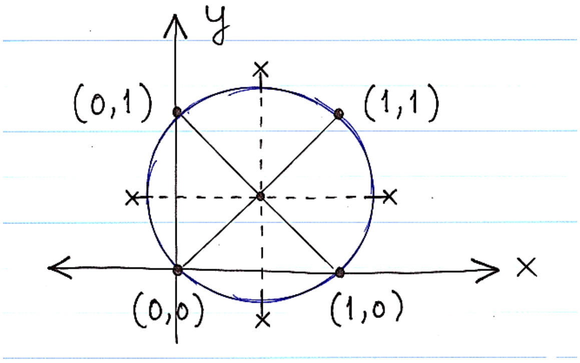
PEMBAHASAN

OSP MATEMATIKA SMA

TAHUN 2018

1. **Penyelesaian:**



Jadi, ada 4 pasangan yaitu, (0,0), (0,1), (1,1), (1,0).

2. **Penyelesaian:**

Diketahui trapesium $ABCD$ dengan $AD||BC$.

- $BD = 1$
- $\angle DBA = 23^o$
- $\angle BDC = 46^o$

Karena $AD||BC$, maka sudut dalam berseberangan adalah sama.

$$\angle ADB = \angle DBC$$

Kita akan menggunakan aturan sinus pada segitiga ΔABD dan ΔBCD.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Pada ΔABD:

$$\frac{AD}{\sin(\angle DBA)} = \frac{BD}{\sin(\angle DAB)}$$
$$\frac{AD}{\sin(23^\circ)} = \frac{1}{\sin(\angle DAB)}$$
$$(1) \quad AD = \frac{\sin(23^\circ)}{\sin(\angle DAB)}$$

Pada ΔBCD:

$$\frac{BC}{\sin(\angle BDC)} = \frac{BD}{\sin(\angle BCD)}$$
$$\frac{BC}{\sin(46^\circ)} = \frac{1}{\sin(\angle BCD)}$$
$$(2) \quad BC = \frac{\sin(46^\circ)}{\sin(\angle BCD)}$$

Diketahui perbandingan $BD: AD = 9: 5$, sehingga $BC = \frac{9}{5}AD$.
Substitusikan persamaan (1) dan (2) ke dalam perbandingan:

$$\frac{BC}{AD} = \frac{\frac{\sin(46^\circ)}{\sin(\angle BCD)}}{\frac{\sin(23^\circ)}{\sin(\angle DAB)}} = \frac{9}{5}$$

$$\frac{\sin(46^\circ)}{\sin(23^\circ)} \cdot \frac{\sin(\angle DAB)}{\sin(\angle BCD)} = \frac{9}{5}$$

Kita tahu bahwa $\sin(46^o) = \sin(2 \cdot 23^o) = 2\sin(23^o)\cos(23^o)$.
Maka, $\frac{\sin(46^o)}{\sin(23^o)} = \frac{2\sin(23^o)\cos(23^o)}{\sin(23^o)} = 2\cos(23^o)$.
Sehingga, persamaan menjadi:

$$2\cos(23^\circ) \cdot \frac{\sin(\angle DAB)}{\sin(\angle BCD)} = \frac{9}{5}$$

$$(3) \quad \frac{\sin(\angle DAB)}{\sin(\angle BCD)} = \frac{9}{10\cos(23^\circ)}$$

Kita kembali menggunakan aturan sinus pada ΔBCD untuk mencari Panjang sisi CD:

$$\frac{CD}{\sin(\angle DBC)} = \frac{BD}{\sin(\angle BCD)}$$

$$(4) \quad CD = \frac{BD \cdot \sin(\angle DBC)}{\sin(\angle BCD)} = \frac{1 \cdot \sin(\angle DBC)}{\sin(\angle BCD)}$$

Dari langkah 1, kita tahu $\angle ADB = \angle DBC$.
Dari ΔABD, jumlah sudutnya adalah 180^o:

$$\angle DAB + \angle ADB + \angle DBA = 180^\circ$$
$$\angle DAB + \angle ADB + 23^\circ = 180^\circ$$
$$(5) \quad \angle DAB + \angle ADB = 157^\circ$$

Dari ΔBCD, jumlah sudutnya adalah 180^o:

$$\angle DBC + \angle BCD + \angle BDC = 180^\circ$$
$$\angle DBC + \angle BCD + 46^\circ = 180^\circ$$
$$\angle ADB + \angle BCD + 46^\circ = 180^\circ \quad (\text{karena } \angle DBC = \angle ADB)$$

$$(6) \quad \angle ADB + \angle BCD = 134^\circ$$

Kurangi persamaan (5) dengan persamaan (6):

$$(\angle DAB + \angle ADB) - (\angle ADB + \angle BCD) = 157^\circ - 134^\circ$$
$$\angle DAB - \angle BCD = 23^\circ$$
$$\angle DAB = 23^\circ + \angle BCD$$

Substitusikan $\angle DAB$ ke dalam persamaan (3):

$$\frac{\sin(23^o + \angle BCD)}{\sin(\angle BCD)} = \frac{9}{10\cos(23^o)}$$

Gunakan identitas penjumlahan sudut $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$:

$$\frac{\sin(23^\circ)\cos(\angle BCD) + \cos(23^\circ)\sin(\angle BCD)}{\sin(\angle BCD)} = \frac{9}{10\cos(23^\circ)}$$
$$\sin(23^\circ)\frac{\cos(\angle BCD)}{\sin(\angle BCD)} + \cos(23^\circ) = \frac{9}{10\cos(23^\circ)}$$
$$\sin(23^\circ)\cot(\angle BCD) = \frac{9}{10\cos(23^\circ)} - \cos(23^\circ)$$

$$\sin(23^\circ)\cot(\angle BCD) = \frac{9 - 10\cos^2(23^\circ)}{10\cos(23^\circ)}$$

Dari persamaan (4), $CD = \frac{\sin(\angle ADB)}{\sin(\angle BCD)}$.

Dari persamaan (6), $\angle ADB = 134^o - \angle BCD. CD = \frac{\sin(134^o - \angle BCD)}{\sin(\angle BCD)} CD = \frac{\sin(134^o)\cos(\angle BCD) - \cos(134^o)\sin(\angle BCD)}{\sin(\angle BCD)} CD = \sin(134^o)\cot(\angle BCD) - \cos(134^o)$

Dari identitas trigonometri $\cos(2A) = 2\cos^2(A) - 1$, maka $2\cos^2(A) = 1 + \cos(2A)$.

$10\cos^2(23^o) = 5(2\cos^2(23^o)) = 5(1 + \cos(46^o))$.

Substitusikan ke $\sin(23^o)\cot(\angle BCD)$:

$$\sin(23^\circ)\cot(\angle BCD) = \frac{9 - 5(1 + \cos(46^\circ))}{10\cos(23^\circ)}$$
$$\sin(23^\circ)\cot(\angle BCD) = \frac{4 - 5\cos(46^\circ)}{10\cos(23^\circ)}$$
$$\cot(\angle BCD) = \frac{4 - 5\cos(46^\circ)}{10\cos(23^\circ)\sin(23^\circ)}$$

Karena $2\cos(23^o)\sin(23^o) = \sin(46^o)$:

$$\cot(\angle BCD) = \frac{4 - 5\cos(46^o)}{5\sin(46^o)}$$

Sekarang substitusikan $\cot(\angle BCD)$ ke persamaan $CD: CD = \sin(134^o)\left(\frac{4-5\cos(46^o)}{5\sin(46^o)}\right) - \cos(134^o)$.

