PEMBAHASAN

OSP MATEMATIKA SD

TAHUN 2017

1. **Penyelesaian:**

KPK dari semua penyebut (2, 6, 12, 20, 30) adalah 60.
Ubah setiap pecahan agar memiliki penyebut 60:

$$\frac{1}{2}=\frac{1\times 30}{2\times 30}=\frac{30}{60}$$
$$\frac{1}{6}=\frac{1\times 10}{6\times 10}=\frac{10}{60}$$
$$\frac{1}{12}=\frac{1\times 5}{12\times 5}=\frac{5}{60}$$
$$\frac{1}{20}=\frac{1\times 3}{20\times 3}=\frac{3}{60}$$
$$\frac{1}{30}=\frac{1\times 2}{30\times 2}=\frac{2}{60}$$

Jumlahkan semua pecahan yang sudah memiliki penyebut yang sama:

$$\frac{30}{60}+\frac{10}{60}+\frac{5}{60}+\frac{3}{80}+\frac{2}{60}=\frac{30+10+5+3+2}{60}=\frac{50}{60}$$

Sederhanakan pecahan $\frac{50}{60}$ dengan membagi pembilang dan penyebut dengan factor persekutuan terbesar, yaitu 10:

$$\frac{50\div 10}{60\div 10}=\frac{5}{6}$$

2. **Penyelesaian:**

Misalkan bilangan itu adalah ABC

1) Digit Tengah (B):
- Syarat: $A+C=11$ dan $A+B+C$ adalah kelipatan 9.
- Jumlah digit: $A+B+C=(A+C)+B=11+B$
- Karena $0\leq B\leq 9$, maka $11\leq 11+B\leq 20$
- Satu-satunya kelipatan 9 di rentang ini adalah 18
- $11+B=18\Longrightarrow B=7$

2) Digit Pertama (A):
- Syarat: $A<B$, jadi $A<7$
- Karena A adalah digit pertama, A haruslah 1, 2, 3, 4, 5 atau 6
- Dari $A+C=11$ dan $C\leq 9$, maka A minimal 2

- Jadi, nilai A yang mungkin adalah 2, 3, 4, 5, 6.

3) Jumlah Bilangan: Setiap nilai A yang memenuhi (2, 3, 4, 5, 6) menghasilkan satu bilangan unik karena B sudah pasti 7 dan C sudah pasti $11 - A$.

A	B	C (11-A)	Bilangan
2	7	9	279
3	7	8	378
4	7	7	477
5	7	6	576
6	7	5	675

Jadi, karena ada 5 nilai yang mungkin untuk A, maka ada 5 bilangan yang memenuhi semua syarat.

3. **Penyelesaian:**

Empat Angka Berurutan yang Mungkin Digunakan: Angka yang berurutan adalah $\{n, n+1, n+2, n+3\}$. Karena menit (MM) maksimal adalah 59, maka angka terbesar yang bisa digunakan adalah 5 (untuk posisi M kedua).

1) Set 1: {0, 1, 2, 3}
2) Set 2: {1, 2, 3, 4}
3) Set 3: {2, 3, 4, 5}

Langkah 1: Hitung total susunan waktu yang valid untuk setiap set.

Set Angka	Jam (HH) ≤ 23	Menit (MM) ≤ 59	Total Susunan
$\{0, 1, 2, 3\}$	**9** kemungkinan: 01, 02, 03, 10, 12, 13, 20, 21, 23	Setiap jam memiliki **2** kemungkinan menit yang tersisa (permutasi 2 angka).	$9 \times 2 = \mathbf{18}$
$\{1, 2, 3, 4\}$	**5** kemungkinan: 12, 13, 14, 21, 23. *(24, 42, 43... tidak valid)*	Setiap jam memiliki **2** kemungkinan menit yang tersisa.	$5 \times 2 = \mathbf{10}$
$\{2, 3, 4, 5\}$	**1** kemungkinan: 23. *(32, 34, 35... tidak valid)*	Jam 23 memiliki **2** kemungkinan menit (45 dan 54).	$1 \times 2 = \mathbf{2}$
Total Susunan Valid			$\mathbf{18 + 10 + 2 = 30}$

Penjelasan Singkat Validitas Jam:

- Untuk {0, 1, 2, 3}, tidak ada jam di atas 23 yang mungkin (misalnya 30, 31, 32, …).
- Untuk {1, 2, 3, 4}, jam 24 tidak valid.

- Untuk {2, 3, 4, 5}, jam 24, 25, 32, 34, 35, 42, 43, 45, 52, 53, 54 tidak valid karena HH ≤ 23. Hanya 23 yang valid.

Langkah 2: Hitung banyaknya susunan lainnya
Soal meminta banyaknya susunan lainnya (selain yang sudah diberikan di contoh).

