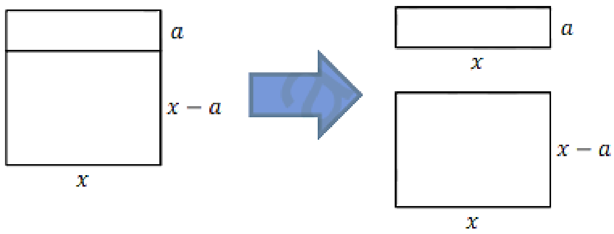
PEMBAHASAN

OSK MATEMATIKA SMA

TAHUN 2024

1. **Penyelesaian:**
Perhatikan ilustrasi berikut!



Misal Panjang sisi persegi adalah x dan lebar persegi Panjang bagian atas adalah a. Sehingga diperoleh:

- Keliling persegi Panjang atas adalah $2(x+a) = 2x + 2a$
- Keliling persegi Panjang bawah adalah $2\big(x + (x-a)\big) = 4x - 2a$

Pada soal diperoleh informasi bahwa hasil penjumlahan kedua keliling persegi Panjang adalah 60, sehingga:

$$\begin{aligned} (2x+2a)+(4x-2a) &= 60 \\ \Leftrightarrow \quad 6x &= 60 \\ \Leftrightarrow \quad x &= 10 \end{aligned}$$

Jadi, luas persegi tersebut adalah $x^2 = 10^2 = 100$.

2. **Penyelesaian:**
Perhatikan bahwa ada 6 pilihan untuk berpergian dari kota A dan B dan ada 8 pilihan jalan yang dapat digunakan untuk berpergian dari kota B ke kota C. Sehingga banyak pilihan jalan dari kota A ke kota C melalui kota B ada sebanyak $6 \times 8 = 48$ pilihan jalan.
Sedangkan, saat pulang kembali ke kota A melalui jalan yang berbeda dari saat pergi, maka banyak jalan dari kota C ke kota B menjadi 7 pilihan jalan, dan banyak pilihan jalan dari kota B ke kota A ada sebanyak 5 pilihan jalan. Sehingga banyak pilihan jalan pulang dari kota C ke kota A melalui kota B ada sebanyak $7 \times 5 = 35$ pilihan jalan.
Jadi, banyak cara memilih jalan yang dapat dilalui untuk pergi dan pulang ada sebanyak $48 \times 35 = 1680$ pilihan jalan.

3. **Penyelesaian:**
Perhatikan bahwa hasil penjumlahan seluruh bilangan di papan adalah A, sehingga diperoleh
$$A=\underbrace{1+1+\cdots+1}_{ada\ 88\ suku}+a+b=88+a+b$$
Sedangkan, hasil perkalian semua bilangan di papan adalah A, sehingga diperoleh
$$A=\underbrace{1\times 1\times \ldots\times 1}_{ada\ 88\ faktor}\times a\times b=ab$$
Perhatikan bahwa nilai dari hasil penjumlahan dan hasil perkalian bilangan-bilangan di papan adalah sama, sehingga diperoleh
$$\begin{aligned} & 88+a+b=ab \\ \Leftrightarrow\ & ab-a-b=88 \\ \Leftrightarrow\ & a(b-1)-b=88 \text{ (tambahkan kedua ruas dengan 1)} \\ \Leftrightarrow\ & a(b-1)-b+1=89 \\ \Leftrightarrow\ & a\cdot(b-1)-1\cdot(b-1)=89 \text{ (gunakan sifat distribusi)} \\ \Leftrightarrow\ & (a-1)(b-1)=89 \end{aligned}$$
Perhatikan bahwa 89 adalah bilangan prima, sehingga factor 89 hanya 1 dan 89.
Maka kita akan bagi kasus sebagai berikut:
- Untuk $(a-1)-1\Rightarrow a=2$ dan $(b-1)=89\Rightarrow b=90$, sehingga diperoleh $(a,b)=(2,90)$.
- Untuk $(a-1)=89\Rightarrow a=90$ dan $(b-1)=1\Rightarrow b=2$, sehingga diperoleh $(a,b)=(90,2)$

Jadi, nilai $A=ab=2\times 90=180$.

4. **Penyelesaian:**
Perhatikan,
$$\begin{aligned} & \frac{1+2+3+\cdots+104}{3+4+5+\cdots+106}=\frac{a}{b} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{1+2+3+\cdots+104}{1+2+3+4+5+\cdots+106-(1+2)}=\frac{a}{b} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\frac{104\times 105}{2}}{\frac{106\times 107}{2}-3}=\frac{a}{b} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{5640}{5668}=\frac{a}{b} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{105}{109}=\frac{a}{b} \end{aligned}$$
Jadi, diperoleh nilai $a=105$ dan $b=109$, sehingga nilai $a+b=105+109=214$.

5. **Penyelesaian:**
Perhatikan, misal bilangan OSK yaitu bilangan 4 angka tersebut adalah $\overline{abcd}$, maka diperoleh jumlah semua digitnya adalah $a+b+c+d=8$.