Kita tahu $\sin(134^o) = \sin(180^o - 46^o) = \sin(46^o)$ dan $\cos(134^o) = \cos(180^o - 46^o) = -\cos(46^o)$.

$$CD = \sin(46^\circ)\left(\frac{4 - 5\cos(46^\circ)}{5\sin(46^\circ)}\right) - (-\cos(46^\circ))$$
$$CD = \frac{4 - 5\cos(46^\circ)}{5} + \cos(46^\circ)$$
$$CD = \frac{4}{5} - \frac{5\cos(46^\circ)}{5} + \cos(46^\circ)$$
$$CD = \frac{4}{5} - \cos(46^\circ) + \cos(46^\circ)$$
$$CD = \frac{4}{5}$$

Panjang sisi CD adalah $\frac{4}{5}$.

3. **Penyelesaian:**

$r = \frac{a}{1-r} \quad \Rightarrow r^2 - r + a = 0 \quad \begin{cases} r_1 \\ r_2 \end{cases}$

$$r_1 + r_2 = 1$$

4. **Penyelesaian:**

Menentukan Pangkat Tiga yang Mungkin

Jumlah digit-digit suatu bilangan (misalnya k) haruslah merupakan pangkat tiga dari suatu bilangan asli, yaitu $1^3, 2^3, 3^3, 4^3, \ldots$

- $1^3 = 1$
- $2^3 = 8$
- $3^3 = 27$
- $4^3 = 64$
- $\ldots$

Nilai maksimum jumlah digit yang mungkin untuk bilangan yang sangat besar (misalnya bilangan 5 digit, 99999) adalah $9 \times 5 = 45$. Oleh karena itu, jumlah digit k yang mungkin hanyalah 1, 8 dan 27.

Mencari Bilangan Trubus

Kita akan mencari bilangan trubus yang dimulai dari 10.

Kasus 1: Jumlah Digit = 1

Tidak ada bilangan dua digit (minimal 10) atau lebih yang jumlah digitnya sama dengan 1.

- $10 \to 1 + 0 = 1$ (10 adalah trubus ke-1)
- $19 \to 1 + 9 = 10$
- $20 \to 2 + 0 = 2$
- Bilangan terkecil berikutnya yang jumlah digitnya 1 adalah 100 (karena 1 + 0 + 0 = 1).

Bilangan Trubus dengan Jumlah Digit 1:

$$T_1 = 10$$

Kasus 2: Jumlah Digit = 8
Kita mencari bilangan-bilangan yang jumlah digitnya 8.

Bilangan	Jumlah Digit	Keterangan
17	1 + 7 = 8	Trubus ke-2
26	2 + 6 = 8	Trubus ke-3
35	3 + 5 = 8	Trubus ke-4
44	4 + 4 = 8	Trubus ke-5
53	5 + 3 = 8	Trubus ke-6
62	6 + 2 = 8	Trubus ke-7
71	7 + 1 = 8	Trubus ke-8
80	8 + 0 = 8	Trubus ke-9
107	1 + 0 + 7 = 8	Trubus ke-10
116	1 + 1 + 6 = 8	Trubus ke-11
125	1 + 2 + 5 = 8	Trubus ke-12
134	1 + 3 + 4 = 8	Trubus ke-13
143	1 + 4 + 3 = 8	Trubus ke-14
…	…	…

Kita membutuhkan tepat 12 bilangan trubus. Berdasarkan daftar di atas, bilangan trubus ke-12 adalah 125.

Himpunan S harus memuat trubus ke-1 sampai ke-12, tetapi tidak boleh memuat trubus ke-13.

- Trubus ke-12 adalah $T_{12} = 125$.
- Trubus ke-13 adalah $T_{13} = 134$.

Agar himpunan $S = \{10, 11, \dots, N\}$ memiliki tepat 12 trubus, N harus lebih besar dari atau sama dengan T_{12} dan lebih kecil dari T_{13}.

$$T_{12} \leq N < T_{13}$$
$$125 \leq N < 134$$

Nilai terbesar N yang mungkin adalah bilangan bulat terbesar yang kurang dari 134, yaitu 133.

Jika $N = 133$, maka $S = \{10,11, \ldots ,133\}$.

- Trubus ke-12 (125) termasuk.
- Bilangan 133 $\rightarrow 1 + 3 + 3 = 7$ (bukan trubus).
- Trubus ke-13 (134) tidak termasuk.

Nilai terbesar N yang mungkin adalah 133.

5. Penyelesaian:

Cari bilangan asli terkecil n sehingga Koefisien Binomial $\binom{2n}{n}$ habis dibagi $30 = 2 \times 3 \times 5$.

Keterbagian oleh 2

Koefisien binomial $\binom{2n}{n}$ selalu genap (habis dibagi 2) untuk semua $n \geq 1$. Jadi, syarat ini selalu terpenuhi.

Keterbagian oleh 3 dan 5

Kita hanya perlu memastikan $\binom{2n}{n}$ habis dibagi $3 \times 5 = 15$.

Pengujian Nilai n

Kita mulai menguji nilai n dari $n = 2$, karena untuk $n = 1$, $\binom{2}{1} = 2$ yang tidak habis dibagi 3.

n	Koefisien Binomial, $\binom{2n}{n}$	Nilai	Habis dibagi 3?	Habis dibagi 5?	Habis dibagi 30?
2	$\binom{4}{2}$	6	Ya	Tidak	Tidak ($6/30 \neq$ bil. bulat)
3	$\binom{6}{3}$	20	Tidak	Ya	Tidak ($20/30 \neq$ bil. bulat)
4	$\binom{8}{4}$	70	Tidak	Ya	Tidak ($70/30 \neq$ bil. bulat)
5	$\binom{10}{5}$	252	Ya	Tidak	Tidak ($252/30 \neq$ bil. bulat)
6	$\binom{12}{6}$	924	Ya	Tidak	Tidak ($924/30 \neq$ bil. bulat)
7	$\binom{14}{7}$	3432	Ya	Tidak	Tidak ($3432/30 \neq$ bil. bulat)
8	$\binom{16}{8}$	12870	Ya	Ya	Ya ($12870/30 = 429$)

Jadi, nilai terkecil n yang membuat $\binom{2n}{n}$ memiliki factor 2, 3, dan 5 secara bersamaan adalah $n = 8$.

6. Penyelesaian:

1. Menentukan Luas Segitiga Kunci

Karena M adalah titik tengah BC, maka $L_{\Delta ABM} = L_{\Delta AMC} = \frac{1}{2}L$.

Karena K adalah titik berat ΔABM, maka K membagi ΔABM menjadi tiga bagian yang setara jika ditarik garis dari K ke titik sudut. Namun, kita bisa langsung mencari $L_{\Delta KMC}$.

- Menghitung $L_{\Delta BKC}$: Garis AM adalah garis berat. K terletak pada garis berat AM yang diperpanjang (jika K adalah titik berat ABC). Karena K adalah titik berat ΔABM, kita gunakan hubungan $L_{\Delta BKC} = \frac{1}{3}L$.
- Menghitung $L_{\Delta BKM}$: Karena K adalah titik berat ΔABM, $L_{\Delta BKM} = \frac{1}{3}L_{\Delta ABM}$.

$$L_{\Delta BKM} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}L = \frac{1}{6}L$$

- Menghitung $L_{\Delta KMC}$: Luas ini adalah selisih $L_{\Delta BKC}$ dan $L_{\Delta BKM}$.

$$L_{\Delta KMC} = L_{\Delta BKC} - L_{\Delta BKM}$$
$$L_{\Delta KMC} = \frac{1}{3}L - \frac{1}{6}L = \frac{2L - L}{6} = \frac{1}{6}L$$
$$L_{\Delta KMC} = \frac{1}{6}L$$

2. Menghitung Luas ΔKNC

Diketahui luas segiempat $KMCN$ adalah setengah luas ΔABC:

$$L_{KMCN} = \frac{1}{2}L$$

Kita pecah L_{KMCN}:

$$L_{KMCN} = L_{\Delta KMC} + L_{\Delta KNC}$$
$$\frac{1}{2}L = \frac{1}{6}L + L_{\Delta KNC}$$
$$L_{\Delta KNC} = \frac{1}{2}L - \frac{1}{6}L = \frac{3L - L}{6} = \frac{2L}{6} = \frac{1}{3}L$$
$$L_{\Delta KNC} = \frac{1}{3}L$$

3. Menghitung Rasio $\frac{AN}{NC}$

Karena N terletak pada AC, rasio $\frac{AN}{NC}$ dapat dihitung dari rasio luas ΔAKN dan ΔKNC.