- Susunan yang diberikan di contoh:
  - (a) 01:23 (menggunakan {0, 1, 2, 3})
  - (b) 10:23 (menggunakan {0, 1, 2, 3})

Banyaknya susunan lainnya = Total Susunan Valid – Jumlah Contoh Banyaknya susunan lainnya = 30 – 2 = 28.
Jawaban yang disederhanakan adalah 28.

4. **Penyelesaian:**
Total Usia 7 Anggota Keluarga (Ayah, Ibu, 3 Anak, Kakek, Nenek) di Tahun 2017.

$$\text{Total Usia}_7 = \text{RataRata} \times \text{Jumlah Orang}$$

$$\text{Total Usia}_7 = 32 \times 7 = 224 \text{ tahun}$$

Total Usia 5 Anggota Keluarga (Ayah, Ibu, 3 Anak) di Tahun 2017.

$$\text{Total Usia}_5 = \text{RataRata} \times \text{Jumlah Orang}$$

$$\text{Total Usia}_5 = 20 \times 5 = 100 \text{ tahun}$$

Jumlah Usia Kakek dan Nenek $(K + N)$.

$$\text{Usia K} + \text{Usia N} = \text{Total Usia}_7 - \text{Total Usia}_5$$

$$\text{Usia K} + \text{Usia N} = 224 - 100 = 124 \text{ tahun}$$

Hitung Usia Kakek (K) di Tahun 2017.
Diketahui: $K = N + 12$. Substitusikan $N = K - 12$ ke dalam persamaan total usia.

$$\text{Usia K} + (\text{K} - 12) = 124$$

$$2K = 124 + 12$$

$$2K = 136$$

$$K = 68 \text{ tahun}$$

Tentukan Tahun Lahir Kakek.

$$\text{Tahun Lahir} = \text{Tahun Saat Itu} - \text{Usia}$$

$$\text{Tahun Lahir} = 2017 - 68 = 1949$$

Jadi, Kakek lahir pada tahun 1949.

5. Penyelesaian:

Putaran ke-	Waktu Selesai	Waktu Mulai Sebelumnya	Perhitungan Durasi (dalam menit)	Durasi
1	10:26	09:55	(10:26 - 09:55)	**31 menit**
2	10:54	10:26	(10:54 - 10:26)	**28 menit**
3	11:28	10:54	(11:28 - 10:54)	**34 menit**
4	12:03	11:28	(12:03 - 11:28)	**35 menit**
5	12:35	12:03	(12:35 - 12:03)	**32** menit

Waktu paling lambat adalah durasi terlama, yaitu 35 menit, yang terjadi pada putaran ke-4.

6. Penyelesaian:

Panjang total garis tebal adalah jumlah dari 3 segmen:

$$\text{Total Panjang} = \text{Segmen 1} + \text{Segmen 2} + \text{Segmen 3}$$

Dimensi Balok

- Panjang $(p) = 4$ cm
- Lebar $(l) = 3$ cm
- Tinggi $(t) = 2$ cm

T adalah titik tengah dari 4 cm. P adalah pusat bidang atas.

Garis ini menyusuri dua rusuk di alas balok: rusuk lebar dan setengah rusuk Panjang.

$$\text{Segmen 1} = \text{Lebar} + \frac{\text{Panjang}}{2}$$

$$\text{Segmen 1} = 3\text{ cm} + \frac{4\text{ cm}}{2} = 3\text{ cm} + 2\text{ cm} = 5\text{ cm}$$

Garis ini adalah diagonal terpendek yang menyusuri permukaan, dari titik tengah rusuk belakang bawah (T) ke pusat bidang atas (P). Karena T dan P berada pada posisi x yang sama (di tengah 4 cm), jarak ini adalah diagonal dari bangun datar dengan sisi:

- Sisi Vertikal: Tinggi balok, $t = 2$ cm
- Sisi Horizontal: Jarak P ke T pada sumbu y (setengah lebar), $l/2 = 3/2 = 1.5$ cm.

$$\text{Segmen 2} = \sqrt{(\text{Tinggi})^2 + (\text{Setengah Lebar})^2}$$

$$\text{Segmen 2} = \sqrt{(2)^2 + (1.5)^2} = \sqrt{4 + 2.25} = \sqrt{6.25} = 2.5\text{ cm}$$

Garis ini adalah setengah diagonal bidang atas, dari pusat P ke sudut. Bidang atas berukuran 4 cm × 3 cm.

$$\text{Segmen 3} = \sqrt{(\text{Setengah Panjang})^2 + (\text{Setengah Lebar})^2}$$

$$\text{Segmen 3} = \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{(2)^2 + (1.5)^2}$$

$$\text{Segmen 3} = \sqrt{4 + 2.25} = \sqrt{6.25} = 2.5 \text{ cm}$$

$$\text{Total} = 5 \text{ cm} + 2.5 \text{ cm} + 2.5 \text{ cm} = 10 \text{ cm}$$

7. Penyelesaian:

Buat daftar kombinasi pecahan (Rp5.000, Rp1.000, Rp500) yang totalnya tepat Rp12.500,00, sambal memperhatikan batas ketersediaan keping/lembar.

