PEMBAHASAN

OSK MATEMATIKA SMA

TAHUN 2025

1. **Jawaban: 27**

   Persamaan $n^2 + 4n + 3 = 16m$ dapat diubah menjadi $(n + 1)(n + 3) = 16m$. Agar m bilangan bulat, maka n harus $n \equiv 5 \pmod 8$ atau $n \equiv 7 \pmod 8$. Banyak nilai n yang memenuhi adalah

   $$\left\lfloor \frac{110-5}{8} + 1 \right\rfloor + \left\lfloor \frac{110-7}{8} + 1 \right\rfloor = 14 + 13 = 27$$

2. **Jawaban : 13**

   Kita ketahui bahwa $1430 = 2 \times 5 \times 11 \times 13$ yaitu perkalian 4 bilangan prima sehingga n terkecil adalah faktor prima terbesar 1430 yaitu 13.

3. **Jawaban : 21**

   Dengan Teorema Phytagoras, $AD = \sqrt{(25\sqrt{2})^2 - (27-22)^2} = \sqrt{25 \times 50 - 25} = 35$. Karena $BE = EC$, dengan menggunakan Teorema Phytagoras, kita dapatkan

   $$BE^2 = EC^2 \Rightarrow AE^2 + 22^2 = (35 - AE)^2 + 27^2 \Rightarrow 70AE = 1470 \Rightarrow AE = 21$$

4. **Jawaban: 18**

   Dengan Prinsip Inklusi-Ekslusi, kita dapat menghitung banyak himpunan bagiannya yaitu banyak himpunan yang memuat himpunan $\{1,2,3,4,5\}$ ditambah banyak himpunan yang memuat himpunan $\{4,5,6\}$ dikurang banyak himpunan yang memuat himpunan $\{1,2,3,4,5,6\}$. Maka jawabannya adalah $2^2 + 2^4 - 2 = 4 + 16 - 2 = 18$

5. **Jawaban: 9**

   Kita ketahui terdapat 9 pasang bilangan bulat positif lebih kecil dari 18 dimana jumlahnya sama dengan 18. Pasangan-pasangan ini terdiri dari 8 pasang dengan dua bilangan berbeda dan 1 pasang dengan bilangan yang sama yaitu (9,9). Agar Afif dapat menuliskan 9 bilangan yang memenuhi kriteria soal, Afif hanya boleh memilih 1 bilangan dari tiap pasang. Karena ada 1 pasang yang terdiri dari (9,9), maka Afif pasti menulis bilangan 9.

6. **Jawaban : 15**

   Dari Binomial Newton, kita ketahui bahwa koefisien x^2 adalah ${}_nC_2 \cdot 3^{n-2}$, maka kita dapatkan

$$81k = \frac{n(n-1)}{2} \cdot 3^{n-2} \Longrightarrow k = \frac{n(n-1)}{2} \cdot 3^{n-6}$$

   Nilai n terkecil yang memenuhi adalah $n = 6$ sehigga k terkecil adalah $\frac{6\cdot 5}{2} \cdot 3^{6-6} = 15$

7. **Jawaban : 18**

   Misalkan R adalah jari-jari lingkaran luar segitiga sama sisi tersebut, maka diperoleh

$$R = \frac{s^3}{4\left(\frac{s^2}{4}\sqrt{3}\right)} = \frac{s}{\sqrt{3}}$$

$$s = R\sqrt{3}$$

   Karena ABD sama sisi, maka BP adalah garis bagi sehingga $\angle PBA = 30^\circ$. Akibatnya, $\angle PBC = 150^\circ$. Dengan aturan cosinus, diperoleh

$$PC^2 = BP^2 + BC^2 - 2 \cdot BP \cdot BC \cdot \cos 150^o$$

$$\mathrm{PC}^2 = \mathrm{R}^2 + 3\mathrm{R}^2 - 2 \cdot R \cdot R\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 7R^2$$

$$PC = R\sqrt{7}$$

   Misalkan jari-jari lingkaran luar BPC adalah R_{BPC}, maka dengan rumus $R = \frac{abc}{4L}$ diperoleh

$$126 = \pi R_{BPC}^2 = \pi\left(\frac{R\cdot R\sqrt{3}\cdot R\sqrt{7}}{4\cdot\frac{1}{2}R\cdot R\sqrt{3}\cdot \sin 150^o}\right)^2 = 7\pi R^2$$

$$R = \sqrt{\frac{18}{\pi}}$$

Dengan argumen yang sama, diperoleh $\angle QBC = 30^\circ$, sehingga $\angle PBQ = 120^\circ$. Dengan aturan cosinus, diperoleh

