PEMBAHASAN

OSK MATEMATIKA SMA

TAHUN 2023

1. **Penyelesaian:**

Perhatikan, ingat lagi definisi nilai mutlak berikut,

$$|x| = \begin{cases} x, \text{untuk } x \geq 0 \\ -x, \text{untuk } x < 0 \end{cases}$$

Maka, dengan memandang bentuk nilai mutlak berikut,

$$|2x+3| = \begin{cases} 2x+3, \text{untuk } 2x+3 \geq 0 \\ -2x-3, \text{untuk } 2x+3 < 0 \end{cases}$$

Diperoleh dua kasus yaitu:

1. Untuk $2x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{3}{2}$

$$\big|x - |2x+3|\big| = 99 \Rightarrow |x - (2x+3)| = 99$$
$$\Leftrightarrow \quad |-x-3| = 99$$

Maka, dengan memandang bentuk nilai mutlak berikut,

$$|-x-3| = \begin{cases} -x-3, \text{untuk } -x-3 \geq 0 \\ x+3, \text{untuk } -x-3 < 0 \end{cases}$$

Sehingga, diperoleh dua kasus lagi, yaitu:

a. Untuk $-x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \leq -3$

Diperoleh $x \leq -3$ akan kontradiksi dengan syarat di kasus (1) bahwa $x \geq -\frac{3}{2}$.

Sehingga tidak ada penyelesaian di kasus (1.a) ini.

b. Untuk $-x - 3 < 0 \Rightarrow x > -3$

Karena syarat di kasus (1) adalah $x \geq -\frac{3}{2}$ maka diperoleh irisan dari syarat untuk kasus (1.b) adalah irisan dari $x \geq -\frac{3}{2}$ dan $x > -3$, yaitu $x \geq -\frac{3}{2}$.

Sehingga,

$$|-x-3| = 99 \Rightarrow x + 3 = 99$$
$$\Leftrightarrow x = 96$$

2. Untuk $2x + 3 < 0 \Rightarrow x < -\frac{3}{2}$

$$\big|x - |2x+3|\big| = 99 \Rightarrow |x - (-2x-3)| = 99$$
$$\Leftrightarrow \quad |3x+3| = 99$$

Maka, dengan memandang bentuk nilai mutlak berikut,

$$|3x+3| = \begin{cases} 3x+3, \text{untuk } 3x+3 \geq 0 \\ -3x-3, \text{untuk } 3x+3 < 0 \end{cases}$$

Sehingga, diperoleh dua kasus lagi, yaitu:

a. Untuk $3x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$

Diperoleh $x \geq 1$ akan kontradiksi dengan syarat di kasus (2) bahwa $x < -\frac{3}{2}$
Sehingga tidak ada penyelesaian di kasus (2.a) ini.

b. Untuk $3x + 3 < 0 \Rightarrow x < -1$
Karena syarat di kasus (1) adalah $x < -\frac{3}{2}$ maka diperoleh irisan dari syarat untuk kasus (2.b) adalah irisan dari $x < -\frac{3}{2}$ dan $x < -1$ yaitu $x < -\frac{3}{2}$
Sehingga,
$|3x + 3| = 99 \Rightarrow -3x - 3 = 99$
$\Leftrightarrow -3x = 102$
$\Leftrightarrow x = \frac{102}{-3}$
$\Leftrightarrow x = -34$

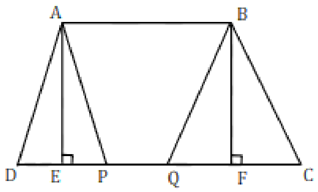
Jadi, jumlah semua x yang memenuhi adalah 96 + (-34) = 62.

2. Penyelesaian:

Perhatikan, terdapat tujuh pasang kaos kaki, artinya ada keseluruhan 14 kaos kaki.
Apabila diambil lima kaos kaki sekaligus secara acak dan agar terambil tepat sepasang kaos kaki yang berpasangan, kanan-kiri dari lima pengambilan tersebut haruslah terambil satu pasang kaos kaki dari tujuh pasang kaos kaki. Banyak cara pengambilan ini adalah ${}_7C_1 = 7$ cara.
Karena akan diambil lima kaos kaki, dan dua kaos kaki merupakan kaos kaki yang sepasang, maka tiga kaos kaki yang lain masing-masing adalah kaos kaki yang tidak sepasang, dimana banyak cara pengambilan ini adalah ${}_6C_3 = 20$ cara. Sedangkan banyak jenis kaos kaki kanan atau kiri yang teambil banyak caranya adalah 2^3.
Jadi, banyak keseluruhan cara pengambilan adalah ${}_7C_1 \times {}_6C_3 \times 2^3 = 7 \times 20 \times 8 = 1120$ cara.

3. Penyelesaian:

Perhatikan, misakan E dan F titik yang terletak pada sisi CD, sehingga $AE \perp CD$ dan $BF \perp CD$, maka E dan F merupakan garis tinggi dari segitiga ADP dan BQC.



Perhatikan juga karena $AB = EF = 14$, dan mengingat $DC = DE + EF + FC = 19$, maka
$DC = DE + EF + FC \Rightarrow 19 = DE + 14 + FC$
$\Leftrightarrow 5 = DE + FC$
Karena $AD = AP$, maka segitiga ADP adalah segitiga samakaki, sehingga $DE = EP$.