Pecahan (Rp)	**Ketersediaan**
5.000	Maks 3
1.000	Maks 7
500	Maks 5

Target Pembayaran: Rp12.500

Kasus	Jumlah Rp5.000 (X)	Sisa yang Dibayar	Kombinasi Sisa: $\text{Rp}1.000(Y) + \text{Rp}500(Z) = \text{Sisa}$	Total Cara
I	**2** $(\text{Rp}10.000)$	$\text{Rp}2.500$	**3 Cara:** $\begin{cases} 2 \times \text{Rp}1.000 + 1 \times \text{Rp}500 \\ 1 \times \text{Rp}1.000 + 3 \times \text{Rp}500 \\ 0 \times \text{Rp}1.000 + 5 \times \text{Rp}500 \end{cases}$	**3**
II	**1** $(\text{Rp}5.000)$	$\text{Rp}7.500$	**3 Cara:** $\begin{cases} 7 \times \text{Rp}1.000 + 1 \times \text{Rp}500 \\ 6 \times \text{Rp}1.000 + 3 \times \text{Rp}500 \\ 5 \times \text{Rp}1.000 + 5 \times \text{Rp}500 \end{cases}$	**3**
III	**0** $(\text{Rp}0)$	$\text{Rp}12.500$	*Tidak mungkin, karena butuh* $11 \times \text{Rp}1.000$ *(melebihi maks 7) atau* $25 \times \text{Rp}500$ *(melebihi maks 5).*	**0**

Jadi, Total Cara = 3 + 3 = 6.

8. Penyelesaian:

Persamaan

- $A - B = 8$
- $C + D = 12$
- $A - C = 7$
- $B - D = 5$

Tambahkan Persamaan (3) dan (4):

$$(A - C) + (B - D) = 7 + 5$$
$$A + B - C - D = 12$$

Kita tahu dari Persamaan (2) bahwa $C + D = 12$. Maka, $C + D$ dapat dipindahkan menjadi 12 atau $-C - D = -12$.

$$A + B - (C + D) = 12$$
$$A + B - 12 = 12$$
$$A + B = 24$$

(Persamaan 5)

Kita punya system untuk A dan B:

$$A - B = 8 \quad \text{(Pers 1)}$$
$$A + B = 24 \quad \text{(Pers 5)}$$

- Jumlahkan kedua persamaan untuk mencari A:

$$(A - B) + (A + B) = 8 + 24$$
$$2A = 32$$
$$A = 16$$

- Substitusikan $A = 16$ ke Persamaan (5):

$$16 + B = 24$$
$$B = 24 - 16$$
$$B = 8$$

Selesaikan C dan D

- Gunakan $A = 16$ di Persamaan (3) untuk mencari C:

$$A - C = 7$$
$$16 - C = 7$$
$$C = 16 - 7$$
$$C = 9$$

- Gunakan $B = 8$ di Persamaan (4) untuk mencari D:

$$B - D = 5$$
$$8 - D = 5$$
$$D = 8 - 5$$
$$D = 3$$

- $A = 16$
- $B = 8$
- $C = 9$
- $D = 3$

9. Penyelesaian:

Total lembar adalah 150.

Pecahan	Perhitungan Jumlah Lembar	Jumlah Lembar
Rp5.000	$20\% \times 150$	**30**
Rp10.000	$\frac{1}{2} \times 150$	**75**
Sisa Lembar	$150 - 30 - 75$	**45**
Rp20.000	$\frac{2}{5} \times 45$	**18**
Rp50.000	$45 - 18$	**27**

Kalikan jumlah lembar dengan nilai pecahannya, lalu jumlahkan totalnya:

Pecahan (Rp)	×	Jumlah Lembar	=	Nilai Total (Rp)
5.000	×	30	=	150.000
10.000	×	75	=	750.000
20.000	×	18	=	360.000
50.000	×	27	=	1.350.000
TOTAL				**2.610.000**

Jadi, Nilai uang keseluruhan Riri adalah Rp2.610.000,00.

10. Penyelesaian:

Rumus selisih kuadrat: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

Pembilang adalah $100001^2 - 99999^2$. Misalkan $a = 100001$ dan $b = 99999$.

$$\begin{aligned} 100001^2 - 99999^2 &= (100001 - 99999)(100001 + 99999) \\ &= (2)(200000) \\ &= 400000 \end{aligned}$$

Penyebut adalah $1001^2 - 999^2$. Misalkan $a = 1001$ dan $b = 999$.

$$\begin{aligned} 1001^2 - 999^2 &= (1001 - 999)(1001 + 999) \\ &= (2)(2000) \\ &= 4000 \end{aligned}$$

Substitusikan hasil dari Langkah 1 dan Langka 2 ke dalam ekspresi awal:

$$\frac{100001^2 - 99999^2}{1001^2 - 999^2} = \frac{400000}{4000}$$

Sederhanakan pecahan tersebut:

$$\frac{400000}{4000} = \frac{4000 \times 100}{4000} = 100$$

11. Penyelesaian:

Kita menggunakan algoritma Euclidean untuk menemukan solusi particular dari $6a + 7b = 1$.

