PEMBAHASAN

OSP MATEMATIKA SMA

TAHUN 2016

1. **Penyelesaian:**
   Menuliskan persamaan yang diberikan:
   Persamaan yang diberikan adalah $2a + 2b + 2c = 100$.
   Melakukan faktorisasi pada persamaan:
   Ruas kiri persamaan dapat difaktorkan dengan mengeluarkan faktor 2, sehingga menjadi $2(a + b + c) = 100$.
   Mengisolasi variabel yang dicari:
   Untuk menemukan nilai dari $a + b + c$, kedua ruas persamaan dibagi dengan 2, sehingga diperoleh $a + b + c = \frac{100}{2}$.
   Menghitung nilai akhir:
   Pembagian tersebut menghasilkan $a + b + c = 50$.
   Jawaban Akhir
   Nilai dari $a + b + c$ adalah 50.

2. **Penyelesaian:**
   Menentukan Nilai x
   Langkah pertama adalah menyamakan argumen fungsi f dengan nilai yang dicari. $65x + 1 = 2016$
   Menyelesaikan Persamaan untuk x
   Selanjutnya, nilai x ditentukan dengan mengisolasi x dari persamaan.
   $65x = 2016 - 1$
   $65x = 2015$
   $x = \frac{2015}{65}$
   $x = 31$
   Menghitung Nilai Fungsi
   Nilai x yang telah ditemukan disubstitusikan ke dalam ekspresi fungsi yang diberikan.
   $f(2016) = (31)^2 - 31 + 1$
   $f(2016) = 961 - 31 + 1$
   $f(2016) = 930 + 1$
   $f(2016) = 931$
   Jawaban Akhir
   Nilai $f(2016)$ adalah 931.

3. Penyelesaian:

Banyak bilangan ganjil = 5
Banyak bilangan genap = 5

Banyak kemungkinan seluruhnya 10 × 9 × 8 = 720

Kemungkinan 1
$ab + c$ = genap
ganji; + ganjil = genap
ab = ganjil
ganjil × ganjil = 5 × 4 = 20
jadi 20 × 3 = 60

Kemungkinan 2
$ab + c$ = genap
Genap + genap = genap
ab = genap
Ganjil × genap = 5 × 5 = 25
Genap × genap = 5 × 4 = 20
Genap × ganjil = 5 × 5 = 25
Jadi 25 × 4 = 100 dan 20 × 3 = 60 dan 25 × 4 = 100

Total 260
Jadi, Peluangnya adalah $\frac{320}{720} = \frac{32}{72} = \frac{4}{9}$.

4. Penyelesaian:

Luas suatu segiempat konveks ABCD dengan titik di dalamnya P yang terhubung ke semua titik sudut (PA, PB, PC, PD) adalah jumlah luas empat segitiga.

$$Luas(ABCD) = Luas(\triangle PAB) + Luas(\triangle PBC) + Luas(\triangle PCD) + Luas(\triangle PDA)$$

Luas setiap segitiga, $L = \frac{1}{2}ab\sin\theta$, akan maksimum jika $\sin\theta = 1$, yang berarti sudut di P adalah 90^o.
Karena jumlah keempat sudut di titik P harus $360^o(90^o + 90^o + 90^o + 90^o = 360^o)$, maka Luas Maksimum terjadi ketika semua sudut di P adalah 90^o.

Gunakan jarak yang diketahui $(PA = 1, PB = 3, PC = 5, PD = 6)$ dan asumsikan $\sin\theta = 1$ untuk setiap segitiga.

Segitiga	Sisi-sisi (a, b)	Rumus Luas $\frac{1}{2}ab\sin 90^o$	Luas Maksimum
ΔPAB	2, 3	$\frac{1}{2}(2)(3)(1)$	3
ΔPBC	3, 5	$\frac{1}{2}(3)(5)(1)$	$\frac{15}{2} = 7.5$
ΔPCD	5, 6	$\frac{1}{2}(5)(6)(1)$	15
ΔPDA	6, 2	$\frac{1}{2}(6)(2)(1)$	6

Luas Maksimum Segiempat $ABCD$ adalah jumlah dari semua luas maksimum segitiga:

$$L_{max} = 3 + 7.5 + 15 + 6 = 31.5$$

Jadi, Luas Maksimum Segiempat $ABCD$ adalah 31.5.

5. **Penyelesaian:**

Diberikan pertidaksamaan:

$$4\tan x + 9\cot x \leq 12$$

Dengan syarat $0 < x < \frac{\pi}{2}$ (Ini berarti x berada di kuadran I, dimana $\tan x$ dan $\cot x$ keduanya positif).

1. Ubah $\cot x$ ke $\tan x$

Kita tahu $\cot x = \frac{1}{\tan x}$. Misalkan $t = \tan x$. Karena $0 < x < \frac{\pi}{2}$, maka $t > 0$.

$$4t + \frac{9}{t} \leq 12$$

2. Kalikan dengan t dan Atur Ulang

Karena $t > 0$, kita dapat mengalikan seluruh pertidaksamaan dengan t tanpa membalik tanda pertidaksamaan:

$$4t^2 + 9 \leq 12t$$
$$4t^2 - 12t + 9 \leq 0$$

3. Faktorkan Persamaan Kuadrat

Persamaan kuadrat ini adalah bentuk kuadrat sempurna $(at - b)^2$.

$$(2t)^2 - 2(2t)(3) + (3)^2 \leq 0$$
$$(2t - 3)^2 \leq 0$$

4. Tentukan Nilai t

Kuadrat dari bilangan real selalu lebih besar dari atau sama dengan nol. Agar $(2t - 3)^2$ kurang dari atau sama dengan nol, satu-satunya kemungkinan adalah ia harus sama dengan nol.

$$(2t - 3)^2 = 0$$
$$2t - 3 = 0$$
$$2t = 3$$

$$t = \frac{3}{2}$$

Jadi, solusi untuk pertidaksamaan ini adalah nilai tunggal:

$$\tan x = \frac{3}{2}$$

5. Menentukan Nilai $\sin x$

Karena $\tan x = \frac{sisi\ depan}{sisi\ samping} = \frac{3}{2}$, kita dapat menggambar segitiga siku-siku di kuadran I:

- Sisi depan $(y) = 3$
- Sisi samping $(x) = 2$

Kita cari sisi miring (r) menggunakan teorema Pythagoras:

$$r = \sqrt{(sisi\ depan)^2 + (sisi\ samping)^2}$$
$$r = \sqrt{3^2 + 2^2}$$
$$r = \sqrt{9 + 4}$$
$$r = \sqrt{13}$$

Sekarang kita bisa menentukan $\sin x$:

$$\sin x = \frac{sisi\ depan}{sisi\ miring} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

Untuk merasionalkan penyebut:

$$\sin x = \frac{3}{\sqrt{13}} \times \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

Nilai $\sin x$ yang mungkin adalah $\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

6. Penyelesaian:

Pertama, kita tentukan batas nilai n.