Begitu juga karena $BC = BQ$, maka segitiga BQC adalah segitiga samakaki, sehingga $QF = FC$.
Sehingga, karena $DE + FC = 5$, maka $EP + QF = 5$.
Perhatikan lagi $EF = EP + PQ + QF$, sehingga

$$\begin{aligned} EF = EP + PQ + QF &\Rightarrow 14 = PQ + 5 \\ &\Leftrightarrow PQ = 9 \end{aligned}$$

4. **Penyelesaian:**
   Perhatikan, karena $\overline{7ab9} < 100^2$ maka jelas bahwa $\overline{7ab9}$ adalah bilangan kuadrat dari bilangan dua digit. Dan dengan memperhatikan bilangan satuan $\overline{7ab9}$ adalah 9, maka bilangan dua digit tersebut pasti berakhiran 3 atau 7.
   Mudah diperiksa bahwa $80^2 < \overline{7ab9} < 90^2$ sehingga ada 2 kemungkinan apakah $\overline{7ab9} = 83^2$ ataukah $\overline{7ab9} = 87^2$.
   Perhatikan bahwa $83^2 = 6889$ dan $87^2 = 7569$.
   Sehingga jelas bahwa $\overline{7ab9} = 7569$, sehingga $a = 5$ dan $b = 6$. Jadi, $a + b = 5 + 6 = 11$.

5. **Penyelesaian:**
   Perhatikan,

$$\begin{aligned} f(5) = 25 &\Rightarrow a(5)^2 + b(5) + c = 25 \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ &\Leftrightarrow \quad 25a + 5b + c = 25 \\ f(6) = 36 &\Rightarrow a(6)^2 + b(6) + c = 36 \\ &\Leftrightarrow \quad 36a + 6b + c = 36 \ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{aligned}$$

   Sehingga, eliminasi c dari persamaan (2) dan persamaan (1) diperoleh:

$$\begin{array}{l} 36a + 6b + c = 36 \\ 25a + 5b + c = 25 \quad - \\ \hline \quad 11a + b = 11 \Rightarrow b = 11(1 - a) \end{array}$$

   Substitusikan $b = 11(1 - a)$ ke persamaan (1) diperoleh:

$$\begin{aligned} 25a + 5\big(11(1 - a)\big) + c = 25 \quad &\Rightarrow 25a + 55 - 55a + c = 25 \\ &\Leftrightarrow c = 30a - 30 \\ &\Leftrightarrow c = 30(a - 1) \end{aligned}$$

   Sehingga karena $b = 11(1 - a)$ dan $c = 30(a - 1)$, maka

$$\frac{c - b}{a - 1} = \frac{30(a - 1) - 11(1 - a)}{(a - 1)} = \frac{30(a - 1) + 11(a - 1)}{(a - 1)} = \frac{41(a - 1)}{(a - 1)} = \boxed{41}$$

6. **Penyelesaian:**
   Misal A dan B adalah total gol yang dicetak tim A dan tim B.

Misal $A_m, B_m, A_k,$ dan B_k adalah total banyak gol yang dicetak saat tim A dan B menang atau kalah.
Perhatikan tim yang berhasil mencetak 4 gol pertama menjadi pemenang, misal a_i, b_i menyatakan banyak gol yang dicetak pada kemenangan ke-i oleh tim A dan tim B, sehingga diperoleh $a_i, b_i = 4$.
Misal n menyatakan banyak kemenangan tim A, sehingga diperoleh

$$A_m = \sum_{i=1}^{n} a_i = 4n \text{ dan } B_m = \sum_{i=1}^{15-n} b_i = 4(15-n) = 60 - 4n$$

Dan misal a_j, b_j menyatakan banyak gol yang dicetak saat kekalahan ke-j diderita tim A dan tim B, maka $0 \leq a_j, b_j \leq 3$, sehingga diperoleh

$$0 \leq \sum_{j=1}^{n} a_j \leq 3n \text{ dan } 0 \leq \sum_{j=1}^{n} b_j \leq 3n$$

Karena total gol tim B lebih banyak daripada tim A, maka selisih gol terbesar terjadi saat mengalami kekalahan, gol tim A harus minimum dan gol tim B harus maksimum. Sehingga diperoleh

$$A_k = \min\left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right) = 0 \text{ dan } B_k = \max\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) = 3n$$

Total gol yang dicetak oleh tim A adalah $A = A_m + A_k = 4n + 0 = 4n$.
Dan total gol yang dicetak oleh tim B adalah $B = B_m + B_k = (60 - 4n) + 3n = 60 - n$.
Jadi misal δ menyatakan selisih gol tim B dan tim A, diperoleh

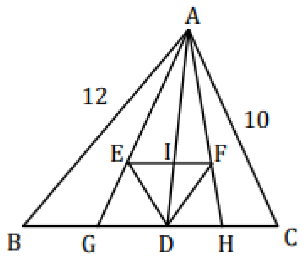
$$\delta = B - A = (60 - n) - 4n = 60 - 5n \Rightarrow n = \frac{60 - \delta}{5}$$

Karena tim A memenangkan pertandingan lebih banyak dibandingkan tim B, artinya dalam 15 kali pertandingan, tim A paling sedikit menang 8 kali, sehingga nilai n memenuhi $n \geq 8$.
Mudah diperiksa bahwa

$$n = \frac{60 - \delta}{5} \geq 8 \Rightarrow \delta_{maks} = 20$$

7. Penyelesaian:

Perhatikan,



Misal $[ABG] = [AGD] = a$ dan $[ADH] = [AHC] = b$

Dari teorema garis berat diperoleh

$$\frac{DI}{DA} = \frac{1}{3} \text{ dan } \frac{EF}{GH} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{[DEF]}{[AGH]} = \frac{2}{9}$$

Sehingga,

$$[DEF] = \frac{2(a+b)}{9} = 4$$

Artinya $a + b = 18$.

