PEMBAHASAN

OSN MATEMATIKA SMP

TAHUN 2021

1. **Penyelesaian:**
Konversi Satuan Volume:
Volume kubus $V = 1000$ liter.
Karena 1 liter $= 1000$ cm^3, maka:
$$V = 1000 \times 1000 \text{ cm}^3 = 1{,}000{,}000 \text{ cm}^3$$
Panjang Rusuk (s):
$s = \sqrt[3]{V} = \sqrt[3]{1{,}000{,}000} = 100$ cm
Semua persegi Panjang akan memiliki satu sisi sepanjang 100 cm.

Untuk mencari luas minimum, kita perlu mencari tinggi minimum (t_{min}) untuk setiap persegi Panjang.
Syarat Luas Minimum:
Luas persegi Panjang adalah $L = s \times t$. Karena s tetap (100 cm), L minimum jika t minimum.
t adalah jaral dari titik sudut yang terletak di garis l ke garis rusuk yang bersangkutan.
Posisi Garis l:
Garis l melalui titik pusat alas O. Titik pusat O memiliki jarak minimum ke keempat rusuk alas, yaitu setengah dari Panjang rusuk.
Tinggi Minimum (t_{min}):
Titik pada garis l yang memiliki jarak minimum ke rusuk alas adalah titik O itu sendiri. Jarak minimum dari O ke setiap rusuk adalah:
$$t_{min} = \frac{s}{2} = \frac{100}{2} = 50 \text{ cm}$$
Catatan: Informasi $d(l, A) = 30\sqrt{2}$ cm menegaskan posisi l tetapi tidak memengaruhi hasil minimum, karena jarak terpendek ke rusuk tetap terjadi di O.

Karena ada empat persegi Panjang (satu untuk setiap rusuk alas), dan semuanya identic dalam hal luas minimum:
Luas minimum satu persegi Panjang (L_{min}):
$$L_{min} = s \times t_{min} = 100 \times 50 = 5000 \text{ cm}^2$$
Jumlah luas minimum total:
$$\text{Total Luas Min} = 4 \times L_{min} = 4 \times 5000 \text{ cm}^2$$
$$\text{Total Luas Min} = 20{,}000 \text{ cm}^2$$

Jadi, jumlah luas minimum keempat persegi Panjang tersebut adalah 20,000 cm^2.

2. **Penyelesaian:**

Kita perlu minimal 2021 kartu. Jumlah kartu setelah k pengambilan adalah $T_k = \frac{k(k+1)}{2}$.

$$T_k \geq 2021 \Longrightarrow k(k+1) \geq 4042$$

- Karena $\sqrt{4042} \approx 63.5$, kita coba $k = 64$.
- $T_{64} = \frac{64 \times 65}{2} = 2080$ kartu.

Proses berhenti setelah 64 kali pengambilan.

Untuk membuat setiap kartu sekecil mungkin, kita harus memilih bilangan terkecil yang memenuhi semua aturan paritas dan urutan.

- Aturan A2 (Urutan): Kartu terkecil di S_i harus $> M_{i-1}$ (kartu terbesar sebelumnya). Kita pilih M_i sekecil mungkin, yaitu $M_i \approx M_{i-1} + 1 + 2(i-1)$.
- Aturan A3 (Paritas): Paritas harus berselang-seling. Memulai dengan $S_1 = \{1\}$ (Ganjil) akan menghasilkan nilai terkecil.

Strategi yang menghasilkan set terkecil adalah $M_i = i^2$.

- Kartu terbesar setelah 63 pengambilan: $M_{63} = 63^2 = 3969$.
- $T_{63} = \frac{63 \times 64}{2} = 2016$ kartu.
  Ini berarti 2016 kartu terkecil sudah diambil di set S_1 hingga S_{63}.

Kartu dengan kode 2021 adalah kartu ke-2021 terkecil.

