



PEMBAHASAN
OSP MATEMATIKA SMP
TAHUN 2016

1. Penyelesaian:

Diketahui $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{2016} = k^2$, dimana x bilangan asli ganjil dan k bilangan asli. Karena hasil jumlah n bilangan ganjil adalah bilangan k^2 , maka nilai x_{2016} terkecil

$$\begin{aligned}
 &= 2n - 1 \\
 &= 2(2016) - 1 \\
 &= 4032 - 1 \\
 &= 4031
 \end{aligned}$$

Jadi, nilai x_{2016} terkecil yang mungkin adalah 4031.

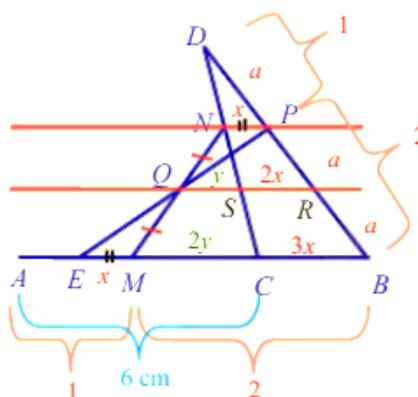
2. Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
 \text{Diketahui } ab + ab + ab = cbb &\Rightarrow ab + ab + ab = cbb \\
 &\Rightarrow 3 \times ab = cbb \\
 &\Rightarrow 30a + 3b = c100 + 10b + b \\
 &\Rightarrow 30a + 3b = c100 + 11b \\
 &\Rightarrow 30a = c100 + 8b
 \end{aligned}$$

Dengan demikian, nilai b yang memenuhi adalah 5.
 Sehingga didapat $a = 8$ dan $c = 2$
 Jadi, nilai a, b dan c adalah $a = 8, b = 5$ dan $c = 2$

3. Penyelesaian:

Perhatikan ilustrasi gambar berikut.



Diketahui $DP:PB = DN:NC = AM:MB = 1:2$ serta $NQ = QM$,



Maka didapat Panjang $DP = PR = RB = a$
 Dan didapat Panjang $NP = x, SR = 2x$ dan $BC = 3x$
 Serta didapat juga Panjang $QS = y$ dan $MC = 2y$
 $NQ = QM$, maka Panjang $NP = EM = x$

Dengan demikian,

$$\frac{AM}{MB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{AM}{(3x+2y)} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow AM = \frac{1}{2}(3x + 2y)$$

Kemudian diketahui $AC = 6 \text{ cm}$ $\Rightarrow AC = AM + MC$

$$\Rightarrow 6 = \frac{1}{2}(3x + 2y) + 2y$$

$$\Rightarrow 6 = \frac{1}{2}(3x + 2y) + \frac{1}{2}(4y)$$

$$\Rightarrow 12 = 3x + 6y$$

$$\Rightarrow 4 = x + 2y \quad (EC = x + 2y = 4)$$

Dengan demikian, $AE = AC - EC$ $\Rightarrow AE = 6 - EC$

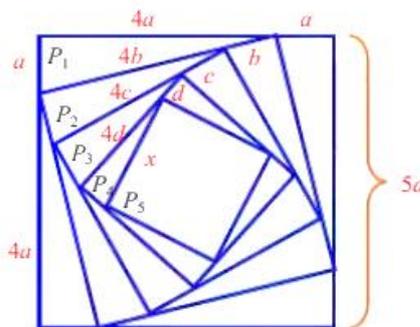
$$\Rightarrow AE = 6 - 4$$

$$\Rightarrow AE = 2$$

Jadi, Panjang AE adalah 2 cm.

4. Penyelesaian:

Perhatikan gambar berikut.



Dimisalkan Panjang sisi $P_1 = 5a, P_2 = 5b, P_3 = 5c, P_4 = 5d$ dan $P_5 = x$
 Luas $P_1 = (5a)^2 = 25a^2$

Panjang sisi $P_2: (5b)^2 = (4a)^2 + (a)^2 \Rightarrow b^2 = 17 \left(\frac{a}{5}\right)^2$ atau $b = \frac{a}{5}\sqrt{17}$

Panjang sisi $P_3: (5c)^2 = (4b)^2 + (b)^2 \Rightarrow c^2 = 17 \left(\frac{b}{5}\right)^2 \Rightarrow c^2 = \left(\frac{17a}{25}\right)^2$ atau $c = \frac{17a}{25}$

Panjang sisi $P_4: (5d)^2 = (4c)^2 + (c)^2 \Rightarrow d^2 = 17 \left(\frac{c}{5}\right)^2 \Rightarrow d^2 = 17 \left(\frac{17a}{125}\right)^2$ atau $d = \frac{17a}{125}\sqrt{17}$



Panjang sisi P_5 : $(x)^2 = (4d)^2 + (d)^2 \Rightarrow x^2 = 17d^2 \Rightarrow x^2 = 17 \left(\frac{17a}{125} \sqrt{17}\right)^2$ atau
 $x^2 = \left(\frac{17^2 a}{125}\right)^2$

Dengan demikian, Luas P_1 : Luas $P_5 = 25a^2 : \left(\frac{17^2 a}{125}\right)^2 \Rightarrow$ Luas P_1 : Luas $P_5 = 25^4 : 17^4$
 Jadi, perbandingan luas P_1 dan P_5 adalah $25^4 : 17^4$.