Sehingga $[ABC] = 2(a+b) = 36$.

Maka dengan trigonometri diperoleh

$$[ABC] = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin\angle BAC$$

$$36 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10 \cdot \sin\angle BAC$$

$$\frac{3}{5} = \sin\angle BAC$$

Karena $\angle ABC$ lancip maka $\cos\angle ABC = \frac{4}{5}$, sehingga Panjang BC adalah

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\angle ABC$$

$$\left(\sqrt{n}\right)^2 = 12^2 + 10^2 - 2 \cdot 12 \cdot 10 \cdot \frac{4}{5}$$

$$n = 144 + 100 - 192$$

$$n = 52$$

8. Penyelesaian:

Ingat kembali tentang Teorema Euler dan Fungsi Phi Euler yaitu:

Untuk m bilangan bulat positif dan a adalah bilangan bulat dimana $\text{FPB}(a, m) = 1$, maka berlaku $a^{\varphi(m)} = 1 \pmod{m}$, dimana jika $m = p_1^{q_1} \cdot p_2^{q_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{q_k}$ faktorisasi prima dari m, maka

$\varphi(m) = m\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$

Perhatikan, karena $\text{FPB}(5,64) = \text{FPB}(11,64) = 1$ dan $\varphi(64) = 2^6\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 32$, sehingga jelas bahwa $5^{32} \equiv 1 \pmod{64}$ dan $11^{32} \equiv 1 \pmod{64}$.
Perhatikan juga bahwa $2022 = 63 \times 32 + 6$, maka

$$\begin{aligned} 5^{2022} + 11^{2022} &\equiv 5^6 + 11^6 \pmod{64} \\ &\equiv (5^3)^2 + (11^2)^3 \pmod{64} \\ &\equiv (-3)^2 + (97)^3 \pmod{64} \\ &\equiv 9 + (-343) \pmod{64} \\ &\equiv 9 + 41 \pmod{64} \\ &\equiv 50 \pmod{64} \end{aligned}$$

9. Penyelesaian:

Perhatikan, kita dapat menuliskan $P(x)$ sebagai

$$P(x) = (x^2 + x - 23) \cdot H(x) + (ax + b)$$

Karena r_1, r_2 merupakan akar-akar persamaan $x^2 + x - 23 = 0$, sehingga diperoleh

$$P(r_1) = ar_1 + b$$
$$P(r_2) = ar_2 + b$$

Mengingat diskriminan $x^2 + x - 23 = 0$ adalah $D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-23) = 93 \neq 0$, jelas bahwa nilai $r_1 \neq r_2$.
Padahal,

$$\begin{aligned} P(r_1) = P(r_2) &\Rightarrow ar_1 + b = ar_2 + b \\ &\Leftrightarrow ar_1 - ar_2 = 0 \\ &\Leftrightarrow a(r_1 - r_2) = 0 \\ &\Leftrightarrow a = 0 \end{aligned}$$

Jadi, $P(r_1) = 200 \Rightarrow ar_1 + b = 200 \Rightarrow b = 200$
Maka, $P(x) - (x^2 + x - 23) \cdot H(x) + 200$
Untuk $x = 1$ diperoleh

$$\begin{aligned} P(1) &= (1^2 + 1 - 23) \cdot H(1) + 200 \\ &= (-21)H(1) + 21 \cdot 9 + 11 \\ &= 21\big(9 - H(1)\big) + 11 \end{aligned}$$

Jadi, jelas bahwa sisa pembagian $P(1)$ oleh 21 adalah 11.

10. Penyelesaian:

Perhatikan, bilangan $\overline{abcd}$ adalah bilangan 4-digit yang habis dibagi 3 dan memuat angka 6.
Pertama kita cari dulu bilangan 4-digit yang habis dibagi 3, yaitu bilangan mulai 1002 sampai 9999. Banyak bilangan seperti ini adalah

$$\begin{aligned} U_n = a + (n-1)b \quad &\Rightarrow 9999 = 1002 + (n-1) \cdot 3 \\ &\Leftrightarrow 8997 = (n-1) \cdot 3 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 2999 = n - 1$$
$$\Leftrightarrow 3000 = n$$

Lalu, kita cari bilangan 4-digit yang habis dibagi, dan tidak memuat bilangan 6.

