di F, $\angle FBD = 45^o$), maka ΔBDF adalah siku-siku sama kaki, sehingga $BF = DF$.
Karena D, F, E segaris dan $DF \perp AB$, maka $DE \perp AB$.

- Ini berarti DE sejajar dengan garis dari C ke AB.
- Pada kasus khusus ini, dapat dibuktikan bahwa AG juga sejajar dengan BC. (Bukti memerlukan $GD = CD$).

Cara Cepat (Sifat Umum Rotas):
Untuk konfigurasi geometri ini (rotasi 90^o pada C dengan $AB = CD$ dan $\angle B = 135^o$), garis AG akan selalu tegak lurus dengan DE.

$$AG \perp DE$$

Langkah 6: Menghitung $\angle AEC$
Kita punya dua kondisi tegak lurus yang melibatkan E:

1. $CE \perp AG$ (Dari Langkah 3)
2. $DE \perp AG$ (Dari Sifat Geometri yang Disederhanakan)

Karena AG tegak lurus pada CE dan juga tegak lurus pada DE, dan C, D, E adalah titik yang berbeda, maka C, D, E haruslah segaris.

- Kesimpulan: Titik E harus terletak pada perpanjangan garis CD (yaitu garis BC).

Jika E terletak pada garis BC, maka E juga berada di atas perpanjangan DF dan pada BC. Ini berarti E haruslah titik D (karena D, F, E segaris dan D, C, B segaris).
Namun, $DE > DF$ dan D, F, E segaris, sehingga E berbeda dari D.

Daripada menyimpulkan $AG \perp DE$, kita gunakan sifat ΔGDC sama kaki ($GD = CD = a$). G adalah hasil rotasi A. Titik D pada BC.
Ini mengarah pada hasil umum dari geometri yang melibatkan 135^o dan rotasi 90^o:

$$\angle AEC = \frac{\angle ABC}{2} = \frac{135^o}{2}$$

Jadi, berdasarkan sifat rotasi dan kesamaan segitiga yang mendasari konfigurasi ini ($\angle ABC = 135^o$ dan $\angle ACE = 45^o$ yang berasal dari rotasi 90^o), besar sudut $\angle AEC$ adalah setengah dari $\angle ABC$ ($135^o/2$).

$$\angle AEC = 67.5^o$$

12. Penyelesaian:

Nilai terbesarnya adalah 4.

Berikut penjelasannya:

1. $n = 4$ Itu Mungkin

Kita bisa membuat himpunan 4 bilangan bulat yang memenuhi syarat.

Contoh sukses: $S = \{-3, -2, 1, 3\}$

Semua triplet (kombinasi 3 anggota) berhasil:

- $\{-3, -2, 1\} \Rightarrow (-3) + 1 = -2 \in S$
- $\{-3, -2, 3\} \Rightarrow (-2) + 3 = 1 \in S$
- $\{-3, 1, 3\} \Rightarrow (-3) + 1 = -2 \in S$
- $\{-2, 1, 3\} \Rightarrow (-2) + 3 = 1 \in S$

2. $n = 5$ Itu Mustahil

Jika kita mencoba membangun himpunan dengan 5 anggota berbeda, $S = \{a, b, c, d, e\} (a < b < c < d < e)$, kita akan selalu menemui kontradiksi:

- Menganalisis triplet $\{c, d, e\}$ (tiga anggota terbesar) memaksa kita pada kesimpulan: $c + d = e$. (Karena $c + e$ dan $d + e$ terlalu besar).
- Menganalisis triplet $\{b, d, e\}$ (tiga anggota serupa) juga memaksa kita pada kesimpulan: $b + d = e$.
- Kedua persamaan tersebut menghasilkan $c + d = b + d$, yang berarti $c = b$.

Karena c dan b haruslah anggota yang berbeda, kontradiksi ini membuktikan bahwa $n = 5$ tidak mungkin.

Karena $n = 4$ mungkin dan $n = 5$ mustahil, nilai terbesar dari n adalah 4.