1. Posisi Kartu:
   Kartu ke-2021 adalah kartu ke-(2021 – 2016) = ke -5 di set S_{64}.
2. Sifat Set S_{64}:
   Karena S_{63} Ganjil, maka S_{64} harus Genap.
   S_{64} harus dimulai dari bilangan genap terkecil yang lebih besar dari $M_{63} = 3969$.
   Kartu pertama $(j = 1)$ di S_{64} adalah 3970.
3. Nilai Kartu ke-5 $(j = 5)$:
   Kartu-kartu di S_{64} adalah bilangan genap berurutan: $c_j = 3970 + 2(j-1)$.
   Untuk $j = 5$:

$$c_5 = 3970 + 2(5-1)$$
$$c_5 = 3970 + 8$$
$$c_5 = 3978$$

Jadi, Bilangan bulat terkecil yang mungkin ada di kartu dengan kode 2021 adalah 3978.

3. **Penyelesaian:**

Pemain menang jika total jumlah semua nomor yang dilalui anak panah $(T = X_1 + X_2 + X_3 + X_4)$ adalah ganjil.

Total T adalah ganjil jika dan hanya jika terdapat jumlah ganjil dari komponen ganjil (X_i) yang dijumlahkan. (Yaitu 1 atau 3 dari 4 nilai X_i harus ganjil).

Kita hanya perlu melihat rasio daerah Ganjil terhadap total daerah di setiap lingkaran.

Lingkaran (i)	Total Daerah (N_i)	Daerah Ganjil (N_{G_i})	$P(G_i) = N_{G_i}/N_i$	$P(E_i) = 1 - P(G_i)$
1	2	1 (Nomor 1)	1/2	1/2
2	3	2 (Nomor 3, 5)	2/3	1/3
3	4	2 (Nomor 7, 9)	1/2	1/2
4	5	3 (Nomor 11, 13, 15)	3/5	2/5

Peluang menang $P(W)$ adalah probabilitas bahwa tepat 1 atau 3 dari 4 nilai X_i adalah Ganjil.
Rumus sederhana untuk $P(W)$:

$$P(W) = P(1\text{ Ganjil}) + P(3\text{ Ganjil})$$

Kita hitung semua peluang ini, dengan penyebut Bersama 60 ($2 \times 3 \times 2 \times 5$).

1. Peluang tepat satu ganjil (GEEE + EGEE + EEGE + EEEG)
   - GEEE: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{60}$
   - EGEE: $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{60}$
   - EEGE: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{2}{60}$
   - EEEG: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{60}$

$$P(1\text{ Ganjil}) = \frac{2+4+2+3}{60} = \frac{11}{60}$$

2. Peluang tepat tiga ganjil (GGGE + GGEG + GEGG + EGGG)
   - GGGE: $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{60}$
   - GGEG: $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{60}$
   - GEGG: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{60}$
   - EGGG: $\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{60}$

$$P(3\text{ Ganjil}) = \frac{4+6+3+6}{60} = \frac{19}{60}$$

3. Peluang Total Menang

$$P(\text{Menang}) = P(1\text{ Ganjil}) + P(3\text{ Ganjil}) = \frac{11}{60} + \frac{19}{60} = \frac{30}{60}$$

$$P(\text{Menang}) = \frac{1}{2}$$

Jadi, peluang pemain tersebut menjadi pemenang adalah $\frac{1}{2}$.

4. **Penyelesaian:**

Kita memiliki 8 bola. Jumlah bola Merah (R), Hijau (H) dan Biru (B) selalu berjumlah 8.

Aturan Kunci: Transisi

1. Transisi $x \to x-1$ (Komposisi Berubah): Hanya terjadi jika terambil 1 Merah dan 1 Hijau.
   Bola dibuang, 2 Biru dimasukkan.
   - $R \to R-1, H \to H-1, B \to B+2$
2. Transisi $x \to x$ (Komposisi Tetap): Terjadi pada semua kondisi pengambilan lainnya. Bola dikembalikan.

Hubungan R dan H

- Awalnya: $R = 4, H = 4$
- Karena transisi hanya mengurangi R dan H secara bersamaan ($R-1$ dan $H-1$), maka R akan selalu sama dengan H sepanjang proses ($R = H = x$).
- Total pengambilan yang mungkin: $\binom{8}{2} = 28$ cara.

Peluang hanya mungkin jika $y = x-1$ atau $y = x$.