$$PC^2 = R^2 + R^2 - 2 \cdot R \cdot R \cdot \cos 120^\circ$$

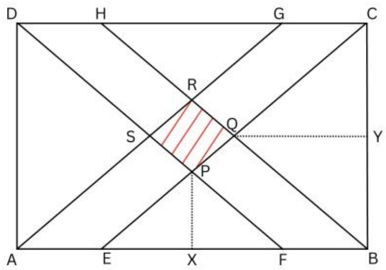
$$PQ = R\sqrt{3}$$

Akibatnya, diperoleh luas lingkaran luar segitiga BPQ adalah

$$\pi . R_{BPQ}^2 = \pi \cdot \left(\frac{R \cdot R \cdot R\sqrt{3}}{4 \cdot \frac{1}{2} R \cdot R \cdot \sin 120^o} \right)^2 = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot \frac{18}{\pi} = 18$$

8. **Jawaban : 36**

Perhatikan gambar berikut!



Misalkan garis DF dan EC berpotongan di titik P, garis BH dan EC berpotongan di titik Q, garis BH dan GA berpotongan di titik R, serta garis GA dan DF berpotongan di titik S. Titik X pada ruas garis EF sehingga $PX \perp EF$ dan titik Y pada garis BC sehingga $QY \perp BC$. Kita ketahui panjang $CY = 13$ dan $EF = BE + AF - AB = 40$ sehingga $AE = 12$ dan $EX = 20$. Perhatikan bahwa $\triangle EXP \sim \triangle EBC$, maka $PX = \frac{EX}{EB} \cdot BC = 10$. Jelas bahwa $PQRS$ adalah belah ketupat dengan $d_1 = AE = 12$ dan EB $d_2 = 26 - 10 - 10 = 6$, maka luas $PQRS$ adalah $\frac{6 \cdot 12}{2} = 36$

9. **Jawaban: 36**

Perhatikan bahwa persamaan soal dapat kita tuliskan sebagai

$$P(r) = (r - 1)^5 + 4$$

dengan $r = 5^b - 1$. Kemudian, misalkan $Q(x) = P(x) - (x-1)^5 - 4$. Karena $Q(r) = 0$ untuk setiap bilangan asli b, maka $Q(x)$ memiliki sebanyak tak hingga akar. Akibatnya, $Q(x) = 0$, sehingga $P(x) = (x-1)^5 + 4$.

Maka, diperoleh $P(3) = (3-1)^5 + 4 = 36$.

10. **Jawaban: 25**

Kita dapat menulis ulang persamaan menjadi $x^2 + mx + 37 - m = 0$. Agar persamaan tidak memiliki akar real, maka diskriman harus negatif.

$$D < 0 \Rightarrow m^2 - 4 \cdot 1 \cdot (37 - m) < 0 \Rightarrow m^2 + 4m - 148 < 0$$

Kita dapat cari batas nilai m yaitu

$$-2 - \sqrt{152} < m < -2 + \sqrt{152} \Longrightarrow -14, \dots < m < 10, \dots$$

Jadi, terdapat 25 nilai m yang memenuhi.

11. **Jawaban : 23**

Kita dapat tulis ulang pernyataan menjadi

$$FPB\left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) < 100 \Longrightarrow FPB\left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{(2n+1)}{3}\right)$$

a. Jika $n = 3k$ dengan k bilangan asli, maka kita dapatkan

$$FPB\left(\frac{3k(3k+1)}{2}, \frac{k(3k+1)}{2} \cdot (6k+1)\right) = \frac{k(3k+1)}{2} < 100$$

Nilai k terbesar adalah 7 sehingga n terbesar adalah 21.

b. Jika $n = 3k-1$ dengan k bilangan asli, maka kita dapatkan

$$FPB\left(\frac{(3k-1)3k}{2}, \frac{(3k-1)k}{2} \cdot (6k-1)\right) = \frac{(3k-1)k}{2} < 100$$

Nilai k terbesar adalah 8 sehingga n terbesar adalah 23.

c. Jika $n = 3k-2$ dengan k bilangan asli, maka kita dapatkan

$$FPB\left(\frac{(3k-1)(3k-2)}{2}, \frac{(3k-1)(3k-2)}{2} \cdot (2k-1)\right) = \frac{(3k-1)(3k-2)}{2} < 100$$

Nilai k terbesar adalah 5 sehingga n terbesar adalah 13.

Jadi, nilai maksimum n adalah 23.