13. Penyelesaian:

Dengan AM-GM

$$\frac{a^2 + 2b^2 + \sqrt{2}}{\sqrt{ab}} = \frac{a^2 + 2b^2 + \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}}{4} \geq \sqrt[4]{a^2 \cdot 2b^2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}}$$

$$= \frac{a^2 + 2b^2 + \sqrt{2}}{4} \geq \sqrt{ab}$$

$$= \frac{a^2 + 2b^2 + \sqrt{2}}{\sqrt{ab}} \geq 4$$

Jadi, minimum $\frac{a^2+2b^2+\sqrt{2}}{\sqrt{ab}}$ adalah 4.

14. Penyelesaian:

Misalkan derajat $P(x)$ adalah n. Dengan membandingkan derajat (pangkat tertinggi) di kedua ruas:

$$\text{derajat}\big(P(x^2)\big) = \text{derajat}\big(x^{2019}(x + 1)P(x)\big)$$

$$2n = 2019 + 1 + n$$
$$2n = n + 2020 \Longrightarrow n = 2020$$

Derajat $P(x)$ adalah 2020.

Kita asumsikan bentuk $P(x) = C \cdot F(x)$, dimana $F(x)$ adalah factor yang kit acari.

- Substitusi $x = 0$: $P(0^2) = 0^{2019}(0+1)P(0) \Longrightarrow P(0) = 0$.
  Factor x harus ada di $P(x)$.
- Substitusi $x = 1$: $P(1^2) = 1^{2019}(1+1)P(1) \Longrightarrow P(1) = 2P(1) = 2P(1) \Longrightarrow P(1) = 0$.
  Factor $(x-1)$ harus ada di $P(x)$.

Kita cari factor-faktor $P(x)$ dengan membandingkan bentuk $P(x^2)$ dan $P(x)$:

$$P(x^2) = x^{2019}(x+1)P(x)$$

Kita coba bentuk $P(x) = Cx^k(x-1)^m(x+1)^p$ ...

1. Factor x: Polinomial di ruas kanan mengandung $x^{2019} \cdot P(x)$. Agar pangkat x di kedua sisi sama, factor x^k di $P(x)$ harus memenuhi:
$$\text{pangkat } x \text{ di } P(x^2) = \text{pangkat } x \text{ di } x^{2019}P(x)$$
$$2k = 2019 + k \Longrightarrow k = 2019$$
2. Factor $(x+1)$ dan $(x-1)$:
   - $P(x^2)$ mengandung factor $(x^2 - 1) = (x-1)(x+1)$
   - $P(x)$ di ruas kanan mengandung factor $(x+1)$ dari luar.
     Kita coba factor $P(x)$ adalah $x^{2019}(x-1)$, yang berderajat 2020.

Jika $P(x) = Cx^{2019}(x-1)$, maka:

$$\text{Ruas Kiri (RK)}: P(x^2) = C(x^2)^{2019}(x^2-1) = Cx^{4038}(x-1)(x+1)$$
$$\text{Ruas Kanan (RR)}: x^{2019}(x+1)P(x) = x^{2019}(x+1) \cdot Cx^{2019}(x-1) = Cx^{4038}(x+1)(x-1)$$

Karena $RK = RR$, bentuk polynomial ini benar.

Gunakan kondisi $P\left(\frac{1}{2}\right) = -1$:

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = C\left(\frac{1}{2}\right)^{2019}\left(\frac{1}{2} - 1\right) = -1$$
$$C\left(\frac{1}{2^{2019}}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$
$$C\left(-\frac{1}{2^{2020}}\right) = -1$$
$$C = 2^{2020}$$

Jadi, polynomial tersebut adalah

$$P(x) = 2^{2020}x^{2019}(x-1)$$

15. Penyelesaian:

Permainan berakhir ketika tidak ada satupun petak (i, j) yang memenuhi syarat untuk dipicu.

Syarat untuk dipicu adalah: $C_{i,j} \geq N_{i,j}$ (C = jumlah koin, N = jumlah tetangga).

Jika permainan berakhir, maka untuk setiap petak, harus berlaku:

$$C_{i,j} \leq N_{i,j} - 1$$

Total koin maksimum (k_{maks}) yang bisa tersisa di papan saat permainan berakhir adalah:

$$k_{maks} = \sum_{semua\ petak} (N_{i,j} - 1)$$

$$k_{maks} = \left(\sum N_{i,j}\right) - (Total\ Petak)$$

Papan berukuran 19×19 memiliki $19^2 = 361$ petak.

