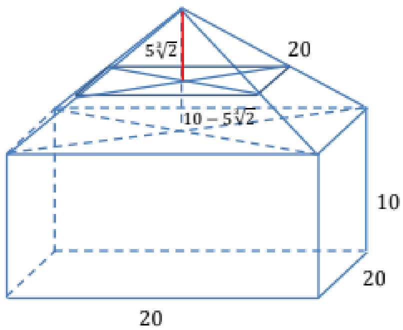
PEMBAHASAN
OSP MATEMATIKA SMP
TAHUN 2023

1. **Penyelesaian:**
   Pasangan bilangan ganjil p dan bilangan bulat x sedemikian sehingga angka satuan dari p^x adalah 9, yaitu $(3, 4k-2), (7, 4k-2)$, dan $(9, 2k-1)$ dan pasangan bilangan genap q dan bilangan bulat y sedemikian sehingga angka satuan dari q^y adalah 8, yaitu $(2, 4k-1)$, dan $(8, 4k-3)$. Dari bentuk umum tersebut diperoleh $x \in \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ dan $y \in \{1, 3, 5, 7 \dots\}$ sehingga angka satuan yang mungkin dari $x + y$ adalah {0, 1, 2, ... ,9}. Jadi, banyaknya angka satuan yang mungkin dari $x + y$ adalah 10.

2. **Penyelesaian:**
   Perhatikan gambar berikut.



$$\frac{V.Limas\ kecil}{V.Limas\ besar} = \frac{\left(5\sqrt[3]{2}\right)^3}{10^3} = \frac{250}{1000} = \frac{1}{4}$$

$$V.Limas\ besar = \frac{1}{3} \cdot 20^2 \cdot 10 = \frac{4000}{3}$$

Volume limas terpancung pada ketinggian $10 - 5\sqrt[3]{2}$ adalah $\frac{3}{4}\left(\frac{4000}{3}\right) = 1000\ \text{m}^3$

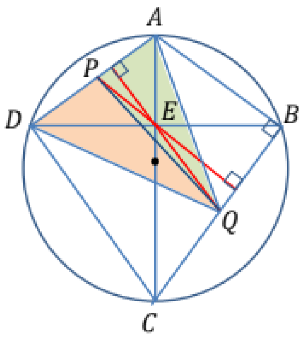
Volume penampung setinggi $20 - 5\sqrt[3]{2}$ adalah $V.Balok + 1000 = 20 \times 20 \times 10 + 1000 = 5000\ \text{m}^3$.

Dengan debit 1000 m^3/jam, maka butuh waktu **5 jam** untuk mengisi penampung setinggi $20 - 5\sqrt[3]{2}$.

3. Penyelesaian:

$$(x+y+z)(x^3+y^3+z^3)=(x^4+y^4+z^4)+(x^3y+xy^3+y^3z+yz^3+z^3x+xz^3)$$
$$6\times 72=A+P \Leftrightarrow 432=A+P \Leftrightarrow A=432-P \ldots\ldots\ldots.1)$$
$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)=(x^3+y^3+z^3)+(x^2y+xy^2+y^2z+yz^2+z^2x+xz^2)$$
$$6\times 20=72+Q \Leftrightarrow 120=72+Q \Leftrightarrow Q=48$$
$$(x+y+z)^2=(x^2+y^2+z^2)+2(xy+yz+zx)$$
$$6^2=20+2(xy+yz+zx) \Leftrightarrow xy+yz+zx=8$$
$$(xy+yz+zx)(x+y+z)=Q+3xyz \Leftrightarrow Q=48-3xyz \Leftrightarrow xyz=0\ (kontradiksi)$$
$$(xy+yz+zx)(x^2+y^2+z^2)=P+xyz(x+y+z)$$
$$8\times 20=P+xyz.(6) \Leftrightarrow P=160-6xyz=160$$
$$A=x^4+y^4+z^4=432-P=432-160=272$$

4. Penyelesaian:



Karena $AB=AD$, dan $BC=CD$, maka $ABCD$ adalah layang-layang dimana AC sebagai diameter lingkaran.
Perhatikan bahwa $\Delta DPE \sim \Delta DAB$.
Karena $DE=EB$ maka tentulah $DP=PA$, sehingga luas ΔAQP sama dengan luas ΔPQD.
Jadi, Perbandingan luas daerah segitiga AQP dan PQD adalah 1:1.

