



JELAJAH NALAR

Analisa Isi Kepala Tanpa Suara



PEMBAHASAN OSP MATEMATIKA SMP TAHUN 2024

1. Jawaban :

$$\begin{aligned} p^2 - 70p + q^2 - 70q + 2pq &= 2024 \\ p^2 + q^2 + 2pq - 70(p + q) &= 2024 \\ (p + q)^2 - 70(p + q) &= 2024 \end{aligned}$$

Misalkan $x = p + q$	$1 + 91 = 92$
$x^2 - 70x - 2024 = 0$	$2 + 90 = 92$
$(x - 92)(x + 22) = 0$	$3 + 89 = 92$
$x = 92$ atau $x = -22$
$p + q = 92$	$91 + 1 = 92$

2. Jawaban :

$$\begin{aligned} F(179) &= 179 + 1 + 7 + 9 = 196 \\ F(189) &= 189 + 1 + 8 + 9 = 207 \\ F(190) &= 190 + 1 + 9 + 0 = 200 \\ F(191) &= 191 + 1 + 9 + 1 = 202 \\ F(192) &= 192 + 1 + 9 + 2 = 204 \end{aligned}$$

.....
.....
.....

$$\begin{aligned} F(523) &= 523 + 5 + 2 + 3 = 533 \\ F(524) &= 524 + 5 + 2 + 4 = 535 \end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } a + b = 192 + 524 = 716$$

3. Jawaban :

Karena hasil perkalian seluruh digitnya adalah kelipatan 10, maka diantara digit-digit bilangan tersebut memuat 2 dan 5.

Digit-digit prima adalah 2, 3, 5, 7

Bilangan 3 digit

$$2 + 5 + a = 2 \times 5 \times a$$

$$7 + a = 10a$$

$$9a = 7$$

Bilangan 4 digit





JELAJAH NALAR

Analisa Isi Kepala Tanpa Suara



$$2 + 5 + a + b = 2 \times 5 \times a \times b$$

$$7 + a + b = 10ab$$

$$a = 3, b = 5$$

Bilangan 5 digit

$$2 + 5 + a + b + c = 2 \times 5 \times a \times b \times c$$

$$7 + a + b + c = 10abc$$

2355 2535 2553 3255 3253 3235
5235 5253 5325 5352 5553 5532

4. Jawaban :

Penjumlahan 4 bilangan bulat positif berurutan

⇒ 23 bilangan

Penjumlahan 5 bilangan bulat positif berurutan

⇒ 14 bilangan

Penjumlahan 6 bilangan bulat positif berurutan

⇒ 12 bilangan

Penjumlahan 7 bilangan bulat positif berurutan

⇒ 6 bilangan

Penjumlahan 8 bilangan bulat positif berurutan

⇒ 6 bilangan

Penjumlahan 9 bilangan bulat positif berurutan

⇒ 1 bilangan

$$\text{Bilangan} = 45, 54, 63, 72, 81, 90, 99$$

Penjumlahan 10 bilangan bulat positif berurutan

$$\text{Bilangan} = 55, 65, 75, 85, 95$$

⇒ 0 bilangan

Penjumlahan 11 bilangan bulat positif berurutan

$$\text{Bilangan} = 66, 77, 88, 99$$

⇒ 1 bilangan

Penjumlahan 12 bilangan bulat positif berurutan : 78, 90

⇒ 0 bilangan

Penjumlahan 13 bilangan bulat positif berurutan : 91

⇒ 0 bilangan

Sehingga dapat disimpulkan banyak nilai x adalah $23 + 14 + 12 + 6 + 6 + 1 + 0 + 1 + 0 + 0 = 63$.

5. Jawaban:

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-y-z} &= \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \\ \frac{1}{x-y-z} &= \frac{y+z}{yz} \\ yz &= (y+z)(x-y-z)\end{aligned}$$

Tinjau bahwa $y + z | yz$. Jika y, z ganjil, maka $y + z$ genap dan yz ganjil sehingga $y + z \nmid yz$. Maka salah satunya haruslah genap. Tinjau 2 kasus sebagai berikut.

- Kasus 1: $y = 2$

Maka kita punya $z + 2 | 2z$. Perhatikan bahwa





JELAJAH NALAR

Analisa Isi Kepala Tanpa Suara



$$z + 2|2(z + 2) - 4 \Rightarrow z + 2|4$$

Maka didapatkan $z = -3$ atau $z = 2$.

Untuk $z = -3$, maka kita punya

$$-6 = -1(x + 1) \Rightarrow x = 5$$

Untuk $z = 2$, maka kita punya

$$4 = 4(x - 4) \Rightarrow x = 5$$

- Kasus 2: $y = -2$

Maka kita punya $z - 2| - 2z$. Perhatikan bahwa

$$z - 2| - 2(z - 2) - 4 \Rightarrow z - 2|4$$

Maka didapatkan $z = -2$ atau $z = 3$.

Untuk $z = -2$, maka kita punya

$$4 = -4(x + 4) \Rightarrow x = -5$$

Untuk $z = 3$, maka kita punya

$$-6 = 1(x - 1) \Rightarrow x = -5$$

Perhatikan juga bahwa jika (x, y, z) merupakan solusi, maka (x, z, y) juga merupakan solusi. Sehingga tripel (x, y, z) yang memenuhi ada sebanyak 6.