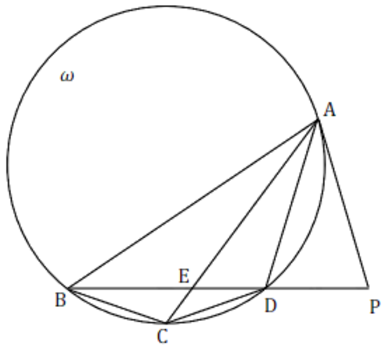
- Digit ribuan dapat diisi angka 1,2,3,4,5,7,8,9. Ada 8 angka yang dapat mengisi digit ribuan.
- Digit ratusan dapat diisi angka 0,1,2,3,4,5,7,8,9. Ada 9 angka dapat mengisi digit ratusan.
- Digit puluhan dapat diisi angka 0,1,2,3,4,5,7,8,9. Ada 9 angka dapat mengisi digit puluhan.
- Perhatikan bahwa apabila $\overline{abc}$ bilangan 3-digit, maka akan ada 3 kemungkinan digit satuan dari bilangan 4-digit $\overline{abcd}$ yang habis dibagi 3. Digit satuan tersebut dapat diisi salah satu dari tiga kemungkinan pasangan bilangan berikut (0/3/9), (1/4/7), (2/5/8).

Sehingga, dengan aturan perkalian pengisian tempat maka diperoleh banyak bilangan 4-digit yang habis dibagi 3, dan tidak memuat angka 6 adalah sebanyak $3 \times (8 \times 9 \times 9) = 1944$.

Jadi, dengan demikian diperoleh banyaknya bilangan 4-digit yang habis dibagi 3 dan memuat angka 6 adalah 3000 – 1944 = 1056.

11. Penyelesaian:

Perhatikan gambar berikut,



Karena $BC = CD$, maka $\angle BAC = \angle CAD$, akibatnya AC merupakan baris bagi sudut $\angle BAD$. Sehingga pada segitiga ABD, karena garis bagi AE maka berlaku $\frac{AB}{AD} = \frac{BE}{DE} = \frac{7}{5}$. Perhatikan juga A adalah titik singgung PA pada ω, sehingga berlaku sudut lancip antara garis singgung dengan tali busur melalui titik singgung besarnya sama dengan sudut keliling menghadap tali busur tersebut, sehingga $\angle PAD = \angle PBA$. Perhatikan juga bahwa $\angle APD = \angle APB$. Jadi segitiga APD sebangun dengan segitiga APB. Maka diperoleh perbandingan $\frac{PD}{PA} = \frac{AD}{AB} = \frac{5}{7}$.

Dari Power of Point diperoleh $PA^2 = PD \cdot PB$, sehingga karena $\frac{PD}{PA} = \frac{5}{7} \Rightarrow PA = \frac{7}{5}PD$, maka substitusikan $PA = \frac{7}{5}PD$, diperoleh

$$\begin{aligned} PA^2 = PD \cdot PB \Rightarrow \left(\tfrac{7}{5}PD\right)^2 &= PD \cdot PB \\ \Leftrightarrow \tfrac{49}{25}PD^2 &= PD \cdot PB \\ \Leftrightarrow \tfrac{49}{25}PD &= PB \\ \Leftrightarrow \tfrac{PD}{PB} &= \tfrac{25}{49} \end{aligned}$$

Sehingga, $\frac{PD}{PB} = \frac{25}{49} = \frac{m}{n}$, diperoleh $m = 25$ dan $n = 49$.
Jadi, $m + n = 25 + 49 = 74$.

12. Penyelesaian:

Perhatikan,

$$\begin{aligned} x(x-y) = 5y - 6 \Rightarrow\quad x^2 - xy &= 5y - 6 \\ \Leftrightarrow\quad x^2 + 6 &= xy + 5y \\ \Leftrightarrow\quad x^2 + 6 &= y(x+5) \\ \Leftrightarrow\quad \frac{x^2+6}{x+5} &= y \\ \Leftrightarrow\quad \frac{x^2 - 25 + 31}{x+5} &= y \\ \Leftrightarrow\quad \frac{(x+5)(x-5)+31}{x+5} &= y \\ \Leftrightarrow\quad (x-5) + \frac{31}{x+5} &= y \end{aligned}$$

Agar x dan y adalah bilangan asli, maka $x + 5$ haruslah factor dari 31. Dan mengingat bahwa 31 adalah bilangan prima, maka $x + 5 = \{1,31\}$. Sehingga hanya $x + 5 = 31$ yang memenuhi.

Maka diperoleh $x + 5 = 31 \Rightarrow x = 26$.

Sehingga untuk $x = 26$, maka:

$$\begin{aligned} y = (x-5) + \tfrac{31}{x+5} \Rightarrow y &= (26-5) + \tfrac{31}{26+5} \\ \Leftrightarrow y &= 21 + 1 \\ \Leftrightarrow y &= 22 \end{aligned}$$

Jadi, $x + y = 26 + 22 = 48$.