5. Penyelesaian:

$x^2+x-1=0 \Leftrightarrow 1-x=x^2$

$x^{2023}-x^{2024}=\big(x(1-x)\big)^n \quad \Leftrightarrow x^{2023}(1-x)=x^{3n}$

$\Leftrightarrow x^{2025}=x^{3n} \Leftrightarrow n=\frac{2025}{3}=675$

Jadi, nilai n yang memenuhi adalah 675.

6. Penyelesaian:

Banyak cara memilih 3 bola dari 31 bola yang tersedia adalah $C_3^{31}=\frac{31!}{3!.28!}=4.495$
Misalkan ketiga bola yang terambil bernomor a,b,c dimana $1<a<b<c$, maka $b-a>1$, $c-b>1$ dan $a+c>2b$.
Cara 1.

Jika $a = 2, b = 4$ maka $c = 7,8,9, \dots, 31$ sebanyak 25 kemungkinan
Jika $a = 2, b = 5$ maka $c = 9,10,11, \dots, 31$ sebanyak 23 kemungkinan, dst.
Sehingga untuk $a = 2$ diperoleh $1 + 3 + 5 + \dots + 25 = 13^2$
Jika $a = 3, b = 5$ maka $c = 8,9,10, \dots, 31$ sebanyak 24 kemungkinan
Jika $a = 3, b = 6$ maka $c = 10,11,12, \dots, 31$ sebanyak 22 kemungkinan, dst
Sehingga $a = 3$ diperoleh $1 + 3 + 5 + \dots + 25 = 12 \times 13$
Dengan melihat polanya diperoleh total kemungkinan:
$(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 13^2) + (1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + 12 \times 13) = 819 + 728 = 1547$
Peluang Budi memenangkan permainan tersebut adalah

$$\frac{m}{n} = \frac{1547}{4495} = \frac{7 \times 13 \times 17}{5 \times 29 \times 31}$$

Diperoleh $m = 1547$ dan $n = 4495$ sehingga nilai $m + n = 6042$

7. **Penyelesaian:**

Banyak cara menyusun m bola merah dan p bola putih dengan susunan memanjang adalah:

$$\frac{(m+p)!}{m! \cdot p!}$$

Banyak cara menyusun m bola merah dan p bola putih dengan susunan memanjang dimana ujung kiri dan kanan berwarna sama adalah:

$$\frac{(m+p-2)!}{(m-2)!.\,p!} + \frac{(m+p-2)!}{m!.\,(p-2)!} = \frac{(m+p-2)!\,(m!\,(p-2)! + p!\,(m-2)!)}{m!\,p!\,(m-2)!\,(p-2)!}$$

Peluang bola di ujung kiri dan kanan susunan berwarna sama adalah:

$$\frac{\frac{(m+p-2)!\,(m!\,(p-2)! + p!\,(m-2)!)}{m!\,p!\,(m-2)!\,(p-2)!}}{\frac{(m+p)!}{m!\,p!}} = \frac{\frac{(m!\,(p-2)! + p!\,(m-2)!)}{m!\,p!\,(m-2)!\,(p-2)!}}{(m+p)(m+p-1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{m(m-1)(m-2)!\,(p-2)! + p(p-1)(p-2)!\,(m-2)!}{(m-2)!\,(p-2)!\,(m+p)(m+p-1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{m(m-1) + p(p-1)}{(m+p)(m+p-1)}$$

$$\Leftrightarrow m^2 + p^2 + 2mp - (m+p) = 2m^2 + 2p^2 - 2(m+p)$$

$$\Leftrightarrow m^2 + p^2 - 2mp - (m+p) = 0$$

Misalkan $p - m = k$, maka $p = m + k, k \in Bilangan\ Bulat\ Positif$

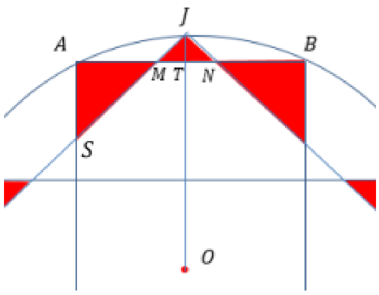
$$m^2 + (m+k)^2 - 2m(m+k) - (m+m+k) = 0$$
$$m^2 + m^2 + k^2 + 2mk - 2m^2 - 2mk - 2m - k = 0$$
$$k^2 - k - 2m = 0$$