6. Jawaban :

$$(x - a)^2(x - b) = x^3 - px^2 + 189x - q$$

$$2a + b = p$$

$$(x^2 - 2ax + a^2)(x - b) = x^3 - px^2 + 189x - q$$

$$2ab + a^2 = 189$$

$$x^3 - bx^2 - 2ax^2 + 2abx + a^2x - a^2b = x^3 - px^2 + 189x - q$$

$$a^2b = q$$

$$x^3 - (2a + b)x^2 + (2ab + a^2)x - a^2b = x^3 - px^2 + 189x - q$$

$$(x - a)(x - b)^2 = x^3 - rx^2 + 144x - s$$

$$2b + a = r$$

$$(x - a)(x^2 - 2bx + b^2) = x^3 - rx^2 + 144x - s$$

$$2ab + b^2 = 144$$

$$x^3 - 2bx^2 + b^2x - ax^2 + 2abx - ab^2 = x^3 - rx^2 + 144x - s$$

$$ab^2 = s$$

$$x^3 - (2b + a)x^2 + (2ab + b^2)x - ab^2 = x^3 - rx^2 + 144x - s$$

$$2ab + a^2 = 189$$

$$\underline{2ab + b^2 = 144}$$

$$a^2 - b^2 = 45$$

$$(a + b)(a - b) = 45$$

$$a = 9, b = 6$$

$$2a + b = p$$

$$2b + a = r$$

$$p = 24$$

$$r = 21$$

$$a^2b = q$$

$$ab^2 = s$$

$$q = 486$$

$$s = 324$$





JELAJAH NALAR

Analisa Isi Kepala Tanpa Suara

Jadi, nilai $(p + q) - (r + s)$ adalah
 $= (24 + 486) - (21 + 324)$
 $= 510 - 345$
 $= 165$

7. Jawaban :

Misalkan $p = 2024p_1$, $q = q_1$, $r = 2024r_1$, dan $s = s_1$. Soal akan ekuivalen dengan mencari nilai minimum dari

$$k = \frac{p_1q_1 + 1}{p_1 + 1} + \frac{q_1r_1 + 1}{q_1 + 1} + \frac{r_1s_1 + 1}{r_1 + 1} + \frac{s_1p_1 + 1}{s_1 + 1}$$

Dimana $p_1q_1r_1s_1 = 1$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} k &= \frac{p_1q_1+1}{p_1+1} + \frac{\frac{1}{p_1q_1}+1}{\frac{1}{p_1+1}} + \frac{q_1r_1+1}{q_1+1} + \frac{\frac{1}{q_1r_1}+1}{\frac{1}{q_1+1}} \\ &= (p_1q_1 + 1)\left(\frac{1}{p_1+1} + \frac{1}{p_1q_1+p_1q_1r_1}\right) + (q_1r_1 + 1)\left(\frac{1}{q_1+1} + \frac{1}{q_1r_1+q_1r_1s_1}\right) \end{aligned} \quad (11.1)$$

$$\geq (p_1q_1 + 1)\left(\frac{4}{p_1q_1r_1+p_1q_1+p_1+1}\right) + (q_1r_1 + 1)\left(\frac{4}{q_1r_1s_1+q_1r_1+q_1+1}\right) \quad (11.2)$$

$$= (p_1q_1 + 1)\left(\frac{4}{p_1q_1r_1+p_1q_1+p_1+1}\right) + (p_1q_1r_1 + p_1)\left(\frac{4}{p_1q_1r_1+p_1q_1+p_1+1}\right) = 4$$

Ketidaksamaan AM-HM dipakai dari (11.1) ke (11.2). Dapat diperoleh nilai minimum dari k adalah 4, sehingga $x = 4 \Rightarrow 1000x = 4000$. Kesamaan tercapai saat $p = 2024$, $q = 1$, $r = 2024$, $s = 1$.

8. Jawaban :

Perhatikan bahwa, bentuk soal dapat kita ubah menjadi

$$\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{x+2}{x-1}$$

Tinjau bahwa

$$\begin{aligned} \frac{f(2024)}{f(2)} &= \frac{f(2024)}{f(2023)} \cdot \frac{f(2023)}{f(2022)} \cdot \frac{f(2022)}{f(2021)} \cdot \frac{f(2021)}{f(2020)} \cdot \frac{f(2020)}{f(2019)} \cdots \frac{f(6)}{f(5)} \cdot \frac{f(5)}{f(4)} \cdot \frac{f(4)}{f(3)} \cdot \frac{f(3)}{f(2)} \\ \frac{f(2024)}{f(2)} &= \frac{(2025)}{(2022)} \cdot \frac{(2024)}{(2021)} \cdot \frac{(2023)}{(2020)} \cdot \frac{(2022)}{(2019)} \cdots \frac{7}{4} \cdot \frac{6}{3} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{1} = \frac{2025!}{2022!} = \frac{2025 \cdot 2024 \cdot 2023}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 1381911300 \end{aligned}$$

Padahal $1381911300 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 17^2 \cdot 23$. Maka banyak faktor prima adalah 7.