1) Observasi: Karena koefisien 6 dan 7 adalah bilangan bulat berdekatan, kita dapat melihat bahwa $7(1) - 6(1) = 1$.
   - Solusi particular: $a_0 = -1$ dan $b_0 = 1$
2) Solusi Umum: Karena FPB(6, 7) = 1, solusi umum untuk persamaan $6a + 7b = 1$ adalah:

$$a = a_0 + 7t = -1 + 7t$$
$$b = b_0 - 6t = 1 - 6t$$

Di mana t adalah bilangan bulat ($t \in \mathbb{Z}$).

Syaratnya adalah a adalah bilangan bulat terkecil yang lebih dari 50 ($a > 50$). Substitusikan ekspresi umum untuk a ke dalam pertidaksamaan:

$$-1 + 7t > 50$$
$$7t > 51$$
$$t > \frac{51}{7}$$
$$t > 7.2857 \ldots$$

Karena t harus bilangan bulat, nilai t bilangan bulat terkecil yang memenuhi pertidaksamaan ini adalah:

$$t = 8$$

Substitusikan $t = 8$ ke dalam solusi umum:

$$a = -1 + 7(8) = -1 + 56 = 55$$
$$b = 1 - 6(8) = 1 - 48 = -47$$

12. Penyelesaian:

Pola ini adalah pola bilangan persegi Panjang, di mana setiap suku adalah hasil kali antara urutan suku (n) dengan bilangan setelahnya ($n + 1$).

$$U_n = n \times (n + 1)$$

Substitusikan $n = 25$ ke dalam rumus:

$$U_{25} = 25 \times (25 + 1)$$
$$U_{25} = 25 \times 26$$
$$U_{25} = 650$$

Bilangan ke-25 adalah 250. Jumlahkan setiap digitnya:

$$\text{Jumlah Angka} = 6 + 5 + 0 = 11$$

Nilai akhirnya adalah 11.

13. Penyelesaian:

Siti menabung selama 10 bulan, rata-rata 25 hari per bulan.

$$\text{Total Hari} = 10\text{ bulan} \times 25\text{ hari/bulan} = 250\text{ hari}$$

Bagilah total kebutuhan uang dengan total hari menabung.

$$\text{Minimal Tabungan Harian} = \frac{\text{Kebutuhan Uang}}{\text{Total Hari}}$$
$$\text{Minimal Tabungan Harian} = \frac{\text{Rp4.550.000}}{250\text{ Hari}}$$
$$\text{Minimal Tabungan Harian} = \text{Rp18.200}$$

14. Penyelesaian:

Gunakan Prinsip Inklusi-Eksklusi untuk mencari jumlah siswa yang ikut kedua kelompok ($|A \cap B|$). Karena semua 20 siswa ikut minimal satu kelompok, $|A \cup B| = 20$.

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B|$$
$$|A \cap B| = 14 + 10 - 20$$
$$|A \cap B| = 4$$

(siswa ikut kedua kelompok)

Hitung siswa yang hanya ikut satu kelompok:

- Hanya A: 14 – 4 = 10 orang
- Hanya B: 10 – 4 = 6 orang

Total nilai seluruh kelas (T) adalah rata-rata dikali jumlah siswa.

$$T = 7 \times 20 = 140$$

Total nilai kelas juga merupakan jumlah nilai dari ketiga kategori (Hanya A, Hanya B, Kedua). Kita asumsikan siswa Hanya A memiliki nilai rata-rata 8 (rata-rata A) dan siswa Hanya B memiliki nilai rata-rata 6 (rata-rata B). Misalkan $R_{A\cap B}$ adalah rata-rata nilai siswa kedua kelompok (yang dicari).

$$T = (\text{Hanya A} \times R_A) + (\text{Hanya B} \times R_B) + (\text{Kedua} \times R_{A\cap B})$$
$$140 = (10 \times 8) + (6 \times 6) + (4 \times R_{A\cap B})$$
$$140 = 80 + 36 + 4R_{A\cap B}$$
$$140 = 116 + 4R_{A\cap B}$$

Selesaikan persamaan untuk $R_{A\cap B}$:

$$4R_{A\cap B} = 140 - 116$$
$$4R_{A\cap B} = 34$$
$$R_{A\cap B} = \frac{34}{4} = 8{,}5$$

