PEMBAHASAN

OSP MATEMATIKA SMP

TAHUN 2018

1. **Jawaban: 7 dan 37**

$$A=\frac{5k+1}{3k-18}=\frac{1}{3}\left(\frac{5k+1}{k-6}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{5k-30}{k-6}+\frac{31}{k-6}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{5(k-6)}{k-6}+\frac{31}{k-6}\right)=\frac{1}{3}\left(5+\frac{31}{k-6}\right)$$

Jelas $k-6$ faktor dari 31, karena k dan A bilangan bulat positif maka $k-6=1$ atau 31

Jika $k-6=1$ maka $k=7$ dan $A=12$

Jika $k-6=31$ maka $k=37$ dan $A=2$

2. **Jawaban: $\frac{7}{500}$**

Dari titik (0, 0) ke titik (3, 4) partikel bergerak 3 langkah ke arah sumbu X positif dan bergerak 4 langkah kea rah sumbu Y positif, maka peluangnya = $\frac{7!}{3!4!}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)^4$.

Dari titik (3, 4) ke titik (6, 4) partikel hanya bergerak 3 langkah kea rah sumbu X positif, maka peluangnya = $\left(\frac{1}{2}\right)^3$.

Jadi, peluang partikel sampai pada titik (6, 4) dengan melalui (3, 4) adalah $\frac{7!}{3!4!}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{7}{500}$.

3. **Jawaban: 16**

Misalkan x dan y adalah dua unsur yang hasil kalinya kuadrat sempurna, maka $xy=a^2$ dengan a bilangan asli. Jelas bahwa $a>1$.

Jika a bilangan prima maka $a\le 5$, sehingga diperoleh $a=2,3,5$.

$$2^2=1\times 4, 3^2=1\times 9, \text{dan } 5^2=1\times 25 \text{ (ada 3)}$$

Jika a bukan bilangan prima maka $a=4,6,8,9,10,12,14,15,16,18,20,21,22,25$

$a=4\to 4^2=1\times 16=2\times 8$ (ada 2)

$a=6\to 6^2=2\times 18=3\times 12=4\times 9$ (ada 3)

$a=8\to 8^2=4\times 16$ (ada 1)

$a=10\to 10^2=4\times 25=5\times 20$ (ada 2)

$a=12\to 12^2=9\times 16=8\times 18=6\times 24$ (ada 3)

$a=14$ (tidak ada yang memenuhi)

$a=15\to 15^2=9\times 25$ (ada 1)

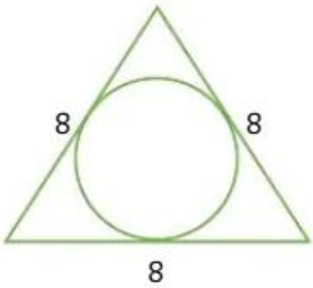
$a=16$ (tidak ada yang memenuhi)

$a=18$ (tidak ada yang memenuhi)

$a = 20 \rightarrow 20^2 = 16 \times 25$ (ada 1)
$a = 22$ (tidak ada yang memenuhi)
$a = 25$ (tidak ada yang memenuhi)
Jadi, ada 16 himpunan bagian yang memenuhi.

4. **Jawaban: 16836**
Karena $x^2 + y^2$ habis dibagi 121 maka $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{11}$
Perhatikan bahwa:
Jika x dan y bilangan asli maka $x^2 \equiv y^2 \equiv 0,1,4,5,9 \pmod{11}$, sehingga satu-satunya yang memenuhi hanyalah $x^2 \equiv y^2 = 0 \pmod{11}$. Berarti x dan y habis dibagi 11.
Banyaknya nilai x = banyaknya nilai $y = \left\lfloor \frac{2018}{11} \right\rfloor = 183$
Banyaknya pasangan (x, y) yang memenuhi $= \frac{183(183+1)}{2} = 16836$.