9. Jawaban :

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} (2f(a) + 3g(b))^2 &= 6^2 \\ 4f(a)^2 + 9g(b)^2 + 12f(a)g(b) &= 36 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} (3f(b) + 2g(a))^2 &= 7^2 \\ 9f(b)^2 + 4g(a)^2 + 12f(b)g(a) &= 49 \end{aligned} \quad (2)$$

Tambahkan (1) dan (2) sehingga didapatkan





JELAJAH NALAR

Analisa Isi Kepala Tanpa Suara



$$\frac{4(f(a^2) + g(a)^2) + 9(f(b)^2 + g(b)^2) + 12(f(a)g(b) + f(b)g(a))}{13 + 12} = 85$$

13 I merupakan titik pusat lingkaran L, lingkaran L berpotongan dengan BC, AC, AB berturut-turut di titik D, E, F dan jari-jari lingkaran L adalah r. Perhatikan ΔIPF dan ΔQEI . Kita punya $\angle QEI = \angle IFP = 90^\circ$ dan $\angle QIE = 90^\circ - \angle FIP = \angle IPF$. Maka kita punya $\Delta QEI \sim \Delta IPF$. Sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}\frac{QI}{IE} &= \frac{IP}{PF} \\ \frac{r+4}{r} &= \frac{r+1,5}{\sqrt{(r+1,5)^2 - r^2}} \\ \frac{r+4}{r} &= \frac{2r+3}{\sqrt{12r+9}} \\ r(2r+3) &= (r+4)\sqrt{12r+9} \\ r &= 6\end{aligned}$$

Maka didapatkan luas lingkaran L adalah $6^2\pi = 36\pi$ yang membuat nilai a adalah 36.

10. Jawaban :

Fungsi kuadrat $y = f(x)$ dapat dinyatakan dalam bentuk $f(x) = ax^2 + bx + c$. Karena fungsi melalui titik $(0, 3)$, maka $f(0) = 3$, substitusikan ke dalam bentuk umum: $a(0)^2 + b(0) + c = 3$, yang berarti $c = 3$. Jadi, fungsi dapat ditulis sebagai $f(x) = ax^2 + bx + 3$.

Diberikan $-1 \leq f(-2) \leq 1$ dan $-2 \leq f(-2) \leq 2$. Substitusi $x = -2$ ke $f(x)$: $f(2) = a(-2)^2 + b(-2) + 3 = 4a - 2b + 3$. Maka, $-1 \leq 4a - 2b + 3 \leq 1$. Kurangkan 3 dari semua bagian: $-4 \leq 4a - 2b \leq -2$. Bagi dengan 2: $-2 \leq 2a - b \leq -1$. (Persamaan 1)
Substitusi $x = 2$ ke $f(x)$: $f(2) = a(2)^2 + b(2) + 3 = 4a + 2b + 3$. Maka, $-2 \leq 4a + 2b + 3 \leq 2$. Kurangkan 3 dari semua bagian: $-5 \leq 4a + 2b \leq -1$. (Persamaan 2)

Menentukan Batas untuk a dan b

Jumlahkan Persamaan 1 dan Persamaan 2:

$$(-2) + (-5) \leq (2a - b) + (4a + 2b) \leq (-1) + (-1) - 7 \leq 6a + b \leq -2.$$

Kurangkan Persamaan 1 dari Persamaan 2:

$$(-5) - (-2) \leq (4a + 2b) - (2a - b) \leq (-1) - (-1) - 3 \leq 2a + 3b \leq 0.$$

Nilai Maksimum Fungsi Kuadrat

Nilai maksimum M dari fungsi kuadrat $f(x) = ax^2 + bx + c$ terjadi pada $x = -\frac{b}{2a}$ dan diberikan oleh $M = \frac{4ac - b^2}{4a}$. Substitusi $c = 3$:





JELAJAH NALAR

Analisa Isi Kepala Tanpa Suara



$$M = \frac{4a(3) - b^2}{4a} = \frac{12a - b^2}{4a} = 3 - \frac{b^2}{4a}$$

Menentukan Nilai M

Dari kondisi batas, dapat disimpulkan bahwa a harus negatif agar fungsi memiliki nilai maksimum. Jika $a < 0$, maka $-\frac{b^2}{4a}$ akan positif. Untuk memaksimalkan M , nilai $\frac{b^2}{4a}$ harus diminimalkan. Dari $-2 \leq 2a - b \leq -1$ dan $-5 \leq 4a + 2b \leq -1$, dapat disimpulkan bahwa $a = -\frac{1}{2}$ dan $b = 0$ memenuhi kondisi tersebut. Dengan $a = -\frac{1}{2}$ dan $b = 0$, maka $M = 3 - \frac{0^2}{4(-\frac{1}{2})} = 3$.

Menghitung $840M$

Jadi, Nilai $840M = 840 \times 3 = 2520$.

11. Jawaban :

Perhitungan Jari-Jari

Jari-jari setengah lingkaran X, R_X , ditentukan sebagai R .

Jari-jari setengah lingkaran P dan Q, R_P dan R_Q , ditentukan sebagai $\frac{R}{2}$ karena diameter AO dan OB adalah diameter setengah lingkaran P dan Q , dan $AO = OB = R$.

Tinggi dari garis AB ke garis CD, h , ditentukan dengan menggunakan teorema Pythagoras pada segitiga yang dibentuk oleh pusat O , titik singgung setengah lingkaran P dengan garis CD dan pusat O . Jari-jari setengah lingkaran P adalah $\frac{R}{2}$, sehingga $h = \frac{R}{2}$.

Panjang setengah dari tali busur CD, CF ditentukan dengan menggunakan teorema Pythagoras pada segitiga yang dibentuk oleh pusat O , titik F , dan titik C pada busur setengah lingkaran X . Jari-jari setengah lingkaran X adalah R dan $OF = h = \frac{R}{2}$, sehingga

$$CF = \sqrt{R^2 - (\frac{R}{2})^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}} = \sqrt{\frac{3R^2}{4}} = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

Diameter setengah lingkaran R dan S adalah CF , sehingga jari-jari setengah lingkaran R dan S, R_R dan R_S , ditentukan sebagai $\frac{CF}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{4}$.

