



PEMBAHASAN

OSP MATEMATIKA SMP

TAHUN 2021

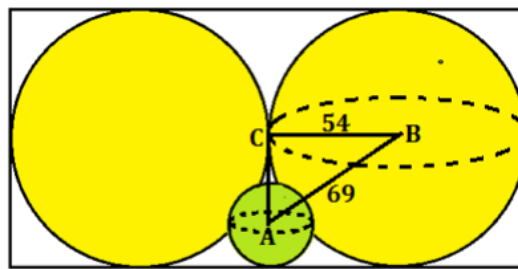
1. Jawaban: 2

Jika kita menyamakan penyebut pada soal maka diperoleh

$$\frac{a^2 + b^2}{ab} = 2021 \rightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 2023ab \rightarrow (a + b)^2 = 2023ab$$

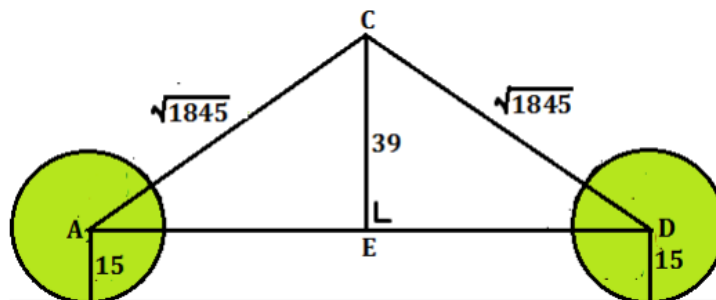
Karena $ab > 1$, agar $a + b$ bilangan bulat positif maka ab terkecil = $\frac{2025}{2023}$, diperoleh $p = 2025$ dan $q = 2023$. Nilai dari $p - q = 2$.

2. Jawaban: 36 cm



Tampak Depan

$$AC^2 = AB^2 - BC^2 = 69^2 - 54^2 = 1845.$$



$$AE^2 = AC^2 - CE^2 = 1845 - 39^2 = 324 \rightarrow AE = 18 \text{ cm}$$

$$\text{Jarak titik kedua pusat bola kecil} = 2AE = 36 \text{ cm.}$$

3. Jawaban: 276

Jika $a = 1$, maka $b + c = 49$ (tidak ada solusi)

Jika $a = 2$, maka $b + c = 48 \rightarrow (b, c) = (24, 24)$ (ada 1)

Jika $a = 3$, maka $b + c = 47 \rightarrow (b, c) = (23, 24), (24, 23)$ (ada 2)

Jika $a = 4$, maka $b + c = 46 \rightarrow (b, c) = (22, 24), (23, 23), (24, 22)$ (ada 3)

.....



Jika $a = 22$, maka $b + c = 28 \rightarrow (b, c) = (4, 24), (5, 23), \dots, (24, 4)$ (ada 21)

Jika $a = 23$, maka $b + c = 27 \rightarrow (b, c) = (3, 24), (4, 23), \dots, (24, 3)$ (ada 22)

Jika $a = 24$, maka $b + c = 26 \rightarrow (b, c) = (2, 24), (3, 23), \dots, (24, 2)$ (ada 23)

Jadi, total ada $1 + 2 + 3 + \dots + 23 = \frac{23(24)}{2} = 276$.

4. Jawaban: $\frac{2}{7}$

Peluang Andi dan Budi terpilih = $p = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{7}{5}} = \frac{10}{21}$

Peluang Andi dan Budi diselingi setidaknya 1 pembicara lain = $q = 1 - \frac{4!2!}{5!} = \frac{3}{5}$

Peluang Andi dan Budi terpilih, tetapi diselingi setidaknya 1 pembicara lain = $pq = \frac{2}{7}$

5. Jawaban: b

FPB(642, 1070, 1712) = 214, maka

$$a = 15^{642} = (15^3)^{214} = 3375^{214}$$

$$b = 5^{1070} = (5^5)^{214} = 3125^{214}$$

$$c = 3^{1712} = (3^8)^{214} = 6561^{214}$$

Jadi, bilangan yang terkecil adalah b .

6. Jawaban: 675014

$n = (2021!)^{2021}$. Faktorisasi prima dari $63 = 3^2 \times 7$. Dengan legendre formulation, maka

Bilangan asli k terbesar sehingga $3^k | 2021! = \left\lfloor \frac{2021}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2021}{3^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2021}{3^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2021}{3^4} \right\rfloor + \dots = 1005$.

Bilangan asli m terbesar sehingga $7^m | 2021! = \left\lfloor \frac{2021}{7} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2021}{7^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2021}{7^3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2021}{7^4} \right\rfloor + \dots = 334$.