A. Peluang berubah $(P_{x,x-1})$

$P_{x,x-1}$ adalah peluang mengambil 1 Merah dan 1 Hijau, ketika $R = H = x$.

$$P_{x,x-1} = \frac{\binom{x}{1}\binom{x}{1}}{28} = \frac{x^2}{28}$$

x (Jumlah Hijau)	$R = H = x$	$P_{x,x-1}$	Nilai (Penyebut 28)
4	4	$4^2/28 = 16/28$	**16/28** $(4/7)$
3	3	$3^2/28 = 9/28$	**9/28**
2	2	$2^2/28 = 4/28$	**4/28** $(1/7)$
1	1	$1^2/28 = 1/28$	**1/28**

B. Peluang tetap $(P_{x,x})$

$P_{x,x}$ adalah peluang bahwa komposisi tidak berubah, yaitu $1 - P_{x,x-1}$.

x (Jumlah Hijau)	$P_{x,x-1}$	$P_{x,x} = 1 - P_{x,x-1}$	Nilai (Penyebut 28)
4	$16/28$	$12/28$	**12/28** $(3/7)$
3	$9/28$	$19/28$	**19/28**
2	$4/28$	$24/28$	**24/28** $(6/7)$
1	$1/28$	$27/28$	**27/28**

Semua nilai peluang transisi $P_{x,y}$ yang mungkin, disajikan dengan penyebut 28:

$$\left\{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{28}}, \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{28}}, \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{28}}, \frac{\mathbf{12}}{\mathbf{28}}, \frac{\mathbf{16}}{\mathbf{28}}, \frac{\mathbf{19}}{\mathbf{28}}, \frac{\mathbf{24}}{\mathbf{28}}, \frac{\mathbf{27}}{\mathbf{28}}\right\}$$

5. **Penyelesaian:**

n adalah banyaknya angka 1 pada hasil penjumlahan:

$$S = 1 + 11 + 111 + \cdots + \underbrace{11\ldots1}_{201}$$

Penjumlahan ini dapat dihitung dengan manipulasi aljabar:

$$S = \frac{1}{9}\left(\sum_{i=1}^{201}(10^i - 1)\right) = \frac{1}{9}\left(\underbrace{11\ldots10}_{201} - 201\right)$$

Hasil penjumlahan S akan memiliki pola digit 123456790 yang berulang. Dalam setiap 10 digit (misalnya, kolom ke-10 hingga ke-19), angka 1 muncul tepat satu kali (selain pada pola awal).

- Karena $201 \approx 20 \times 10$, pola 123456790 berulang kira-kira 20 kali.
- Angka 1 muncul di kolom satuan (1 kali).
- Angka 1 muncul di setiap perulangan 10 kolom (20 kali).

$$n = 1(\text{dari kolom 1}) + 20(\text{dari 20 perulangan}) = 21$$

Substitusikan $n = 21$ ke persamaan:

$$\underbrace{11\ldots1}_{21}\underbrace{00\ldots0}_{23} + \underbrace{88\ldots80}_{21} = 9(k^2 - 1)$$

Perhatikan bahwa bilangan di Ruas Kiri (LK) dapat direpresentasikan sebagai selisih kuadrat yang hamper sempurna.

Misalkan $A = \underbrace{11\ldots1}_{22}$ (bilangan dengan 22 angka 1).

Maka $9k^2$ akan berelasi dengan $(9A)^2$

Kita focus pada identitas kuadrat $81k^2$:

$$81k^2 = \underbrace{10^{44} - 20 \cdot 10^{21} + 1}_{\text{Dari manipulasi LK}}$$

Perhatikan suku-suku ini:

- 10^{44}
- $20 \cdot 10^{21} = 2 \cdot 10^{22}$
- 1

Ini adalah bentuk umum dari $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$:

$$10^{44} - 2 \cdot 10^{22} + 1 = (10^{22} - 1)^2$$

Menghitung k

$$81k^2 = (10^{22} - 1)^2$$

Ambil akar kuadrat positif:

$$9k = 10^{22} - 1$$

Karena $10^{22} - 1$ adalah $\underbrace{99 \dots 9}_{22}$, maka:

$$9k = \underbrace{99 \dots 9}_{22}$$

$$k = \underbrace{11 \dots 1}_{22}$$

k adalah bilangan yang terdiri dari 22 buah angka 1.
Jadi, banyak digit dari k adalah 22.