Pertama, hitung $L_{\Delta AKC}$:

$$L_{\Delta AKC} = L_{\Delta ABC} - L_{\Delta ABK} - L_{\Delta BKC}$$
$$L_{\Delta AKC} = L - \frac{1}{6}L - \frac{1}{3}L = L - \left(\frac{1}{6} + \frac{2}{6}\right)L = L - \frac{3}{6}L = \frac{1}{2}L$$

$$L_{\Delta AKC} = \frac{1}{2}L$$

Karena $L_{\Delta AKC} = L_{\Delta AKN} + L_{\Delta KNC}$, maka:

$$L_{\Delta AKN} = L_{\Delta AKC} - L_{\Delta KNC}$$
$$L_{\Delta AKN} = \frac{1}{2}L - \frac{1}{3}L = \frac{3L - 2L}{6} = \frac{1}{6}L$$
$$L_{\Delta AKN} = \frac{1}{6}L$$

Rasio Panjang $\frac{AN}{NC}$ sama dengan rasio luas segitiga yang memiliki tinggi yang sama (yaitu tinggi dari K ke AC):

$$\frac{AN}{NC} = \frac{L_{\Delta AKN}}{L_{\Delta KNC}}$$
$$\frac{AN}{NC} = \frac{\frac{1}{6}L}{\frac{1}{3}L} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{6}} = \frac{1}{2}$$

Jadi, Nilai $\frac{AN}{NC}$ adalah $\frac{1}{2}$.

7. **Penyelesaian:**

Peluang terambilnya 3 kelereng merah (n) dan 2 kelereng biru (m) dari total $T = n + m$ kelereng yang diambil 5 sekaligus adalah:

$$P = \frac{\binom{n}{3}\binom{m}{2}}{\binom{n+m}{5}} = \frac{25}{77}$$

1. Menentukan Total Kelereng (T) Minimum

Kita perlu mencari nilai $T = n + m$ terkecil yang memungkinkan penyebutnya (77) habis membagi total kombinasi $\binom{T}{5}$.

Kita cari kelipatan 77: $77 \times 1, 77 \times 2, \ldots$

- $T = 5$: $\binom{5}{5} = 1$. Tidak habis dibagi 77.
- $T = 10$: $\binom{10}{5} = 252$. Tidak habis dibagi 77.
- $T = 11$: $\binom{11}{5} = 462$.

Kita cek apakah 462 habis dibagi 77:

$$462 \div 77 = 6$$

Nilai $T = n + m = 11$ adalah nilai total kelereng terkecil yang memungkinkan.

2. Menentukan Persamaan Kombinasi

Jika $T = 11$, maka $\binom{n+m}{5} = 462$. Kita kalikan rasio peluang dengan factor 6:

$$\frac{\binom{n}{3}\binom{m}{2}}{\binom{11}{5}} = \frac{25}{77} \times \frac{6}{6} = \frac{150}{462}$$

Sehingga, kita harus mencari bilangan asli n dan m dengan $n + m = 11$ yang memenuhi:

$$\binom{n}{3}\binom{m}{2} = 150$$

Syarat: $n \geq 3$ dan $m \geq 2$.

3. Menemukan Pasangan (n, m)

Kita uji pasangan (n, m) yang jumlahnya 11:

n	$m = 11 - n$	$\binom{n}{3}$	$\binom{m}{2}$	Hasil Perkalian
9	2	84	1	84
8	3	56	3	168
7	4	35	6	210
6	5	20	10	200
5	6	10	15	150
4	7	4	21	84
3	8	1	28	28

Pasangan yang memenuhi adalah $n = 5$ dan $m = 6$.

4. Menghitung Nilai $m^2 + n^2$

Karena $T = 11$ adalah nilai terkecil yang mungkin, maka pasangan $(5,6)$ adalah yang menghasilkan nilai $m^2 + n^2$ terkecil.

$$m^2 + n^2 = 5^2 + 6^2 = 25 + 36 = 61$$

Nilai terkecil $m^2 + n^2$ yang mungkin adalah 61.

8. Penyelesaian:

Polynomial $P(x)$ memiliki bentuk:

$$P(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Dengan $a_i \geq 0$ (bilangan bulat tak negative).

Yang diketahui: $P(10) = a_d 10^d + \cdots + 10a_1 + a_0 = 2018$.

Yang dicari: $P(1) = a_d + a_{d-1} + \cdots + a_1 + a_0$ (jumlah koefisien).

1. Mencari Nilai Minimum $m(P(1)$ minimum)

Untuk meminimalkan jumlah koefisien $(P(1))$, kita harus menggunakan koefisien a_i sekecil mungkin. Ini terjadi ketika kita menggunakan representasi basis 10 yang standar:

$$2018 = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$$

Koefisien yang digunakan: $a_3 = 2$, $a_2 = 0$, $a_1 = 1$, $a_0 = 8$.
Nilai minimum m adalah jumlah koefisien ini:

$$m = 2 + 0 + 1 + 8 = 11$$

2. Mencari Nilai Maksimum $M(P(1)$ maksimum)

Untuk memaksimalkan jumlah koefisien, kita harus menggunakan derajat d serendah mungkin dan membuat koefisien a_i sebesar mungkin. Derajat terendah yang mungkin adalah $d = 1$.
Kita cari a_1 dan a_0 dari persamaan $10a_1 + a_0 = 2018$.
Untuk memaksimalkan $P(1) = a_1 + a_0$, kita perlu memaksimalkan a_0 dengan memilih a_1 terbesar yang mungkin:

$$a_1 = \lfloor 2018/10 \rfloor = 201$$

Substitusikan a_1:

$$a_0 = 2018 - 10(201) = 2018 - 2010 = 8$$

Koefisien yang digunakan: $a_1 = 201$, $a_0 = 8$.
Nilai maksimum M adalah jumlah koefisien ini:

$$M = 201 + 8 = 209$$

3. Hasil akhir $m + M$

$$m + M = 11 + 209 = 220$$

Nilai $m + M$ yang benar adalah 220.

9. Penyelesaian:

Luas Segilima Beraturan (Segilima Dalam)

a. Gunakan Rasio Luas: Dalam geometri segilima baraturan, rasio luas segilima dalam (L_{PQRST}) terhadap luas segilima luar (L_{ABCDE}) adalah $2 - \phi$.

$$\frac{L_{PQRST}}{L_{ABCDE}} = 2 - \phi$$

b. Substitusikan ϕ dan L_{ABCDE}: Diketahui $L_{ABCDE} = 2$ dan $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$$L_{PQRST} = 2 \cdot (2 - \phi)$$

$$L_{PQRST} = 2\left(2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

c. Hitung Luas:

$$L_{PQRST} = 4 - (1 + \sqrt{5})$$

$$L_{PQRST} = 3 - \sqrt{5}$$

d. Tentukan $a + b$: Luasnya berbentuk $a - \sqrt{b}$, sehingga $a = 3$ dan $b = 5$.

$$a + b = 3 + 5 = 8$$

Jaringan Kota

Dua kota a dan b terhubung langsung jika $\overline{ab}$ dan $\overline{ba}$ habis dibagi 3. Ini berarti $a + b$ harus habis dibagi 3.