15. Penyelesaian:

Kategori Siswa	Jumlah Siswa (Kelas III)	Jumlah Siswa (Kelas VI)
Jalan Kaki	5	5
Sepeda	10	7
Mobil	5	11
Bus	10	7
Total	**30**	**30**

$$\text{Total Seluruh Siswa} = \text{Total Kelas III} + \text{Total Kelas VI} = 30 + 30 = 60$$

$$\text{Siswa Naik Sepeda} = \text{Sepeda Kelas III} + \text{Sepeda Kelas VI} = 10 + 7 = 17$$

$$\text{Persentase} = \frac{\text{Siswa Naik Sepeda}}{\text{Total Seluruh Siswa}} \times 100\%$$
$$\text{Persentase} = \frac{17}{60} \times 100\%$$
$$\text{Persentase} \approx 0,28333 \times 100\%$$
$$\text{Persentase} \approx 28{,}33\%$$

16. Penyelesaian:

$$\text{Luas A} \times \text{Luas C} = \text{Luas B} \times \text{Luas D}$$

Diketahui: $A = 15, B = 30, D = 40.$

$$15 \times \text{Luas C} = 30 \times 40$$
$$15 \times \text{Luas C} = 1200$$
$$\text{Luas C} = \frac{1200}{15}$$
$$\text{Luas C} = 80 \text{ m}^2$$

Bandingkan Luas C dengan Luas B:

$$\text{Luas C} : \text{Luas B}$$
$$80 : 30$$

Sederhanakan perbandingan dengan membagi kedua sisi dengan 10:

$$8 : 3$$

17. Penyelesaian:

$$y + y + 45^o = 180^o$$
$$2y = 135^o$$
$$y = 67{,}5 \rightarrow x = 22{,}5$$

$$2x + y = 112{,}5$$

18. Penyelesaian:

Lebar persegi Panjang adalah 2 cm, yang mencakup diameter dua lingkaran.

$$4r = 2 \text{ cm}$$

$$r = \frac{2}{4} = 0{,}5 \text{ cm atau } \frac{1}{2} \text{ cm}$$

Luas persegi Panjang (L_P):

$$L_P = \text{Panjang} \times \text{Lebar} = 4 \times 2 = 8 \text{ cm}^2$$

Luas Total 8 Lingkaran (L_L)

Ada 8 lingkaran, dan kita gunakan $\pi = 22/7$.

$$L_L = 8 \times \pi r^2$$

$$L_L = 8 \times \frac{22}{7} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$L_L = 8 \times \frac{22}{7} \times \frac{1}{4}$$

$$L_L = 2 \times \frac{22}{7} = \frac{44}{7} \text{ cm}^2$$

Hitung Luas Daerah Diarsir (L_{Arsir}):

$$L_{Arsir} = L_P - L_L$$

$$L_{Arsir} = 8 - \frac{44}{7}$$

$$L_{Arsir} = \frac{56}{7} - \frac{44}{7}$$

$$L_{Arsir} = \frac{12}{7} \text{ cm}^2$$

19. Penyelesaian:

Total bilangan bulat dari 100 sampai 999:

$$\text{Total} = 999 - 100 + 1 = 900$$

Kita hitung banyaknya bilangan 3-digit yang tidak menggunakan angka 0. Digit yang tersedia adalah $\{1, 2, \ldots, 9\}$.

- Digit Ratusan: 9 pilihan (1 sampai 9)
- Digit Puluhan: 9 pilihan (1 sampai 9)
- Digit Satuan: 9 pilihan (1 sampai 9)

$$\text{Bilangan Tanpa } 0 = 9 \times 9 \times 9 = 729$$

Kurangi total bilangan dengan bilangan yang tidak mengandung angka 0:

$$\text{Bilangan dengan Minimal Satu } 0 = \text{Total} - \text{Bilangan Tanpa } 0$$

$$\text{Bilangan dengan Minimal Satu } 0 = 900 - 729 = 171$$

20. Penyelesaian:

Segitiga hanya dapat dibentuk jika jumlah panjang dua sisi terpendek lebih besar dari Panjang sisi terpanjang $(a + b > c)$.

Total ada 10 kemungkinan kombinasi, tetapi kita hanya perlu menguji kombinasi yang memiliki 20 cm atau 15 cm sebagai sisi terpanjang, karena sisi terpendek (5, 8, 11) pasti memenuhi syarat saat dikombinasikan.

Sisi (a, b, c)	Uji $a + b > c$	Kesimpulan
(5, 8, 11)	$5 + 8 = 13 > 11$	**Segitiga (1)**
(5, 11, 15)	$5 + 11 = 16 > 15$	**Segitiga (2)**
(8, 11, 15)	$8 + 11 = 19 > 15$	**Segitiga (3)**
(5, 15, 20)	$5 + 15 = 20 \not> 20$	Bukan Segitiga
(8, 15, 20)	$8 + 15 = 23 > 20$	**Segitiga (4)**
(11, 15, 20)	$11 + 15 = 26 > 20$	**Segitiga (5)**
(5, 8, 15)	$13 \not> 15$	Bukan Segitiga
(5, 8, 20)	$13 \not> 20$	Bukan Segitiga
(5, 11, 20)	$16 \not> 20$	Bukan Segitiga
(8, 11, 20)	$19 \not> 20$	Bukan Segitiga

Catatan: Lima kombinasi pertama yang memiliki 11 atau 15 sebagai sisi terpanjang semuanya berhasil. Hanya kombinasi yang melibatkan 20 sebagai sisi terpanjang yang perlu diperiksa dengan hati-hati.