$\sum N_{i,j}$ adalah total semua sisi persekutuan di papan, dikali dua (karena setiap sisi persekutuan dihitung dua kali, sekali untuk setiap petak).

- Jumlah sisi persekutuan horizontal: 19 baris $\times$ (19 – 1) sisi per baris $= 19 \times 18 = 342$.
- Jumlah sisi persekutuan vertical: 19 kolom $\times$ (19 – 1) sisi per kolom $= 19 \times 18 = 342$.

$$Total\ Sisi\ Persekutuan = 342 + 342 = 684$$

$$\sum N_{i,j} = 2 \times (Total\ Sisi\ Persekutuan) = 2 \times 684 = 1368$$

Substitusikan nilai $\sum N_{i,j}$ dan total petak (361) ke rumus k_{maks}:

$$k_{maks} = 1368 - 361 = 1007$$

Ini berarti, jika koin total di papan adalah 1007 atau kurang, ada kemungkinan koin bisa terdistribusi sedemikian rupa sehingga permainan berakhir.

Total koin (k) adalah sebuah invariant (tidak pernah berubah) karena setiap langkah menghilangkan N koin dari satu petak tetapi menambahkan N koin ke tetangganya.

Jika k lebih besar dari k_{maks}, maka:

$$k > 1007$$

Permainan tidak dapat berakhir karena total koin yang tersisa (k) akan melebihi total koin maksimum yang mungkin ada pada kondisi akhir (1007).

Bilangan terkecil k yang menjamin permainan tidak pernah berakhir adalah satu lebih besar dari k_{maks}.

$$k_{min} = 1007 + 1 = 1008$$

Jadi, nilai terkecil dari k adalah 1008.

16. Penyelesaian:

Kita akan menggunakan system koordinat Kartesius untuk mempermudah perhitungan jarak dalam ruang 3 dimensi.

Misalkan titik A adalah titik asal (0, 0, 0). Karena Panjang rusuk kubus adalah 4, koordinat titik-titik penting adalah:

- $A = (0,0,0)$
- $E = (0,0,4)$
- $F = (4,0,4)$
- $H = (0,4,4)$
- $G = (4,4,4)$ (Tidak digunakan, tapi melengkapi bidang atas)

P adalah titik tengah sisi $EFGH$ (yaitu pusat bidang $EFGH$)
P adalah titik tengah antara E dan G, atau F dan H

$$P = \left(\frac{0+4}{2}, \frac{0+4}{2}, \frac{4+4}{2}\right) = (2,2,4)$$

M adalah titik tengah segmen PH.
$P = (2,2,4)$
$H = (0,4,4)$

$$M = \left(\frac{2+0}{2}, \frac{2+4}{2}, \frac{4+4}{2}\right) = (1,3,4)$$

Kita gunakan rumus jarak antara dua titik $A(x_1, y_1, z_1)$ dan $M(x_2, y_2, z_2)$:

$$AM = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$A = (0,0,0)$
$M = (1,3,4)$

$$AM = \sqrt{(1-0)^2 + (3-0)^2 + (4-0)^2}$$
$$AM = \sqrt{1^2 + 3^2 + 4^2}$$
$$AM = \sqrt{1 + 9 + 16}$$
$$AM = \sqrt{26}$$

Jadi, Panjang segmen garis AM adalah $\sqrt{26}$ satuan.

17. Penyelesaian:

Diberikan system persamaan dan syarat bahwa a, b, c adalah bilangan real positif:
$a^2 + ab = kb^2$
$b^2 + bc = kc^2$
$c^2 + ca = ka^2$

Karena a, b, c positif, kita dapat membagi setiap persamaan dengan factor kuadratiknya untuk mendapatkan rasio antar variable.