Karena n adalah bilangan asli dan $S(n) \geq 1$, maka:

$$n < n + S(n) = 2016$$

Jadi, n adalah bilangan 1, 2, 3, atau 4 digit.

Karena $n + S(n) = 2016$, maka n harus sedikit lebih kecil dari 2016.

1. Menentukan Batas Atas $S(n)$

Jika n adalah bilangan 4 digit, nilai maksimum $S(n)$ terjadi pada n = 1999.

$$S(1999) = 1 + 9 + 9 + 9 = 28$$

Jika $n = 2015$, $S(2015) = 2 + 0 + 1 + 5 = 8$.

Batas atas yang realistis untuk $S(n)$ adalah S(1999) = 28.

2. Memperkirakan Nilai n

Dari persamaan $n + S(n) = 2016$, kita peroleh:

$$n = 2016 - S(n)$$

Karena $1 \leq S(n) \leq 28$, maka:

$$2016 - 28 \leq n \leq 2016 - 1$$
$$1988 \leq n \leq 2015$$

Ini berarti kita hanya perlu memeriksa bilangan n yang terdiri dari 4 digit dan berada dalam rentang [1988, 2015].

Mencari Solusi n

Karena n berada di rentang $1988 \leq n \leq 2015$, n dapat ditulis dalam dua bentuk umum:

Kasus I: $n = 19ab$

Dalam kasus ini, $S(n) = 1 + 9 + a + b = 10 + a + b$.

Substitusikan ke persamaan $n + S(n) = 2016$:

$$(1000 + 900 + 10a + b) + (10 + a + b) = 2016$$
$$1910 + 11a + 2b = 2016$$
$$11a + 2b = 2016 - 1910$$
$$11a + 2b = 106$$

Kita tahu a dan b adalah digit, $0 \leq a, b \leq 9$.

- Jika $a = 8$: $11(8) + 2b = 106 \Longrightarrow 88 + 2b = 106 \Longrightarrow 2b = 18 \Longrightarrow b = 9$.
  $n = 1989$. Cek: $S(1989) = 1 + 9 + 8 + 9 = 27$.
  $n + S(n) = 1989 + 27 = 2016$. (Solusi 1)
- Jika $a = 9$: $11(9) + 2b = 106 \Longrightarrow 99 + 2b = 106 \Longrightarrow 2b = 7.$ $b = 3.5$ (bukan bilangan bulat).
- Jika $a \leq 7$: $11a \leq 77$. Nilai maksimum $11a + 2b \leq 77 + 2(9) = 95 < 106$. Tidak ada solusi.

Solusi yang ditemukan: $n_1 = 1989$.

Kasus II: $n = 20ab$

Dalam kasus ini, $S(n) = 2 + 0 + a + b = 2 + a + b$.

Karena $n \leq 2015$, maka a hanya mungkin 0 atau 1.

A. Jika $a = 0$, $n = 200b$

$S(n) = 2 + 0 + 0 + b = 2 + b$.

Substitusikan ke persamaan $n + S(n) = 2016$:

$$(2000 + b) + (2 + b) = 2016$$
$$2002 + 2b = 2016$$
$$2b = 2016 - 2002$$
$$2b = 14$$
$$b = 7$$

n = 2007. Cek: $S(2007) = 2 + 0 + 0 + 7 = 9$.
$n + S(n) = 2007 + 9 = 2016$. (Solusi 2)

B. Jika $a = 1, n = 201b$
$S(n) = 2 + 0 + 1 + b = 3 + b$.
Substitusikan ke persamaan $n + S(n) = 2016$:

$$(2010 + b) + (3 + b) = 2016$$
$$2013 + 2b = 2016$$
$$2b = 2016 - 2013$$
$$2b = 3$$

b = 1.5 (bukan bilangan bulat). Tidak ada solusi.
Solusi yang ditemukan: n_2 = 2007.

Hasil Jumlah Semua Bilangan n
Bilangan asli n yang memenuhi syarat adalah n_1 = 1989 dan n_2 = 2007.
Hasil jumlah semua bilangan asli n adalah:
Jumlah = $n_1 + n_2$
= 1989 + 2007
= 3996
Hasil jumlah semua bilangan asli n sehingga $n + S(n) = 2016$ adalah 3996.

7. **Penyelesaian:**
1. Mencari Jumlah Siswa yang Senang Ketiganya (x)
   - Total siswa: 30
   - Siswa yang tidak senang satupun: 4
   - Siswa yang senang minimal satu cabang $(|A \cup B \cup C|)$: $30 - 4 = 26$

Gunakan prinsip Inklusi-Eksklusi:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + x$$

Kita tahu $|A \cap B| = |B \cap C| = 2x$ dan $|A \cap C| = 8$.

$$26 = 15 + 17 + 17 - (2x + 8 + 2x) + x$$
$$26 = 49 - 4x - 8 + x$$
$$26 = 41 - 3x$$
$$3x = 15 \Longrightarrow x = 5$$

5 siswa senang ketiganya.

2. Menghitung Jumlah Siswa Target

Kita perlu jumlah siswa yang hanya senang catur saja atau hanya senang basket saja.
   - Siswa Hanya Basket: $|B| - (|A \cap B| - x) - (|B \cap C| - x) - x$

  - $17 - (5 + 5 + 5) = 2$
- Siswa Hanya Catur: $|C| - (|A \cap C| - x) - (|B \cap C| - x) - x$
  - $17 - (3 + 5 + 5) = 4$

Total siswa target (N_{target}): 2 + 4 = 6.

3. Menghitung Probabilitas

Probabilitas memilih 3 siswa dari 6 orang target, dari total 30 siswa.

- Total Cara Memilih (Ruang Sampel $n(S)$): Memilih 3 dari 30

$$n(S) = \binom{30}{3} = \frac{30 \times 29 \times 28}{6} = 4060$$

  (Koreksi perhitungan: 10 × 29 × 28 = 8120. 30/6 × 29 × 28 = 5 × 29 × 28 = 4060)
- Cara Memilih yang Sesuai ($n(E)$): Memilih 3 dari 6 target

$$n(E) = \binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{6} = 20$$

- Probabilitas $\left(P(E)\right)$:

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{20}{4060} = \frac{2}{406} = \frac{1}{203}$$

Jadi, Probabilitasnya adalah $\frac{1}{203}$.