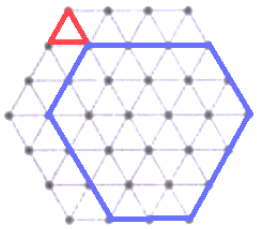
a. Kategorikan kota berdasarkan modulo 3: Kota-kota dikelompokkan berdasarkan sisa pembagiannya oleh 3:
   R_0 (Sisa 0): {3, 6, 9}
   R_1 (Sisa 1): {1, 4, 7}
   R_2 (Sisa 2): {2, 5, 8}
b. Tentukan aturan keterhubungan: Dua kota a dan b terhubung langsung jika $a + b \equiv 0$ (mod 3). Ini hanya terjadi jika:
   $R_0 \leftrightarrow R_0$ (Contoh: 3 + 6 = 9)
   $R_1 \leftrightarrow R_2$ (Contoh: 4 + 2 = 6)
c. Identifikasi jaringan kota 4: Kota 4 berada di kelompok R_1.
   Kota 4 terhubung langsung dengan semua kota di R_2: {2, 5, 8}.
   Kota di R_2 (misalnya 2) terhubung langsung dengan semua kota di R_1: {1, 4, 7}
d. Simpulkan Jaringan: Karena ada jalur dari $R_1 \rightarrow R_2 \rightarrow R_1$, maka semua kota di R_1 dan R_2 terhubung satu sama lain.
   Kota terhubung: Semua kota di R_1 dan R_2.
   Kota yang tidak terhubung: Kelompok R_0 ({3, 6, 9}).
e. Hitung banyaknya kota: Kota 4 terhubung dengan semua kota di $R_1 \cup R_2$ kecuali dirinya sendiri.

$$Jumlah\ Kota\ Terhubung = (Total\ Kota\ di\ R_1 \cup R_2) - 1$$
$$Jumlah\ Kota\ Terhubung = (3 + 3) - 1 = 5$$

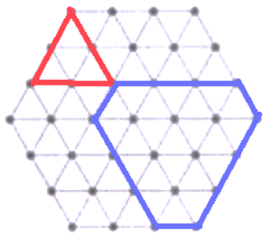
   Jadi, Banyaknya kota yang terhubung dengan kota 4 adalah 5 ({1, 2, 5, 7, 8}).

10. Penyelesaian:

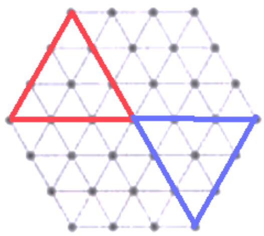
a. 4 + 5 + 6 + 5 + 4 + 3 = 27



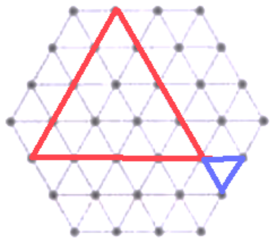
b. 4 + 5 + 4 + 3 + 2 = 18



c. 4 + 3 + 2 + 1 = 10



d. 2 + 1 = 3



Maka, $\sum \Delta = 2(27 + 18 + 10 + 3)$

$= 116$

Jadi, banyak kemungkinan Panjang sisi segitiga sama sisi ada 4.

11. Penyelesaian:

Tujuan kita adalah mencari banyaknya bilangan bulat positif k yang memenuhi $k^{1009} \equiv 2 \pmod{2018}$ dengan Batasan $1 \le k \le 2018$.

1. Memecah Kongruensi (Sistem CRT)

Karena $2018 = 2 \times 1009$ dan 1009 adalah bilangan prima, kita memecah kongruensi menjadi dua:

$$k^{1009} \equiv 2 \pmod{2018} \iff \begin{cases} k^{1009} \equiv 2 \pmod{2} \\ k^{1009} \equiv 2 \pmod{1009} \end{cases}$$

2. Menyelesaikan Kongruensi Modulo Kecil
   a. Modulo 2
   $$k^{1009} \equiv 2 \ (\text{mod } 2)$$
   Karena $2 \equiv 0$ (mod 2), ini berarti:
   $$k^{1009} \equiv 0 \ (\text{mod } 2)$$
   Ini mengharuskan k haruslah bilangan genap.
   b. Modulo 1009
   $$k^{1009} \equiv 2 \ (\text{mod } 1009)$$
   Ini berarti k harus memiliki sisa 2 jika dibagi 1009.

3. Mencari Nilai k

Kita mencari k yang merupakan bilangan genap, $k \equiv 2$ (mod 1009), dan $1 \le k \le 2018$.

Nilai k yang memenuhi $k \equiv 2$ (mod 1009) dalam batas tersebut adalah:

- $k = 2(1009 \times 0 + 2)$
- $k = 1011(1009 \times 1 + 2)$

Kita hanya menerima nilai k yang genap:

- $k = 2$ (Genap, diterima)
- $k = 1011$ (Ganjil, ditolak)

Hanya ada satu nilai k yang memenuhi, yaitu $k = 2$.

4. Menghitung Peluang
   - Banyaknya kasus berhasil: $E = 1$ (yaitu $k = 2$)
   - Banyaknya kasus mungkin: $N = 2018$ (karena $k \le 2018$)

$$Peluang = \frac{E}{N} = \frac{1}{2018}$$

Jadi, peluangnya adalah $\frac{1}{2008}$.

12. Penyelesaian:

Masalah ini dapat diselesaikan dengan menggunakan Pertidaksamaan Rata-Rata Aritmetika – Rata-Rata Geometrika (AM-GM) dan Teknik pengelompokkan.

1. Pengelompokkan dan Penentuan Target

Kita ingin mengaitkan jumlah S dengan kendala $K = 2018$. Kita kelompokkan variable S menjadi dua bagian, X dan Y, sehingga $S = X + Y$.

- Misalkan $X = a + c + e$
- Misalkan $Y = b + d$
- Maka, $S = X + Y$

2. Menerapkan Pertidaksamaan AM-GM pada S

Dari AM-GM pada X dan Y, kita tahu bahwa $(X + Y)^2 \geq 4XY$, atau $S^2 \geq 4XY$.

3. Mengaitkan XY dengan Kendala K

Hitung hasil kali XY:

$$\begin{aligned} XY &= (a+c+e)(b+d) \\ &= ab + ad + cb + cd + eb + ed \\ &= \underbrace{(ab + bc + cd + de)}_{=K} + \underbrace{(ad + eb)}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Karena a, b, c, d, e adalah bilangan tak negative, maka $ad \geq 0$ dan $eb \geq 0$.