Perhitungan Luas Daerah

Luas setengah lingkaran X, L_X , dihitung sebagai $\frac{1}{2}\pi R^2$.

Luas setengah lingkaran P dan Q, L_P dan L_Q , dihitung sebagai $\frac{1}{2}\pi(\frac{R}{2})^2 = \frac{1}{2}\pi \frac{R^2}{4} = \frac{1}{8}\pi R^2$.





JELAJAH NALAR

Analisa Isi Kepala Tanpa Suara



Luas setengah lingkaran R dan S , L_R dan L_S , dihitung sebagai $\frac{1}{2}\pi(\frac{R\sqrt{3}}{4})^2 = \frac{1}{2}\pi\frac{3R^2}{16} = \frac{3}{32}\pi R^2$

Luas daerah berwarna merah, L_{merah} , dihitung sebagai

$$L_P + L_Q + L_R + L_S = 2 \times \frac{1}{8}\pi R^2 + 2 \times \frac{3}{32}\pi R^2 = \frac{1}{4}\pi R^2 + \frac{3}{16}\pi R^2 = \frac{4\pi R^2 + 3\pi R^2}{16} = \frac{7}{16}\pi R^2$$

Luas daerah berwarna putih, L_{putih} , dihitung sebagai

$$L_X - L_{merah} = \frac{1}{2}\pi R^2 - \frac{7}{16}\pi R^2 = \frac{8\pi R^2 - 7\pi R^2}{16} = \frac{1}{16}\pi R^2$$

Perbandingan Luas

Perbandingan luas daerah berwarna merah dan putih adalah

$$L_{merah} : L_{putih} = \frac{7}{16}\pi R^2 : \frac{1}{16}\pi R^2.$$

Perbandingan disederhanakan menjadi $7 : 1$.

Nilai A adalah 7 dan nilai B adalah 1.

Jadi, nilai $A + B$ dihitung sebagai $7 + 1 = 8$.

12. Jawaban :

Dapat diasumsikan titik A berada di koordinat $(0, 0)$. Karena $ABCD$ adalah persegi dengan panjang sisi 4, maka koordinat titik D adalah $(0, 4)$.

Penentuan Koordinat Titik D' :

Titik $D(0, 4)$ diputar 60° searah jarum jam dengan pusat $A(0, 0)$. Koordinat D' dapat ditentukan menggunakan rumus rotasi:

$$x' = x \cos(-\theta) - y \sin(-\theta)$$

$$y' = x \sin(-\theta) + y \cos(-\theta)$$

Dengan $x = 0, y = 4$ dan $\theta = 60^\circ$:

$$x' = 0 \cdot \cos(-60^\circ) - 4 \cdot \sin(-60^\circ) = 0 - 4 \cdot (-\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2\sqrt{3}$$

$$y' = 0 \cdot \sin(-60^\circ) + 4 \cdot \cos(-60^\circ) = 0 + 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$$

Jadi koordinat D' adalah $(2\sqrt{3}, 2)$.

Penentuan Koordinat Titik A', B' dan C' :

Titik A, B dan C dicerminkan terhadap titik D' . Jika $P(x, y)$ dicerminkan terhadap $M(x_m, y_m)$ menjadi $P'(x', y')$, maka $x' = 2x_m - x$ dan $y' = 2y_m - y$.

- Untuk $A(0, 0)$ dicerminkan terhadap $D'(2\sqrt{3}, 2)$:

$$A' = (2(2\sqrt{3}) - 0, 2(2) - 0) = (4\sqrt{3}, 4).$$

- Untuk $B(4, 0)$ dicerminkan terhadap $D'(2\sqrt{3}, 2)$:

$$B' = (2(2\sqrt{3}) - 4, 2(2) - 0) = (4\sqrt{3} - 4, 4).$$

- Untuk $C(4, 4)$ dicerminkan terhadap $D'(2\sqrt{3}, 2)$:

$$C' = (2(2\sqrt{3}) - 4, 2(2) - 4) = (4\sqrt{3} - 4, 0).$$





JELAJAH NALAR

Analisa Isi Kepala Tanpa Suara



Perhitungan Luas Segiempat $A'B'C'D'$:

Segiempat $A'B'C'D'$ adalah jajar genjang karena D' adalah titik tengah AA' , BB' dan CC' . Luas jajar genjang dapat dihitung menggunakan rumus determinan atau dengan membagi menjadi dua segitiga. Dapat digunakan rumus luas jajar genjang dengan koordinat:

$$L = \frac{1}{2} |(x_{A'}y_{B'} + x_{B'}y_{C'} + x_{C'}y_{D'} + x_{D'}y_{A'}) - (y_{A'}x_{B'} + y_{B'}x_{C'} + y_{C'}x_{D'} + y_{D'}x_{A'})|$$
$$L = \frac{1}{2} |(4\sqrt{3} \cdot 4 + (4\sqrt{3} - 4) \cdot 0 + (4\sqrt{3} - 4) \cdot 2 + 2\sqrt{3} \cdot 4) - (4 \cdot (4\sqrt{3} - 4) + 4 \cdot (4\sqrt{3} - 4) + 0 \cdot 2\sqrt{3} + 2 \cdot 4\sqrt{3})|$$
$$L = \frac{1}{2} |(16\sqrt{3} + 0 + 8\sqrt{3} - 8 + 8\sqrt{3}) - (16\sqrt{3} - 16 + 16\sqrt{3} - 16 + 0 + 8\sqrt{3})|$$
$$L = \frac{1}{2} |(32\sqrt{3} - 8) - (40\sqrt{3} - 32)| L = \frac{1}{2} |32\sqrt{3} - 8 - 40\sqrt{3} + 32|$$
$$L = \frac{1}{2} |-8\sqrt{3} + 24| L = \frac{1}{2} (24 - 8\sqrt{3}) = 12 - 4\sqrt{3}$$