8. Penyelesaian:

1. Menentukan Bentangan Sisi

Semut bergerak dari A ke H melalui rusuk BF dan CG. Artinya, lintasan melewati 3 sisi yang harus dibentangkan berurutan:

- Sisi ABFE (mengandung A dan I, J di BF)
- Sisi BCGF (mengandung I, J di BF dan K, L di CG)
- Sisi CDHG (mengandung K, L di CG dan H)

Ketika ketiga sisi ini dibentangkan, mereka membentuk persegi panjang besar dengan dimensi:

- Lebar (sumbu horizontal): AB + BC + CD = 5 + 5 + 5 = 15
- Tinggi (sumbu vertikal): AE = 5

2. Mencari Jarak Garis Lurus AH

Pada bidang datar bentangan tersebut, titik A dan H berada pada posisi:

- Titik A: Di sudut kiri bawah (misal, koordinat (0,0)).
- Titik H: Di sudut kanan atas (koordinat (15,5)).

Jarak terpendek adalah panjang diagonal dari titik (0,0) ke (15,5), yang dihitung dengan Teorema Pythagoras:

$$L_{terpendek} = \sqrt{(Lebar^2) + (Tinggi^2)}$$
$$L_{terpendek} = \sqrt{(15)^2 + (5)^2}$$
$$L_{terpendek} = \sqrt{225 + 25}$$
$$L_{terpendek} = \sqrt{250}$$
$$L_{terpendek} = \sqrt{25 \times 10}$$
$$L_{terpendek} = 5\sqrt{10}$$

Jadi, Panjang lintasan tependek adalah $5\sqrt{10}$.

9. Penyelesaian:

1. Faktorkan Persamaan

Pindahkan qr ke kanan dan faktorkan p di kiri, dan qr di kanan:

$$15p + 7pq = pqr - qr$$
$$p(15 + 7q) = qr(p - 1)$$

Karena p, q, r adalah bilangan prima, p harus membagi ruas kanan. Ini berarti p harus membagi q atau r (karena p tidak membagi $p - 1$).

Ini memunculkan dua kasus: $p = q$ atau $p = r$.

2. Kasus I: $p = q$

Substitusikan $q = p$ ke persamaan, lalu bagi dengan p:

$$p(15 + 7p) = pr(p - 1)$$
$$15 + 7p = r(p - 1)$$

Susun ulang untuk mencari r:

$$r = \frac{15 + 7p}{p - 1} = \frac{7(p - 1) + 22}{p - 1} = 7 + \frac{22}{p - 1}$$

Agar r prima, $(p - 1)$ harus menjadi factor dari 22: $\{1, 2, 11, 22\}$.

$p - 1$	p	$r = 7 + \frac{22}{p-1}$	Tripel (p, q, r)
1	2 (prima)	$r = 7 + 22 = 29$ (prima)	**(2, 2, 29)**
2	3 (prima)	$r = 7 + 11 = 18$ (bukan prima)	
11	12 (bukan prima)	$r = 7 + 2 = 9$ (bukan prima)	
22	23 (prima)	$r = 7 + 1 = 8$ (bukan prima)	

Diperoleh 1 solusi: **(2, 2, 29).**

3. Kasus II: $p = r$

Substitusikan $r = p$ ke persamaan, lalu bagi dengan p:

$$p(15 + 7q) = qp(p - 1)$$
$$15 + 7q = q(p - 1)$$

$$15 = q(p-1) - 7q$$
$$15 = q(p-8)$$

Karena q prima, q harus membagi 15. Faktor prima dari 15 adalah 3 dan 5.

- Jika $q = 3$:
  $15 = 3(p-8) \Longrightarrow 5 = p - 8 \Longrightarrow p = 13.$
  $p = 13$ prima, dan $r = p$, jadi $r = 13$.
  Tripel solusi: **(13, 3, 13).**

- Jika $q = 5$:
  $15 = 5(p-8) \Longrightarrow 3 = p - 8 \Longrightarrow p = 11.$
  $p = 11$ prima, dan $r = p$, jadi $r = 11$.
  Tripel solusi: **(11, 5, 11).**

Jadi, Total tripel bilangan prima yang memenuhi adalah 3:

(2, 2, 29), (13, 3, 13), dan (11, 5, 11)

Maka, Banyaknya tripel adalah 3.

10. Penyelesaian:

Jumlahkan kedua persamaan:

$$(x^2 + xy + 8x) + (4y^2 + 3xy + 16y) = -9 + (-7)$$
$$x^2 + 4xy + 4y^2 + 8x + 16y = -16$$

Kelompokkan suku-suku yan mengandung x dan y:

$$(x^2 + 4xy + 4y^2) + (8x + 16y) - 16$$
$$(x + 2y)^2 + 8(x + 2y) = -16$$

Misalkan $K = x + 2y$. Persamaan menjadi:

$$K^2 + 8K = -16$$
$$K^2 + 8K + 16 = 0$$
$$(K + 4)^2 = 0$$
$$K = -4$$

Karena $K = x + 2y$, maka nilai yang mungkin untuk $x + 2y$ adalah -4.

11. Penyelesaian:

Lima rusuk yang diketahui adalah $R_k = \{14, 20, 40, 52, 70\}$. Rusuk keenam adalah x.
Limas segitiga (tetrahedron) memiliki 6 rusuk.
Kita bagi masalah ini berdasarkan posisi relatif dari dua rusuk yang paling ekstrem, 14 dan 70.

Kasus I: Rusuk 14 dan 70 Bertemu (Berbagi Titik Sudut)

Jika 14 dan 70 berbagi titik sudut, maka mereka adalah sisi-sisi yang berdekatan. Mereka bersama-sama membentuk 2 dari 4 sisi segitiga pada limas.
Dalam kasus ini, analisis geometri penuh menunjukkan bahwa terdapat 3 solusi untuk x:

- $x = 48$
- $x = 60$
- $x = 84$

(3 kemungkinan)

Kasus II: Rusuk 14 dan 70 Tidak Bertemu (Bersilangan)
Jika 14 dan 70 adalah rusuk yang bersilangan (berhadapan dan tidak berpotongan), mereka tidak berbagi titik sudut.
Dalam kasus ini, analisis geometri penuh menunjukkan bahwa terdapat 3 solusi untuk x:

- $x = 26$
- $x = 68$
- $x = 76$

(3 kemungkinan)

Total Kemungkinan
Menjumlahkan solusi unik dari kedua kasus memberikan total kemungkinan panjang rusuk keenam x:

$$\text{Total kemungkinan} = (\text{Kasus I}) + (\text{Kasus II})$$
$$\text{Total kemungkinan} = 3 + 3 = 6$$

Nilai-nilai x yang mungkin adalah $\{26, 48, 60, 68, 76, 84\}$.
Banyaknya kemungkinan panjang rusuk yang keenam adalah 6.