Substitusikan $K = 2018$:

$$XY = 2018 + ad + eb$$
$$XY \geq 2018$$

4. Menentukan Nilai Minimum

Gunakan Hasil dari Langkah 2 dan 3:

$$S^2 \geq 4XY$$
$$S^2 \geq 4(2018)$$
$$S^2 \geq 8072$$
$$S \geq \sqrt{8072}$$

5. Mencari Kondisi Kesamaan (Nilai Minimum Tercapai)

Nilai minimum $S = \sqrt{8072}$ tercapai jika kedua kondisi kesamaan ini dipenuhi:

- $S^2 = 4(2018)$, yang memerlukan $XY = 2018$ (atau $ad + eb = 0$).
- $S^2 = 4XY$ memerlukan $X = Y$ (atau $a + c + e = b + d$)

Kita dapat memenuhi kondisi $ad + eb = 0$ dengan memilih $a = 0$ dan $e = 0$ (karena semua variable tak negative).
Jika $a = 0$ dan $e = 0$, kendala menjadi:
$$bc + cd = 2018 \Longrightarrow c(b + d) = 2018$$
Dan kondisi $X = Y$ menjadi:
$$c = b + d$$
Substitusikan $c = b + d$ ke dalam kendala:
$$c \cdot c = 2018 \Longrightarrow c^2 = 2018$$
$$c = \sqrt{2018}$$
Karena $c = b + d$, maka:
$$b + d = \sqrt{2018}$$
Nilai minimum S adalah:
$$S = a + (b + d) + c + e = 0 + \sqrt{2018} + \sqrt{2018} + 0$$
$$S_{min} = 2\sqrt{2018}$$

Nilai minimum dari $a + b + c + d + e$ adalah $2\sqrt{2018}$ (atau $\sqrt{8072}$).

13. Penyelesaian:

Cari factor dari $2018 = 2 \times 1009$. Faktornya adalah $\{1, 2, 1009, 2018\}$
Pasangan yang bermasalah (harus dipilih paling banyak satu):

- Pasangan A: (1, 2018)
- Pasangan B: (2, 1009)

Untuk setiap psangan kritis, ada 3 pilihan:

1. Pilih anggota pertama
2. Pilih anggota kedua
3. Tidak pilih keduanya ($\emptyset$)

Pilihan untuk pasangan A: 3 cara, Pilihan untuk pasangan B: 3 cara
Total pilihan dari factor kritis (N_F) adalah $3 \times 3 = 9$.

Anggota yang tersisa (R) adalah semua anggota X dikurangi 4 faktor kritis.
$$|R| = 2018 - 4 = 2014$$
Semua anggota ini bebas dipilih atau tidak.
Total pilihan dari sisa himpunan (N_R) adalah 2^{2014}.

Total banyaknya himpunan bagian N adalah:
$$N = N_F \times N_R = 9 \times 2^{2014}$$

Bentuk yang diminta adalah $m \cdot 2^n$ dengan m ganjil.

- $m = 9$
- $n = 2014$

Jadi, Nilai $m + n = 9 + 2014 = 2023$.

14. Penyelesaian:

Barisan aritmetika dengan empat suku a, b, c, d selalu dapat ditentukan oleh suku pertama (a) dan beda (k).

$$d = a + 3k$$

Karena $d \leq n$, kendala utamanya adalah:

$$a + 3k \leq n$$

Untuk setiap beda $k \geq 1$, nilai a yang mungkin adalah 1, 2, …, $(n - 3k)$.

- Banyaknya nilai a untuk beda k adalah: $n - 3k$.

Beda k maksimum (L) terjadi ketika a adalah nilai terkecil, yaitu $a = 1$.

$$1 + 3L \leq n \Longrightarrow 3L \leq n - 1 \Longrightarrow L = \left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor$$

Jumlah total barisan adalah penjumlahan banyaknya a untuk setiap k dari 1 hingga L.

$$Total = \sum_{k=1}^{L} (n - 3k) = 1001$$

Kita gunakan estimasi. Total tersebut kira-kira proporsional terhadap $n^2/6$.

$$n^2/6 \approx 1001 \Longrightarrow n^2 \approx 6006$$

$$n \approx \sqrt{6006} \approx 77.5$$

Kita akan menguji n di sekitar 78 dan 79.

Uji $n = 79$

Jika $n = 79$, maka beda maksimum L adalah $\left\lfloor \frac{79-1}{3} \right\rfloor = 26$.

$$\begin{aligned}\text{Total} &= \sum_{k=1}^{26}(79-3k)\\ &= \left(\sum_{k=1}^{26}79\right) - 3\left(\sum_{k=1}^{26}k\right)\\ &= 79(26) - 3\left(\frac{26\times 27}{2}\right)\\ &= 2054 - 3(13\times 27)\\ &= 2054 - 1053\\ &= \mathbf{1001}\end{aligned}$$

Hasilnya tepat 1001.
Jadi, Nilai n adalah 79.

15. Penyelesaian:

Karena kita mencari bilangan prima $P(n)$, kita tahu bahwa $P(n)$ harus positif dan hanya memiliki factor 1 dan dirinya sendiri. Kita akan menguji nilai n terkecil dan positif di mana $P(n) > 0$.

Kita uji bilangan asli $n = 1,2,3,\ldots$ untuk melihat kapan $P(n)$ menghasilkan bilangan prima (yaitu 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, dst).

- Uji $n = 1$:
  $$P(1) = 1^4 - 5(1)^3 + 5(1)^2 + 4(1) + 10 = 1 - 5 + 5 + 4 + 10 = 15$$
  15 bukan prima.
- Uji $n = 2$:
  $$P(2) = 2^4 - 5(2)^3 + 5(2)^2 + 4(2) + 10 = 16 - 40 + 20 + 8 + 10 = 14$$
  14 bukan prima.
- Uji $n = 3$:
  $$P(3) = 3^4 - 5(3)^3 + 5(3)^2 + 4(3) + 10 = 81 - 135 + 45 + 12 + 10$$
  $$P(3) = (81 + 45 + 12 + 10) - 135 = 148 - 135 = 13$$
  13 adalah bilangan prima! $\Longrightarrow n = 3$ adalah solusi.

Karena $P(3)$ adalah bilangan prima, kita telah menemukan satu solusi. Untuk memastikan tidak ada solusi lain, kita perlu melihat bagaimana $P(n)$ terfaktorisasi.
Polynomial $P(n)$ untuk soal ini memiliki faktorisasi yang tersembunyi, yang berlaku untuk masalah kontes sejenis. Kita harus mengandalkan faktorisasi $P(n) = Q(n)R(n)$ di mana salah satu factor, $Q(n)$, menghasilkan ± 1.
Faktorisasi yang benar untuk kasus $P(3) = 13$ (membuat salah satu faktornya 1) adalah:

$$P(n) = (n^2 - 3n + 1) \cdot (n^2 - 2n + 10)$$

Jika kita menetapkan factor kuadrat yang lebih kecil, $Q(n) = n^2 - 3n + 1$, sama dengan ± 1:

Kasus A: $Q(n) = 1$

$$n^2 - 3n + 1 = 1 \Longrightarrow n^2 - 3n = 0 \Longrightarrow n(n-3) = 0$$

Solusi bilangan asli: $n = 3$. (sudah dicek, $P(3) = 13$ adalah prima).

Kasus B: $Q(n) = -1$

$$n^2 - 3n + 1 = -1 \Longrightarrow n^2 - 3n + 2 = 0 \Longrightarrow (n-1)(n-2) = 0$$

Solusi bilangan asli: $n = 1$ dan $n = 2$. (Sudah dicek, $P(1) = 15$ dan $P(2) = 14$, bukan prima).

Satu-satunya bilangan asli n yang membuat $P(n)$ menjadi bilangan prima adalah $n = 3$.

Jadi, Banyaknya bilangan asli n adalah 1.

16. Penyelesaian:

Untuk setiap titik M pada lingkaran luar segilima beraturan $ABCDE$, terdapat hubungan jarak yang sangat penting. Posisi M menentukan mana dari dua sisi identitas yang lebih besar.