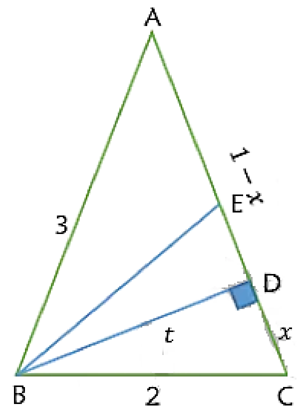
5. **Jawaban: 32π cm^3**
Perhatikan alas tabung dan prisma berikut!



$$r = \frac{\text{Luas segitiga}}{\frac{1}{2}\text{ keliling}} = \frac{\frac{8^2}{4}\sqrt{3}}{12} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

Tinggi tabung = t = tinggi tabung = 6.
Volume tabung $= \pi r^2 t = \pi \left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)^2 (6) = 32\pi$ cm^3.

6. **Jawaban: $\frac{5\sqrt{2}}{9}$ cm^2**
Perhatikan gambar berikut!



Karena BE garis berat maka berlaku

$$CE = EA = \frac{3}{2}$$

Pada ΔBDC berlaku Pythagoras

$$t^2 = 4 - x^2$$

Pada ΔBDA berlaku Pythagoras

$$t^2 = 9 - (3-x)^2 = 6x - x^2$$

Dengan demikian,

$$4 - x^2 = 6x - x^2, \text{ diperoleh } x = \frac{2}{3}$$

$$t = \sqrt{4 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$ED = CE - x = \frac{3}{2} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6}$$

Luas $BDE = \frac{1}{2}(ED)(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{9}$.

7. **Jawaban: 4000**

Misalkan kode tersebut $\overline{abcdef}$.
Dari point (b) maka a dapat diisi angka-angka 2, 4, 6, 8 (ada 4)
Dari point (c) menunjukkan bahwa $b = c \rightarrow$ dapat diisi angka 0, 1, 2, 3, …, 9 (ada 10).
d dan e masing-masing dapat diisi angka 0, 1, 2, 3, …, 9 (ada 10)
Pengisian f mengikuti a. Jika $a = 2$ maka $f = 1$ dan seterusnya.
Jadi, ada $4 \times 10 \times 10 \times 10 = 4000$ kode yang mungkin.

8. **Jawaban: (0, –5)**

Karena (x_1, y_1) titik singgung kurva $y = x^2 - 1$ maka $y_1 = x_1^2 - 1$.
Gradien garis $k = \frac{y_1+1}{x_1-1} = \frac{x_1^2}{x_1-1}$, gradien ini juga bisa dihitung dengan turunan, yaitu

Gradien garis $k = \frac{d}{dx}(x^2 - 1)|_{x_1} = 2x|_{x_1} = 2x_1$.
Dengan demikian,

$$\frac{x_1^2}{x_1 - 1} = 2x_1 \Leftrightarrow x_1^2 = 2x_1^2 - 2x_1 \Leftrightarrow x_1^2 - 2x_1 = 0 \Leftrightarrow x_1(x_1 - 2) = 0$$

Karena $x_1 > 0$ maka diperoleh $x_1 = 2$ dan $y_1 = 3$.
Persamaan garis k adalah $\frac{y+1}{x-1} = \frac{3+1}{2-1} = 4$. Titik potong garis k terhadap sumbu y maka $x = 0$

$$\frac{y+1}{-1} = 4 \Leftrightarrow y = -5$$

Jadi, titik potongnya $(0, -5)$.

9. Jawaban: 22

$$x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n = (x_1 + 1) + (x_2 + 2) + (x_3 + 3) + \cdots + (x_{n-1} + n - 1)$$
$$x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \cdots + x_n + 1 + 2 + 3 + \cdots + (n - 1)$$
$$x_n = x_1 + \frac{n(n-1)}{2} = 1 + \frac{1}{2}(n^2 - n)$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n \leq 2018$$
$$\left(a + \frac{1}{2}(1^2 - 1)\right) + \left(1 + \frac{1}{2}(2^2 - 2)\right) + \left(\frac{1}{2}(3^2 - 3)\right) + \cdots + \left(1 + \frac{1}{2}(n^2 - n)\right) \leq 2018$$
$$n + \frac{1}{2}(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) - \frac{1}{2}(1 + 2 + 3 + \cdots + n) \leq 2018$$
$$n + \frac{1}{12}n(n+1)(2n+1) - \frac{1}{4}n(n+1) \leq 2018$$
$$n(n^2 + 6) \leq 12108$$