12. **Jawaban: 33 atau 63**

Tanpa mengurangi keumuman, $OD = 25$, dan $OE = 39$. Kita akan cari nilai dari OF. Karena O adalah titik pusat lingkaran luar segitiga ABC, dan D,E,F adalah titik tengah dari ketiga sisi segitiga, maka diperoleh $OD \perp BC, OE \perp AC$, dan $OE \perp AB$. Jelas bahwa $AO = BO = CO = 65$. Dengan Teorema Phytagoras, diperoleh

$$AE = \sqrt{AO^2 - OE^2} = \sqrt{65^2 - 39^2} = \sqrt{104 \cdot 26} = 52$$

$$CD = \sqrt{65^2 - 25^2} = \sqrt{90 \cdot 40} = 60$$

Akibatnya, $AC = 104$, $BC = 120$. Misalkan $AB = 2x$, dengan rumus $R = \frac{abc}{4L}$, diperoleh

$$65 = \frac{104 \cdot 120 \cdot 2x}{4\sqrt{(112+x)(x+8)(x-8)(112-x)}} = \frac{6240x}{\sqrt{(112^2-x^2)(x^2-64)}} = \frac{6240x}{\sqrt{-x^4+(112^2+64)x^2-112^2 \cdot 64}}$$

Kemudian, akan diperoleh

$$-x^4 + (112^2 + 64)x^2 - 112^2 \cdot 64 = \left(\frac{6240x}{65}\right)^2 = 96^2x^2$$

Persamaan yang diperoleh akan menjadi

$$x^4 - (112^2 - 96^2 + 64)x^2 + 112^2 \cdot 64 = 0 \Rightarrow x^4 - 3392x^2 + 112^2 \cdot 64 = 0 \Rightarrow (x^2 - 56^2)(x^2 - 16^2) = 0$$

Karena x pasti positif, maka $x = 16$ atau $x = 56$. Jika $x = 16$, diperoleh

$$OF = \sqrt{65^2 - 16^2} = \sqrt{81 \cdot 49} = 63$$

Jika x = 56, diperoleh

$$OF = \sqrt{65^2 - 56^2} = \sqrt{121 \cdot 9} = 33$$

Terdapat kekurangan informasi pada soal yang didapatkan. Jika ABC lancip, maka $OF = 33$. *Sebaliknya, jika ABC tumpul, maka* $OF = 63$. *Pemilihan lancip atau tumpul tersebut didasarkan pada ketaksamaan* $BC^2 > AC^2 + AB^2$ *untuk tumpul, dan* $BC^2 < AC^2 + AB^2$ *untuk lancip.*

13. **Jawaban : 15**

Misalkan S_k adalah gabungan digit-digit dari 6 hingga k. Perhatikan bahwa,

$$S_6 = 6 \equiv -1 \bmod 7$$

$$S_7 = 67 \equiv -3 \bmod 7$$

$$S_8 = 678 \equiv -1 \bmod 7$$

$$S_9 = 6789 \equiv -1 \bmod 7$$

Untuk selanjutnya, setiap suku menambah 2 digit baru, jadi untuk $10 \leq k \leq 99$, kita punya

$$S_k = S_{k-1} \times 10^2 + k$$

Dengan modulo 7, kita peroleh

$$S_k \equiv 2S_{k-1} + k \bmod 7$$

Akibatnya, kita akan peroleh

$$S_{10} \equiv 2(-1) + 10 \equiv 8 \equiv 1 \bmod 7$$

$$S_{11} \equiv 2(1) + 11 \equiv 13 \equiv -1 \bmod 7$$

$$S_{12} \equiv 2(-1) + 12 \equiv 10 \equiv 3 \bmod 7$$

$$S_{13} \equiv 2(3) + 13 \equiv 16 \equiv 5 \bmod 7$$

$$S_{14} \equiv 2(5) + 14 \equiv 24 \equiv 3 \bmod 7$$

$$S_{15} \equiv 2(3) + 15 \equiv 21 \equiv 0 \bmod 7$$

Jadi, n terkecil yang memenuhi sehingga S_n kelipatan 7 adalah 15

14. **Jawaban: 61**

Perhatikan bahwa,

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{1+x+y} + \frac{1}{1+y+z} + \frac{1}{1+z+x} = \frac{1}{1+x+y} + \frac{4}{4+4y+4z} + \frac{2}{2+2z+2x}$$