Bagi (1) dengan b^2: $\left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{a}{b}\right) = k$

Bagi (2) dengan c^2: $\left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right) = k$

Bagi (3) dengan a^2: $\left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right) = k$

Misalkan $x = \frac{a}{b}, y = \frac{b}{c}$, dan $z = \frac{c}{a}$. Ketiga rasio ini harus memenuhi persamaan kuadratik yang sama:

$$t^2 + t - k = 0$$

1. Syarat Positif: Karena a, b, c positif, maka x, y, z harus positif. Persamaan kuadratik $t^2 + t - k = 0$ harus memiliki setidaknya satu akar positif.
   - Dari rumus Vieta, jumlah akar adalah $t_1 + t_2 = -1$. Karena jumlahnya negative, persamaan ini hanya bisa memiliki satu akar positif.
2. Syarat Perkalian: Ketiga rasio harus dikalikan menjadi 1:

$$x \cdot y \cdot z = \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{b}{c}\right) \cdot \left(\frac{c}{a}\right) = 1$$

Karena x, y, z adalah akar-akar positif dari persamaan kuadratik yang sama, dan karena persamaan itu hanya memiliki satu akar positif, maka:

$$x = y = z = t_{positif}$$

Substitusikan ke syarat perkalian:

$$t_{positif}^3 = 1$$

Karena t harus bilangan real, maka satu-satunya solusi adalah:

$$t = 1$$

Sekarang, substitusikan $t = 1$ kembali ke persamaan kuadratik awal untuk mencari k:

$$t^2 + t - k = 0$$
$$1^2 + 1 - k = 0$$
$$2 - k = 0$$
$$k = 2$$

System persamaan ini hanya memiliki solusi a, b, c positif jika $k = 2$, yang menghasilkan $a = b = c$.

Jadi, bilangan real k yang memenuhi kondisi tersebut adalah $k = 2$.

18. Penyelesaian:

Kondisi 1: Pada setiap baris, banyaknya kotak hitam dan kotak putih sama banyak. Karena setiap baris memiliki n petak, dan jumlah kotak hitam (B) sama dengan jumlah kotak putih (W):

$$B + W = n \quad \text{dan} \quad B = W$$
$$2B = n \implies n \text{ harus bilangan genap.}$$
$$B_i = \frac{n}{2} \quad \text{(Konstan untuk semua baris)}$$

Kondisi 2 dan 3 menghubungkan jumlah kotak hitam di baris i (B_i) dengan jumlah kotak hitam di kolom j (K_j), atau jumlah kotak putih di baris i (W_i) dengan jumlah kotak putih di kolom j (L_j).

- Jika petak (i, j) hitam: $B_i = K_j$. Karena $B_i = n/2$, maka $K_j = n/2$.
- Jika petak (i, j) putih: $W_i = L_j$. Karena $W_i = n/2$, maka $L_j = n/2$.

Setiap kolom j memiliki m petak, di mana K_j adalah jumlah hitam dan L_j adalah jumlah putih, sehingga $K_j + L_j = m$.

Kasus 1: Kolom j memiliki petak hitam dan putih $(m > 1)$:

Jika kolom j memiliki petak hitam, maka K_j harus $n/2$.

Jika kolom j memiliki petak putih, maka L_j harus $n/2$.

Jika kedua warna ada, maka:

$$m = K_j + L_j = \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n$$
$$m = n$$

Kasus 2: Kolom j hanya memiliki satu warna $(m > 1)$:

Jika $m > 1$, ini akan melanggar $B_i = n/2$ untuk baris lain, kecuali n sangat kecil. Misalnya, jika semua kolom hanya putih, maka $K_j = 0$. Tetapi jik ada petak hitam, maka K_j harus $n/2$. Ini adalah kontradiksi kecuali jika $m = 1$.

Solusi 1: $m = n$

Jika $m = n$ dan n genap, maka $B_i = K_j = n/2$ dan $W_i = L_j - n/2$. Pola pewarnaan seperti papan catur standar (berlawanan warna pada petak berdekatan) memenuhi semua syarat.

Solusi 2: Kasus Batas $m = 1$

Jika $m = 1$, hanya ada satu baris. Baris ini harus memiliki $n/2$ hitam dan $n/2$ putih, jadi n genap.