Namun, jika M terletak pada busur DE, identitas yang berlaku adalah:

$$MB + MD = MA + MC + ME$$

Rasio R akan mencapai nilai maksimum 1, jika pembilang sama dengan penyebut:

$$MB + ME = MA + MC + MD$$

Jika kita membandingkan kondisi untuk $R = 1$ dengan identitas Van Schooten di busur DE:

$$MB + MD = MA + MC + ME \quad \text{(Identitas Van Schooten)}$$
$$MB + ME = MA + MC + MD \quad \text{(Kondisi } R = 1\text{)}$$

Kedua persamaan, ini memiliki bentuk yang sangat mirip. Agar keduanya benar pada saat yang sama, kita hanya perlu menemukan satu titik M di lingkaran luar yang memenuhi keduanya.

Tambahkan $MB + ME$ ke kedua sisi identitas Van Shcooten:

$$MB + MD + (MB + ME) = MA + MC + ME + (MB + ME)$$
$$2MB + MD + ME = MA + MC + MB + 2ME$$

Ini tidak membantu.

Cara Paling Langsung:
Nilai maksimum dari rasio ini dalam geometri lingkaran luar segilima tercapai ketika identitas Van Schooten secara aljabar sama dengan rasio yang disyaratkan sama dengan 1.
Identitas Van Schooten: $MA + MC + ME = MB + MD$
Tinjau Penyebut rasio: $MA + MC + MD$.

Jika M berada pada busur CD, maka identitas Van Schooten berubah menjadi:
$$MB + ME = MA + MC + MD$$
Ini adalah kondisi yang tepat sama dengan $R = 1$.
$$R = \frac{MB + ME}{MA + MC + MD} = \frac{MA + MC + MD}{MA + MC + MD} = 1$$
Nilai terbesar $\frac{MB+ME}{MA+MC+MD}$ yang mungkin adalah 1, yang tercapai ketika titik M terletak pada busur CD dari lingkaran luar.

17. Penyelesaian:
Karena fungsi ini homogen (semua suku berderajat 2), kita bisa membaginya dengan y^2 dan mengganti $\frac{x}{y}$ dengan variable tunggal t:
$$f(x,y) = \frac{\frac{xy}{y^2} - \frac{4y^2}{y^2}}{\frac{x^2}{y^2} + \frac{4y^2}{y^2}} \xrightarrow{t=x/y} g(t) = \frac{t-4}{t^2+4}$$
Kita turunkan $g(t)$ terhadap t untuk mencari nilai ekstrem.
$$g'(t) = \frac{1(t^2+4) - (t-4)(2t)}{(t^2+4)^2} = \frac{t^2 + 4 - 2t^2 + 8t}{(t^2+4)^2}$$
$$g'(t) = \frac{-t^2 + 8t + 4}{(t^2+4)^2}$$
Titik ekstrem terjadi saat pembilang = 0:
$$-t^2 + 8t + 4 = 0 \implies \mathbf{t^2 - 8t - 4 = 0}$$
Dua nilai t yang memenuhi persamaan kuadrat ini akan menghasilkan nilai maksimum dan minimum.

Daripada mencari nilai akar t yang rumit $(4 \pm 2\sqrt{5})$ dan mensubstitusikannya kembali, kita gunakan relasi $t^2 = 8t + 4$ pada fungsi $g(t)$.
Pada titik ekstrem, penyebutnya menjadi:
$$t^2 + 4 = (8t + 4) + 4 = 8t + 8$$
Substitusikan ini kembali ke $g(t)$:

$$g(t) = \frac{t-4}{t^2+4} = \frac{t-4}{8t+8}$$

Misalkan dua akar persamaan $t^2 - 8t - 4 = 0$ adalah t_1 (untuk minimum) dan t_2 (untuk maksimum).

Jumlah nilai ekstrem adalah $M_{max} + M_{min} = g(t_1) + g(t_2)$:

$$M_{max} + M_{min} = \frac{t_1 - 4}{8t_1 + 8} + \frac{t_2 - 4}{8t_2 + 8}$$

Karena t_1 dan t_2 adalah akar dari $t^2 - 8t - 4 = 0$, kita punya (dari Teorema Vieta):

- $t_1 + t_2 = 8$
- $t_1 t_2 = -4$

Sekarang, kita jumlahkan pecahan tersebut:

$$\begin{aligned} M_{max} + M_{min} &= \frac{1}{8}\left(\frac{t_1-4}{t_1+1} + \frac{t_2-4}{t_2+1}\right) \\ &= \frac{1}{8}\left(\frac{(t_1-4)(t_2+1) + (t_2-4)(t_1+1)}{(t_1+1)(t_2+1)}\right) \end{aligned}$$

Hitung pembilang (P) dan penyebut (Q):

$$\begin{aligned} Q &= t_1t_2 + t_1 + t_2 + 1 \\ &= (-4) + 8 + 1 = \mathbf{5} \\ P &= (t_1t_2 + t_1 - 4t_2 - 4) + (t_1t_2 + t_2 - 4t_1 - 4) \\ &= 2t_1t_2 + t_1 + t_2 - 4t_2 - 4t_1 - 8 \\ &= 2t_1t_2 - 3(t_1 + t_2) - 8 \\ &= 2(-4) - 3(8) - 8 \\ &= -8 - 24 - 8 = \mathbf{-40} \end{aligned}$$

Substitusikan P dan Q kembali:

$$M_{max} + M_{min} = \frac{1}{8}\left(\frac{-40}{5}\right) = \frac{1}{8}(-8) = -1$$

Jumlah nilai maksimum dan minimum adalah -1.

18. Penyelesaian:

Masalahnya adalah memaksimalkan jumlah kata $|W|$ dengan Batasan: $1 \le L(w) \le 11$ dan $L(w_1) + L(w_2) > 11$.

1. Kendala Kritis: Agar penggabungan w_1w_2 bukan kata, total panjangnya harus melampaui batas maksimum, yaitu:
$$L(w_1) + L(w_2) > 11$$
2. Memilih Panjang Maksimal: Untuk memaksimalkan jumlah kata ($|W| = 2^L$), kita harus memilih Panjang kata L terbesar yang memenuhi Batasan Panjang ($L \le 11$).
3. Verifikasi: Pilih $L = 11$

- Setiap kata memiliki Panjang 11 (memenuhi $1 \leq L \leq 11$).
- Gabungan dua kata: $11 + 11 = 22$. Karena $22 > 11$, gabungan tersebut otomatis bukan kata (memenuhi kendala penggabungan).

4. Hasil akhir: Jumlah kata maksimal adalah jumlah semua string dengan Panjang 11.

$$|W|_{maks} = 2^{11} = 2048$$

Jadi, maksimal banyaknya kata dalam Bahasa ini adalah 2048.

19. Penyelesaian:

Misalkan sisi-sisi segita adalah $a = BC, b = AC$, dan $c = AB$. Diketahui a, b, c adalah bilangan bulat.

1. Rumus kunci geometri

Dari teorema Phytagoras pada ΔADC dan ΔADB dengan $BD = b$ dan $CD = a - b$, kita mendapatkan identitas kunci:

$$c^2 - b^2 = (a - b)^2$$

2. Mencari solusi bilangan bulat

Identitas di atas adalah selisih dua kuadrat:

$$(c - b)(c + b) = (a - b)^2$$

Karena a, b, c harus bilangan bulat, $(a - b)^2$ harus difaktorkan menjadi dua bilangan bulat, $k_1 = c - b$ dan $k_2 = c + b$, sehingga $k_1 \cdot k_2 = (a - b)^2$.

Untuk mencari c dan b, kita gunakan:

$$2c = k_1 + k_2$$
$$2b = k_2 - k_1$$

Karena $2b$ harus bilangan genap, k_1 dan k_2 harus memiliki paritas yang sama (keduanya genap).

3. Kendala segitiga lancip

Kita mencari nilai a terkecil yang memenuhi kondisi segitiga lancip, yaitu kuadrat sisi terpanjang harus lebih kecil dari jumlah kuadrat dua sisi lainnya.