13. Penyelesaian:

Perhatikan, kita jumlahkan lima bentuk barisan berikut

$$
\begin{aligned}
-\cancel{a_{n+2}} + \cancel{a_{n+1}} - a_n &= -\frac{n+1}{6}\\
-\cancel{a_{n+3}} + \cancel{a_{n+2}} - \cancel{a_{n+1}} &= -\frac{n+2}{6}\\
-a_{n+4} + \cancel{a_{n+3}} - a_{n+2} &= -\frac{n+3}{6}\\
\cancel{a_{n+5}} - \cancel{a_{n+4}} + a_{n+3} &= \frac{n+4}{6}\\
a_{n+6} - \cancel{a_{n+5}} + \cancel{a_{n+4}} &= \frac{n+5}{6}\\
\hline
a_{n+6} - a_{n+4} + a_{n+3} - a_{n+2} - a_n &= \frac{-n+3}{6} \quad +
\end{aligned}
$$

Kita tahu bahwa $a_{n+4} - a_{n+3} + a_{n+2} = \frac{n+3}{6}$, maka

$$
\begin{aligned}
a_{n+6} - a_{n+4} + a_{n+3} - a_{n+2} - a_n = \frac{-n+3}{6} &\Rightarrow a_n - (a_{n+4} - a_{n+3} + a_{n+2}) + a_{n+6} = \frac{-n+3}{6}\\
&\Leftrightarrow a_{n+6} - \left(\frac{n+3}{6}\right) - a_n = \frac{-n+3}{6}\\
&\Leftrightarrow a_{n+6} - a_n = \frac{-n+3}{6} + \left(\frac{n+3}{6}\right)\\
&\Leftrightarrow a_{n+6} - a_n = 1\\
&\Leftrightarrow a_{n+6} = a_n + 1
\end{aligned}
$$

Jadi, dengan menggunakan bentuk terakhir yang diperoleh yaitu $a_{n+6} = a_n + 1$, maka diperoleh $a_1 = 1, a_7 = 2, a_{13} = 3, \ldots$

Maka pandang suku-suku tersebut sebagai bentuk $a_{6k-5} = k$, dan karena $2023 = 6 \times 338 - 5$, maka jelas bahwa $a_{2023} = 338$.

14. Penyelesaian:

Perhatikan, misal $A, B \subseteq S$ dan $A \cup B = S$.

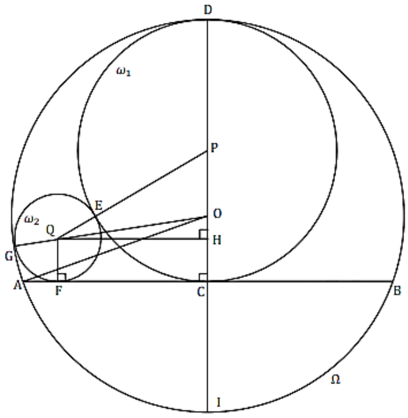
Kita bagi menjadi dua kasus.

1. $A = B = S$, dalam hal ini hanya ada 1 kasus saja.
2. $A \neq B$, maka agar $A \cup B = S$, jelas bahwa setiap a, b, c, d, e, f dapat menempati tiga kemungkinan, yaitu menjadi anggota himpunan A, menjadi anggota himpunan B, atau menjadi anggota himpunan A dan B. Jadi banyak keseluruhan kemungkinan pasangan subhimpunan yang dapat dibentuk adalah 3^6, namun dikurangi 1 untuk $A = B = S$. Jadi, diperoleh banyak cara memilih subhimpunan adalah $3^6 - 1$.
   Namun, urutan subhimpunan yang dipilih tidak diperhatikan $(A, B) = (B, A)$, sehingga banyak cara memilih subhimpunan harus dibagi 2. Jadi banyak cara memilih subhimpunan adalah $\frac{3^6-1}{2} = 364$.

Jadi, banyak cara melakukan pemilihan adalah $1 + 364 = 365$.

15. Penyelesaian:

Perhatikan,



Misal O, P, Q adalah masing-masing titik pusat lingkaran $\Omega, \omega_1, \omega_2$.

Jari-jari lingkaran ω_1 dan ω_2 masing-masing 35 dan 7. Misal jari-jari lingkaran Ω adalah R.

C titik tengah AB dan C merupakan titik singgung lingkaran ω_1 dengan AB, sehingga $PC \perp AB$.

D titik singgung lingkaran Ω dan ω_1.

E titik singgung lingkaran ω_1 dan ω_2.

F titik singgung lingkaran ω_2 dan AB.

G titik singgung lingkaran Ω dan ω_2.

Misal H pada CD sedemikian sehingga $QH \perp CD$, maka diperoleh

$$PC = PH + HC \Rightarrow 35 = PH - 7$$
$$\Leftrightarrow 28 = PH$$
$$PQ = PE + QE \Rightarrow PQ = 35 + 7$$
$$\Leftrightarrow PQ = 42$$

Perhatikan karena $QH || FC$, maka $HC = QF = 7$, sehingga $QG = 7$.