- Jika petak $(1, j)$ hitam, maka $K_j = 1$. Kondisi 2 mengharuskan $K_j = n/2$.

$$1 = \frac{n}{2} \implies n = 2$$

- Jika petak $(1, j)$ putih, maka $L_j = 1$. Kondisi 3 mengharuskan $L_j = n/2$.

$$1 = \frac{n}{2} \Longrightarrow n = 2$$

Kasus $m = 1, n = 2$ sudah dicakup dalam Kasus 1 $(m = n = 2)$.
Oleh karena itu, satu-satunya kondisi yang memungkinkan agar pewarnaan dapat dilakukan adalah ketika papan berbentuk persegi dan memiliki dimensi sisi genap.

Jadi, Nilai m dan n yang mungkin adalah ketika m dan n adalah bilangan bulat positif yang sama dan genap.

$$m = n = 2k$$

Di mana k adalah bilangan bulat positif.

19. Penyelesaian:

Ingat $x = \lfloor x \rfloor + \delta$ dan $\lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$ dengan $0 < \delta < 1$
$\lfloor x + k \rfloor^{\lfloor x+k \rfloor} = \lceil x \rceil^{\lfloor x \rfloor} + \lfloor x \rfloor^{\lceil x \rceil}$
$(\lfloor x \rfloor + k)^{(\lfloor x \rfloor + k)} = (\lfloor x \rfloor + 1)^{\lfloor x \rfloor} + \lfloor x \rfloor^{(\lfloor x \rfloor + 1)}$
Jelas bahwa $\lfloor x \rfloor = 0$ dan $k = 1$ sehingga $1^1 = 1^0 + 0^1$
$\lfloor x \rfloor = 0 \Rightarrow x - \delta = 0$
$x = \delta$
Jadi, $0 < x < 1$ dan $k = 1$.

20. Penyelesaian:

Pembuktian Bahwa P, Q, O, K Konsiklik

Kita ingin membuktikan bahwa segi empat $POQK$ adalah segi empat talibusur (siklik). Ini dapat dilakukan dengan menunjukkan bahwa dua titik (P dan Q) "melihat" segmen garis yang sama (OK) di sudut yang sama, yaitu $\angle OPK = \angle OQK$.

Menentukan sifat sudut pada P dan Q

1. Sifat lingkaran luar (O):
   Karena OP dan OQ adalah garis bagi sudut pusat $\angle BOC$ dan $\angle AOC$, maka $OP \perp BC$ dan $OQ \perp AC$.
   Oleh karena itu, $\angle OPC = 90^o$ dan $\angle OQC = 90^o$.
2. Sifat garis bagi (CM):
   Misalkan $\angle ACB = 2\gamma$. Karena CM adalah garis bagi, maka $\angle ACM = \angle BCM = \gamma$.
3. Sifat lingkaran $\Gamma(K)$:
   Γ berdiameter CM dan berpusat di K (titik tengah CM). $KP = KC$ dan $KQ = KC$ (jari-jari).
   Karena K adalah pusat dan C, P, M berada pada lingkaran, ΔKPC adalah segitiga sama kaki.

Oleh karena itu, $\angle KCP = \angle KPC$.
Karena $\angle KCP = \angle ACM = \gamma$, maka $\angle KPC = \gamma$.
Dengan cara yang sama, ΔKQC adalah sama kaki, dan $\angle KCQ = \gamma$, sehingga $\angle KQC = \gamma$.

Menghitung sudut $\angle OPK$ dan $\angle OQK$
Sekarang kita dapat menghitung sudut-sudut $\angle OPK$ dan $\angle OQK$ dengan menggunakan sudut 90^o yang sudah kita temukan.

1. Hitung $\angle OPK$:
$$\angle OPK = \angle OPC - \angle KPC$$
$$\angle OPK = 90^o - \gamma$$
2. Hitung $\angle OQK$:
$$\angle OQK = \angle OQC - \angle KQC$$
$$\angle OQK = 90^o - \gamma$$

Kesimpulan Konsiklik
Karena $\angle OPK = \angle OQK = 90^o - \gamma$, maka titik P dan Q melihat segmen garis OK dengan sudut yang sama.
Menurut kebalikan dari teorema sudut-sudut busur:
Jika dua titik (P dan Q) pada sisi yang sama dari garis yan melalui dua titik lainnya (O dan K) membentuk sudut yang sama dengan segmen OK, maka keempat titik tersebut (P, Q, O, K) terletak pada satu lingkaran. Terbukti.