Jumlah total segitiga yang dapat dibuat adalah 5.

21. Penyelesaian:

Misalkan kedua bilangan asli adalah a dan b.

1) $a + b = 7$
2) $a^3 + b^3 = 91$

Gunakan identitas aljabar $(a + b)^3$ atau identitas $a^3 + b^3$.

Cara I: Menggunakan $a^3 + b^3$

$$a^3 + b^3 = (a + b)((a + b)^2 - 3ab)$$

Substitusi nilai yang diketahui:

$$91 = (7)((7)^2 - 3ab)$$
$$91 = 7(49 - 3ab)$$

Bagi kedua sisi dengan 7:

$$\frac{91}{7} = 49 - 3ab$$
$$13 = 49 - 3ab$$
$$3ab = 49 - 13$$
$$3ab = 36$$
$$ab = 12$$

Gunakan identitas kuadrat:

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$$

Substitusikan nilai $a + b = 7$ dan $ab = 12$:

$$a^2 + b^2 = (7)^2 - 2(12)$$
$$a^2 + b^2 = 49 - 24$$
$$a^2 + b^2 = 25$$

22. Penyelesaian:

Anggota pramuka yang menempati masing-masing tenda adalah:

- Tenda A: 16 orang
- Tenda B: 25 orang
- Tenda C: 15 orang
- Tenda D: 21 orang
- Tenda E: 18 orang

1. Tentukan Persamaan

Misalkan A, B, C, D, E adalah jumlah anggota di setiap tenda.
Kita punya:

- A + B = 41
- B + C = 40
- C + D = 36
- D + E = 39
- A + B + C + D + E = 95 (Total)

2. Cari Nilai C

Gunakan Persamaan (1) dan (4) untuk menyederhanakan Persamaan (5):

$$(A + B) + C + (D + E) = 95$$
$$(41) + C + (39) = 95$$
$$80 + C = 95$$
$$C = 95 - 80$$
$$C = 15$$

3. Cari Nilai B, D, A, E

Substitusikan C = 15 ke persamaan lainnya:

- Tenda D (dari P3):

  D = 36 – C = 36 – 15 = 21
- Tenda B (dari P2):

  B = 40 – C = 40 – 15 = 25
- Tenda A (dari P1):

  A = 41 – B = 41 – 25 = 16
- Tenda E (dari P4):

  E = 39 – D = 39 – 21 = 18

23. Penyelesaian:

×	5	7	9
4	20	28	36
6	30	42	54
8	40	56	72

:2

4/3

:2

Maka $A + B = 28 + 30 = 58$.

24. Penyelesaian:

Batas baris (n) untuk bilangan 80:

- Setiap baris (n) dimulai dari bilangan n dan berakhir di $2n - 1$.
- Agar kartu 80 muncul, dua syarat harus dipenuhi:
  - Baris n harus dimulai dari ≤ 80: $n \leq 80$
  - Baris n harus berakhir di ≥ 80: $2n - 1 \geq 80$

Batas Atas dan Bawah n:

- Batas Atas: $n_{maks} = 80$. (Kartu 80 tidak mungkin ada di baris ke-81 atau seterusnya karena dimulai dari ≥ 81).
- Batas Bawah:

$$2n - 1 \geq 80$$
$$2n \geq 81$$
$$n \geq 40{,}5$$

$n_{min} = 41$. (Baris ke-40 berakhir di 79, tidak memuat 80).

Jumlah Baris:

- Kartu 80 muncul dari Baris ke-41 sampai Baris ke-80.
- Banyaknya kartu = 80 – 41 + 1 = 40.

25. Penyelesaian:

1) Hitung y (Jakarta Pusat): Rata-rata 3 tahun adalah 120.
$$(105 + 125 + y)/3 = 120$$
$$230 + y = 360$$
$$y = 130$$
2) Hitung z (Jakarta Timur): Naik 20% dari z (2014) ke 216 (2016).
$$z \times 1.2 = 216$$
$$z = 180$$
3) Hitung x (Jakarta Utara): Asumsikan penurunan 10% berlaku dari 2014 ke 2015.
$$x = 200 - (10\% \text{ dari } 200)$$
$$x = 200 - 20$$
$$x = 180$$
4) Hitung Total:
$$x + y + z = 180 + 130 + 180$$
$$x + y + z = 490$$

26. Penyelesaian:

Karena $a < b < c$, nilai maksimum yang mungkin untuk a terjadi ketika bilangan-bilangan tersebut berurutan: $a, a + 1, a + 2$.
$$a + (a + 1) + (a + 2) \leq 20$$
$$3a + 3 \leq 20$$
$$3a \leq 17$$
$$a \leq 5,66 \ldots$$
Maka, nilai a yang mungkin adalah 1, 2, 3, 4 dan 5.