Perhatikan pada lingkaran $\Omega, OG = OD = R$, sehingga

$$OG = OQ + QG \Rightarrow \quad R = OQ + 7$$
$$\Leftrightarrow R - 7 = OQ$$

Perhatikan pada lingkaran ω_1, DC adalah diameter dan pada lingkaran $\Omega, OG = OD = R$, sehingga

$$CD = HC + OH + OD \Rightarrow \quad 70 = 7 + OH + R$$
$$\Leftrightarrow 63 - R = OH$$

Perhatikan segitiga siku-siku PQH berlaku $QH^2 = PQ^2 - PH^2$

Sedangkan pada segitiga siku-siku OQH berlaku $QH^2 = OQ^2 - OH^2$

Sehingga, dari keduanya diperoleh kesamaan berikut

$$
\begin{aligned}
PQ^2 - PH^2 = OQ^2 - OH^2 \Rightarrow \quad & 42^2 - 28^2 = (R-7)^2 - (63-R)^2 \\
\Leftrightarrow \quad & (42+28)(42-28) = (R^2 - 14R + 7^2) - (63^2 - 126R + R^2) \\
\Leftrightarrow \quad & (70)(14) = 112R - (63^2 - 7^2) \\
\Leftrightarrow \quad & (70)(14) = 112R - (63+7)(63-7) \\
\Leftrightarrow \quad & (70)(14) = 112R - (70)(56) \\
\Leftrightarrow \quad & (70)(14) + (70)(56) = 112R \\
\Leftrightarrow \quad & (70)(70) = 112R \\
\Leftrightarrow \quad & 4900 = 112R \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{4900}{112} = R \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{175}{4} = R
\end{aligned}
$$

Jika $AB = x$, dan C titik tengah AB, maka $AC = BC = \frac{1}{2}x$.

Perhatikan juga bahwa $DI = 2R = \frac{175}{2}$, dan $CD = 70$, maka dengan Power of Point diperoleh

$$
\begin{aligned}
AC \times BC = CI \times CD \Rightarrow AC \times BC &= (DI - CD) \times CD \\
\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}x\right)^2 &= \left(\frac{175}{2} - 70\right)(70) \\
\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}x\right)^2 &= 1225 \\
\Leftrightarrow \frac{1}{2}x &= 35 \\
\Leftrightarrow x &= 70
\end{aligned}
$$

Jadi, Panjang $AB = 70$.

16. Penyelesaian:

Perhatikan, $n = 2^a 3^b$ akan memiliki sebanyak $(a+1)(b+1)$ buah factor bulat positif. Sedangkan daftar semua factor bulat positif tersebut adalah suku-suku yang diperoleh dari perkalian deret berikut

$$
\Big(\underbrace{2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^a}_{\text{sebanyak } (a+1) \text{ suku}}\Big)\Big(\underbrace{3^0 + 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^b}_{\text{sebanyak } (b+1) \text{ suku}}\Big) = \underbrace{2^0 3^0 + 2^0 3^1 + 2^0 3^2 + \cdots + 2^a 3^b}_{\text{sebanyak } (a+1)(b+1) \text{ suku}}
$$

Sekarang perhatikan hasil perkalian dari semua suku-suku yang menyatakan setiap factor bulat positif dari $2^a 3^b$ tersebut adalah

$$
\begin{aligned}
\underbrace{2^0 3^0 \times 2^0 3^1 \times 2^0 3^2 \times \ldots \times 2^a 3^b}_{\text{sebanyak } (a+1)(b+1) \text{ faktor}} &= \underbrace{(2^0 3^0 \cdot 2^a 3^b) \cdot (2^0 3^1 \cdot 2^a 3^{b-1}) \ldots (2^a 3^b \cdot 2^0 3^0)}_{\text{sebanyak } \frac{(a+1)(b+1)}{2} \text{ faktor}} \\
&= \underbrace{(2^a 3^b) \cdot (2^a 3^b) \ldots (2^a 3^b)}_{\text{sebanyak } \frac{(a+1)(b+1)}{2} \text{ faktor}} \\
&= (2^a 3^b)^{\left(\frac{(a+1)(b+1)}{2}\right)}
\end{aligned}
$$

Jadi, hasil kali dari seluruh factor bulat positif dari n adalah $n^{\frac{1}{2} \times \text{banyak faktor bulat positif } n}$.

Sekarang kita lanjutkan pekerjaannya, bahwa hasil kali dari semua factor bulat positif dari $2^a 3^b$ adalah $(2^a 3^b)^{\left(\frac{(a+1)(b+1)}{2}\right)}$, dimana pada soal nilainya 12^{90}, sehingga

$$(2^a 3^b)^{\left(\frac{(a+1)(b+1)}{2}\right)} = 12^{90}$$
$$\Rightarrow \quad (2^a 3^b)^{\left(\frac{(a+1)(b+1)}{2}\right)} = (2^2 \times 3)^{90}$$
$$\Leftrightarrow 2^{\frac{a(a+1)(b+1)}{2}} 3^{\frac{b(a+1)(b+1)}{2}} = 2^{180} 3^{90}$$

Jadi, $\frac{a(a+1)(b+1)}{2} = 180 \Rightarrow a(a+1)(b+1) = 360$ dan $\frac{b(a+1)(b+1)}{2} = 90 \Rightarrow b(a+1)(b+1) = 180$. Jelas bahwa $a = 2b$, artinya $b(2b+1)(b+1) = 180$.
Mudah dicari bahwa nilai b yang memenuhi adalah $b = 4$. Sehingga $a = 8$.
Jadi, nilai $ab = 4 \times 8 = 32$.