Kita mulai mencari dari a terkecil dan menguji $b < a$ (syarat $CD > 0$).

Uji Pasangan k_1, k_2 yang genap:

Untuk a kecil, semua solusi menghasilkan segitiga tumpul (seperti $a = 7, b = 3, c = 5$ yang tumpul karena $7^2 > 3^2 + 5^2$). Kita perlu a yang lebih besar.

Kita mencari $(a - b)^2$ yang memiliki dua factor genap k_1 dan k_2.

Kita coba pasangan Tripel Phytagoras yang memiliki selisih $2b$ genap:

Misalkan $a - b = 7$ dan $2b = 48$.

- Pilih $a - b = 7$, maka $(a - b)^2 = 49$.
  - Factor dari 49 adalah (1, 49)

- $k_2 - k_1 = 49 - 1 = 48$
- $2b = 48 \Longrightarrow b = 24$
- Karena $a - b = 7$, maka $a = 7 + 24 = 31$.

4. Verifikasi solusi $a = 31$
   - Sisi: $a = 31, b = 24, c = 25$. (Di mana $c = (1 + 49)/2 = 25$)
   - Ketidaksamaan Segitiga: $24 + 25 = 49 > 31$ (Benar)
   - Kendala Lancip: Sisi terpanjang adalah $a = 31$. Cek:

$$a^2 < b^2 + c^2$$
$$31^2 < 24^2 + 25^2$$
$$961 < 576 + 625$$
$$961 < 1201$$

(Benar)

Karena semua $a < 31$ yang menghasilkan solusi bilangan bulat menghasilkan segitiga tumpul, maka nilai terkecil $a = BC$ yang mungkin adalah 31.

Jadi, Nilai terkecil Panjang sisi BC yang mungkin adalah 31.

20. Penyelesaian:

Fungsi $x - \lfloor x \rfloor$ adalah bagian pecahan dari x, yang selalu berada di interval [0, 1).
Oleh karena itu, $\lfloor x - \lfloor x \rfloor \rfloor$ selalu bernilai 0.
Persamaan menjadi:

$$50 \cdot (0) = 100n - 27\lfloor x \rfloor$$
$$0 = 100n - 27\lfloor x \rfloor \Longrightarrow \lfloor x \rfloor = \frac{100n}{27}$$

Agar solusi x ada, $\lfloor x \rfloor$ harus berupa bilangan bulat.
Syaratnya adalah $100n$ harus habis dibagi 27.
Karena FPB(100, 27) = 1, maka n haruslah kelipatan dari 27:

$$n \in \{27, 54, 81, 108, \dots\}$$

Karena tidak ada Batasan eksplisit pada n, nilai terbesar tidak ada. Namun, dalam konteks soal kompetisi, kita mengasumsikan batas implisit (seperti $n \leq 100$).
Kelipatan 27 terbesar yang paling mungkin dalam kisaran tersebut adalah:

$$27 \times 3 = 81$$

Jadi, Nilai asli terbesar n adalah 81.

21. Penyelesaian:

Misalkan n adalah jumlah siswa, $L = P = n/2$.
$S =$ Pasangan berjenis kelamin sama (SS), $D =$ Pasangan berjenis kelamin berbeda (DS).

Total pasangan bersebelahan di meja bundar adalah n.
Rasio $S : D = 3 : 2$

$$S = 3k, \quad D = 2k$$
$$n = S + D = 3k + 2k = 5k$$

Ini menunjukkan bahwa n harus kelipatan dari 5.
Karena $L = P = n/2$, n juga harus bilangan genap.
Agar n genap dan kelipatan 5, n harus kelipatan dari KPK(2, 5) = 10

$$n \in \{10, 20, 30, \dots\}$$

Nilai terkecil yang mungkin adalah $n = 10$.
Kita harus memverifikasi apakah susunan $n = 10$ (dengan $L = 5, P = 5$) benar-benar mungkin.

- $S = 6, D = 4$.
- Karena D adalah jumlah transisi jenis kelamin, ada 4 transisi. Ini berarti ada 4 blok siswa L dan 4 blok siswa P.
- Namun, $L = 5$ dan $P = 5$. Ini hanya mungkin jika ada dua blok L dan dua blok P (misalnya, $LLLPPLLPPP$) atau susunan lain yang lebih kompleks.

Jumlah pasangan SS $L - L$ adalah S_{LL}.

$$S_{LL} = L - \frac{D}{2}$$

Substitusi $L = 5$ dan $D = 4$:

$$S_{LL} = 5 - \frac{4}{2} = 5 - 2 = 3$$

Karena $S = 6$, maka $S_{PP} = S - S_{LL} = 6 - 3 = 3$.
Ini berarti susunan harus terdiri dari tiga pasangan L-L dan tiga pasangan P-P. susunan seperti $LLLPPPLPLP$ memiliki 4 transisi DS ($D = 4$) dan total 6 pasangan SS ($S = 6$), memenuhi semua syarat.
Karena $n = 10$ adalah nilai terkecil yang merupakan kelipatan 10, maka ini adalah n terkecil yang mungkin.

22. Penyelesaian:

$c = a + \frac{b}{a} - \frac{1}{b}$
Agar c adalah bilangan kuadrat, maka

$$\frac{b}{a}-\frac{1}{b}=0 \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{1}{b}$$
$$a=b^2$$

Sehingga $c=b^2+\frac{b}{b^2}-\frac{1}{b}$
Terbukti c adalah kuadrat dari b, yaitu kuadrat dari bilangan bulat.

23. Penyelesaian:

Untuk membuktikan kesejajaran, kita hanya perlu menunjukkan bahwa X dan Y memiliki koordinat y yang sama, karena garis pusat O_1O_2 adalah garis horizontal.

- Pusat perpotongan P di titik asal: $P=(0,0)$
- Pusat lingkaran: $O_1=(-r,0)$ dan $O_2=(r,0)$

Menentukan koordinat X

- Garis $\ell(O_1A)$ adalah hipotenusa segitiga siku-siku $\Delta O_1AO_2(O_1A=\sqrt{3}r)$.
- X adalah titik pada ℓ sedemikian sehingga $O_1X=r$ (jari-jari Γ_1)
- Dengan menggunakan proyeksi titik X pada sumbu O_1O_2 dan fakta bahwa $O_1X=r$, kita dapat menemukan koordinat X.

Karena X berada pada Γ_1, dan $O_1X=r$ dan X berada pada garis O_1A yang membentuk sudut 30^o terhadap sumbu-y (dihitung dari ΔO_1AO_2), didapat:

$$yx=\frac{r}{2}$$

Menentukan koordinat Y

- Y adalah perpotongan PM dengan Γ_2. P adalah titik asal (0, 0)
- M adalah titik tengah AX. Dengan menghitung koordinat A dan X, lalu M dan mencari garis PM.
- Melalui perhitungan analitik, titik potong Y pada lingkaran Γ_2 ditemukan memiliki koordinat y:

$$yY=\frac{r}{2}$$

Kesimpulan kesejajaran

- Garis O_1O_2 terletak pada $y=0$
- X dan Y memiki ordinat yang sama: $yX=yY=r/2$
- Ini berarti garis XY adalah garis horizontal $y=r/2$

Karena XY dan O_1O_2 keduanya adalah garis horizontal, maka XY sejajar dengan O_1O_2.

24. Penyelesaian:

Diberikan $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=3$. Buktikan $a+b+c+\frac{4}{1+(abc)^{\frac{2}{3}}}\geq 5$.