Dengan Ketaksamaan Cauchy Schwarz Engel, diperoleh

$$\frac{1}{4} = \frac{1^2}{1+x+y} + \frac{2^2}{4+4y+4z} + \frac{(\sqrt{2})^2}{2+2z+2x} \geq \frac{\left(1+2+\sqrt{2}\right)^2}{7+3x+5y+6z} = \frac{11+6\sqrt{2}}{7+3x+5y+6z}$$

yang menyebabkan

$$7 + 3x + 5y + 6z \geq 4\left(11 + 6\sqrt{2}\right) = 44 + 24\sqrt{2}$$

$$3x + 5y + 6z \geq 37 + 24\sqrt{2}$$

Kesamaan terjadi ketika

$$\frac{1}{1 + x + y} = \frac{2}{4 + 4y + 4z} = \frac{\sqrt{2}}{2 + 2z + 2x}$$

Atau

$$\{x, y, z\} = \{\sqrt{2} + 1 + (3 + 2\sqrt{2})z, \sqrt{2} + (1 + 2\sqrt{2})z, z\}, z \in \mathbb{R}^+$$

Jadi, $A + B = 37 + 24 = 61$

15. **Jawaban: 33**

Kita perlu cari a ganjil sehingga $\frac{579}{a} - \frac{579}{a+2} \geq 1$

Perhatikan bahwa

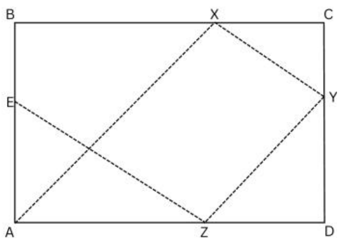
$$\frac{579(a + 2) - 579(a)}{a(a + 2)} \geq 1 \Longrightarrow 579 \cdot 2 \geq a(a + 2) \Longrightarrow 1158 \geq a(a + 2)$$

Nilai maksimum a adalah 33, maka $a \leq 33 \Longrightarrow \frac{579}{a} - \frac{579}{a+2} \geq 1 \Longrightarrow \left\lfloor \frac{579}{a} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{579}{a+2} \right\rfloor$. Jadi, barisan $\left\lfloor \frac{579}{1} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{579}{3} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{579}{5} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{579}{33} \right\rfloor$ memiliki $(33 + 1) : 2 = 17$ bilangan bulat berbeda.

Untuk $a \geq 35$, $\frac{579}{a} - \frac{579}{a+2} < 1$. Karena $\frac{579}{a} - \frac{579}{a+2} < 1$, maka $\left\lfloor \frac{579}{a} \right\rfloor$ dan $\left\lfloor \frac{579}{a+2} \right\rfloor$ pasti berselisih 0 atau 1.

Jadi semua bilangan pada barisan $\left\lfloor \frac{579}{35} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{579}{37} \right\rfloor, \dots, \left\lfloor \frac{579}{579} \right\rfloor$ terdiri dari angka 1 hingga $\left\lfloor \frac{579}{35} \right\rfloor = 16$. Oleh karena itu, banyak bilangan bulat berbeda adalah $17 + 16 = 33$

16. **Jawaban: 50**



Misal sudut α dimana ($0^o < \alpha < 90^\circ$ dan benda menyentuh BC, CD, DA berturut-turut di X, Y, Z. Jika kita misalkan $\angle BAX = \beta$, maka $\alpha + \beta = 90^\circ$ dan $\angle AXB = \alpha$. Karena benda memantul dan $\alpha + \beta = 90^\circ$, maka

$$\angle CXY = \alpha \Rightarrow \angle CYX = \beta \Rightarrow \angle DYZ = \beta \Rightarrow \angle DZY = \alpha \Rightarrow \angle AZE = \alpha$$

Dengan identitas trigonometri, kita dapatkan

$$AX = \frac{BX}{\cos\alpha} \text{ dan } XY = \frac{CX}{\cos\alpha} \Longrightarrow AX + XY = \frac{BX + CX}{\cos\alpha} = \frac{BC}{\cos\alpha}$$
$$YZ = \frac{DZ}{\cos\alpha} \text{ dan } ZE = \frac{ZA}{\cos\alpha} \Longrightarrow YZ + ZE = \frac{DZ + ZA}{\cos\alpha} = \frac{AD}{\cos\alpha}$$

Maka, jarak yang ditempuh adalah

$$AX + XY + YZ + ZE = \frac{BC}{\cos\alpha} + \frac{AD}{\cos\alpha} = \frac{170}{\cos\alpha} = 170\sqrt{2} \Longrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Karena $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, maka pastilah $\alpha = 45^\circ \Rightarrow \beta = 45^\circ$ sehingga $\triangle ABX$, $\triangle CYX$, $\triangle CYX$, $\triangle DYZ$, $\triangle AEZ$, semua segitiga siku-siku sama kaki. Oleh karena itu, kita dapatkan $BX = AB = 60 \Rightarrow CX = CY = 25 \Rightarrow DY = DZ = 35 \Rightarrow ZA = DA - DZ = 50 \Rightarrow EA = ZA = 50$