Penentuan Nilai a dan b :

Diketahui luas segiempat $A'B'C'D'$ adalah $a - b\sqrt{3}$. Dari perhitungan, luasnya adalah $12 - 4\sqrt{3}$. Maka, $a = 12$ dan $b = 4$.

Perhitungan Nilai $a \times b$:

$$a \times b = 12 \times 4 = 48.$$

13. Jawaban :

Step 1: Memahami geometri dan hubungan jari-jari lingkaran dalam segitiga

Diketahui lingkaran L menyinggung ketiga sisi segitiga siku-siku ABC . Ini berarti lingkaran tersebut adalah lingkaran dalam segitiga. Jari-jari lingkaran dalam (r) pada segitiga siku-siku dapat dihubungkan dengan Panjang sisi-sisi segitiga. Misalkan sisi-sisi miring adalah c . Maka, $r = \frac{a+b-c}{2}$.

Step 2: Menentukan posisi garis dan hubungannya dengan jari-jari

Garis ℓ melalui pusat lingkaran L dan sejajar BC . Garis ℓ memotong AB di P dan AC di Q . Karena ℓ sejajar BC , maka segitiga APQ sebangun dengan segitiga ABC . Jarak dari pusat lingkaran ke sisi-sisi segitiga adalah jari-jari r .

Step 3: Menggunakan informasi jarak X ke AB dan Y ke AB

Lingkaran L dipotong oleh garis ℓ di X dan Y . Jarak X ke AB kurang dari jarak Y ke AB . Ini mengindikasikan posisi X lebih dekat ke AB daripada Y .

Step 4: Menghubungkan PX dan QY dengan jari-jari





JELAJAH NALAR

Analisa Isi Kepala Tanpa Suara



Diketahui $PX = 1,5$ cm dan $QY = 4$ cm. Karena garis ℓ sejajar BC dan melalui pusat lingkaran, maka jarak dari pusat lingkaran ke garis AB adalah r . Jarak dari X ke AB adalah $r -$ jarak dari X ke pusat lingkaran secara vertical.

Demikian pula untuk Y. Namun, karena X dan Y berada pada lingkaran dan garis ℓ sejajar BC, maka jarak vertical dari X dan Y ke garis ℓ adalah sama.

Pada segitiga siku-siku, pusat lingkaran dalam berada pada jarak r dari setiap sisi. Karena garis ℓ sejajar BC dan melalui pusat lingkaran, maka jarak dari garis ℓ ke sisi BC adalah r . Karena ℓ memotong AB di P dan AC di Q, dan lingkaran L dipotong oleh ℓ di X dan Y, maka PX dan QY dapat dihubungkan dengan jari-jari r . Dengan mempertimbangkan simetri dan sifat-sifat garis singgung lingkaran, kita dapat menyimpulkan bahwa $PX \cdot QY = r^2$.

Step 5: Menghitung jari-jari lingkaran

Substitusikan nilai $PX = 1,5$ cm dan $QY = 4$ cm ke dalam persamaan:

$$r^2 = PX \cdot QY$$

$$r^2 = 1,5 \cdot 4$$

$$r^2 = 6$$

$$r = \sqrt{6} \text{ cm}$$

Step 6: Menghitung luas daerah lingkaran

Rumus luas lingkaran adalah

$$L = \pi r^2.$$

$$L = \pi \cdot (\sqrt{6})^2$$

$$L = 6\pi \text{ cm}^2.$$

14. Jawaban :

Menentukan jari-jari bola:

Diameter bola adalah 10 cm, sehingga jari-jari bola (r) adalah $\frac{10}{2} = 5$ cm.

Menentukan jumlah bola per dimensi:

Panjang wadah adalah 50 cm. Jumlah bola yang dapat dimuat sepanjang Panjang wadah adalah $\frac{50}{10} = 5$ bola.

Lebar wadah adalah 50 cm. Jumlah bola yang dapat dimuat sepanjang lebar wadah adalah $\frac{50}{10} = 5$ bola.

Tinggi wadah adalah 60 cm. Jumlah bola yang dapat dimuat sepanjang tinggi wadah adalah $\frac{60}{10} = 6$ bola.





JELAJAH NALAR

Analisa Isi Kepala Tanpa Suara



Menghitung total bola:

Total bola yang dapat dimasukkan ke dalam wadah adalah hasil perkalian jumlah bola per dimensi, yaitu $5 \times 5 \times 6 = 150$ bola.

Jadi, maksimum banyaknya bola yang dapat dimasukkan ke dalam wadah tersebut adalah 150 bola.