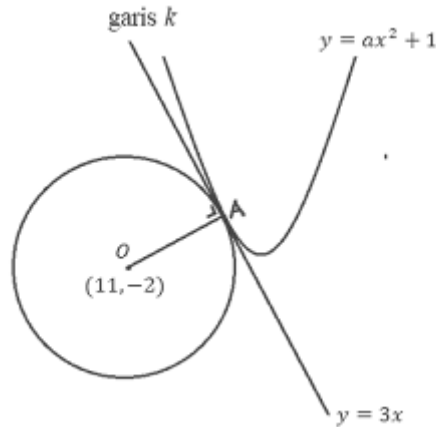
Bilangan asli t terbesar sehingga $9^t | 2021! = \left\lfloor \frac{1005}{2} \right\rfloor = 502$.

Bilangan asli terbesar p sehingga $63^p | 2021! = \min(334, 502) = 334$.

Banyaknya pembagian yang harus dilakukan agar memenuhi ketentuan soal adalah $334 \times 2021 = 675014$.



7. Jawaban:



Garis $y = 3x$ menyinggung parabola $y = ax^2 + 1$ di titik $A(x, y)$, maka $ax^2 + 1 = 3x$.

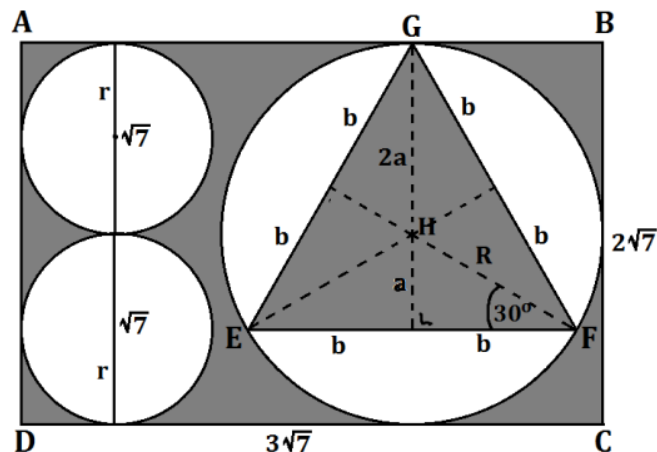
$$ax^2 - 3x + 1 = 0 \text{ dan } D = 0 \rightarrow 9 - 4a = 0 \rightarrow a = \frac{9}{4}, x = \frac{2}{3}, y = 2$$

Jika A titik singgung parabola dengan lingkaran dan juga merupakan titik singgung garis dengan parabola maka A titik singgung garis dengan lingkaran. Oleh karena itu,

$$m_{OA} \cdot m_k = -1 \rightarrow \left(\frac{2 - (-2)}{\frac{2}{3} - 11} \right) (3) = 1 \quad (\text{kontradiksi})$$

8. Jawaban:

Perhatikan gambar berikut!



Berdasarkan perbandingan sudut istimewa 30° , 60° dan 90° , maka $b = a\sqrt{3}$.

$$a + b = 3 \rightarrow a + a\sqrt{3} = 3 \rightarrow a = \frac{3}{\sqrt{3} + 1} = \frac{3\sqrt{3} - 3}{2} \rightarrow R = 2a = 9 - 3\sqrt{3} \rightarrow 2R = 18 - 6\sqrt{3}$$

Kontradiksi dengan gambar lingkaran besar menyinggung AB dan CD . Karena jika menyinggung maka $2r = 2\sqrt{7}$. Kita juga tidak tau apakah H pusat lingkaran.



9. Jawaban:

$$102021 = 3 \times 31 \times 1097$$

$$x^4 - 31x^3 + 321x^2 - 1241x + 1430 = 0 \rightarrow (x - 2)(x - 5)(x - 11)(x - 13) = 0$$

Jadi nomor-nomor bola nya adalah 2, 3, 5, 11, 13, 31, 1097. Agar diperoleh jumlah genap, maka bola yang diambil haruslah terdiri dari 2 ganjil dan 1 genap. Jadi,

$$P(2 \text{ ganjil}, 1 \text{ genap}) = \frac{\binom{6}{2}\binom{1}{1}}{\binom{7}{3}} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}$$

10. Jawaban:

$$m = \frac{3k^2 - 3k}{2k^2 - 10k + 8} = \frac{3k(k - 1)}{(2k - 8)(k - 1)} = \frac{3k}{2k - 8}, \text{ dengan } k \neq 1$$

$$2m = \frac{3k}{k - 4} = \frac{3(k - 4)}{k - 4} + \frac{12}{k - 4} = 3 + \frac{12}{k - 4}$$

Karena m bilangan bulat positif maka $2m$ pasti genap positif. Akibatnya $k - 4$ faktor dari 12 yang menyebabkan $\frac{12}{k-4}$ bilangan ganjil. Dengan kata lain, $k - 4$ haruslah kelipatan 4.

Jadi, $k - 4 = 4, 12 \rightarrow k = 8$ atau 16 . Jumlahnya $= 8 + 16 = 24$.