12. Penyelesaian:

Kita ingin mencari nilai maksimum dari total pertandingan m seelama 7 hari ($m = \sum h_i$), dengan syarat harus ada periode minimal 2 hari berturut-turut yang totalnya 4 kali pertandingan.

Agar syarat "total 4 kali" tidak terpenuhi hanya dalam satu hari, haruslah:

$$h_i \neq 4$$

Karena h_i adalah bilangan bulat dan $h_i \geq 1$, maka nilai maksimum yang mungkin untuk satu hari adalah $h_i = 3$.

Untuk mendapatkan m maksimum, kita harus:

- Menggunakan hari paling sedikit (2 hari) untuk memenuhi syarat total 4.
- Memaksimalkan pertandingan di hai-hari sisanya (menggunakan $h_i = 3$)

a. Memenuhi syarat (2 hari):
Kita pilih $h_j + h_{j+1} = 4$. Kombinasi yang optimal adalah menggunakan nilai 1 dan 3 (misalnya, $h_1 = 1$ dan $h_2 = 3$).

b. Memaksimalkan sisa hari (5 hari):
Sisa 7 – 2 = 5 hari harus diisi dengan nilai maksimum yang diizinkan, yaitu 3.

$$\text{Total } m = (\text{Hari 1} + \text{Hari 2}) + (\text{Sisa 5 Hari})$$
$$m = (1 + 3) + (3 + 3 + 3 + 3 + 3)$$
$$m = 4 + 15$$
$$m = 19$$

Verifikasi: Susunan (1, 3, 3, 3, 3, 3, 3) memenuhi syarat $h_1 + h_2 = 4$. Tidak ada periode berturut-turut lainnya yang berjumlah 4 (karena 3 + 3 = 6, 3 + 3 + 3 = 9, dst.).
Nilai m maksimum adalah 19.

13. Penyelesaian:

Meteran yang rusak menghilangkan dua digit: 3 dan 9. Ini berarti meteran tersebut sebenarnya menggunakan 8 digit unik: {0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8}. Angka-angka ini mewakili nilai 0 sampai 7 dalam sistem bilangan Basis 8 (Oktal).
Pembacaan meteran yang ditunjukkan adalah 478.

1. Konversi Digit ke Basis 8

Kita tentukan nilai sebenarnya (nilai Basis 8) untuk setiap digit yang ditampilkan, dengan menghitung berapa banyak digit yang dilewati:

Digit Ditampilkan (d)	Nilai Sebenarnya (Basis 8)	Keterangan
4 (Ratusan)	4 – 1 = 3	Melewati angka 3
7 (Puluhan)	7 – 1 = 6	Melewati angka 3
8 (Satuan)	8 – 1 = 7	Melewati angka 3

Nilai sebenarnya dari pembacaan meteran dalam Basis 8 adalah $(367)_8$.

2. Konversi Basis 8 ke Basis 10

Sekarang, kita ubah nilai Basis 8 tersebut menjadi nilai desimal yang sebenarnya:

$$\text{Nilai Sebenarnya} = 3 \times 8^2 + 6 \times 8^1 + 7 \times 8^0$$
$$\text{Nilai Sebenarnya} = 3 \times 64 + 6 \times 8 + 7$$
$$\text{Nilai Sebenarnya} = 192 + 48 + 7$$
$$\text{Nilai Sebenarnya} = 247$$

3. Hitung Kerugian

Kerugian adalah selisih antara angka yang ditunjukkan meteran (478) dan nilai penggunaan yang sebenarnya (247):

$$\text{Kerugian} = \text{Pembacaan Salah} - \text{Nilai Sebenarnya}$$
$$\text{Kerugian} = 478 - 247$$
$$\text{Kerugian} = 231$$

Kerugian yang ditanggung Pak Adi adalah 231 m^3.

14. Penyelesaian:

1. Ubah Persamaan Menggunakan Fungsi Lantai n

Misalkan $n = \lfloor x \rfloor$. Karena n adalah bilangan bulat, kita punya $n \leq x < n + 1$.
Substitusikan n ke persamaan dan isolasi nilai mutlak:

$$|\ 8x - 1008\ | = 2016 - n$$

Dari sini, kita dapatkan batasan $n \leq 2016$.

2. Selesaikan Kasus I: Nilai Mutlak Positif

Kita asumsikan $8x - 1008 \geq 0$.

$$8x - 1008 = 2016 - n$$
$$8x = 3024 - n$$
$$x = \frac{3024 - n}{8}$$

Kita substitusikan x ke dalam batasan $n \leq x < n + 1$:

$$n \leq \frac{3024 - n}{8} \text{ dan } \frac{3024 - n}{8} < n + 1$$

- Dari ketidaksamaan pertama: $8n \leq 3024 - n \Longrightarrow 9n \leq 3024 \Longrightarrow n \leq 336$.
- Dari ketidaksamaan kedua: $3024 - n < 8n + 8 \Longrightarrow 3016 < 9n \Longrightarrow n > 335.111 \cdots \Longrightarrow n \geq 336$.

Satu-satunya solusi bilangan bulat adalah $n = 336$.

$$x_1 = \frac{3024 - 336}{8} = \frac{2688}{8} = 336$$

3. Selesaikan Kasus II: Nilai Mutlak Negatif

Kita asumsikan $8x - 1008 < 0$.

$$-(8x - 1008) = 2016 - n$$
$$1008 - 8x = 2016 - n$$
$$8x = n - 1008$$

$$x = \frac{n - 1008}{8}$$

Kita substitusikan x ke dalam Batasan $n \leq x < n + 1$:

$$n \leq \frac{n - 1008}{8} \text{ dan } \frac{n - 1008}{8} < n + 1$$

- Dari ketidaksamaan pertama: $8n \leq n - 1008 \Longrightarrow 7n \leq -1008 \Longrightarrow n \leq -144$.
- Dari ketidaksamaan kedua: $n - 1008 < 8n + 8 \Longrightarrow -1016 < 7n \Longrightarrow n > -145.14 \cdots \Longrightarrow n \geq -145$.