Agar k bulat, maka $D = t^2, t \in Ganjil$

$$D = 1 + 8m = t^2 \Leftrightarrow m = \frac{t^2 - 1}{8}$$

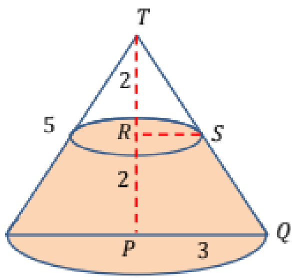
Untuk $t = 5$ diperoleh $m = 3$ (tidak memenuhi syarat $4 \leq m \leq p$)
Untuk $t = 7$ diperoleh $m = 6$, sehingga $k = 4$ dan $p = 10$,
Untuk $t = 9$ diperoleh $m = 10$, sehingga $k = 5$ dan $p = 15$ dan seterusnya.
Selanjutnya akan diselidiki maksimum nilai m dan p
Untuk $t = 125$ diperoleh $m = 1953$, sehingga $k = 63$ dan $p = 2016$
Untuk $t = 127$ diperoleh $m = 2016$, sehingga $k = 64$ dan $p = 2080 > 2023$ (tidak memenuhi)
Jadi, banyak pasangan (m, p) yang mungkin adalah 63 – 4 + 1 = 60.

8. Penyelesaian:



$OJ = OA = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$
$JT = OJ - OT = \sqrt{5} - 2$ dan diketahui $JT = MT$
$AM = AT - MT = 1 - (\sqrt{5} - 2) = 3 - \sqrt{5}$
$[JMN] = \frac{1}{2} MN \times JT = (\sqrt{5} - 2)^2 = 9 - 4\sqrt{5}$
$[MAS] = \frac{1}{2} AM \times AS = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})^2 = 7 - 3\sqrt{5}$
Luas daerah yang diarsir adalah:
$8[MAS] + 4[JMN] = 56 - 24\sqrt{5} + 36 - 16\sqrt{5}$
$a + b\sqrt{5} = 92 - 40\sqrt{5}$
Diperoleh $a = 92$ dan $b = -40$, sehingga $a - b = 92 - (-40) = 132$.

9. Penyelesaian:



$$TP^2 = TQ^2 - PQ^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Leftrightarrow TP = 4$$

Karena ketinggian cat 2 cm, maka $TR = RP = 2$ cm
Perhatikan bahwa $\Delta TRS \sim \Delta TPQ$, sehingga $RS = 1{,}5$ cm

Luas kerucut besar $= \pi . PQ(PQ + TQ) = \pi . 3(3 + 5) = 24\pi$
Luas kerucut kecil = $\pi . RS . TS = \pi . 1{,}5 . 2{,}5 = 3{,}75\pi$
Luas kerucut tertutup cat = $24\pi - 3{,}75\pi = 20{,}25\pi$

Perbandingan luas permukaan yang tertutup cat terhadap keseluruhan permukaan tersebut:

$$\frac{a}{b} = \frac{20{,}25\pi}{24\pi} = \frac{81}{4 \times 24} = \frac{27}{32}$$

Dari hasil itu diperoleh $a = 27$ dan $b = 32$. Jadi, $a + b = 27 + 32 = 59$.

10. Penyelesaian:

Pada permasalahan ini, kita bagi n menjadi 3 bagian berdasarkan banyak digit yang sama pada n.

- Semua digit pada n berbeda
  Nilai n yang memenuhi sehingga $9 \leq f(n) \leq 12$ adalah kombinasi dari bilangan-bilangan berikut 126, 127, 128, 129, 135, 136, 137, 138, 145, 146, 147, 156, 234, 235, 236, 237, 245, 246, dan 345. Selain itu, terdapat bilangan yang memuat sebuah angka nol, yakni: 180, 190, 270, 280, 290, 360, 370, 380, 390, 450, 460, 470, 480, 560, 570, Jadi banyak n yang memenuhi adalah 19 × 3! + 15 × 4 = 114 + 60 = 174
- Terdapat 2 digit yang sama
  Bilangan n yang dimaksud adalah kombinasi dari bilangan-bilangan 117, 118, 119, 225, 226, 227, 228, 334, 335, 336, 441, 442, 443, 550, 551, 552, 660, 900. (terdapat 18 bilangan)
  Banyak bilangan dari kombinasi bilangan-bilangan tersebut adalah 18 × 3 = 54. Karena 055, 066, 009, dan 090 bukan bilangan 3 digit, maka banyak n yang memenuhi adalah 54 − 4 = 50
- Semua digitnya sama
  Pada bagian ini, terdapat 2 nilai n yang memenuhi yaitu 333 dan 444

Jadi, banyaknya bilangan bulat n dengan $100 \leq n \leq 999$ dan $9 \leq f(n) \leq 12$ adalah 174 + 50 + 2 = 226.