Perhatikan juga bahwa bilangan OSK tersebut tidak dapat dimulai dengan angka 0, maka kita akan bagi kasus menjadi dua bagian, yaitu:

- a mungkin bernilai 0

$$a+b+c+d=8$$
$$a,b,c,d\geq 0$$

Maka dengan menggunakan kombinasi dengan perulangan diperoleh banyak pasangan (a,b,c,d) yang memenuhi adalah ${}_{11}C_3=\frac{11!}{8!\cdot 3!}=165$

- a bernilai 0

$$b+c+d=8$$
$$b,c,d\geq 0$$

Maka dengan menggunakan kombinasi dengan perulangan diperoleh banyak pasangan $(0,b,c,d)$ yang memenuhi adalah ${}_{10}C_2=\frac{10!}{8!\cdot 2!}=45$

Dengan menggunakan prinsip inklusi-eksklusi maka diperoleh banyak pasangan (a,b,c,d) yang memenuhi adalah 165 – 45 = 120.

6. **Penyelesaian:**

perhatikan bentuk umum suku ke-n barisan geometri adalah $U_n=ar^{n-1}$, sehingga diperoleh

- $u_2=8\Rightarrow ar=8.$
- $u_5+u_7=\frac{17u_6}{4}\Rightarrow$

$$\begin{aligned} & ar^4+ar^6=\left(\frac{17}{4}\right)ar^5 \\ \Leftrightarrow\ & 4(ar^4+ar^6)=17ar^5 \text{ (bagi kedua ruas dengan } ar^4\text{)} \\ \Leftrightarrow\ & 4(1+r^2)=17r \\ \Leftrightarrow\ & 4r^2-17r+4=0 \\ \Leftrightarrow\ & (r-4)(4r-1)=0 \\ \Leftrightarrow\ & r-4=0\vee 4r-1=0 \\ \Leftrightarrow\ & r=4\vee \quad r=\frac{1}{4} \end{aligned}$$

Ingat bahwa karena $u_1>u_2$ sehingga $5<1$. Jadi nilai r yang memenuhi layer hanya $r=\frac{1}{4}$.

Perhatikan sekali lagi karena $ar=8\Rightarrow a\left(\frac{1}{4}\right)=8$

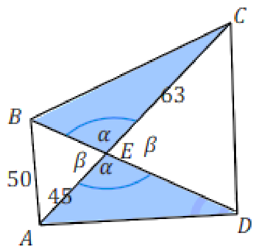
$$\Leftrightarrow a=32$$

Jadi, nilai $u_1=a=32$.

7. **Penyelesaian:**

Perhatikan, karena $AE=45$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} AC=108\Rightarrow\ & AE+EC=108 \\ \Leftrightarrow\ & 45+EC=108 \\ \Leftrightarrow\ & EC=63 \end{aligned}$$



Perhatikan juga bahwa karena $[AED] = [BEC]$ dan $\angle AED = \angle BEC = \alpha$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}
[AED] = [BEC] &\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot AE\cdot ED\cdot \sin\angle AED = \frac{1}{2}\cdot BE\cdot EC\cdot \sin\angle BEC\\
&\Leftrightarrow AE\cdot ED = BE\cdot EC\\
&\Leftrightarrow \frac{AE}{BE} = \frac{EC}{ED}
\end{aligned}$$

Sehingga, karena $\frac{AE}{BE} = \frac{EC}{ED}$ dan $\angle ABE = \angle DEC = \beta$, maka $\Delta ABE \sim \Delta DEC$, akibatnya $\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{CD}$.

Diperoleh,

$$\begin{aligned}
\frac{AE}{EC} = \frac{AB}{CD} &\Rightarrow \frac{45}{63} = \frac{50}{CD}\\
&\Leftrightarrow \frac{5}{7} = \frac{50}{CD}\\
&\Leftrightarrow CD = 50\times\frac{7}{5}\\
&\Leftrightarrow CD = 70
\end{aligned}$$

Jadi, Panjang CD adalah 70.

8. Penyelesaian:

Perhatikan bahwa $\overline{ab} + \overline{ba} = 10a + b + 10b + a = 11a + 11b = 11(a+b)$.
Perhatikan juga bahwa $66|11(a+b) \Rightarrow 6|(a+b)$.
Karena $1 \le a, b \le 9$, maka $2 \le a+b \le 18$. Sehingga karena $6|(a+b)$, maka $(a+b) = \{6, 12, 18\}$. Sehingga,

- Untuk $a+b=6$, maka $(a,b) = \{(1,5),(2,4),(3,3),(4,2),(5,1)\}$.
  Ada 5 pasangan (a,b) yang memenuhi untuk $a+b=6$.
- Untuk $a+b=12$, maka $(a,b) = \{(3,9),(4,8),(5,7),(6,6),(7,5),(8,4),(9,3)\}$.
  Ada 7 pasangan (a,b) yang memenuhi untuk $a+b=12$.
- Untuk $a+b=18$, maka $(a,b) = \{(9,9)\}$.
  Hanya ada 1 pasangan (a,b) yang memenuhi untuk $a+b=18$.