17. Penyelesaian:

Jelas bahwa bentuk kuadrat dan bentuk kuadrat merupakan bentuk yang bernilai non-negatif, jadi jelas bahwa nilai minimum dari kuadrat jumlah dua bilangan dan bentuk akar adalah 0. Sehingga,

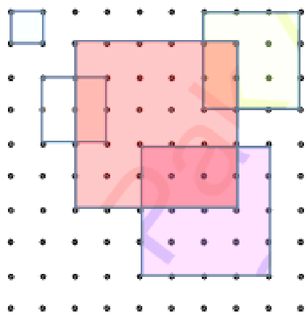
$$(x+y)^2 = 0 \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow x = -y$$

Dengan $x^2 - 16 \geq 0$ dan $y^2 - 25 \geq 0$
Jadi, nilai minimum dari bentuk tersebut adalah 0.

18. Penyelesaian:

Kita dapat membagi menjadi 3 kasus.

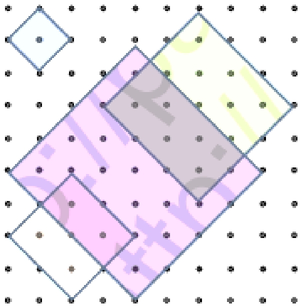
1. Kasus persegi dengan sisi sejajar sumbu X dan sumbu Y.



Persegi ukuran 1×1 sebanyak 9^2 buah, persegi ukuran 2×2 sebanyak 8^2 buah, begitu seterusnya jadi dapat kita simpulkan bahwa banyak persegi pada kasus pertama ini adalah

$$\sum_{i=1}^{9} i^2 = \frac{1}{6} \times 9 \times 10 \times 19 = 285$$

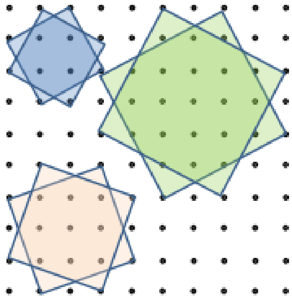
2. Kasus persegi dengan sisi membentuk sudut 45^o terhadap sumbu X dan sumbu Y.



Persegi ukuran $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ sebanyak 8^2 buah, persegi ukuran $2\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}$ sebanyak 6^2 buah, begitu seterusnya jadi dapat kita simpulkan bahwa banyak persegi pada kasus kedua ini adalah

$$\sum_{i=1}^{4} (2i)^2 = 4\sum_{i=1}^{4} i^2 = \frac{4}{6} \times 4 \times 5 \times 9 = 120$$

3. Kasus persegi dengan selain kasus 1 dan kasus 2



Persegi ukuran $\sqrt{1^2 + 2^2} \times \sqrt{1^2 \times 2^2}$ sebanyak 2×7^2 buah, persegi ukuran $\sqrt{1^2 + 3^2} \times \sqrt{1^2 \times 3^2}$ sebanyak 2×6^2 buah, begitu seterusnya jadi dapat kita simpulkan bahwa banyak persegi berukuran $\sqrt{1^2 + n^2} \times \sqrt{1^2 \times n^2}, 2 \leq n \leq 8$ ini adalah

$$\sum_{i=1}^{7} 2i^2 = 2\sum_{i=1}^{7} i^2 = \frac{2}{6} \times 7 \times 8 \times 15 = 280$$

Persegi ukuran $\sqrt{2^2 + 3^2} \times \sqrt{2^2 \times 3^2}$ sebanyak 2×5^2 buah, persegi ukuran $\sqrt{2^2 + 4^2} \times \sqrt{2^2 \times 4^2}$ sebanyak 2×4^2 buah, begitu seterusnya jadi dapat kita simpulkan bahwa banyak persegi berukuran $\sqrt{2^2 + n^2} \times \sqrt{2^2 \times n^2}, 3 \leq n \leq 7$ ini adalah

$$\sum_{i=1}^{5} 2i^2 = 2\sum_{i=1}^{5} i^2 = \frac{2}{6} \times 5 \times 6 \times 11 = 110$$

Persegi ukuran $\sqrt{3^2 + 4^2} \times \sqrt{3^2 \times 4^2}$ sebanyak 2×3^2 buah, persegi ukuran $\sqrt{3^2 + 5^2} \times \sqrt{3^2 \times 5^2}$ sebanyak 2×2^2 buah, begitu seterusnya jadi dapat kita simpulkan bahwa banyak persegi berukuran $\sqrt{3^2+n^2}\times\sqrt{3^2\times n^2}, 4\leq n\leq 6$ ini adalah

$$\sum_{i=1}^{3}2i^2=2\sum_{i=1}^{3}i^2=\frac{2}{6}\times 3\times 4\times 7=28$$

Persegi ukuran $\sqrt{4^2+5^2}\times\sqrt{4^2\times 5^2}$ sebanyak 2×1^2 buah, jadi dapat kita simpulkan bahwa banyak persegi berukuran $\sqrt{4^2+5^2}\times\sqrt{4^2\times 5^2}, 4\leq n\leq 6$ ini adalah

$$\sum_{i=1}^{1}2i^2=2\sum_{i=1}^{1}i^2=\frac{2}{6}\times 1\times 2\times 3=2$$

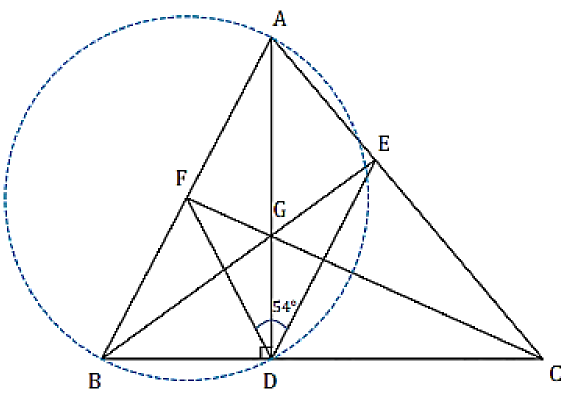
Jadi keseluruhan banyak persegi pada kasus ketiga ini adalah 280 + 110 + 28 + 2 = 420.