Perhatikan bahwa untuk $n \geq 1$ maka

$$(n-1)^3 = n^3 + 3n - (3n^2 + 1) < n^3 + 3n < n^3 + 6n \leq 12108$$
$$(n-1)^3 < 12108 \Leftrightarrow n - 1 < 22{,}9 \Leftrightarrow n < 23{,}9$$

Untuk $n = 23$ maka $n(n^2 + 6) = 12305$ lebih dari 12108 (tidak memenuhi)
Untuk $n = 22$ maka $n(n^2 + 6) = 10780 \leq 12108$.
Jadi, nilai n terbesar yang memenuhi adalah 22.

10. Jawaban: $x = \frac{1}{7},\ y = -\frac{5}{21}$

Jika persamaan (2) pada soal disubtitusikan ke persamaan (1) maka diperoleh

$$\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}x - \frac{13}{42}\right) = -\frac{4}{63} \Leftrightarrow x - \frac{13}{63} = -\frac{4}{63} \Leftrightarrow x = \frac{9}{63} = \frac{1}{7},\quad y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}\right) - \frac{13}{42} = -\frac{10}{42} = -\frac{5}{21}$$

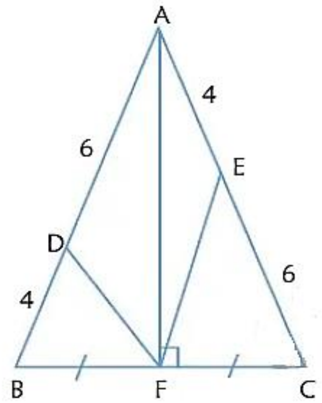
11. Jawaban: 750

Pola pada putaran pertama : $12n + 13$
Pola pada putaran kedua : $12n + 9$

Pola pada putaran ketiga : $12n + 5$
Pola pada putaran keempat : $12n + 1$ ekuivalen dengan $12n + 13$
Banyaknya bilangan yang ditandai
= total banyaknya bilangan yang terbentuk $12n + 1, 12n + 9$ dan $12n + 5$
$= 3\left\lfloor \frac{1000}{12} \right\rfloor + 1 = 250$
Jadi, banyaknya bilangan yang tidak ditandai 1000 – 250 = 750.

12. Jawaban: 3

Perhatikan gambar berikut.



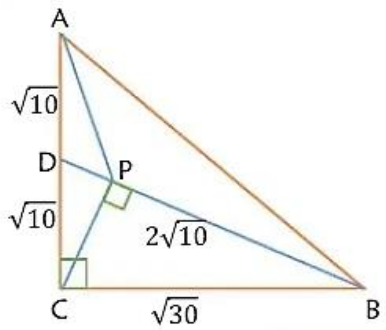
Karena $AB = AC$ maka garis tinggi yang ditarik dari titik A membagi BC menjadi 2 bagian sama Panjang, sehingga $\frac{[ABF]}{[ABC]} = \frac{[ACF]}{[ABC]} = \frac{1}{2}$.

$$\frac{[ADFE]}{[ABC]} = \frac{[ADF]}{[ABC]} + \frac{[AEF]}{[ABC]} = \frac{6}{10}\frac{[ABF]}{[ABC]} + \frac{4}{10}\frac{[ACF]}{[ABC]} = \frac{6}{10}\frac{[ABF]}{[ABC]} + \frac{4}{10}\frac{[ABF]}{[ABC]} = \frac{[ABF]}{[ABC]} = \frac{1}{2} = \frac{a}{b}$$

Diperoleh $a = 1$ dan $b = 2$. Jadi, nilai $a + b$ adalah 3.

13. Jawaban: $\frac{5}{4}\sqrt{3}$

Perhatikan gambar berikut!



Pada segitiga BCD berlaku Pythagoras $BC = \sqrt{\left(2\sqrt{10}\right)^2 - \left(\sqrt{10}\right)^2} = \sqrt{30}$.