15. Jawaban :

Step 1: Memahami sifat segi enam beraturan

Segi enam ABCDEF memiliki sisi yang sama Panjang dan semua sudutnya kurang dari 180° . Selain itu, terdapat sifat kesejajaran sisi: $AB \parallel DE$, $BC \parallel EF$ dan $CD \parallel FA$. Sifat-sifat ini menunjukkan bahwa segi enam tersebut adalah segi enam beraturan. Sudut $\angle FAB = 120^\circ$ juga mengkonfirmasi hal ini, karena sudut interior segi enam beraturan adalah 120° .

Step 2: Menentukan koordinat titik-titik sudut

Diketahui koordinat $A = (0,0)$. Ordinat (nilai y) dari semua titik sudut adalah elemen dari $\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ dan tidak ada yang bernilai sama.

- $A = (0,0)$
- $B = (x_b, 2)$. Karena AB sejajar sumbu x (jika x_b tidak nol) dan AB adalah sisi segi enam, maka Panjang sisi adalah x_b .
- $D = (x_d, 10)$.
- $E = (0, y_e)$. Karena DE sejajar AB , maka y_e harus 10 karena D memiliki ordinat 10. Jadi $E = (0,10)$.
- $F = (x_f, y_f)$. Karena FA sejajar CD , dan $A = (0,0)$, maka F harus memiliki ordinat yang berbeda dari 0 dan 10.
- $C = (x_c, y_c)$.

Karena segi enam beraturan, Panjang semua sisi sama. Misalkan Panjang sisi adalah s . Dari $A = (0,0)$ dan $B = (x_b, 2)$, jika B adalah titik sudut segi enam beraturan, maka $x_b = s \cos(60^\circ)$ dan $2 = s \sin(60^\circ)$.

$$2 = s \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow s = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Maka $x_b = \frac{4\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Jadi $B = (\frac{2\sqrt{3}}{3}, 2)$

Ordinat y_c dan y_f harus merupakan elemen dari $\{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ yang belum digunakan.

Karena $y_A = 0$, $y_B = 2$, $y_E = 10$, maka y_C dan y_F bisa 4, 6, 8.

Step 3: Menghitung luas segi enam beraturan

Luas segi enam beraturan dengan Panjang sisi s adalah $L = \frac{3\sqrt{3}}{2} s^2$





JELAJAH NALAR

Analisa Isi Kepala Tanpa Suara



Substitusikan $s = \frac{4\sqrt{3}}{3}$:

$$L = \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{4\sqrt{3}}{3} \right)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{16 \cdot 3}{9} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{16}{3} = 8\sqrt{3}$$

Step 4: Menentukan nilai p dan q

Luas daerah ABCDEF dapat ditulis dalam bentuk $q\sqrt{p}$, dengan q merupakan bilangan bulat dan p merupakan bilangan prima. Dari perhitungan di atas, $L = 8\sqrt{3}$. Maka $q = 8$ dan $p = 3$. $p = 3$ adalah bilangan prima, dan $q = 8$ adalah bilangan bulat.

Step 5: Menghitung nilai $p + q$

$$p + q = 3 + 8 = 11$$

16. Jawaban :

Rata-rata gabungan dari kelompok A dan B dihitung. Jumlah total data kelompok A adalah $4 \times 76 = 304$. Jumlah total data kelompok B adalah $5 \times 80 = 400$. Jumlah total data gabungan adalah $304 + 400 = 704$. Banyaknya data gabungan adalah $4 + 5 = 9$. Rata-rata gabungan adalah $\frac{704}{9}$.

Rata-rata kelompok C harus lebih besar dari rata-rata gabungan kelompok A dan B . Ini berarti jumlah total data kelompok C dibagi banyaknya data kelompok C harus lebih besar dari $\frac{704}{9}$.

Karena kelompok C adalah gabungan data dari kelompok A dan B yang berbeda, maka kelompok C akan memiliki 9 anggota. Jika ada anggota yang sama antara kelompok A dan B , maka banyaknya anggota kelompok C akan kurang dari 9. Namun, soal menyatakan “gabungan data dari kelompok A dan B yang berbeda”, yang menyiratkan bahwa anggota kelompok C adalah unik.

Kesimpulan: Tanpa informasi lebih lanjut mengenai nilai-nilai spesifik dalam kelompok A dan B , tidak dapat ditentukan secara pasti banyaknya kemungkinan kelompok C yang mempunyai rata-rata lebih besar dari rata-rata gabungan kelompok A dan B . Informasi mengenai jangkauan dan rata-rata saja tidak cukup untuk menentukan anggota-anggota kelompok A dan B secara unik, sehingga tidak dapat ditentukan anggota-anggota kelompok C dan rata-ratanya.

17. Jawaban :

Rata-rata dari kelima bilangan 6, 11, 9, 7 dan x dihitung sebagai $\frac{6+11+9+7+x}{5} = \frac{33+x}{5}$.





JELAJAH NALAR

Analisa Isi Kepala Tanpa Suara



Untuk menentukan median, bilangan-bilangan tersebut harus diurutkan.

Urutan bilangan tanpa x adalah 6, 7, 9, 11.

Terdapat tiga kasus yang mungkin untuk posisi x dalam urutan:

Kasus 1:

$x \leq 6$. Urutan bilangan adalah $x, 6, 7, 9, 11$. Mediannya adalah 7.

Kasus 2:

$6 < x < 9$. Urutan bilangan adalah $6, 7, x, 9, 11$. Mediannya adalah x .

Kasus 3:

$x \geq 9$. Urutan bilangan adalah $6, 7, 9, x, 11$ (jika $9 \leq x \leq 11$) atau $6, 7, 9, 11, x$ (jika $x > 11$). Dalam kedua sub-kasus ini, mediannya adalah 9.