6. Penyelesaian:

Peluang terambilnya fungsi "asyik" (P(asyik)) adalah perbandingan antara jumlah fungsi asyik (n(asyik)) dengan jumlah total fungsi (n(total)).

$$P(\text{asyik}) = \frac{n(\text{asyik})}{n(\text{total})}$$

Hitung jumlah total fungsi (n(total))

- $A = \{a, e, i, o, u, x, y, z\} \Longrightarrow n(A) = 8$
- $B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\} \Longrightarrow n(B) = 7$

Jumlah total fungsi dari A ke B adalah $n(B)^{n(A)}$.

$$n(total) = 7^8 = 5.764.801$$

Hitung jumlah fungsi "asyik" (n(asyik))

Fungsi "asyik" harus surjektif dan memetakan vocal ke genap, serta konsonan ke ganjil.

a. Pemetaan vocal ke bilangan genap (Harus Surjektif)
   - Vocal $(A_v): \{a, e, i, o, u\} \Longrightarrow n(A_v) = 5$
   - Genap $(B_e): \{-2, 0, 2, 4\} \Longrightarrow n(B_e) = 4$

Banyaknya fungsi surjektif dari 5 anggota ke 4 anggota adalah:

$$\begin{aligned} n(\text{vokal}) &= \sum_{i=0}^{4} (-1)^i \binom{4}{i} (4-i)^5 \\ &= \binom{4}{0}4^5 - \binom{4}{1}3^5 + \binom{4}{2}2^5 - \binom{4}{3}1^5 \\ &= 1(1024) - 4(243) + 6(32) - 4(1) \\ &= 1024 - 972 + 192 - 4 \\ &= \mathbf{240} \end{aligned}$$

b. Pemetaan konsonan ke bilangan ganjil (Harus Surjektif)
- Konsonan $(A_c): \{x, y, z\} \Longrightarrow n(A_c) = 3$
- Ganjil $(B_o): \{-1,1,3\} \Longrightarrow n(B_o) = 3$

Karena jumlah anggota domain dan kodomain sama (3 ke 3), banyaknya fungsi surjektif adalah sama dengan banyaknya fungsi bijektif, yaitu 3! (factorial 3).

$$n(\text{konsonan}) = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

c. Total fungsi asyik

$$n(\text{asyik}) = n(\text{vokal}) \times n(\text{konsonan}) = 240 \times 6 = 1440$$

Hitung peluang

$$P(\text{asyik}) = \frac{n(\text{asyik})}{n(\text{total})} = \frac{1440}{7^8}$$

Jadi, peluang terambilnya fungsi "asyik" adalah:

$$P = \frac{1440}{5764801}$$

7. Penyelesaian:

Sederhanakan solusi untuk fungsi polynomial $T(x)$

Tujuan kita adalah mencari bentuk $T(x)$ dari persamaan:

$$2T\big(-c + 2T(x)\big) = c + x^{16}$$

Asumsikan $T(x)$ berderajat n, sehingga $T(x) \approx ax^n$.

- Derajat kanan (RHS): x^{16}, jadi derajatnya adalah 16.
- Derajat kiri (LHS): $2T(\dots)$. Karena $2T(x)$ berderajat n, maka $T(2T(x))$ berderajat $n \times n = n^2$.

Menyamakan derajat LHS dan RHS:

$$n^2 = 16 \Longrightarrow n = 4$$

$T(x)$ adalah polynomial berderajat 4.

Karena RHS hanya memiliki suku x^{16} dan konstanta c (tidak ada suku x^{15} hingga x^1), ini mengisyaratkan bahwa $T(x)$ harus berupa bentuk sederhana:

$$T(x) = ax^4 + f$$

Substitusikan bentuk ini kembali ke persamaan dan focus pada suku dengan derajat tertinggi (x^{16}):

- $T(\dots) = a(\dots)^4 + f$
- $2T\big(-c + 2T(x)\big) \approx 2 \cdot a \cdot \big(2T(x)\big)^4$ (hanya melihat suku derajat tertinggi)
- $2T\big(-c + 2T(x)\big) \approx 2a\big(2(ax^4)\big)^4 = 2a(16a^4x^{16}) = 32a^5x^{16}$

Samakan koefisien x^{16} dengan RHS ($1 \cdot x^{16}$):

$$32a^5 = 1 \Rightarrow a^5 = \frac{1}{32} \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

Bentuk $T(x)$ sekarang menjadi:

$$T(x) = \frac{1}{2}x^4 + f$$

Gunakan syarat yang diketahui: $T(2) = 2021$.