Nilai bilangan bulat yang mungkin adalah $n = -145$ dan $n = -144$.

- Untuk $n = -145$:
$$x_2 = \frac{-145 - 1008}{8} = \frac{-1153}{8}$$
- Untuk $n = -144$:
$$x_3 = \frac{-144 - 1008}{8} = \frac{-1152}{8} = -144$$

4. Hitunglah Jumlah Semua Solusi

Jumlahkan ketiga solusi yang ditemukan:

$$\text{Jumlah} = x_1 + x_2 + x_3$$
$$\text{Jumlah} = 336 + \left(-\frac{1153}{8}\right) + \left(-\frac{1152}{8}\right)$$
$$\text{Jumlah} = 336 - \frac{2305}{8}$$

Ubah 336 ke pecahan penyebut 8: $336 = \frac{2688}{8}$.

$$\text{Jumlah} = \frac{2688}{8} - \frac{2305}{8} = \frac{2688 - 2305}{8} = \frac{383}{8}$$

15. Penyelesaian:

Menghitung Jumlah Semua Indeks k

Kita mencari jumlah indeks k dari permutasi 5 huruf (A, D, E, M, N) di mana huruf A berada di posisi ketiga ($H_1H_2AH_4H_5$).

1. Identifikasi Kelompok Solusi

Permutasi yang memenuhi syarat memiliki bentuk $H_1H_2AH_4H_5$.

- Huruf yang digunakan: A, D, E, M, N.
- H_1 dan H_2 adalah dua huruf berbeda dari {D, E, M, N}. Ada $4 \times 3 = 12$ pasangan yang mungkin untuk H_1H_2.

- H_4 dan H_5 adalah dua huruf sisanya. Ada 2! = 2 cara mengaturnya.

Setiap pasangan H_1H_2A membentuk sebuah blok yang terdiri dari 2 permutasi. Jadi, total ada $12 \times 2 = 24$ solusi a_k.

2. Tentukan Pola Indeks Kelompok

Kita hitung indeks awal blok H_1H_2A berdasarkan urutan kamus.
Setiap huruf awal (H_1) memimpin 4! = 24 permutasi.
Setiap pasangan H_1H_2 memimpin 3! = 6 permutasi, yang dibagi lagi menjadi 3 blok berisi 2 permutasi.

Kita perhatikan pola indeks awal I untuk setiap blok H_1H_2A:

- Ketika H_1 = D (Indeks 25 hingga 48):
    - DEA: Indeks 31, 32
    - DMA: Indeks 37, 38
    - DNA: Indeks 43, 44

    (Pola selisih: 6)

- Ketika H_1 = E (Indeks 49 hingga 72):
    - EDA: Indeks 55, 56 (Diawali EA = 6 blok, ED = 6 blok. 48 + 6 + 1 = 55)
    - EMA: Indeks 61, 62 (Diawali EA = 6, ED = 6, EMA di 61)
    - ENA: Indeks 67, 68

    (Pola selisih: 6)

- Ketika H_1 = M (Indeks 73 hingga 96):
    - MDA: Indeks 79, 80
    - MEA: Indeks 85, 86
    - MNA: Indeks 91, 92

    (Pola selisih: 6)

- Ketika H_1 = N (Indeks 97 hingga 120):
    - NDA: Indeks 103, 104
    - NEA: Indeks 109, 110
    - NMA: Indeks 115, 116

    (Pola selisih: 6)

3. Hitung Jumlah Total Indeks

Setiap kelompok H_1H_2A berkontribusi jumlah indeks sebesar I + (I + 1) = 2I + 1. Ada 12 kelompok, jadi kita perlu menjumlahkan 2I + 1 sebanyak 12 kali.

Indeks awal I yang kita cari adalah:

$$I = \{31, 37, 43, 55, 61, 67, 79, 85, 91, 103, 109, 115\}$$

$$\text{Jumlah Indeks} = \sum_{k=1}^{12} \left(I_k + (I_k + 1)\right) = 2 \times \sum I + 12$$

Jumlah semua indeks awal ($\sum I$):

$$\sum I = 31 + 37 + 43 + 55 + 61 + 67 + 79 + 85 + 91 + 103 + 109 + 115$$

Kita pasangkan ujung-ujungnya untuk mempermudah penjumlahan:

$$\sum I = (31 + 115) + (37 + 109) + (43 + 103) + (55 + 91) + (61 + 85) + (67 + 79)$$

$$\sum I = 146 + 146 + 146 + 146 + 146 + 146$$

$$\sum I = 6 \times 146 = 876$$

Hitung total akhir:

Jumlah Indeks = 2 × 876 + 12
Jumlah Indeks = 1752 + 12
Jumlah Indeks = 1764

Hasil jumlah semua indeks k adalah 1764.

16. Penyelesaian:

Mencari luas segilima dalam ($L_{dalam} = L_{PQRST}$) yang dibentuk oleh perpotongan diagonal segilima luar ($L_{luar} = L_{ABCDE} = 2$).

1. Rasio Sisi dan Luas

Rasio antara sisi segilima dalam (s_{dalam}) dan sisi segilima luar (s_{luar}) adalah kebalikan dari Rasio Emas (ϕ):

$$\frac{s_{dalam}}{s_{luar}} = \frac{1}{\phi}$$

Karena rasio luasnya adalah kuadrat dari rasio sisinya:

$$\frac{L_{dalam}}{L_{luar}} = \left(\frac{1}{\phi}\right)^2 = \frac{1}{\phi^2}$$

2. Menggunakan Sifat Rasio Emas

Kita gunakan sifat kunci dari ϕ: $\phi^2 = \phi + 1$.

$$\frac{L_{dalam}}{L_{luar}} = \frac{1}{\phi + 1}$$

Substitusikan nilai $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ dan rasionalkan:

$$\frac{L_{\text{dalam}}}{L_{\text{luar}}} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1} = \frac{2}{3+\sqrt{5}}$$

$$\frac{L_{\text{dalam}}}{L_{\text{luar}}} = \frac{2}{3+\sqrt{5}} \times \frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{2(3-\sqrt{5})}{9-5} = \frac{2(3-\sqrt{5})}{4} = \mathbf{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

3. Menghitung Luas dan $a+b$

Karena luas segilima luar $L_{luar} = 2$:

$$L_{\text{dalam}} = L_{\text{luar}} \times \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$
$$L_{\text{dalam}} = 2 \times \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$
$$L_{\text{dalam}} = \mathbf{3-\sqrt{5}}$$

Berikut ini adalah $a-\sqrt{b}$.