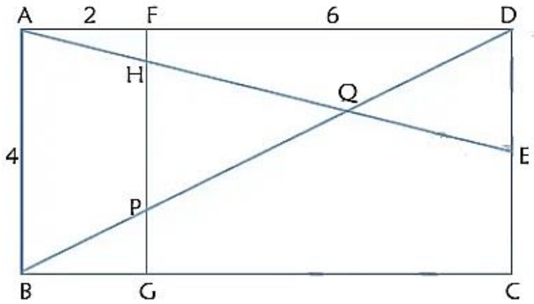
Segitiga BCD sebangun dengan segitiga CPD sehingga berlaku

$$\frac{DP}{DC}=\frac{PC}{BC}=\frac{DC}{DB}\Leftrightarrow\frac{DP}{\sqrt{10}}=\frac{PC}{\sqrt{30}}=\frac{\sqrt{10}}{2\sqrt{10}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow DP=\frac{1}{2}\sqrt{10},PC=\frac{1}{2}\sqrt{30}$$

$[CPD]=\frac{1}{2}(DP)(PC)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{10}\right)\left(\frac{1}{2}\sqrt{30}\right)=\frac{5}{4}\sqrt{3}.$

14. Jawaban: 13

Perhatikan gambar berikut.



Ada 13 segiempat, yaitu $AFGB$ $AFPB$ $AHGB$ $AHPB$ $CDPG$ $CDFG$ $CDAB$ $CEAB$ $CEHG$ $CEQB$ $DAHP$ $FHQD$ $FHED$.

15. Jawaban: 4426

Untuk $1849\le x\le 1935$ maka $\lfloor\sqrt{x}\rfloor=43$

Untuk $1936\le x\le 2018$ maka $\lfloor\sqrt{x}\rfloor=44$

$$J=\lfloor\sqrt{1918}\rfloor+\lfloor\sqrt{1919}\rfloor+\lfloor\sqrt{1920}\rfloor+\cdots+\lfloor\sqrt{2018}\rfloor=43(1935-1917)+44(2018-1935)=4426$$

URAIAN

1. **Jawaban:** $\left(5,\frac{5}{3}\right),(3,1),(7,-3)$ **dan** $(5,-2)$

   Perhatikan bahwa

$$x^2-6y^2-xy-x+3y=0$$
$$(x-3y)(x+2y)-(x-3y)=0$$
$$(x-3y)(x+2y-1)=0$$

   Diperoleh $x=3y$ atau $x=1-2y$.

   Jika $x=3y$, maka

$$9y^2-15y-3y^2-y+10=0$$
$$3y^2-8y+5=0$$
$$(3y-5)(y-1)=0$$

   Diperoleh $(x,y)=\left(5,\frac{5}{3}\right),(3,1)$

   Jika $x=1-2y$, maka

$$(1-2y)^2-5(1-2y)-3y^2-y+10=0$$
$$y^2+5y+6=0$$
$$(y+3)(y+2)=0$$

   Diperoleh $(x,y)=(7,-3),(5,-2)$.

   Jadi, pasangan (x,y) yang memenuhi adalah $\left(5,\frac{5}{3}\right),(3,1),(7,-3)$ dan $(5,-2)$.

2. **Jawaban:** $\frac{100}{243}$

   Pada rintangan pertama:

   Sebuah dadu dilempar sekali. Agar berhasil melewati rintangan pertama, maka jumlah mata dadu yang muncul harus lebih besar dari 2, maka peluang orang tersebut melewati rintangan pertama adalah $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

   Pada rintangan kedua:

   Sebuah dadu dilempar dua kali, agar berhasil melewati rintangan, maka jumlah mata dadu yang muncul harus lebih besar dari 4,

   Pasangan mata dadu yan jumlahnya kurang dari atau sama dengan 4 adalah $(1,1),(1,2),(2,1),(1,3),(3,1)(2,2)$ (ada 6)

   Peluang orang tersebut berhasil melewati rintangan kedua adalah $1-\frac{6}{36}=\frac{5}{6}$.

   Pada rintangan ketiga:

   Sebuah dadu dilempar tiga kali, agar berhasil melewati rintangan, maka jumlah mata dadu yang muncul harus lebih besar dari 8.