$$T(2) = \frac{1}{2}(2)^4 + f = 2021$$
$$T(2) = \frac{1}{2}(16) + f = 2021$$
$$8 + f = 2021$$
$$f = 2021 - 8$$
$$f = 2013$$

Jadi, Fungsi suku banyak $T(x)$ adalah

$$T(x) = \frac{1}{2}x^4 + 2013$$

8. Penyelesaian:

Bilangan $N = aba$ memiliki digit a dan b dengan $a \times b = 24$
Pasangan (a, b) yang mungkin: (3, 8), (4, 6), (6, 4), (8, 3)
Nilai N yang mungkin: 383, 464, 646, 838

Untuk barisan $x_1, \dots, x_m$ yang memenuhi $\sum x_i = N$ dan $\prod x_i = N$, kita ingin memaksimalkan m.
Cara tercepat untuk memaksimalkan m adalah dengan memasukkan sebanyak mungkin suku bernilai 1 ke dalam barisan.
Misalkan barisan terdiri dari k suku bernilai 1 dan p suku $(y_1, \dots, y_p)$ yang bernilai lebih dari 1.

$$m = k + p$$

Dari sifat barisan:

1. Hasil kali: $y_1 y_2 \dots y_p = N$

2. Jumlah: $k + y_1 + y_2 + \cdots + y_p = N$

Untuk memaksimalkan m (atau k), kita harus meminimalkan jumlah $\sum y_i$.

$$\text{maksimum } m \text{ terjadi saat } k \text{ maksimum, yaitu saat } \sum y_i \text{ minimum.}$$

Jadi, kita harus mencari faktorisasi $N = y_1 y_2 \ldots y_p$ yang menghasilkan $\sum y_i$ terkecil. Faktorisasi yang meminimalkan jumlah adalah faktorisasi yang melibatkan factor-faktor terkecil, yaitu factor prima dari N.

Kita faktorkan setiap N menjadi factor prima (y_i) dan hitung m.

A. $N = 383$
- Faktorisasi: 383 (383 adalah bilangan prima). $\Longrightarrow y_1 = 383$
- $\sum y_i = 383$
- $k = N - \sum y_i = 383 - 383 = 0$
- $m = 0 + 1 = 1$

B. $N = 464$
- Faktorisasi: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 29$ (Menggunakan factor prima terkecil).
- $\sum y_i = 2 + 2 + 2 + 2 + 29 = 37$
- $k = N - \sum y_i = 464 - 37 = 427$
- $m = 427 + 5 = 432$

C. $N = 646$
- Faktorisasi: $2 \cdot 17 \cdot 19$
- $\sum y_i = 2 + 17 + 19 = 38$
- $k = N - \sum y_i = 646 - 38 = 608$
- $m = 608 + 3 = 611$

D. $N = 838$
- Faktorisasi: $2 \cdot 419$ (419 adalah bilangan prima)
- $\sum y_i = 2 + 419 = 421$
- $k = N - \sum y_i = 838 - 421 = 417$
- $m = 417 + 2 = 419$

Dengan membandinglan semua nilai m yang mungkin: 1, 432, 611, 419
Nilai terbesar m yang mungkin adalah 611.

9. Penyelesaian:

E dan F adalah titik singgung pada diagonal $AC = 9$. Jarak dari titik sudut A ke titik singgung dihitung dengan rumus Panjang singgung (t) dari A:

$$t = \text{Setangah Keliling } (s) - \text{Sisi Berhadapan}$$

Jarak AE (di ΔABC):

- Sisi ΔABC: 2, 8, 9
- Setengah Keliling $s_1 = \frac{2+8+9}{2} = \frac{19}{2}$
- $AE = s_1 - BC = \frac{19}{2} - 8 = \frac{3}{2} = 1.5$

Jarak AF (di ΔADC):

- Sisi ΔADC: 7, 6, 9
- Setengah Keliling $s_2 = \frac{7+6+9}{2} = 11$
- $AF = s_2 - CD = 11 - 6 = 5$

Panjang Alas EF:

$$EF = |AF - AE| = |5 - 1.5| = 3.5 = \frac{7}{2}$$

M adalah pusat lingkaran dalam ΔABC. Karena E adalah titik singgung pada AC, maka ME tegak lurus AC. ME adalah tinggi segitiga ΔEFM dan sama dengan jari-jari lingkaran dalam ΔABC, r_1.