Jadi, total banyak pasangan (a,b) yang memenuhi adalah 5 + 7 + 1 = 13.

9. Penyelesaian:

Perhatikan, karena k adalah bilangan bulat positif terkecil kelipatan 2024, maka untuk m bilangan bulat positif $k = 2024m$.

Perhatikan juga bahwa $2024 = 2^3 \times 11 \times 23$, maka banyak factor bulat positif dari 2024 adalah $(3 + 1)(1 + 1)(1 + 1) = 4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ faktor.

Dan mengingat $k = 2024m = 2^3 \times 11 \times 23 \times m$ maka banyak factor bulat dari k tergantung dari nilai m. Untuk sederhananya akan kita bagi kasus menjadi 2 bagian sebagai berikut:

- Untuk m yang memiliki factor prima selain 2, 11, dan 23, maka banyak factor minimal dari m adalah 2, saat $m = n^1$ dengan n bilangan prima selain 2, 11, dan 23.
  Jadi, banyak factor bulat positif k adalah $2 \times 16 = 32$, dan ini lebih dari 28, sehingga kasus ini tidak memenuhi.
- Untuk m yang memiliki factor prima hanya 2, 11 atau 23, maka untuk a, b, c bilangan bulat non negative diperoleh $m = 2^a \times 11^b \times 23^c$, dan $k = 2^{3+a} \times 11^{1+b} \times 23^{1+c}$ sehingga banyak factor dari k adalah $(3 + a + 1)(1 + b + 1)(1 + c + 1) = (4 + a)(2 + b)(2 + c)$.
  Dengan memandang $28 = 2^2 \times 7$ dan agar banyak factor k sebanyak 28, maka mudah diperoleh bahwa agar $(4 + a)(2 + b)(2 + c) = 28 = 2 \times 2 \times 7$, maka $(a, b, c) = (3,0,0)$.
  Jadi, $k = 2^6 \times 11 \times 23 = 16192 \equiv 92 \pmod{100}$.

Jadi, sisa hasil bagi k oleh 100 adalah 92.

10. Penyelesaian:

Perhatikan, karena $x^2 + y^2 = \left(\frac{545}{272}\right)xy$ sehingga diperoleh

$$(x \pm y)^2 = x^2 + y^2 \pm 2xy \Rightarrow (x \pm y)^2 = \left(\frac{545}{272}\right)xy \pm 2xy$$

Maka

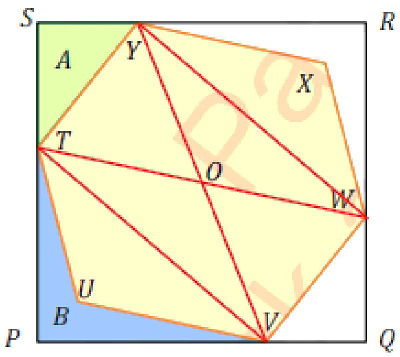
$$\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2 = \frac{\left(\frac{545}{272}\right)xy + 2xy}{\left(\frac{545}{272}\right)xy - 2xy} = \frac{\left(\frac{545+544}{272}\right)xy}{\left(\frac{545-544}{272}\right)xy} = 1089$$

Jadi,

$$\frac{x+y}{x-y} = \sqrt{1089} = 33$$

11. Penyelesaian:

Perhatikan gambar berikut,



Perhatikan TV. Mudah dibuktikan bahwa $\angle VTY = 90^o$.
Jadi, $\angle SYT = \angle PTV$. Oleh karena itu, $\Delta SYT \sim \Delta PTV$.
Misal sisi segienam beraturan adalah a, maka $TV = a\sqrt{3}$.
Akibatnya,

$$\frac{[PTV]}{[SYT]} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{a}\right)^2 \Rightarrow \frac{23+[TUV]}{24} = 3$$
$$\Leftrightarrow 23 + [TUV] = 72$$
$$\Leftrightarrow [TUV] = 49$$

Mudah dibuktikan juga bahwa jika O adalah titik pusat segienam beraturan, maka $\Delta UTV \cong \Delta OTV$ dan karena $TO = OW$, maka $[TOV] = [OVT] = [TUV]$.
Mudah juga dibuktikan bahwa luas segienam beraturan adalah 6 kali luas TUV.
Jadi, $[TUVWXY] = 6 \times [TUV] = 6 \times 49 = 294$.

12. Penyelesaian:

Perhatikan himpunan bagian A berbentuk $\{x_{min}, \dots, x_{max}\}$ dengan $x_{max} + x_{min} = 59$ yang dapat dibagi kasus menjadi:

- Untuk $x_{min} = 24$ dan $x_{max} = 35$, sehingga $\{24,35\} \subseteq A \subseteq \{24, \dots, 35\}$
  Banyak himpunan bagian A untuk kasus ini sama dengan banyak himpunan bagian dari himpunan $\{25,26, \dots, 34\}$ yaitu sebanyak 2^{10}.
- Untuk $x_{min} = 25$ dan $x_{max} = 34$, sehingga $\{25,34\} \subseteq A \subseteq \{25, \dots, 34\}$
  Banyak himpunan bagian A untuk kasus ini sama dengan banyak himpunan bagian dari himpunan $\{26,27, \dots, 33\}$ yaitu sebanyak 2^8.
- Untuk $x_{min} = 26$ dan $x_{max} = 33$, sehingga $\{26,33\} \subseteq A \subseteq \{26, \dots, 33\}$
  Banyak himpunan bagian A untuk kasus ini sama dengan banyak himpunan bagian dari himpunan $\{27,28, \dots, 32\}$ yaitu sebanyak 2^6.
- Untuk $x_{min} = 27$ dan $x_{max} = 32$, sehingga $\{27,32\} \subseteq A \subseteq \{27, \dots, 32\}$
  Banyak himpunan bagian A untuk kasus ini sama dengan banyak himpunan bagian dari himpunan $\{28,29,30,31\}$ yaitu sebanyak 2^4.

- Untuk $x_{min} = 28$ dan $x_{max} = 31$, sehingga $\{28,31\} \subseteq A \subseteq \{28, \dots ,31\}$
  Banyak himpunan bagian A untuk kasus ini sama dengan banyak himpunan bagian dari himpunan $\{29,30\}$ yaitu sebanyak 2^2.
- Untuk $x_{min} = 29$ dan $x_{max} = 30$, sehingga $\{29,30\} \subseteq A \subseteq \{29,30\}$
  Banyak himpunan bagian A untuk kasus ini sama dengan banyak himpunan bagian dari himpunan $\{\}$ yaitu sebanyak 2^0.

Jadi, banyak total himpunan bagian A yang memenuhi dari semua kasus tersebut adalah sebanyak $2^{10} + 2^8 + 2^6 + 2^4 + 2^2 + 2^0 = 1024 + 256 + 64 + 16 + 4 + 1 = 1365$.

13. Penyelesaian:

Perhatikan untuk setiap bilangan ganjil, maka factor ganjil terbesar adalah bilangan itu sendiri, sehingga $f(2n-1) = 2n-1$. Dan untuk setiap bilangan genap $2n$, maka factor ganjil terbesar dari $2n$ akan sama dengan bilangan factor ganjil terbesar dari n, sehingga $f(2n) = f(n)$.

Perhatikan

$$\begin{array}{rl} p(n+1) = & \qquad f(n+1) + f(n+2) + \cdots + f(2n) + f(2n+1) + f(2n+2) \\ p(n) = & f(n) + f(n+1) + f(n+2) + \cdots + f(2n) \\ \hline p(n+1) - p(n) = & -f(n) + f(2n+1) + f(2n+2) \end{array} -$$

$$p(n+1) - p(n) = -f(n) + (2n+1) + f\left(\frac{2n+2}{2}\right) = [f(n+1) - f(n)] + (2n+1)$$

Sehingga,

$$\begin{aligned} & p(n) = p(n) - p(n-1) + p(n-1) - p(n-2) + \cdots + p(2) - p(1) + p(1) \\ \Rightarrow\ & p(n) = [f(n) - f(n-1)] + (2n-1) + [f(n-1) - f(n-2)] + (2n-3) + \cdots + [f(2) - f(1)] + 3 + p(1) \\ \Leftrightarrow\ & p(n) = \left(f(n) - f(1)\right) + \left(3 + 5 + \cdots + (2n-1)\right) + f(1) + f(2) \\ \Leftrightarrow\ & p(n) = f(n) + \left(1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1)\right) \\ \Leftrightarrow\ & p(n) = f(n) + n^2 \end{aligned}$$

Perhatikan, jika n adalah bilangan ganjil, maka $f(n) = n$, sedangkan apabila n adalah bilangan genap maka, $1 \le f(n) \le \frac{n}{2}$. Sehingga, $n^2 < p(n) \le n^2 + n$.

Mudah diperiksa bahwa $n = 90$ memenuhi karena $p(90) = f(90) + 90^2 = 45 + 8100 = 8145$.

Jadi, bilangan n yang memenuhi adalah 90.

14. Penyelesaian:

Perhatikan suku banyak $P(x) = x^3 + Dx^2 + Ex + 1$, jika a, b, c adalah akar-akar $P(x) = 0$ maka dari teorema Vieta diperoleh

- $a + b + c = -D$
- $ab + ac + bc = E$
- $abc = -1$

Perhatikan juga bahwa $P(-1) = 4$, sehingga

$$P(-1) = 4 \Rightarrow -1 + D - E + 1 = 4$$

$$\Leftrightarrow D - E = 4$$

Ingat juga bahwa $a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) - (ab + bc + ac)(a + b + c) + 3abc$