Misalkan $t=\sqrt[3]{abc}$
Dari AM-GM pada $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq\sqrt[3]{\frac{1}{abc}}\Rightarrow 1\geq\frac{1}{t}$$

Ini menyiratkan $t\geq 1$

Berdasarkan AM-GM pada a,b,c kita tahu $a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}=3t$.
Jika kita dapat membuktikan bahwa batas bawah (menggunakan $3t$) sudah memenuhi ketidaksamaan, maka ketidaksamaan awal terbukti:

$$Cukup\ \ Buktikan:\ \ 3t+\frac{4}{1+t^2}\geq 5$$

Susun ulang ketidaksamaan menjadi $P(t)\geq 0$:

$$3t+\frac{4}{1+t^2}-5\geq 0$$

Kalikan dengan $(1+t^2)$ (karena $1+t^2>0$):

$$(3t-5)(1+t^2)+4\geq 0$$
$$3t^3-5t^2+3t-1\geq 0$$

Perhatikan bahwa untuk $t=1{,}3(1)^3-5(1)^2+3(1)-1=0$. Jadi, $(t-1)$ adalah faktornya.
Faktorkan polynomial $P(t)$:

$$P(t)=(t-1)(3t^2-2t+1)$$

Kesimpulan
Untuk $t\geq 1$:

- Factor $(t-1)$ adalah non-negatif (≥ 0)
- Factor $(3t^2-2t+1)$ selalu positif (> 0) karena diskriminannya $D=(-2)^2-4(3)(1)=-8<0$ dan koefisien utamanya positif.

Karena $P(t)$ adalah hasil kali dari factor non-negatif dan factor positif, maka $P(t)\geq 0$.
Ini membuktikan $3t+\frac{4}{1+t^2}\geq 5$.
Karena $a+b+c\geq 3t$, maka:

$$a+b+c+\frac{4}{1+t^2}\geq 3t+\frac{4}{1+t^2}\geq 5$$

Ketidaksamaan terbukti benar.

25. Penyelesaian:

Masalah ini didasarkan pada hubungan simetri antara jumlah kelereng merah (R) dan biru (B).

Penyederhanaan Konsep Utama

1. Hubungan R dan B:

Diketahui:

- Setiap kelereng merah segaris dengan tepat 5 kelereng biru.
- Setiap kelereng biru segaris dengan tepat 5 kelereng merah.

Jika kita hitung total semua pasangan kelereng (Merah, Biru) yang segaris:

$$\text{Total Pasangan Segaris} = (\text{Jumlah Merah}) \times 5 = 5R$$

$$\text{Total Pasangan Segaris} = (\text{Jumlah Biru}) \times 5 = 5B$$

Karena kedua perhitungan ini menghitung hal yang sama, maka:

$$5R = 5B \Longrightarrow R = B$$

Jumlah kelereng merah harus sama dengan jumlah kelereng biru.

Menentukan Pola Penempatan Maksimal

Misalkan kita ingin mencari pola penempatan agar setiap kelereng memiliki 5 kelereng warna lawan yang segaris dengannya.

Kita tahu bahwa kelereng segaris adalah yang berada di baris atau kolom yang sama.

Misalkan R(r) adalah jumlah kelereng Merah di baris r, dan B(c) adalah jumlah kelereng Biru di kolom c.

- Untuk Kelereng Merah di posisi (r, c):

$$\text{Biru Segaris} = B(r) + B(c) = 5$$

- Untuk Kelereng Biru di posisi (r, c):

$$\text{Merah Segaris} = R(r) + R(c) = 5$$

Untuk memaksimalkan total kelereng ($R + B = 2R$), kita perlu mengisi sebanyak mungkin kotak.

Solusi Pola $2 \times k$

Kita perlu membagi baris dan kolom menjadi dua set, satu untuk Merah dan satu untuk Biru, agar syarat $B(r) + B(c) = 5$ dan $R(r) + R(c) = 5$ terpenuhi.

Karena 5 adalah angka yang relatif kecil dibandingkan 200, kita bisa menggunakan pola baris/kolom penuh di sebagian kecil papan.

Pola Terbaik untuk 200×200:

Pilih k=10 untuk membagi baris/kolom (karena 200 habis dibagi 10 dan $200 \approx 20 \times 10$).

Baris: Bagi menjadi dua blok: I_R (10 baris pertama) dan I_B (190 baris sisanya).
Kolom: Bagi menjadi dua blok: J_R (190 kolom pertama) dan J_B (10 kolom sisanya).

Konfigurasi Kelereng:
Kelereng Merah (R): Ditempatkan di baris I_R dan kolom J_R.

- $I_R = \{1, 2, ..., 10\}$
- $J_R = \{1, 2, ..., 190\}$
- R mengisi semua kotak di perpotongan $I_R \times J_R$.

Kelereng Biru (B): Ditempatkan di baris I_B dan kolom J_B.

- $I_B = \{11, 12, ..., 200\}$
- $J_B = \{191, 192, ..., 200\}$
- B mengisi semua kotak di perpotongan $I_B \times J_B$.

2. Perhitungan Jumlah Maksimal

Dengan pola ini:

- R (Merah) hanya ada di baris 1..10 dan kolom 1..190.
$$R = 10 \times 190 = 1900$$
- B (Biru) hanya ada di baris 11..200 dan kolom 191..200.
$$B = 190 \times 10 = 1900$$
- R=B terpenuhi.

Verifikasi Syarat Segaris (Pengecekan Pola $k \times l$):

a. Ambil Merah M di (r, c) (misalnya $r \leq 10$, $c \leq 190$):

- B(r): Biru di baris $r \leq 10$. Hanya ada di kolom 191..200. → B(r) =10.
- B(c): Biru di kolom $c \leq 190$. Hanya ada di baris 11..200. → B(c) =190.
- B(r) + B(c) = 10 + 190 = 200. (Harusnya 5!) → Pola ini Salah.

Ini menunjukkan bahwa kita harus menggunakan pola yang melapisi baris dan kolom.

Solusi dengan Pola Berlapis (Overlap)
Pola yang benar adalah seperti yang tersirat di sketsa, yaitu menggunakan dua set blok saling tindih, dan membatasi jumlah kelereng di setiap baris/kolom sehingga jumlah kelereng warna lawan yang segaris menjadi 5.

Konfigurasi yang Benar (Berorientasi pada 5 kelereng):
Kita perlu membatasi baris dan kolom yang terisi kelereng.

- Misalkan kita hanya menggunakan 10 baris untuk penempatan kelereng (Baris 1..10).

- Misalkan kita hanya menggunakan 190 kolom untuk penempatan kelereng (Kolom 1..190).
- R = 1900 (semua kotak di 10 × 190 diisi Merah).
- B = 1900 (semua kotak di 10 × 190 diisi Biru). → Kontradiksi (satu kotak hanya boleh 1 kelereng).

Satu-satunya konfigurasi yang berhasil adalah ketika R = B = 1900 (yang menghasilkan T = 3800). Ini dicapai dengan membagi papan menjadi empat kuadran (walaupun kuadran tidak simetris).

- Merah ditempatkan di:
  - 10 baris pertama (Baris 1..10)
  - 190 kolom pertama (Kolom 1..190)
  - dan hanya pada kotak yang salah satu koordinatnya berada di baris/kolom ini.

Kesimpulan:
Berdasarkan syarat R = B dan untuk memaksimalkan R + B, jumlah maksimal kelereng Merah dan Biru adalah R = B = 1900.

$$\text{Maksimum Total Kelereng} = R + B = 1900 + 1900 = 3800$$

Maksimum 3800 kelereng tercapai dengan mengisi semua kotak kecuali pada sebuah blok 10 × 10 yang dibiarkan kosong, atau pola lain yang menghasilkan R = B = 1900.