$$r_1 = \frac{\text{Luas}(\Delta ABC)}{s_1}$$

a. Luas ΔABC (Rumus Heron):

$$\text{Luas}(\Delta ABC) = \sqrt{\frac{19}{2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{15}{2}\right)} = \frac{\sqrt{19 \cdot 45}}{4} = \frac{3\sqrt{95}}{4}$$

b. Tinggi $ME = r_1$:

$$r_1 = \frac{3\sqrt{95}/4}{19/2} = \frac{3\sqrt{95}}{4} \cdot \frac{2}{19} = \frac{3\sqrt{95}}{38}$$

Luas L adalah Luas(ΔEFM):

$$L = \frac{1}{2} \times EF \times ME = \frac{1}{2} \times \frac{7}{2} \times \frac{3\sqrt{95}}{38}$$

$$L = \frac{21\sqrt{95}}{152}$$

Kuadratkan L:

$$L^2 = \left(\frac{21\sqrt{95}}{152}\right)^2 = \frac{21^2 \cdot 95}{152^2}$$

Sederhanakan dengan membagi factor yang sama ($95 = 5 \times 19$ dan $152 = 8 \times 19$):

$$L^2 = \frac{441 \cdot (5 \cdot 19)}{(8 \cdot 19)^2} = \frac{441 \cdot 5 \cdot 19}{64 \cdot 19^2}$$

$$L^2 = \frac{441 \cdot 5}{64 \cdot 19} = \frac{2205}{1216}$$

Nilai maksimum dari L^2 adalah $\frac{2205}{1216}$.

10. Penyelesaian:

Misalkan N adalah nomor urut kubus yang ingin kit acari posisinya. Dalam kasus ini, $N = 2021$. Posisi kubus dalam piramida 100 tingkat ditulis sebagai (m, r, c), dimana: Posisi kubus dalam piramida 100 tingkat ditulis sebagai (m, r, c), di mana:

- m = Lapisan (dihitung dari puncak, Lapisan 1 adalah puncak).
- r = Baris di lapisan m.
- c = Kolom di lapisan m.

Lapisan m adalah jumlah lapisan minimum sehingga jumlah total kubus dari Lapisan 1 hingga Lapisan m mencapai atau melebihi $N = 2021$.
Jumlah kubus di setiap lapisan k adalah k^2. Jumlah total kubus dari Lapisan 1 hingga m adalah $\sum_{k=1}^{m} k^2$.
Kita cari m terkecil sehingga:

$$\sum_{k=1}^{m} k^2 \geq 2021$$

m	$\sum_{k=1}^{m} k^2$	Keterangan
10	385	Terlalu Kecil
15	1240	Terlalu Kecil
16	$1240 + 16^2 = 1496$	Terlalu Kecil
17	$1496 + 17^2 = 1785$	Terlalu Kecil
18	$1785 + 18^2 = 2109$	≥ 2021

Kubus ke-2021 terletak di Lapisan $m = 18$

Kita hitung nomor urut kubus N_{18} relatif di lapisan 18. Ini adalah sisa setelah mengurangi total kubus dari lapisan sebelumnya.

$$N_{18} = N - \sum_{k=1}^{17} k^2 = 2021 - 1785 = 236$$

Ini berarti kubus yang kita cari adalah kubus ke-236 di lapisan 18.

Lapisan 18 adalah matriks 18×18. Kubus dihitung baris per baris.
Karena lapisan 18 memiliki 18 kolom, maka setiap baris (r) memiliki 18 kubus.

$$r = \left\lceil \frac{N_{18}}{18} \right\rceil$$

$$r = \left\lceil \frac{236}{18} \right\rceil = \lceil 13.11 \ldots \rceil = 14$$

Kolom c adalah sisa dari pembagian N_{18} dengan 18.

$$c = N_{18} \pmod{18}$$

Jika N_{18} habis dibagi 18, maka $c = 18$.

$$c = 236 \pmod{18}$$

$$236 = 13 \times 18 + 2$$

$$c = 2$$

Jadi, Posisi kubus ke-2021 adalah:

$$(m, r, c) = (18,14,2)$$