Sedangkan, dari $(a^2 - bc)(b^2 - ca)(c^2 - ab) = 40$ diperoleh

$$\begin{aligned}
& (a^2 - bc)(b^2 - ca)(c^2 - ab) = 40 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{a\left(a^2 + \frac{1}{a}\right) b\left(b^2 + \frac{1}{b}\right) c\left(c^2 + \frac{1}{c}\right)}{abc} = 40 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{(a^3 + 1)(b^3 + 1)(c^3 + 1)}{abc} = 40 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{1 + a^3 + b^3 + c^3 + a^3b^3 + a^3c^3 + b^3c^3 + a^3b^3c^3}{abc} = 40 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{1 + a^3 + b^3 + c^3 + a^3b^3 + a^3c^3 + b^3c^3 + (-1)}{-1} = 40 \\
\Leftrightarrow\quad & -(a^3 + b^3 + c^3) - (a^3b^3 + a^3c^3 + b^3c^3) = 40
\end{aligned}$$

Perhatikan rumus berikut

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3(a + b + c)(ab + bc + ac) + 3abc = -D^3 + 3DE - 3$$

Maka

$$\begin{aligned}
& a^3b^3 + a^3c^3 + b^3c^3 \\
& \qquad = (ab + bc + ac)^3 - 3(ab + bc + ac)(a^2bc + ab^2c + abc^2) + 3(abc)^2
\end{aligned}$$

Maka

$$a^3b^3 + a^3c^3 + b^3c^3 = (ab + bc + ac)^3 - 3(ab + bc + ac)(a + b + c) + 3(abc)^2$$

Jadi, $a^3b^3 + a^3c^3 + b^3c^3 = E^3 - 3DE + 3$

Maka kita lanjutkan lagi perhitungannya

$$
\begin{aligned}
& & (a^2-bc)(b^2-ca)(c^2-ab) &= 40\\
&\Leftrightarrow & \frac{a\left(a^2+\frac{1}{a}\right)b\left(b^2+\frac{1}{b}\right)c\left(c^2+\frac{1}{c}\right)}{abc} &= 40\\
&\Leftrightarrow & \frac{(a^3+1)(b^3+1)(c^3+1)}{abc} &= 40\\
&\Leftrightarrow & \frac{1+a^3+b^3+c^3+a^3b^3+a^3c^3+b^3c^3+a^3b^3c^3}{abc} &= 40\\
&\Leftrightarrow & \frac{1+a^3+b^3+c^3+a^3b^3+a^3c^3+b^3c^3+(-1)}{-1} &= 40\\
&\Leftrightarrow & -(a^3+b^3+c^3)-(a^3b^3+a^3c^3+b^3c^3) &= 40\\
&\Leftrightarrow & D^3-3DE+3-E^3+3DE-3 &= 40\\
&\Leftrightarrow & D^3-E^3 &= 40\\
&\Leftrightarrow & (D-E)(D^2+DE+E^2) &= 40\\
&\Leftrightarrow & 4(D^2+DE+E^2) &= 40\\
&\Leftrightarrow & (D^2+DE+E^2) &= 10\\
&\Leftrightarrow & ((E+4)^2+(E+4)E+E^2) &= 10\\
&\Leftrightarrow & (E^2+8E+16+E^2+4E+E^2) &= 10\\
&\Leftrightarrow & 3E^2+12E+16 &= 10\\
&\Leftrightarrow & 3E^2+12E &= -6\\
&\Leftrightarrow & E^2+4E &= -2
\end{aligned}
$$

Jadi,

$(D+E)^2 = (D-E+2E)^2 = (4+2E)^2 = 4(E^2+4E+4) = 4\times(-2+4) = 4\times 2 = 8.$

15. Penyelesaian:

Perhatikan, didefinisikan $f_k(n)$ = banyak barisan $a_1, a_2, \dots, a_n$ yang memenuhi soal dengan $a_1 = k$ dan $S_n = f_1(n)+f_2(n)+f_3(n)+f_4(n)$.

$$
\begin{aligned}
f_4(n) &= f_1(n-1)+f_2(n-1)+f_3(n-1)+f_4(n-1)\\
f_3(n) &= f_2(n-1)+f_3(n-1)+f_4(n-1)\\
f_2(n) &= f_1(n-1)+f_3(n-1)+f_4(n-1)\\
f_1(n) &= f_1(n-1)+f_2(n-1)+f_4(n-1)
\end{aligned}
$$

Sehingga,

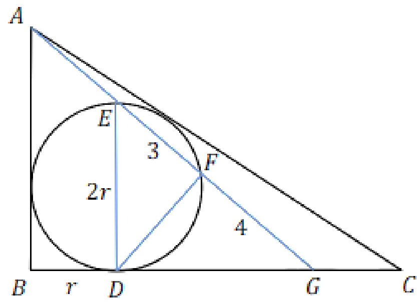
$$
\begin{aligned}
f_1(n)+f_2(n)+f_3(n)+f_4(n) &= 3\big(f_1(n-1)+f_2(n-1)+f_3(n-1)+f_4(n-1)\big)+f_4(n-1)\\
S_n &= 3S_{n-1}+f_1(n-2)+f_2(n-2)+f_3(n-2)+f_4(n-2)\\
S_n &= 3S_{n-1}+S_{n-2}
\end{aligned}
$$

Karena $S_1 = 4$ dan $S_2 = 13$, maka

$$
\begin{aligned}
S_3 &= 3(13)+4 = 43\\
S_4 &= 3(43)+13 = 142\\
S_5 &= 3(142)+43 = 469\\
S_6 &= 3(469)+142 = \boxed{1549}
\end{aligned}
$$

16. Penyelesaian:

Perhatikan gambar berikut.