Untuk setiap nilai a, kita hitung banyaknya pasangan (b, c) yang memenuhi $b + c = 20 - a$, dengan Batasan $a < b$ dan $b < c$.

Untuk sebuah konstanta $k = 20 - a$, kita mencari banyaknya b sehingga $a < b < \frac{k}{2}$.

Banyaknya cara adalah $\left\lfloor \frac{k-1}{2} \right\rfloor - a$.

a	$b+c=k$	Batasan b	Maksimum b	Banyak Cara
1	$b+c=19$	$1<b<\frac{19}{2}=9,5$	9	$9-1=\mathbf{8}$
2	$b+c=18$	$2<b<\frac{18}{2}=9$	8	$8-2=\mathbf{6}$
3	$b+c=17$	$3<b<\frac{17}{2}=8,5$	8	$8-3=\mathbf{5}$
4	$b+c=16$	$4<b<\frac{16}{2}=8$	7	$7-4=\mathbf{3}$
5	$b+c=15$	$5<b<\frac{15}{2}=7,5$	7	$7-5=\mathbf{2}$

Jumlahkan semua cara:

$$8+6+5+3+2=24$$

Terdapat 24 cara.

27. Penyelesaian:

Diketahui $3a=2b$ dan a,b adalah bilangan asli. Ini mengimplikasi bahwa a adalah kelipatan dari 2, dan b adalah kelipatan dari 3. Kita bisa menulis:

$$a=2k \text{ dan } b=3k$$

Dengan k adalah asli ($k \in \{1,2,3,\dots\}$).

Diketahui $c=15$ dan $\text{KPK}(a,b,c)=30$

Substitusikan a dan b:

$$\text{KPK}(2k,3k,15)=30$$

Karena $\text{KPK}(2k,3k)=k\cdot\text{KPK}(2,3)=6k$, persamaannya menjadi:

$$\text{KPK}(6k,15)=30$$

Faktorisasi prima dari 15 dan 30:

$$15=3\cdot5$$
$$30=2\cdot3\cdot5$$

Agar $\text{KPK}(6k,15)=30$, maka $6k$ harus memuat factor 2, 3 dan 5, dengan pangkat tertinggi yang sama seperti 30.

- $6k$ harus memuat factor 2 (yang sudah dipenuhi oleh 6)
- $6k$ harus memuat factor 5.
- $6k$ tidak boleh memuat factor 4 (2^2) atau 9 (3^2), dll.

Kita cari nilai k terkecil (untuk meminimalkan a dan b):

- Jika $k=1$: KPK(6(1), 15) = KPK(6, 15) = 30. (Memenuhi)
- Jika $k=5$: (Faktor 5 terkecil) KPK(6(5), 15) = KPK(30, 15) = 30. (Memenuhi)
- Jika $k=2$: KPK(6(2), 15) = KPK(12, 15) = 60 ≠ 30. (Tidak memenuhi, karena 12 memuat 2^2).

Nilai k yang memenuhi dan terkecil adalah $k=1$ dan $k=5$. Kita akan gunakan kedua nilai ini untuk mencari nilai maksimum.

Kita hitung nilai $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$ untuk setiap kasus. Ingat: $d=\text{KPK}(a,b)$.

Kasus A: $k=1$

- $a=2(1)=2$
- $b=3(1)=3$
- $c=15$
- $d=$ KPK(2, 3) = 6

$$\text{Nilai}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{6}$$

$$\text{Nilai}=\frac{15}{30}+\frac{10}{30}+\frac{2}{30}+\frac{5}{30}=\frac{15+10+2+5}{30}=\frac{32}{30}=\frac{16}{15}$$

Kasus B: $k=5$

- $a=2(5)=10$
- $b=3(5)=15$
- $c=15$
- $d=$ KPK(10, 15) = 30

$$\text{Nilai}=\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{30}$$

$$\text{Nilai}=\frac{3}{30}+\frac{2}{30}+\frac{2}{30}+\frac{1}{30}=\frac{3+2+2+1}{30}=\frac{8}{30}=\frac{4}{15}$$

Membandingkan kedua hasil:

$$\frac{16}{15}\ \text{dan}\ \frac{4}{15}$$

Maka, Nilai maksimumnya adalah $\frac{16}{15}$.

28. Penyelesaian:

- Jari-jari Lingkaran (r): Dari gambar, EC adalah jari-jari.

$$r=EC=\frac{1}{2}a$$

- Sisi Miring (DE): Diketahui $DE=a$
- Segitiga DCE adalah segitiga siku-siku di C.