Jadi, total banyak persegi yang mungkin adalah

$$\sum_{i=1}^{9}i^2+\sum_{i=1}^{4}(2i)^2+2\left(\sum_{i=1}^{7}i^2+\sum_{i=1}^{5}i^2+\sum_{i=1}^{3}i^2+\sum_{i=1}^{1}i^2\right)=285+120+420=\boxed{825}$$

19. Penyelesaian:

Perhatikan,



Perhatikan, karena $\angle ADB=90^o$ dan $AF=FB$, maka lingkaran luar segitiga ADB berpusat di F dan $FA=FB=FC$ adalah Panjang jari-jarinya.

Misal AD, BE dan CF berpotongan di titik G dan misal besar $\angle ADF=x$, maka karena pada segitiga $FB=FD$ maka diperoleh $\angle FDB=\angle FBD=90^o-x$.

Perhatikan dalil de Ceva pada segitiga ABC

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1\Rightarrow 1\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$$
$$\Leftrightarrow \frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}=1$$
$$\Leftrightarrow \frac{BD}{DC}=\frac{EA}{CE}$$

Sehingga jelas bahwa $\frac{BD}{DC} = \frac{EA}{CE}$ akan berakibat bahwa pada segitiga ABC garis ED sejajar dengan AB dan $\angle FBD = \angle EDC = 90^o - x$.
Perhatikan titik D, berlaku $\angle BDF + \angle FDE + \angle EDC = 180^o$, sehingga

$$\begin{aligned} \angle FDB + \angle EDF + \angle EDC = 180^\circ \Rightarrow\ & 90^\circ - x + 54^\circ + 90^\circ - x = 180^\circ \\ \Leftrightarrow\ & 234^\circ - 2x = 180^\circ \\ \Leftrightarrow\ & 54^\circ = 2x \\ \Leftrightarrow\ & 27^\circ = x \end{aligned}$$

Jadi, besar $\angle ABC = 90^O - x = 90^o - 27^o = 63^o$.

20. Penyelesaian:

Kita coba dulu untuk p bilangan prima awal.
Untuk $p = 2$, maka $n|(2^2 + 4) \Rightarrow n|8$. Dan $2|(n^2 + 4)$. Jadi nilai n terbesar yang mungkin adalah 8.
Untuk $p = 3$, maka $n|(3^2 + 4) \Rightarrow n|13$. Dan $3|(n^2 + 4)$. Jadi, tidak nilai n yang memenuhi.
Untuk $p > 4$, maka $n|\underbrace{(p^2 + 4)}_{ganjil}$. Dan $p|(n^2 + 4)$. Jadi, haruslah n bilangan ganjil.
Perhatikan, jika $a > b > 4$ maka pasangan bilangan asli (a, b) yang ganjil, dimana $a|b^2 + 4$ dan $b|a^2 + 4$, maka jelas bahwa $ab|(a^2 + 4)(b^2 + 4) \Rightarrow ab|(a^2 + b^2 + 4)$.
Misal $a^2 + b^2 + 4 = k \cdot ab$, dengan k suatu bilangan asli.
Maka $a^2 - k \cdot ab + b^2 + 4 = 0$.
Maka untuk suatu persamaan kuadrat $x^2 - kbx + b^2 + 4 = 0$ diperoleh a adalah salah satu akarnya, sedangkan a_2 adalah akar yang lain.
Dari teorema vieta diperoleh $a + a_2 = kb$. Maka karena a dan kb adalah bilangan bulat, maka jelas a_2 adalah bilangan bulat. Karena $a > b$, maka $a \geq b + 1$ dan $b > 4$, maka diperoleh

$$a \cdot a_2 = b^2 + 4 \Rightarrow a_2 = \frac{b^2 + 4}{4} \leq \frac{b^2 + 4}{a} < b \Rightarrow a_2 < b$$

Sehingga apabila (a, b) memenuhi, maka (b, a_2) juga memenuhi, begitu juga sebaliknya.
Mari diperiksa solusi terkecil dari $ab|(a^2 + b^2 + 4)$, mengingat $a > b > 4$, maka untuk $b = 5$, diperoleh $5a|(a^2 + 29)$. Mudah diperiksa bahwa $a = 29$ memenuhi. Sehingga diperoleh pasangan (29, 5) memenuhi, maka $\left(\frac{29^2+4}{5}, 29\right) = (169{,}29)$ juga memenuhi. Selanjutnya $\left(\frac{169^2+4}{29}, 169\right) = (985{,}169)$ juga memenuhi, dan seterusnya.
Sehingga, apabila $p < 200$ dan p bilangan prima, maka $p = 29$, dan nilai terbesar n adalah 169.