DE adalah diameter lingkaran ω. $DE = 2r$.

Akibatnya $\angle DFE = 90^o$, dan karena BC merupakan garis singgung lingkaran ω, maka $\angle GDE = 90^o$. Sehingga, $\Delta EFD \sim \Delta DFG \sim \Delta EDG$.

Maka berlaku, $DE^2 = EF \times EG \Rightarrow DE^2 = 3 \times 7$

$$\Leftrightarrow DE = \sqrt{21}$$

Sehingga, $DE = 2r = \sqrt{21} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{21}}{2}$.

Perhatikan juga dengan POP (Power of Point) diperoleh

$GD^2 = GF \times GE \Rightarrow GD^2 = 4 \times 7$

$$\Leftrightarrow GD = \sqrt{28}$$

Perhatikan juga bahwa karena $ED \perp BC$ dan $AB \perp BC$ maka $ED||AB$, sehingga $\Delta ABG \sim \Delta EDG$, sehingga berlaku

$$\frac{GE}{GA} = \frac{GD}{GB} \Rightarrow \qquad \frac{7}{7 + AE} = \frac{\sqrt{28}}{\sqrt{28} + \frac{\sqrt{21}}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 7\sqrt{28} + \sqrt{28}\,AE = 7\sqrt{28} + \frac{7\sqrt{21}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \sqrt{28}\,AE = \frac{7\sqrt{21}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \qquad AE = \frac{7\sqrt{21}}{2\sqrt{28}}$$

$$\Leftrightarrow \qquad AE = \frac{7\sqrt{3}}{2\sqrt{4}}$$

$$\Leftrightarrow \qquad AE = \frac{7\sqrt{3}}{4}$$

Sehingga, karena $AE = \frac{7}{4}\sqrt{3} = \frac{p}{r}\sqrt{q}$, maka diperoleh nilai $p = 7, q = 3$ dan $r = 4$.

Jadi, $p + q + r = 7 + 3 + 4 = 14$.

17. Penyelesaian:

Perhatikan bahwa karena $a + b + c = 24 \Rightarrow b + c = 24 - a$ dan dengan menggunakan ketaksamaan CS-Engel, diperoleh $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{(1+1)^2}{b+c}$, sehingga

$$\frac{3}{4}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{1}{a}+\frac{(1+1)^2}{b+c}=\frac{1}{a}+\frac{4}{24-a}=\frac{24+3a}{24a-a^2}$$

Sehingga diperoleh $\frac{3}{4}\geq\frac{24+3a}{24a-a^2}$, akibatnya

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}\geq\frac{24+3a}{24a-a^2} &\Rightarrow 72a-3a^2\geq 96+12a\\ &\Leftrightarrow 60a\geq 3a^2+96\\ &\Leftrightarrow 20\geq\frac{a^2+32}{a}\end{aligned}$$

Maka kesamaan CS-Engel akan diperoleh saat $b=c$, sehingga

$$(a,b,c)=\left(10+2\sqrt{17},7-\sqrt{17},7-\sqrt{17}\right)$$

Atau

$$(a,b,c)=\left(10-2\sqrt{17},7+\sqrt{17},7+\sqrt{17}\right)$$

Sehingga nilai maksimal dari $\frac{a^2+32}{a}$ adalah 20.

18. Penyelesaian:

Perhatikan, untuk $0\leq\delta<1$, maka untuk setiap x bilangan real berlaku $x=\lfloor x\rfloor+\delta\Leftrightarrow\lfloor x\rfloor=x-\delta$.

Perhatikan juga misal $f(n)=\left\lfloor\frac{n^2}{2024}\right\rfloor=\frac{n^2}{2024}-\delta_n$.

Perhatikan juga bahwa nilai $f(n+1)-f(n)$ seiring berjalannya nilai n selalu naik, sehingga perhatikan apabila $f(n+1)-f(n)>1$, maka nilai $f(n+1)$ dan $f(n)$ adalah dua nilai yang berbeda, sehingga kita akan mencoba menentukan nilai n yang memenuhi $f(n+1)-f(n)=1$ sebagai pembatasnya dengan $(\delta_{n+1}-\delta_n)\to 0$, yaitu

$$\begin{aligned}f(n+1)-f(n)=1 &\Rightarrow \left(\frac{(n+1)^2}{2024}-\delta_{n+1}\right)-\left(\frac{n^2}{2024}-\delta_n\right)=1\\ &\Leftrightarrow \left(\frac{(n+1)^2}{2024}-\frac{n^2}{2024}\right)-(\delta_{n+1}-\delta_n)=1\\ &\Leftrightarrow \frac{2n+1}{2024}-1=\delta_{n+1}-\delta_n\\ &\Leftrightarrow \frac{2n+1}{2024}-1>0\\ &\Leftrightarrow \frac{2n-2023}{2024}>0\\ &\Leftrightarrow n>1011{,}5=1012\end{aligned}$$

Jadi, akan kita bagi kasus menjadi 2 bagian, yaitu:

- Untuk $1\leq n\leq 1012$, maka nilai $f(n+1)$ dan $f(n)$ belum dapat dipastikan adalah dua nilai yang berbeda. Dan karena $\left\lfloor\frac{1012^2}{2024}\right\rfloor=506$, maka jelas dari $1\leq n\leq 1012$ diperoleh $0\leq f(n)\leq 506$. Sehingga ada 507 bilangan berbeda pada barisan tersebut.