- Maka, $a = 3$
- Dan, $b = 5$

Nilai a dan b (bilangan asli) adalah 3 dan 5.

$$a+b = 3+5 = 8$$

Jadi, nilai $a+b$ adalah 8.

17. Penyelesaian:

Diberikan ΔABC dengan jari-jari lingkaran luar $R = 1$, dan dua garis beratnya sama Panjang, $m_b = m_c = 1$.

1. Menetapkan Sifat Segitiga

Dua garis berat yang sama Panjang mengimplikasikan bahwa ΔABC adalah sama kaki dengan sisi $b = c$.

2. Hubungan Sisi dan Garis Berat

Karena $b = c$, kita hanya perlu menemukan Panjang a dan c. Kita gunakan rumus garis berat:

$$4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2$$

Karena $m_c = 1$ dan $b = c$:

$$4(1)^2 = 2a^2 + 2c^2 - c^2$$
$$4 = 2a^2 + c^2$$

$$c^2 = 4 - 2a^2 \quad \text{(Persamaan I)}$$

3. Menghubungkan Garis Berat ke Jari-jari (R)

Garis berat m_a adalah garis tinggi (h_a). Kita gunakan rumus yang menghubungkan R dengan sisi dan tinggi:

$$R = \frac{bc}{2h_a}$$

Karena $R = 1, b = c$ dan $h_a = m_a$:

$$1 = \frac{c^2}{2m_a} \Longrightarrow c^2 = 2m_a \quad \text{(Persamaan II)}$$

4. Menyelesaikan Persamaan untuk m_a

Kita eliminasi c^2 dengan menyamakan (I) dan (II):

$$2m_a = 4 - 2a^2 \Longrightarrow 2a^2 = 4 - 2m_a$$
$$a^2 = 2 - m_a \quad \text{(Persamaan III)}$$

Sekarang kita gunakan rumus garis berat m_a:

$$4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2$$

Karena $b = c$ dan $c^2 = 2m_a$ (dari II):

$$4m_a^2 = 4c^2 - a^2$$
$$4m_a^2 = 4(2m_a) - a^2$$
$$4m_a^2 = 8m_a - a^2 \Longrightarrow a^2 = 8m_a - 4m_a^2 \quad \text{(Persamaan IV)}$$

Samakan (III) dan (IV) untuk menemukan m_a:

$$2 - m_a = 8m_a - 4m_a^2$$
$$4m_a^2 - 9m_a + 2 = 0$$

Faktorkan:

$$(4m_a - 1)(m_a - 2) = 0$$

- $m_a = 2$: Dari (III), $a^2 = 2 - 2 = 0$, yang tidak mungkin.
- $m_a = 1/4$: Ini adalah solusi yang valid.

5. Menghitung Panjang Sisi dan Keliling

- Sisi c (dan b): Dari (II), $c^2 = 2m_a = 2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

$$c = b = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

- Sisi a: Dari (III), $a^2 = 2 - m_a = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$

$$a = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

Keliling K:

$$K = a + 2c$$

$$K = \frac{\sqrt{7}}{2} + 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$
$$K = \frac{\sqrt{7}}{2} + \sqrt{2}$$
$$K = \frac{\sqrt{7} + 2\sqrt{2}}{2}$$

18. Penyelesaian:

Barisan didefinisikan oleh $x_0 = 10, x_1 = 5$, dan rumus rekursif:
$$x_{n+1} = x_{n-1} - \frac{1}{x_n}$$
Susun ulang rumus rekursif ini menjadi sebuah hubungan perkalian:
$$x_{n+1}x_n = x_{n-1}x_n - 1$$
Mari kita periksa hasil perkalian dua suku berturut-turut $(x_{i-1}x_i)$ dimulai dari $i = 1$:

- Untuk $i = 1$:
$$x_0x_1 = 10 \times 5 = 50$$
- Untuk $i = 2$ $(x_{i-1}x_i) = x_1x_2)$:
Menggunakan $x_{n+1}x_n = x_{n-1}x_n - 1$ dengan $n = 1$:
$$x_2x_1 = x_0x_1 - 1$$
$$x_2x_1 = 50 - 1 = 49$$
- Untuk $i = 3$ (x_2x_3):
Menggunakan $x_{n+1}x_n = x_{n-1}x_n - 1$ dengan $n = 2$:
$$x_3x_2 = x_1x_2 - 1$$
$$x_3x_2 = 49 - 1 = 48$$
- Untuk $i = 4$ (x_3x_4):
Menggunakan $n = 3$:
$$x_4x_3 = x_2x_3 - 1$$
$$x_4x_3 = 48 - 1 = 47$$

Rumus Umum Pola

Kita melihat sebuah pola sederhana: nilai perkalian suku berturut-turut berkurang 1 di setiap langkah.
$$x_{i-1}x_i = 51 - i$$
Kita diminta mencari nilai n sehingga $x_n = 0$.

Terapkan rumus pola untuk perkalian terakhir, yaitu $x_{n-1}x_n$:
$$x_{n-1}x_n = 51 - n$$
Karena $x_n = 0$, substitusikan:
$$x_{n-1} \times 0 = 51 - n$$
$$0 = 51 - n$$

$$n = 51$$

Jadi, nilai n adalah 51.

19. Penyelesaian:

1. Memaksimalkan Poin Tim X

Untuk membuat W_X minimum (yaitu $W_X = 0$) sambal memaksimalkan poin, Tim X harus bermain seri di semua $n-1$ pertandingan.

$$Poin\ Tim\ X = P_X = 3(0) + (n-1) = n-1$$

2. Membatasi Poin Tim Lain ($i \neq X$)

Semua tim lain harus memiliki $W_i \geq 1$ dan $P_i < P_X$

Kita cari poin maksimum ($P_{i,max}$) yang mungkin bagi Tim i jika ia hanya menang sekali ($W_i = 1$).

$$P_{i,max} = 3(1) + D_{i,max}$$

Agar $P_{i,max}$ tetap di bawah P_X, kita harus memiliki:

$$P_{i,max} \leq P_X - 1$$
$$3 + D_{i,max} \leq (n-1) - 1$$
$$D_{i,max} \leq n - 5$$

3. Menghitung Nilai n Terkecil

Jumlah seri $D_{i,max}$ harus minimal 1 untuk mempermudah konstruksi turnamen sirkuler yang valid (atau setidaknya 0 agar solusi $W_i = 1$ mungkin).

Jika kita tetapkan $D_{i,max} \geq 1$:

$$n - 5 \geq 1$$
$$n \geq 6$$

Jadi, Nilai n terkecil yang mungkin adalah 6.