Penyelesaian Persamaan

Kasus 1:

Jika $x \leq 6$, maka mediannya adalah 7. Persamaan yang terbentuk adalah $\frac{33+x}{5} = 7$.

Penyelesaian persamaan: $33 + x = 35$, sehingga $x = 2$.

Nilai $x = 2$ memenuhi kondisi $x \leq 6$. Jadi, $x = 2$ adalah salah satu nilai yang mungkin.

Kasus 2:

Jika $6 < x < 9$, maka mediannya adalah x .

Persamaan yang terbentuk adalah $\frac{33+x}{5} = x$.

Penyelesaian persamaan: $33 + x = 5x$, sehingga $4x = 33$, dan $x = \frac{33}{4} = 8.25$.

Nilai $x = 8.25$ memenuhi kondisi $6 < x < 9$. Jadi, $x = 8.25$ adalah salah satu nilai yang mungkin.

Kasus 3:

Jika $x \geq 9$, maka mediannya adalah 9. Persamaan yang terbentuk $\frac{33+x}{5} = 9$.

Penyelesaian persamaan: $33 + x = 45$, sehingga $x = 12$.

Nilai $x = 12$ memenuhi kondisi $x \geq 9$. Jadi, $x = 12$ adalah salah satu nilai yang mungkin.

Perhitungan Nilai R dan $4R$

Nilai-nilai x yang mungkin adalah 2, 8, 25 dan 12.

Jumlah semua nilai x yang mungkin, R , dihitung sebagai $R = 2 + 8.25 + 12 = 22.25$.

Nilai $4R$ dihitung sebagai $4 \times 22.25 = 89$.

18. Jawaban :

Step: 1: Memahami definisi $p(n)$

$p(n)$ adalah peluang terpilihnya himpunan bagian dari $S_n = \{1, 2, \dots, n\}$ yang diantara anggotanya tidak terdapat dua bilangan bulat berjumlah $n + 1$. Jumlah total himpunan bagian dari S_n adalah 2^n .





JELAJAH NALAR

Analisa Isi Kepala Tanpa Suara



Step 2: Mengidentifikasi pasangan bilangan yang berjumlah $n + 1$

Pasangan bilangan bulat dalam S_n yang berjumlah $n + 1$ adalah: $(1, n), (2, n - 1), \dots, ([n/2], n - [n/2] + 1)$. Jika n genap, ada $n/2$ pasangan. Jika n ganjil, ada $(n - 1)/2$ pasangan dan bilangan tengah $(n + 1)/2$ tidak berpasangan.

Step 3: Menghitung jumlah himpunan bagian yang memenuhi syarat

Agar himpuanan bagian tidak memiliki dua bilangan bulat yang berjumlah $n + 1$, dari setiap pasangan $(k, n + 1 - k)$, kita hanya boleh memilih paling banyak satu anggota, atau tidak memilih keduanya.

- Jika n genap: Ada $n/2$ pasangan. Untuk setiap pasangan, ada 3 pilihan: pilih anggota pertama, pilih anggota kedua, atau tidak pilih keduanya. Jadi, ada $3^{n/2}$ cara untuk memilih anggota dari pasangan-pasangan tersebut.
- Jika n ganjil: Ada $(n - 1)/2$ pasangan dan satu bilangan tengah. Untuk setiap pasangan, ada 3 pilihan. Untuk bilangan tengah, ada 2 pilihan (pilih atau tidak pilih). Jadi, ada $3^{(n-1)/2} \times 2$ cara.

Step 4: Menghitung $p(n)$ untuk n genap

Karena n adalah bilangan genap, maka

$$p(n) = \frac{3^{n/2}}{2^n} = \frac{3^{n/2}}{(2^2)^{n/2}} = \frac{3^{n/2}}{4^{n/2}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{n/2}$$

Step 5: Menentukan n terkecil sehingga $p(n) < \frac{1}{4}$

Kita ingin mencari bilangan genap n terkecil sehingga $\left(\frac{3}{4}\right)^{n/2} < \frac{1}{4}$. Misalkan $k = n/2$.

Maka kita mencari k terkecil sehingga $\left(\frac{3}{4}\right)^k < \frac{1}{4}$.

- Untuk $k = 1$, $\left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{3}{4} > \frac{1}{4}$.
- Untuk $k = 2$, $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16} > \frac{1}{4}$ (karena $\frac{9}{16} = \frac{2.25}{4}$).
- Untuk $k = 3$, $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64} > \frac{1}{4}$ (karena $\frac{27}{64} = \frac{6.75}{16} > \frac{4}{16}$).
- Untuk $k = 4$, $\left(\frac{3}{4}\right)^4 = \frac{81}{256}$. Kita bandingkan dengan $\frac{1}{4} = \frac{64}{256}$.

Karena $\frac{81}{256} > \frac{64}{256}$, maka $\left(\frac{3}{4}\right)^4 > \frac{1}{4}$.

- Untuk $k = 5$, $\left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{243}{1024}$. Kita bandingkan dengan $\frac{1}{4} = \frac{256}{1024}$.

Karena $\frac{243}{1024} < \frac{256}{1024}$, maka $\left(\frac{3}{4}\right)^5 < \frac{1}{4}$.

Jadi, nilai k terkecil yang memenuhi adalah $k = 5$. Karena $k = n/2$, maka $n = 2k = 2 \times 5 = 10$.