- Untuk $n > 1012$, maka nilai $f(n+1)$ dan $f(n)$ adalah dua nilai yang berbeda. Agar terdapat 1000 bilangan berbeda pada barisan tersebut, maka haruslah ada 1000 – 507 = 493 bilangan berbeda untuk $n > 1012$.

Jadi, dari dua kasus tersebut dapat diperoleh nilai n yang memenuhi adalah 1012 + 493 = 1505.

19. Penyelesaian:

Perhatikan, didefinisikan $Im(f)$ sebagai himpunan semua bilangan $x \in \{1,2,3,4,5\}$ yang memiliki prapeta.

- Kasus 1: $|Im(f)| = 1$: f merupakan fungsi konstan, maka ada dua solusi yaitu $f(x) = 2$ untuk setiap $x \in \{1,2,3,4,5\}$ dan $f(x) = 4$ untuk setiap $x \in \{1,2,3,4,5\}$
- Kasus 2: $|Im(f)| = 2$:
  - Subkasus 1: Jika $Im(f) = a, b$ dengan $a \in \{2,4\}$ dan $b \in \{1,3,5\}$.
    WLOG $a = 2, b = 1$.
    Maka $f\big(f(x)\big) = 2$ untuk setiap x, maka $f(1) = f(2) = 2$. Lalu, nilai $f(3), f(4), f(5)$ bisa dipilih dari himpunan {1, 2}, dengan syarat 1 memiliki prapeta. Maka ada $2^3 - 1 = 7$ fungsi yang memenuhi.
    $\therefore$ Pada subkasus ini ada $\binom{2}{1}\binom{3}{1}7 = 42$ fungsi yang memenuhi.
  - Subkasus 2: Jika $Im(f) = \{2,4\}$
    Nilai $f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)$ dipilih dari $\{2,4\}$ dengan syarat 2 dan 4 memiliki prapeta.
    Maka ada $2^5 - 2 = 30$ fungsi yang memenuhi.
- Kasus 3: $|Im(f)| = 3$:
  - Subkasus 1: Jika $Im(f) = \{a, b, c\}$ dengan $a \in \{2,4\}$ dan $b, c \in \{1,3,5\}$.
    WLOG $a = 2, b = 1, c = 3$, karena $f\big(f(x)\big) \in \{2,4\}$ dan $f(x) \in Im(f)$ untuk setiap x, sehingga $f\big(f(x)\big) = 2$ untuk setiap x. Lalu, karena ada x sehingga $f(x) = 1$ dan begitu juga untuk $f(x) = 2$ dan $f(x) = 3$, maka $f(1) = f(2) = f(3) = 2$. Lalu, $\big(f(4), f(5)\big) = (1,3)$ atau $(3,1)$.
    Maka dari itu, pada subkasus ini ada $\binom{2}{1}\binom{3}{2}2 = 12$ fungsi yang memenuhi.
  - Subkasus 2: Jika $Im(f) = \{2,4,c\}$ dengan $c = \{1,3,5\}$.
    WLOG $c = 1$, maka $Im(f) = \{1,2,4\}$. Karena $f\big(f(x)\big) \in \{2,4\}$, maka $f(1) \in \{2,4\}$.
    WLOG $f(1) = 2$, maka $f(2) \in \{2,4\}$.
    - Subsubkasus 1: $f(2) = 2$, lalu cek $f(4) \in \{1,2,4\}$
      Jika $f(4) = 1$, maka $f(3) = 4$ atau $f(5) = 4$, maka $f\big(f(3)\big) = 1$ atau $f\big(f(5)\big) = 1$. Tidak memenuhi.

Jika $f(4) = 2$, maka $\{f(3), f(5)\} = \{1,4\}$, ada 2 fungsi yang memenuhi.
Jika $f(4) = 4$, maka $f(3), f(5) \in \{1,2,4\}$ dengan syarat 1 memiliki prapeta. Maka ada $3^2 - 2^2 = 5$ fungsi yang memenuhi.
Maka, ada 2 + 5 = 7 fungsi di subsubkasus 1.

- Subsubkasus 2: $f(2) = 4$, maka $f(3) = 1$ atau $f(5) = 1$ sehingga ada 5 kemungkinan nilai $\big(f(3), f(5)\big)$ yaitu $(2,1), (4,1), (1,2), (1,4)$ dan $(1,1)$. Lalu $f(4)$ dapat bernilai 2 atau 4.
  Maka ada $5 \times 2 = 10$ fungsi yang memenuhi.