   Pasangan mata dadu yang jumlahnya 3 adalah $(1,1,1)$ … ada 1

Pasangan mata dadu yang jumlahnya 4 adalah (1,1,2) … ada $\frac{3!}{2!} = 3$

Pasangan mata dadu yang jumlahnya 5:

$$\left.\begin{array}{l}(1,1,3) \to \text{ada}\,\dfrac{3!}{2!} = 3\\ (1,2,2) \to \text{ada}\,\dfrac{3!}{2!} = 3\end{array}\right\}\text{total ada 6}$$

Pasangan mata dadu yang jumlahnya 6:

$$\left.\begin{array}{l}(1,1,4) \to \text{ada}\,\dfrac{3!}{2!} = 3\\ (1,2,3) \to \text{ada}\ 3! = 6\\ (2,2,2) \to \text{ada}\ 1\end{array}\right\}\text{total ada 10}$$

Pasangan mata dadu yang jumlahnya 7:

$$\left.\begin{array}{l}(1,1,5) \to \text{ada}\,\dfrac{3!}{2!} = 3\\ (1,2,4) \to \text{ada}\ 3! = 6\\ (1,3,3) \to \text{ada}\,\dfrac{3!}{2!} = 3\\ (2,2,3) \to \text{ada}\,\dfrac{3!}{2!} = 3\end{array}\right\}\text{total ada 15}$$

Pasangan mata dadu yang jumlahnya 8:

$$\left.\begin{array}{l}(1,1,6) \to \text{ada}\,\dfrac{3!}{2!} = 3\\ (1,2,5) \to \text{ada}\ 3! = 6\\ (1,3,4) \to \text{ada}\ 3! = 6\\ (2,2,4) \to \text{ada}\,\dfrac{3!}{2!} = 3\\ (2,3,3) \to \text{ada}\,\dfrac{3!}{2!} = 3\end{array}\right\}\text{total ada 21}$$

Peluang orang tersebut berhasil melewati rintangan pertama adalah $1 - \frac{1+3+6+10+15+21}{216} = \frac{160}{216} = \frac{20}{27}$.

Jadi, peluang bahwa seseorang tersebut berhasil melewati tiga rintangan pertama adalah $\frac{2}{3} \times \frac{5}{6} \times \frac{20}{27} = \frac{100}{243}$.

3. Jawaban: 331

Jika soal dipahami sebagai berikut:

Misalkan $abcd$ nomor pada plat, yang terdiri dari

a, b, c tiga suku barisan aritmatika dan d bebas.

a bebas dan b, c, d tiga suku barisan aritmatika.

a, b, c, d empat suku barisan aritmatika.

Maka penyelesaiannya adalah sebagai berikut:

- Kasus 1: Untuk beda sama dengan 1
  Jika semua angka berbeda

3 0 1 2	1 2 3 4	2 3 4 1		7 8 9 6
4	5	5		1
⋮	⋮	⋮	…	⋮
8	9	9		5
9	0	0		0
Ada 7	Ada 2×6×1=13	Ada 2×6+1=13		Ada 2×6+1=13

  Disini ada yang terhitung double, yaitu pelat yang terdiri dari 4 suku barisan aritmatika. Jadi, ada $7 + 13 \times 7 - 6 = 92$.
  Jiika pada pelat ada angka yang sama maka banyaknya cara = $6 \times 7 + 2 = 44$.
  Jadi, total banyaknya PNBK istimewa pada kasus 1 adalah $92 + 44 = 136$.
- Kasus 2: Untuk beda sama dengan 2
  Dengan cara yang sama seperti kasus 1, maka total banyaknya pelat pada kasus 1 adalah $7 + 13 \times 5 - 3 + 6 \times 5 + 2 = 101$.
- Kasus 3: Untuk beda sama dengan 3
  Dengan cara yang sama seperti kasus 1, maka total banyaknya pelat pada kasus 1 adalah $7 + 13 \times 3 - 0 + 6 \times 3 + 2 = 66$.
- Kasus 4: Untuk beda sama dengan 4
  Dengan cara yang sama seperti kasus 1, maka total banyaknya pelat pada kasus 1 adalah $7 + 13 \times 1 - 0 + 6 \times 1 + 2 = 28$.

Jadi, total banyaknya PNBK istimewa adalah $127 + 92 + 57 + 19 = 331$.