Gunakan Teorema Pythagoras untuk mencari DC:

$$DC^2=DE^2-EC^2=a^2-\left(\frac{1}{2}a\right)^2=a^2-\frac{1}{4}a^2=\frac{3}{4}a^2$$

$$DC=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Tentukan sudut pusat sector, yaitu $\angle DEC$ (kita sebut θ):

$$\sin(\theta) = \frac{sisi\ depan}{sisi\ miring} = \frac{DC}{DE} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Karena $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, maka $\theta = 60^o$.

a. Luas segitiga $DCE(L_\Delta)$

$$L_\Delta = \frac{1}{2} \times DC \times EC$$

$$L_\Delta = \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right) \times \left(\frac{1}{2}a\right) = \frac{\sqrt{3}}{8}a^2$$

b. Luas sector $YCE(L_{sektor})$

$$L_{\text{sektor}} = \frac{\theta}{360^o} \times \pi r^2$$

$$L_{\text{sektor}} = \frac{60^o}{360^o} \times \pi\left(\frac{1}{2}a\right)^2$$

$$L_{\text{sektor}} = \frac{1}{6} \times \pi\left(\frac{1}{4}a^2\right) = \frac{\pi}{24}a^2$$

Luas Daerah yang Diarsir:

$$\text{Luas Diarsir} = L_\Delta - L_{\text{sektor}}$$

$$\text{Luas Diarsir} = \frac{\sqrt{3}}{8}a^2 - \frac{\pi}{24}a^2$$

Samakan penyebut (KPK adalah 24):

$$\text{Luas Diarsir} = \frac{3\sqrt{3}}{24}a^2 - \frac{\pi}{24}a^2$$

$$\text{Luas Diarsir} = \frac{\mathrm{a}^2}{24}(3\sqrt{3} - \pi)$$

29. Penyelesaian:

Total siswa $(N) = 80$.

- Jumlah siswa kelas empat (N_4) adalah 50% lebih dari kelas lima (N_5), jadi $N_4 = 1.5N_5$.
- $N_4 + N_5 = 80$

$$1.5N_5 + N_5 = 80$$
$$2.5N_5 = 80$$
$$N_5 = \frac{80}{2.5} = 32$$
$$N_4 = 80 - 32 = 48$$

Rata-rata gabungan $(\overline{X}_{gab}) = 100$.

- Rata-rata kelas lima $(\overline{X}_5)$ adalah 50% lebih tinggi dari kelas empat $(\overline{X}_4)$, jadi $\overline{X}_5 = 1.5\,\overline{X}_4$.

Gunakan rumus rata-rata gabungan: $\overline{X}_{gab} \cdot N = N_4 \cdot \overline{X}_4 + N_5 \cdot \overline{X}_5$.

$$100 \cdot 80 = 48 \cdot \overline{X}_4 + 32 \cdot (1.5\,\overline{X}_4)$$
$$8000 = 48 \cdot \overline{X}_4 + 48 \cdot \overline{X}_4$$
$$8000 = 96 \cdot \overline{X}_4$$
$$\overline{X}_4 = \frac{8000}{96} = \frac{250}{3}$$

Cari rata-rata kelas lima $(\overline{X}_5)$:

$$\overline{X}_5 = 1.5 \cdot \overline{X}_4 = \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{250}{3}\right)$$
$$\overline{X}_5 = \frac{250}{2} = 125$$

30. Penyelesaian:

Ubah semua satuan jarak ke km:

- Jarak 1 Putaran: 20.6 km + 4.3 km + (2 × 4.3 km) = 20.6 + 4.3 + 8.6 = 33.5 km
- Jarak Total (10 putaran): 10 × 33.5 = 335 km

Menghitung Waktu dan Kecepatan Pemenang Pertama (v_1)

- Waktu Tempuh (t_1): Lomba dimulai 09.30 WIB dan berakhir 16.12 WIB

$$t_1 = 16.12 - 09.30 = 6 \text{ jam } 42 \text{ menit}$$
$$t_1 = 6 + \frac{42}{60} \text{ jam} = 6 + 0.7 = 6.7 \text{ jam}$$

- Kecepatan (v_1):

$$v_1 = \frac{335 \text{ km}}{6.7 \text{ jam}} = 50 \text{ km/jam}$$

Menghitung Waktu dan Kecepatan Pembalap Terakhir (v_2)

- Selisih Waktu (Δt): 1 jam 40 menit 30 detik.

$$\Delta t = 1 + \frac{40}{60} + \frac{30}{3600} \text{ jam} = 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{120} = \frac{120 + 80 + 1}{120} = 1.675 \text{ jam}$$

- Waktu Tempuh (t_2):

$$t_2 = t_1 + \Delta t = 6.7 \text{ jam} + 1.675 \text{ jam} = 8.375 \text{ jam}$$

- Kecepatan (v_2):

$$v_2 = \frac{335 \text{ km}}{8.375 \text{ jam}} = 335 \times \frac{8}{67} = 40 \text{ km/jam}$$

(Karena $335 = 5 \times 67$)

Selisih Kecepatan Rata-Rata:

$$\text{Selisih} = v_1 - v_2 = 50\ \text{km/jam} - 40\ \text{km/jam} = 10\ \text{km/jam}$$