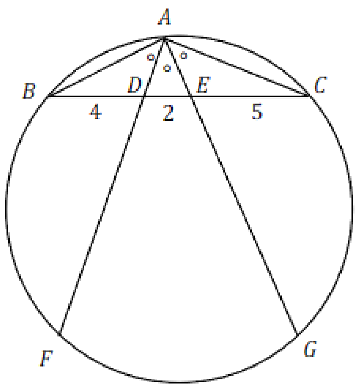
Maka pada subkasus ini terdapat $3 \times 2 \times (10 + 7) = 102$ fungsi yang memenuhi.

- Kasus 4: $|Im(f)| = 4$:
  Misalkan $Im(f) = \{a, b, c, d\}$. Misal c bilangan yang tidak memiliki prapeta. Karena $f\big(f(x)\big) \in \{2,4\}$, jelas bahwa $f(a), f(b), f(c), f(d) \in \{2,4\}$.
  $$Im(f) = \{f(a), f(b), f(c), f(d), f(e)\} \subseteq \{2,4, f(e)\}$$
  Maka, $|Im(f)| \leq 3$. Kontradiksi, maka tidak ada fungsi f yang memenuhi soal.
- Kasus 5: $|Im(f)| = 5$: f merupakan fungsi bijektif, maka $f\big(f(x)\big)$ juga merupakan fungsi bijektif dan tidak memenuhi soal.

Jadi, total pemetaannya adalah $2 + 42 + 30 + 12 + 102 = 188$.

20. Penyelesaian:

Perhatikan gambar berikut.



Misalkan $BD = 4$, $DE = 2$, dan $EC = 5$.
Perhatikan karena AD garis bagi $\angle BAE$, maka
$$\frac{AB}{BD} = \frac{AE}{ED} \Rightarrow \frac{AB}{4} = \frac{AE}{2} \Rightarrow AB = 2AE$$
Jadi, misal $AE = x$, maka $AB = 2x$.
Perhatikan karena AE garis bagi $\angle DAC$, maka

$$\frac{AD}{DE} = \frac{AC}{CE} \Rightarrow \frac{AD}{2} = \frac{AC}{5} \Rightarrow AD = \frac{2}{5}AC$$

Jadi, misal $AC = 5y$, maka $AD = 2y$.

Dalil Stewart pada AD garis bagi $\angle BAE$, berlaku

$$\begin{aligned} AD^2 = AB \times AE - BD \times DE \Rightarrow (2y)^2 &= 2x \cdot x - 4 \cdot 2 \\ \Leftrightarrow \quad 4y^2 &= 2x^2 - 8 \\ \Leftrightarrow \quad 2y^2 &= x^2 - 4 \end{aligned}$$

Dalil Stewart pada AE garis bagi $\angle DAC$, berlaku

$$\begin{aligned} AE^2 = AD \times AC - DE \times EC \Rightarrow (x)^2 &= 2y \cdot 5y - 2 \cdot 5 \\ \Leftrightarrow \quad x^2 &= 10y^2 - 10 \end{aligned}$$

Substitusi $x^2 = 10y^2 - 10$ pada $2y^2 = x^2 - 4$ menghasilkan

$$\begin{aligned} 2y^2 &= 10y^2 - 10 - 4 \\ \Rightarrow \quad 14 &= 8y^2 \\ \Leftrightarrow \quad \frac{7}{4} &= y^2 \end{aligned}$$

Substitusi $y^2 = \frac{7}{4}$ pada $x^2 = 10y^2 - 10$ menghasilkan

$$\begin{aligned} x^2 &= 10 \cdot \left(\frac{7}{4}\right) - 10 \\ \Rightarrow x^2 &= \frac{70}{4} - \frac{40}{4} \\ \Leftrightarrow x^2 &= \frac{30}{4} \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh $x^2 = \frac{30}{4} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{30}}{2}$ dan $y^2 = \frac{7}{4} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Maka $AE = x = \frac{\sqrt{30}}{2}$ dan $AD = 2y = \sqrt{7}$

Menggunakan POP dari titik D diperoleh

$$\begin{aligned} AD \times DF = BD \times DC \Rightarrow \sqrt{7} \times DF &= 4 \times 7 \\ \Leftrightarrow \quad DF &= \frac{28}{\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} \\ \Leftrightarrow \quad DF &= 4\sqrt{7} \end{aligned}$$

Menggunakan POP dari titik E diperoleh

$$\begin{aligned} AE \times EG = BE \times EC \Rightarrow \frac{\sqrt{30}}{2} \times EG &= 6 \times 5 \\ \Leftrightarrow \quad EG &= \frac{30}{\frac{\sqrt{30}}{2}} \times \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{30}} \\ \Leftrightarrow \quad EG &= 2\sqrt{30} \end{aligned}$$

Sehingga,

$$\frac{DF}{EG}=\frac{4\sqrt{7}}{2\sqrt{30}}=\frac{2\sqrt{28}}{2\sqrt{30}}=\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{30}}=\sqrt{\frac{28}{30}}=\sqrt{\frac{14}{15}}$$

Jadi, diperoleh $p=14$ dan $q=15$, maka nilai $p+q=14+15=29$.