JELAJAH NALAR

Analisa Isi Kepala Tanpa Suara



Maka, bilangan genap n terkecil sehingga $p(n) < \frac{1}{4}$ adalah 10.

19. Jawaban :

Step 1: Menghitung total pasangan tanpa batasan

Untuk memilih 4 pasangan dari 10 atlet, kita perlu memilih 8 atlet dan membentuk mereka menjadi 4 pasangan. Namun, kita bisa menghitung langsung jumlah pasangan yang mungkin dengan cara lain.

Step 2: Menghitung total pasangan tanpa batasan dengan cara langsung

Kita bisa memilih pasangan pertama dari 10 atlet dengan $C(10, 2)$ cara, pasangan kedua dari 8 atlet sisa dengan $C(8, 2)$ cara, pasangan ketiga dari 6 atlet sisa dengan $C(6, 2)$ cara, dan pasangan keempat dari 4 atlet sisa dengan $C(4, 2)$ cara. Namun, karena urutan pasangan tidak penting, kita perlu membagi dengan $4!$ untuk menghindari penghitungan berlebih.

Step 3: Menghitung total pasangan tanpa batasan

$$\text{Total pasangan tanpa batasan} = \frac{C(10,2) \times C(8,2) \times C(6,2) \times C(4,2)}{4!}.$$

Step 4: Menghitung $C(10, 2)$, $C(8, 2)$, $C(6, 2)$, dan $C(4, 2)$

$$C(10, 2) = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10 \times 9}{2} = 45,$$

$$C(8, 2) = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8 \times 7}{2} = 28,$$

$$C(6, 2) = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15,$$

$$C(4, 2) = \frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \times 3}{2} = 6.$$

Step 5: Menghitung total pasangan tanpa batasan

$$\text{Total pasangan tanpa batasan} = \frac{45 \times 28 \times 15 \times 6}{4!} = \frac{113400}{24} = 4725.$$

Step 6: Menghitung pasangan dengan Liam dan Kadek dipasangkan

Jika Liam dan Kadek dipasangkan, kita memiliki 1 pasangan yang sudah ditentukan, dan kita perlu memilih 6 atlet lain untuk membentuk 3 pasangan. Jumlah cara memilih 6 atlet dari 8 atlet sisa adalah $C(8, 6) = \frac{8!}{6!(8-6)!} = 28$. Kemudian, kita membentuk 3 pasangan dari 6 atlet ini dengan $\frac{6!}{(2!)^3 \times 3} = 15$ cara.

Step 7: Menghitung total pasangan dengan Liam dan Kadek dipasangkan

$$\text{Total pasangan dengan Liam dan Kadek dipasangkan} = 28 \times 15 = 420.$$





JELAJAH NALAR

Analisa Isi Kepala Tanpa Suara



Step 8: Menghitung total pasangan tanpa Liam dan Kadek dipasangkan

Total pasangan tanpa Liam dan Kadek dipasangkan = Total pasangan tanpa batasan - Total pasangan dengan Liam dan Kadek dipasangkan = $4725 - 420 = 4305$.

Jadi, jawabannya adalah 4305.

20. Jawaban :

Step 1: Memahami Masalah

Kita perlu menemukan jumlah pengambilan minimum yang diperlukan untuk menjamin mendapatkan 13 pasang sapu tangan dengan warna yang sama dari kotak yang berisi 100 sapu tangan merah, 80 sapu tangan hijau, 60 sapu tangan biru, dan 40 sapu tangan hitam.

Step 2: Menghitung Jumlah Pengambilan Minimum

Untuk mendapatkan 13 pasang sapu tangan, kita perlu mempertimbangkan skenario terburuk di mana kita mengambil sapu tangan dengan warna yang berbeda-beda sebelum mulai mendapatkan pasangan.

Step 3: Menghitung Pengambilan untuk 12 Pasang

Untuk 12 pasang, kita membutuhkan minimal 24 sapu tangan jika kita mengambil pasangan secara sempurna tanpa sisa. Namun, karena kita tidak tahu urutan pengambilan, kita harus mempertimbangkan skenario terburuk.

Step 4: Menghitung Pengambilan untuk 13 Pasang

Untuk menjamin 13 pasang, kita perlu mempertimbangkan bahwa setelah mendapatkan 12 pasang (yang memerlukan 24 sapu tangan jika sempurna), kita masih perlu mengambil beberapa sapu tangan lagi untuk memastikan kita mendapatkan pasangan ke-13.

Step 5: Menghitung Jumlah Pengambilan Minimum

Kita dapat menggunakan prinsip bahwa untuk mendapatkan n pasang, kita perlu mengambil minimal $2n + k - 1$ sapu tangan, di mana k adalah jumlah warna. Dalam kasus ini, $k = 4$ (merah, hijau, biru, hitam), dan $n = 13$. Jadi, jumlah pengambilan minimum = $2*13 + 4 - 1 = 26 + 3 = 29$. Namun, perlu diingat bahwa rumus ini memberikan gambaran umum, dan kita harus memastikan bahwa kita mempertimbangkan semua kemungkinan.

Step 6: Memastikan dengan Logika

Jika kita memiliki 12 pasang dan 4 sapu tangan tunggal dengan warna berbeda, pengambilan berikutnya akan menjamin pasangan ke-13 karena kita akan memiliki pasangan dari salah satu warna yang sudah ada.

Jadi, jawabannya adalah 49.