11. Penyelesaian:

$$F_1(x) = x, F_2(x) = \frac{1}{1-x}, F_3(x) = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{1-x}\right)} = \frac{x-1}{x}, \text{ dan } F_4(x) = \frac{1}{1-\frac{x-1}{x}} = x = F_1(x)$$

Dengan demikian, $F_1(x) = F_4(x) = F_7(x) = F_{3n-2}(x) = x$. Jadi, $F_K(K) = K$ hanya apabila $K = 3n - 2$. Jadi, nilai K yang mungkin adalah $\frac{994-100}{6} + 1 = 150$.

12. Penyelesaian:

Banyaknya cara Pak Andi ditempatkan di SMP X adalah $6C_3^5 = 60$

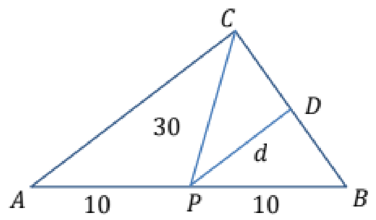
Banyaknya cara 7 calon guru ditempatkan di dua sekolah adalah $C_2^7 C_3^5 = 21 \times 10 = 210$.

Peluang Pak Andi ditempatkan di SMP X adalah

$$\frac{a}{35} = \frac{60}{210} = \frac{10}{35} \Leftrightarrow a = 10$$

Jadi, nilai a adalah 10.

13. Penyelesaian:



Karena $AP = BP = CP$, maka $[ACP] = [BCP]$ dan $BD = DC$.

Pada $\Delta BDP,\ BD^2 = 100 - d^2$ dan $[BCP] = d \times BD = 30$

$$\begin{aligned} d^2 \times BD^2 = 900 &\Leftrightarrow d^2(100 - d^2) = 900 \\ &\Leftrightarrow (d^2)^2 - 100d^2 + 900 = 0 \\ &\Leftrightarrow (d^2 - 10)(d^2 - 90) = 0 \end{aligned}$$

Diperoleh nilai terbesar d^2 adalah 90.

14. Penyelesaian:

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{13} = \frac{a}{1\times2\times3\times\ldots\times13} = \frac{a}{13!}$

$$a = \underbrace{13!\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13}\right)}_{0\ (mod\ 7)} + 13!\left(\frac{1}{7}\right)$$

$$\begin{aligned} a\ (mod 7) &\equiv 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1\ (mod 7) \\ &\equiv (-1)^2 \times (-2)^2 \times (-3)^2 \times 3^2 \times 2^2 \times 1^2\ (mod 7) \\ &\equiv 36^2 (mod 7) \\ &\equiv 1 (mod 7) \end{aligned}$$

Jadi, sisa pembagian a oleh 7 adalah 1.

15. Penyelesaian:

Bilangan pertama bisa dipilih dari 6 × 7 = 42 kotak yang tersedia

Bilangan kedua bisa dipilih dari 5 × 6 = 30 kotak yang tersisa

Bilangan ketiga bisa dipilih dari 4 × 5 = 20 kotak yang tersisa

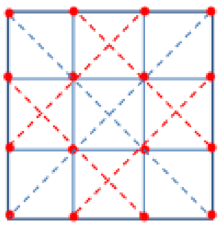
Dari 3 bilangan yang terpilih, terdapat 3! cara memilih dengan urutan yang berbeda

Jadi, banyaknya cara untuk memilih tiga bilangan yang berasal dari baris dan kolom berbeda adalah $\frac{42\times30\times20}{3!} = 4200$.

16. Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x+\sqrt{2x}} - \sqrt{2x-\sqrt{2x}} &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2x}{2x-\sqrt{2x}}} \\
\left(\sqrt{2x+\sqrt{2x}} - \sqrt{2x-\sqrt{2x}}\right).2\sqrt{2x-\sqrt{2x}} &= \sqrt{2x} \\
2\left(\sqrt{4x^2-2x} - \left(2x-\sqrt{2x}\right)\right) &= \sqrt{2x} \\
\left(2\sqrt{4x^2-2x} - \left(4x-2\sqrt{2x}\right)\right) &= \sqrt{2x} \\
2\sqrt{4x^2-2x} &= 4x-\sqrt{2x} \\
4(4x^2-2x) &= 16x^2-8x\sqrt{2x}+2x \\
-8x-2x &= 8x\sqrt{2x} \\
-10 &= 8\sqrt{2x} \\
100 &= 64(2x) = 4(32x) \\
32x &= \frac{100}{4} = 25
\end{aligned}$$

17. Penyelesaian:



Tiga titik dapat membentuk segitiga jika ketiga titik tersebut tidak kolinier, sehingga banyaknya kemungkinan bahwa ketiga titik tersebut membentuk suatu segitiga adalah selisih antara banyak kemungkinan memilih 3 titik dari 16 titik yang tersedia dengan kemungkinan memilih 3 titik yang kolinier.