17. **Jawaban: 196**

Jika $f(x) = y$ untuk suatu $x,y \in \{1,2,3,4,5\}$, maka diperoleh

$$f(f(x)) = f(x) \Rightarrow f(y) = y$$

Maka, ada x sehingga $f(x) = x$ untuk suatu $x \in \{1,2,3,4,5\}$. Jika banyaknya x yang memenuhi adalah k, maka banyaknya cara memilih x yang memenuhi ada $\binom{5}{k}$. Untuk x yang tidak memenuhi bentuk dari $f(x) = x$, jika $f(x) = z$ untuk suatu z sehingga $f(z) \neq z$, maka dari $f(f(x)) = f(x)$ diperoleh $f(z) = z$, padahal $f(z) \neq z$. Maka, haruslah $f(x) = y$, untuk suatu y yang memenuhi $f(y) = y$. Akibatnya, karena ada $5-k$ banyaknya x yang tidak memenuhi $f(x) = x$, dan $f(x)$ punya sebanyak k pilihan keluaran, diperoleh banyaknya pemetaan adalah $\binom{5}{k} \times k^{5-k}$, untuk setiap $k = 1,2,3,4,5$. Jadi, banyaknya pemetaan yang memenuhi adalah $\binom{5}{1} \times 1^4 + \binom{5}{2} \times 2^3 + \binom{5}{3} \times 3^2 + \binom{5}{4} \times 4^1 + \binom{5}{5} \times 5^0 = 5 + 80 + 90 + 20 + 1 = 196$

18. **Jawaban: 784**

Kita dapat menghitung banyak kemungkinan berhenti pada pengundian ke-n yaitu $(n-1) \cdot 4^2 \cdot 2^{n-2}$.

a. Percobaan berhenti pada pengundian ke-2 $\Rightarrow 1 \cdot 4^2 \cdot 2^0 = 16$

b. Percobaan berhenti pada pengundian ke-3 $\Rightarrow 2 \cdot 4^2 \cdot 2^1 = 64$

c. Percobaan berhenti pada pengundian ke-4 $\Rightarrow 3 \cdot 4^2 \cdot 2^2 = 192$

d. Percobaan berhenti pada pengundian ke-5 $\Rightarrow 4 \cdot 4^2 \cdot 2^3 = 512$

Banyak kemungkinan adalah $16 + 64 + 192 + 512 = 784$

19. **Jawaban: 24**

Dengan menjumlahkan kedua persamaan, kita dapat $(n + 2)(x + y) = 115$, agar memiliki solusi (x,y) bulat, maka $(n + 2)$ harus merupakan faktor dari 115. Cek untuk nilai n adalah 3, 21, dan 113. Untuk $n = 3 \Rightarrow (x,y) = (31,-8)$, $n = 21 \Rightarrow (x,y) = (4,1)$ dan $n = 113 \Rightarrow (x,y) =$. Jadi, nilai n yang memenuhi adalah 3 dan 21 sehingga jumlah semua nilai n yang memenuhi adalah $3 + 21 = 24$.

20. **Jawaban: 5120**

Berdasarkan aturan (b), hal ini sama saja dengan kolom ke-k dan $k + 2$ tidak boleh memiliki jumlah petak hitam yang sama. Maka, pada 3 kolom berurutan, masing-masing dari mereka akan memiliki jumlah petak hitam yang berbeda. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan banyaknya petak hitam pada kolom ke 1,2,3 berturut-turut adalah a,b,c dengan a,b,c adalah permutasi dari $\{0,1,2\}$. Maka, pada kolom ke 4, banyaknya petak hitam haruslah a. Hal ini dikarenakan banyaknya petak hitam pada kolom ke-4 harus berbeda dengan kolom ke 2 dan 3. Dengan argumen yang sama, diperoleh banyaknya petak hitam pada 29 kolom secara berturut-turut adalah $a,b,c,a,b,c,\ldots,a,b,c,a,b$. Perhatikan bahwa ada 2 cara pewarnaan sebuah kolom yang memiliki 1 warna hitam, dan 1 cara pewarnaaan sebuah kolom yang memiliki 0 atau 2 warna hitam. Jika $a = 1$ atau $b = 1$, maka banyaknya cara pewarnaan yang mungkin adalah $2 \times 2! \times 2^{10} = 4096$. Jika $c = 1$, maka banyaknya pewarnaan yang mungkin adalah $2! \times 2^9 = 1024$. Maka, banyaknya cara pewarnaan papan yang mungkin adalah $4096 + 1024 = 5120$