20. Penyelesaian:

1. Menentukan Syarat FPB

Kita diberi $a_{2016} = 1$. Karena 2016 adalah indeks yang sangat besar, ini berarti barisan sudah stabil dan berulang.

Agar suku barisan akhirnya menjadi 1, FPB dari suku-suku awal haruslah 1.

$$FPB(a_1, a_2) = 1$$

Kita tahu $a_1 = 1001$ dan $0 \leq a_2 < 1001$.

2. Menghitung Nilai a_2 yang Mungkin

Kita perlu mencari banyaknya bilangan bulat a_2 yang memenuhi FPB$(a_2, 1001) = 1$.

- Kasus $a_2 = 0$: FPB(0, 1001) = 1001. Ini bukan 1, jadi $a_2 = 0$ tidak mungkin.

- Kasus $1 \leq a_2 \leq 1000$: Kita mencari bilangan yang prima relative terhadap 1001. Ini dihitung menggunakan Fungsi Euler Totient (ϕ).

$$\text{Banyaknya } a_2 = \phi(1001)$$

Langkah-langkah menghitung $\phi(1001)$:

a. Faktorisasi 1001:

$$1001 = 7 \times 11 \times 13$$

b. Aplikasi Rumus Totient:

$$\phi(1001) = 1001\left(1 - \frac{1}{7}\right)\left(1 - \frac{1}{11}\right)\left(1 - \frac{1}{13}\right)$$

$$\phi(1001) = 1001\left(\frac{6}{7}\right)\left(\frac{10}{11}\right)\left(\frac{12}{13}\right)$$

c. Perhitungan Akhir:

$$\phi(1001) = \frac{1001}{7 \times 11 \times 13} \times (6 \times 10 \times 12)$$

$$\phi(1001) = 1 \times 720$$

$$\phi(1001) = 720$$

Banyaknya nilai a_2 yang mungkin adalah 720.

21. Penyelesaian:

$a + \sqrt{ab}$ rasional dan $b + \sqrt{ab}$ rasional, sehingga pembagiannya juga rasional, yaitu:

$$\frac{a + \sqrt{ab}}{b + \sqrt{ab}} = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{b}(\sqrt{b} + \sqrt{a})} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \implies \text{rasional}$$

Misal: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = p$ dengan p bilangan rasional:

$$\implies \frac{a}{b} = p^2 \implies a = b \cdot p^2 \ldots (i)$$

Substitusi $a = bp^2$ ke bentuk awal:

$$a + \sqrt{ab} = (a + bp) \implies \text{rasional}$$

$$b + \sqrt{ab} = b + bp = b(1 + p) \implies b \text{ juga rasional}$$

Untuk $a = (a + bp) - bp \implies a$ juga rasional.

Jadi, terbukti a dan b rasional.

22. Penyelesaian:

Persamaan yang diberikan adalah $ab + bc + cd + da = 2016$.

Kita faktorkan persamaan ini menjadi dua factor:

$$(ab + da) + (bc + cd) = 2016$$

$$a(b + d) + c(b + d) = 2016$$

$$(a + c)(b + d) = 2016$$

Misalkan $X = a + c$ dan $Y = b + d$.

Karena a, b, c, d adalah bilangan asli $(a, b, c, d \geq 1)$, maka $X \geq 2$ dan $Y \geq 2$.

Total banyaknya pasangan (a, b, c, d) adalah jumlah dari $(X-1)(Y-1)$ untuk setiap pasangan factor (X, Y) dari 2016.

$$Total\ Solusi = \sum_{X|2016} (X-1)(Y-1)$$

Kita kembangkan dan gunakan fakta bahwa $XY = 2016$:

$$Total\ Solusi = \sum_{X|2016} (XY - X - Y + 1)$$

$$Total\ Solusi = \sum_{X|2016} (2016 - X - Y + 1)$$

$$Total\ Solusi = \sum_{X|2016} (2017 - X - Y)$$

Kita pecah penjumlahan ini:

$$Total\ Solusi = 2017 \times \tau(2016) - 2 \times \sigma(2016)$$

Di mana:

- $\tau(n)$ adalah banyaknya pembagi n.
- $\sigma(n)$ adalah jumlah semua pembagi n.

Perhitungan Nilai $\tau(2016)$ dan $\sigma(2016)$

Faktorisasi Prima:

$$2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7^1$$

Banyaknya Pembagi (τ):

$$\tau(2016) = (5+1)(2+1)(1+1) = 6 \cdot 3 \cdot 2 = 36$$

Jumlah Pembagi (σ):

$$\sigma(2016) = \left(\frac{2^{5+1}-1}{2-1}\right)\left(\frac{3^{2+1}-1}{3-1}\right)\left(\frac{7^{1+1}-1}{7-1}\right)$$

$$\sigma(2016) = \left(\frac{63}{1}\right)\left(\frac{26}{2}\right)\left(\frac{48}{6}\right)$$

$$\sigma(2016) = 63 \cdot 13 \cdot 8 = 63 \cdot 104 = \mathbf{6552}$$

Substitusikan nilai $\tau(2016)$ dan $\sigma(2016)$ ke dalam rumus Total Solusi:

$$Total\ Solusi = 2017 \times 36 - 2 \times 6552$$

$$Total\ Solusi = 72612 - 13104$$

$$Total\ Solusi = 59508$$

Banyak pasangan terurut bilangan asli (a, b, c, d) adalah 59508.

23. Penyelesaian:

Kita memiliki persegi Panjang $2016 \times n$ yang dipartisi menjadi pita-pita dengan ukuran k yang berbeda.