Terdapat 4 baris, 4 kolom, dan 2 diagonal yang memuat 4 titik kolinier dan 4 diagonal yang memuat 3 titik kolinier. Banyak kemungkinan memilih 3 titik kolinier dari titik-titik tersebut adalah:

$$10C_3^4 + 4C_3^3 = 40 + 4 = 44$$

Jadi, banyaknya kemungkinan bahwa ketiga titik tersebut membentuk suatu segitiga adalah

$$C_3^{16} - 44 = 560 - 44 = 516$$

18. Penyelesaian:

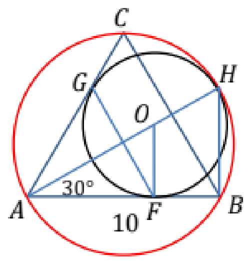
$12n$ merupakan bilangan kuadrat apabila $n = 3t^2$. Dalam hal ini n merupakan bilangan kelipatan 3 sehingga:

$200 < n < 257 \Leftrightarrow 201 \leq 3t^2 \leq 255$

$\Leftrightarrow 3 \times 67 \leq 3t^2 \leq 3 \times 85$

Jadi, bilangan bulat terbesar n dengan $200 < n < 257$ dan $12n$ merupakan bilangan kuadrat adalah $n = 3t^2 = 3 \times 81 = 243$.

19. Penyelesaian:



$[ABC] = \frac{1}{4} \cdot 10^2\sqrt{3} = 25\sqrt{3}$

Perhatikan bahwa $AO: OH = AO: OF = 2: 1$, sehingga $AF: FB = 2: 1$

$[AFG] = \frac{AF^2}{AB^2}[ABC] = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times 25\sqrt{3} = \frac{100}{9}\sqrt{3} \Leftrightarrow a = \frac{100}{9}$

Jadi, nilai dari $9a = 100$.

20. Penyelesaian:

Rumus dasar

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

Berdasarkan rumus tersebut, maka:

$$a^3 - b^3 - c^3 - 3abc = (a - b - c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab - bc + ca)$$

Karena, $a^3 - b^3 - c^3 = 3abc$ maka $a^3 - b^3 - c^3 - 3abc = 0$, sehingga:

$$(a - b - c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab - bc + ca) = 0$$
$$(a - b - c)(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2ab - 2bc + 2ca) = 0$$
$$(a - b - c)((a + b)^2 + (b - c)^2 + (c + a)^2) = 0$$

Dari persamaan di atas diperoleh $a - b - c = 0$ atau $a = -b = -c$

- Jika $a - b - c = 0$, maka $b + c = a$ disubstitusi pada persamaan 2 diperoleh $a^2 = 6(b + c) \Leftrightarrow a^2 = 6a \Leftrightarrow a^2 - 6a = 0 \Leftrightarrow a = 0$ atau $\Leftrightarrow a = 6$
  - Untuk $a = 0$ diperoleh $b = -c$ sehingga pada persamaan 3 diperoleh $0^2 + 2b^2 \neq -b^2 - 0$ (memenuhi)
  - $a = 6$ diperoleh $b + c = 6$ sehingga pada persamaan 3 diperoleh $a^2 + (b + c)^2 - 2bc \neq bc - a(b + c)$
    $36 + 36 - 2bc \neq bc - 36$ (memenuhi)
- Jika $a = -b = -c$, maka $b = c = -a$ disubstitusi pada persamaan 2 diperoleh

$a^2 = 6(b+c) \Leftrightarrow a^2 = 6(-2a) \Leftrightarrow a(a+12) = 0 \Leftrightarrow a = 0$ atau $a = -12$

- Untuk $a = -12$ diperoleh $b = c = 12$. Selanjutnya di substitusi pada persamaan 3 diperoleh: $(-12)^2 + (12)^2 + 12^2 = 12(12) - (-12)(12+12)$ (tidak memenuhi)

Dengan demikian nilai terbesar a yang mungkin adalah 6 dengan factor 1, 2, 3, 6 sehingga hasil penjumlahan semua faktornya adalah 1 + 2 + 3 + 6 = 12.