PEMBAHASAN

OSP MATEMATIKA SMA

TAHUN 2017

1. **Penyelesaian:**

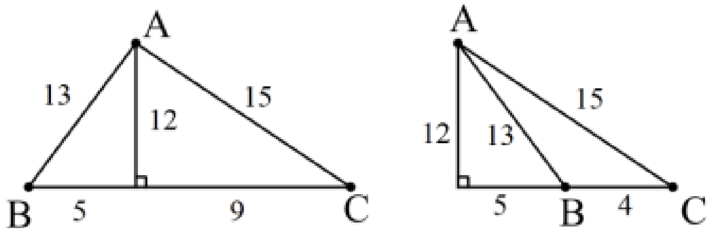
$a - b = ab$
$(a-b)^2 = a^2b^2$
$a^2 + b^2 - 2ab = a^2b^2$
$a^2 + b^2 = a^2b^2 + 2ab$

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab = \frac{a^2+b^2}{ab} - ab = \frac{a^2b^2+2ab}{ab} - ab = ab + 2 - ab = 2$$

2. **Penyelesaian:**

Karena Pak RW wajib dipilih, maka kita memilih 2 Pria dari 6 Pria, kemudian karena Bu RW masuk dalam daftar pemilihan wanita, maka kita memilih 3 Wanita dari 6 Wanita.
Jadi, banyak cara pemilihan adalah $C_2^6 \times C_3^6 = 15 \times 20 = 300$ cara.

3. **Penyelesaian:**



Jadi, jumlah semua kemungkinan Panjang BC = 14 + 4 = 18.

4. **Penyelesaian:**

Karena ab prima dan ba juga prima, jelas angka a dan b yang memenuhi adalah angka ganjil kecuali angka 5. Maka bilangan ab yang memenuhi adalah 11, 13, 17, 31, 37, 71, 73, 79, 97. Jadi, ada sebanyak 9 bilangan.

5. **Penyelesaian:**

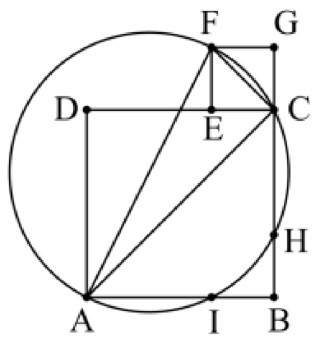
$$f\left(\frac{x}{3}\right) = x^2 + 2x + 3$$
$$f(x) = (3x)^2 + 2(3x) + 3$$
$$= 9x^2 + 6x + 3$$
$$f(3z) = \underline{9(3z)^2 + 6(3z) + 3 = 12}_{:3}$$
$$\Leftrightarrow 3(9z^2) + 6z + 1 = 4$$
$$\Leftrightarrow 27z^2 + 6z - 3 = 0$$
$$\text{maka } z_1 + z_2 = -\frac{6}{27} = -\frac{2}{9}$$

6. **Penyelesaian:**

Jika hasil kali 5 bilangan dimana hasil penjumlahan factor-faktornya dapat merupakan bilangan ganjil atau pun bilangan genap, maka salah satu factor tersebut harus terdapat bilangan 12. Dimana 12 = 4.3 (dijumlahkan ganjil) bisa juga 12 = 2.6 (dijumlahkan genap).
Jelas 5 bilangan tersebut adalah :
(4.3).1.5.7 = 420 atau (6.2).1.5.7 = 420
Jadi, nilai hasil kali lima bilangan yang dimiliki Ita adalah 420.

7. **Penyelesaian:**

Jelas $\angle ACF = 90^o$, sehingga AF adalah diameter lingkaran.
Karena AF diameter, maka $\angle FIA = 90^o$, dan
$AI = DE = 2017 - 1702 = 315$
Dengan menggunakan power of point theorem:
$\frac{BI}{AB} = \frac{BH}{BC}$, karena $AB = BC$, maka $BI = BH$
Dan $CH = AI = 315$.



8. Penyelesaian:

Misalkan,

$\sqrt{x} = a$

$\sqrt{y} = b$

Maka persamaan menjadi:

$$a^2 + b^2 = a + b + ab$$
$$\underline{a^2 - ab + b^2 - a - b = 0}_{\times 2}$$
$$2a^2 - 2ab + 2b^2 - 2a - 2b = 0$$
$$(a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2a) + (b^2 - 2b) = 0$$
$$(a-b)^2 + (a-1)^2 - 1 + (b-1)^2 - 1 = 0$$
$$(a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 = 2$$
$$p^2 + q^2 + r^2 = 2$$

Untuk $p, q, r, a, b, x, y \in$ bilangan asli, jelas nilai (p^2, q^2, r^2) yang memenuhi adalah (1, 1, 0), (1, 0, 1) dan (0, 1, 1). Jadi, ada 3 pasang.

9. Penyelesaian:

$$x^2y^2 + 4x^2 + y^2 + 1 = 6xy$$
$$(xy-1)^2 + (2x-y)^2 = 0$$

Maka :

$$2x - y = 0 \Rightarrow y = 2x$$
$$xy - 1 = 0$$
$$x(2x) - 1 = 0$$
$$2x^2 = 1 \quad \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = -\frac{2}{\sqrt{2}}$$
$$x - y = \frac{1}{\sqrt{2}} = M$$

Maka, $M - m = \sqrt{2}$

10. Penyelesaian:

Misalkan: Menyala = 1, Padam = 0

2017 = 5 (403) + 2

Menit ke-403 : $n(1)$ = 2015, $n(0)$ = 2

Kemudian pilih 4 lampu yang menyala dan 1 lampu yang padam, maka:

Menit ke-404 : $n(1)$ = 2012, $n(0)$ = 5

Kemudian pilih 5 lampu Padam, maka:

Menit ke-405 : $n(1)$ = 2017, $n(0)$ = 0

Jadi, untuk menyalakan semua lampu Ani paling sedikit membutuhkan 405 menit.

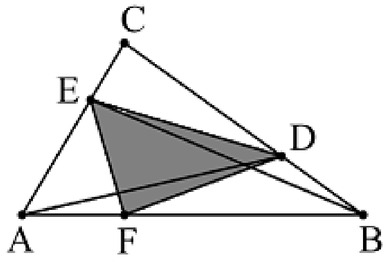
11. Penyelesaian:

Misal : $[ABC] = x$

$$[CDE] = \frac{1}{k+1}[BEC] = \frac{1}{k+1}\cdot\frac{k}{k+1}[ABC] = \frac{kx}{(k+1)^2}$$

$$[AEF] = \frac{k}{k+1}[ABE] = \frac{k}{k+1}\cdot\frac{1}{k+1}[ABC] = \frac{kx}{(k+1)^2}$$

$$[BDF] = \frac{1}{k+1}[ABD] = \frac{1}{k+1}\cdot\frac{k}{k+1}[ABC] = \frac{kx}{(k+1)^2}$$



$$\frac{[DEF]}{[ABC]} = \frac{[ABC]-[CDE]-[AEF]-[BDF]}{[ABC]}$$

$$= \frac{x - \frac{3kx}{(k+1)^2}}{x} = \frac{k^2-k+1}{k^2+2k+1}$$

12. Penyelesaian:

$I_k = 10 \ldots 064 = 10^{k+2} + 2^6 = 2^6(2^{k-4}, 5^{k+2} + 1)$

Maka nilai maksimum untuk $N(k)$ adalah 6.