1. Persamaan Luas: Luas total persegi Panjang harus sama dengan jumlah luas semua pita. Karena pita $1 \times k$ memiliki luas k, maka:
$$2016 \cdot n = \sum k$$
2. Batasan Ukuran Pita: Ukuran pita k tidak boleh lebih dari dimensi terbesar, yaitu 2016.
$$k \leq 2016$$
3. Maksimalkan $\sum k$: Untuk mendapatkan nilai n terbesar, kita harus menggunakan pita sebanyak mungkin dan sebesar mungkin. Jumlah terbesar $\sum k$ terjadi jika kita menggunakan semua pita dengan ukuran $k = 1$ hingga $k = 2016$.
$$\sum k_{max} = 1 + 2 + \cdots + 2016 = \frac{2016(2016+1)}{2}$$

Hitung nilai $\sum k_{max}$:
$$\sum k_{max} = \frac{2016 \cdot 2017}{2} = 1008 \cdot 2017 = 2033136$$
Sekarang kita substitusikan $\sum k_{max}$ ke persamaan luas untuk mencari n_{max}:
$$2016 \cdot n_{max} = 2033136$$
$$n_{max} = \frac{2033136}{2016} = 1008.5$$
Karena n harus bilangan asli (bilangan bulat), maka nilai n terbesar yang mungkin secara matematis adalah:
$$n = 1008$$
Kita perlu memastikan bahwa, dengan $n = 1008$, kita bisa memilih himpunan pita K yang berbeda sehingga $\sum k = 2016 \cdot 1008 = 2030688$, dan $\max(K) \leq 2016$.
Perhatikan bahwa $2016 = 2 \times 1008$.
Untuk persegi Panjang $M \times N$, jika M adalah kelipatan 2, konstruksi partisi dengan pita yang berbeda selalu mungkin. Karena 2016 adalah bilangan genap, dan $n = 1008$ (setengah dari 2016), kita bisa menggunakan himpunan K yang sedikit lebih kecil dari $\{1,2,\ldots,2016\}$.
Kita butuh $\sum k = 2030688$. Karena $\sum k_{max} = 2033136$, kita harus menghilangkan pita yang totalnya:
$$2033136 - 2030688 = 2448$$
Kita dapat menghilangkan pita-pita yang berbeda dari himpunan $\{1, 2, \ldots, 2016\}$ yang totalnya 2448. Contohnya, kita bisa menghilangkan pita $k = 2016$ dan $k = 432$.

- $K = \{1,2,\ldots,2015\} \setminus \{432\}$.
- Semua ukuran pita berbeda dan $\max(K) = 2015 \leq 2016$.

Karena $n = 1008$ memenuhi syarat kelipatan dan partisi fisik dimungkinkan (terutama karena $n = M/2$), maka 1008 adalah nilai n terbesar yang mungkin.
Jadi, Nilai terbesar $n \leq 2016$ adalah 1008.

24. Penyelesaian:

Untuk membuktikan MQ sejajar AB kita cukup membuktikan bahwa MNQ sama kaki dengan $MN = NQ$. Hal ini bisa dilakukan salah satunya dengan cara membuktikan bahwa $\angle ANM = \angle BNQ$ (sebab $AN = NB$).

Lemma. Kita punya $\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$.
Bukti. Karena segitiga ACP sebangun dengan DAP, serta segitiga BCP sebangun dengan DBP maka

$$\frac{AC}{AD} = \frac{CP}{AP} = \frac{CP}{BP} = \frac{BC}{BD}$$

Maka $AC \times BD = AD \times BC$ atau setara dengan yang perlu kita buktikan.
Berikutnya, perpanjang AD sehingga $AA' = 2 \times AD$. Ini berakibat $ND || BA'$ serta segitiga AND sebangun dengan segitiga ABA'. Dari kedua segitiga tersebut serta lemma sebelumnya, bisa diperoleh bahwa

$$\frac{A'D}{BD} = \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$$

Atau $\frac{A'D}{BD} = \frac{AC}{BC}$. Di sisi lain kita punya $\angle ACB = \angle A'DB$ sebab $ACBD$ segiempat siklis.
Akibatnya segitiga ACB sebangun dengan DBA'.
Tinjau segitiga AND dan segitiga CBD. Karena $\angle NAD = \angle BAD = \angle BCD$ serta

$$\angle ADN = \angle DA'B = \angle CAB = \angle CDB$$

Maka segitiga AND sebangun dengan segitiga CBD.
Dengan cara yang sama segitiga ACN sebangun dengan segitiga CBD (dengan meninjau perpanjangan AC *instead of* AD).
Terakhir, dengan menggunakan informasi yang telah kita peroleh, bisa kita hitung bahwa

$$\angle ANM = \angle CNB = \angle CAN + \angle ACN = \angle ADN + \angle NAD = \angle BND = \angle BNQ$$

Dan kita selesai.

25. Penyelesaian:

Dari rumus tribel baru, perhatikan bahwa hasil jumlah $x_i + y_i + z_i$ akan selalu sama untuk setiap $i \geq 0$, yaitu selalu 2016.
Misalkan (x, y, z) adalah tripel sehingga salah satu dari $-x + y + z, x - y + z, x + y - z$ negative mensyaratkan bahwa $x + y + z < 2\max\{x, y, z\}$. Berarti, kita ingin mencari n terkecil sehingga $\max\{x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}\} \geq 1009$.
Perhatikan bahwa diperoleh juga sifat bahwa

$$x_i = 2016 - 2x_{i-1}$$
$$y_i = 2016 - 2y_{i-1}$$
$$z_i = 2016 - 2z_{i-1}.$$

Definisikan $a_i = \max\{x_i, y_i, z_i\}$ dan $b_i = \min\{x_i, y_i, z_i\}$, maka dari sifat terakhir, berlaku

$$a_i = 2016 - 2b_{i-1}$$
$$b_i = 2016 - 2a_{i-1}$$

Jadi, untuk $i \geq 2$, berlaku sifat

$$a_i = 2016 - 2(2016 - 2a_{i-2})$$
$$= 4a_{i-2} - 2016$$

Misalkan $c_i = a_i - 672$, maka diperoleh $c_i = 4c_{i-2}$ untuk setiap $i \geq 2$. Jadi, berlaku $c_{2n} = 4^n c_0$ dan $c_{2n+1} = 4^n c_1$. Perhatikan bahwa

$c_0 = a_0 - 672 = \max\{x_1, y_1, z_1\} - 672 = 1344 - 2\min\{x_0, y_0, z_0\} \geq 1344 - 2 \cdot 2$

Syarat pada soal ekivalen dengan mencari n terkecil agar dijamin

$$c_{n-1} = a_{n-1} - 672 \geq 1009 - 672 = 337$$

Akan ditunjukkan bahwa $n = 10$ cukup. Perhatikan bahwa untuk $n = 10$, berlaku

$$c_9 = 4^4 c_1 \geq 4^4 \cdot 2 \geq 512 > 337$$

Dan juga

$$c_{10} = 4^5 \cdot c_0 \geq 4^5 \cdot 1 \geq 1024 > 337$$

Sekarang, kita cukup berikan contoh tripel (x_0, y_0, z_0) sehingga $x_i, y_i, z_i \geq 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, 9$.

i	x_i	y_i	z_i
0	671	672	673
1	674	672	670
2	668	672	676
3	680	672	664
4	656	672	688
5	704	672	640
6	608	672	736
7	800	672	544
8	416	672	928
9	1184	672	160