5. Penyelesaian:

Misalkan empat bilangan asli ganjil tersebut adalah a, b, c dan d

Sehingga didapat $a + b + c + d = 22$

Kemudian kita mencari pola untuk mengetahui nilai-nilai dari a, b, c dan d

1) Apabila nilai dari a, b, c dan d semuanya berbeda:

$$\left. \begin{array}{l} 1 + 3 + 5 + 13 = 22 \\ 1 + 3 + 7 + 11 = 22 \\ 1 + 5 + 7 + 9 = 22 \end{array} \right\} \text{ ada sebanyak 3}$$

2) Apabila nilai dari $a = b$. Sedangkan nilai c dan d berbeda:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Apabila } a = b = 1 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 1 + 1 + 3 + 17 = 22 \\ 1 + 1 + 5 + 15 = 22 \\ 1 + 1 + 7 + 13 = 22 \\ 1 + 1 + 9 + 11 = 22 \end{array} \right\} \text{ ada sebanyak 4} \\ \text{Apabila } a = b = 3 \Rightarrow \text{dengan cara yang sama, didapat sebanyak 3} \\ \text{Apabila } a = b = 5 \Rightarrow \text{dengan cara yang sama, didapat sebanyak 2} \\ \text{Apabila } a = b = 7 \Rightarrow \text{dengan cara yang sama, didapat sebanyak 1} \\ \text{Apabila } a = b = 9 \Rightarrow \text{dengan cara yang sama, didapat sebanyak 1} \end{array} \right\} \text{ ada sebanyak 11}$$

3) Apabila nilai dari $a = b = c$. Sedangkan nilai d berbeda:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Apabila } a = b = c = 1 \Rightarrow 1 + 1 + 1 + 19 = 22 \quad \text{ada sebanyak 1} \\ \text{Apabila } a = b = c = 3 \Rightarrow 3 + 3 + 3 + 13 = 22 \quad \text{ada sebanyak 1} \\ \text{Apabila } a = b = c = 5 \Rightarrow 5 + 5 + 5 + 7 = 22 \quad \text{ada sebanyak 1} \\ \text{Apabila } a = b = c = 7 \Rightarrow 7 + 7 + 7 + 1 = 22 \quad \text{ada sebanyak 1} \end{array} \right\} \text{ ada sebanyak 4}$$

Dengan demikian, semuanya ada sebanyak $3 + 11 + 4 = 18$

Jadi, banyak cara mendapatkan empat bilangan asli ganjil (dengan urutan tidak diperhatikan) yang berjumlah 22 adalah sebanyak 18 cara.

6. Penyelesaian:

Diketahui persamaan garis $y = mx + 1$ dan persamaan parabola $y = x^2 - 2x + 1$

Karena kedua persamaan tersebut saling berpotongan, sehingga didapat

$$mx + 1 = x^2 - 2x + 1$$

$$x^2 - (m + 2)x = 0$$



$$x_{1,2} = \frac{(m+2) \pm \sqrt{(m+2)^2}}{2}$$

$$\Rightarrow x_{1,2} = \frac{(m+2) \pm (m+2)}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{(m+2) - (m+2)}{2}$$

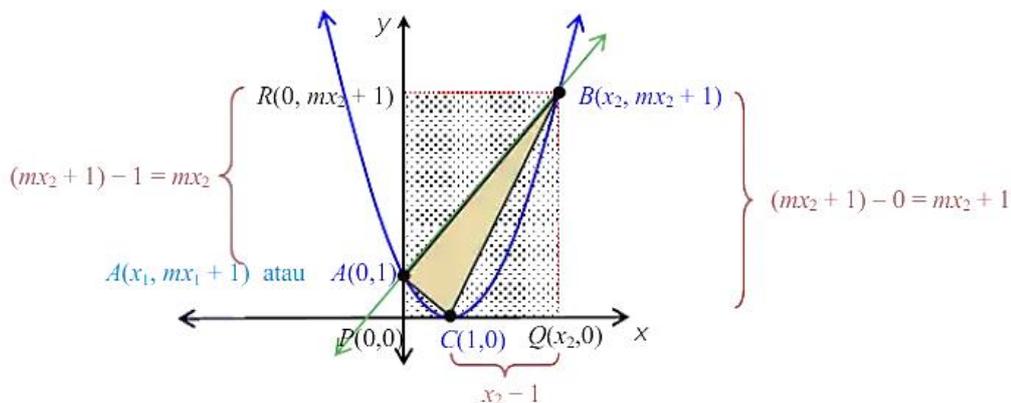
$$x_1 = 0$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{(m+2) + (m+2)}{2}$$

$$x_2 = m + 2$$

Diketahui $m > 0$, maka yang memenuhi adalah $x_2 = m + 2 \dots \dots \dots (1)$

Kemudian, berdasarkan kedua persamaan tersebut didapat ilustrasi gambar sebagai berikut.



Perhatikan segiempat $PQBR$, ΔABC , ΔAPC , ΔCQB dan ΔARB

Luas segiempat $PQBR$ = Luas ΔABC + luas ΔAPC + luas ΔCQB + luas ΔARB

$$PQ \times QB = 6 + \frac{1}{2} \times AP \times PC + \frac{1}{2} \times CQ \times QB + \frac{1}{2} \times AR \times RB$$

$$x_2 \times (mx_2 + 1) = \frac{1}{2} \times 12 + \frac{1}{2} \times 1 \times 1 + \frac{1}{2} \times (x_2 - 1) \times (mx_2 + 1) + \frac{1}{2} \times mx_2 \times x_2$$

$$2x_2 \times (mx_2 + 1) = 12 + 1 + (x_2 - 1)(mx_2 + 1) + mx_2^2$$

$$2mx_2^2 + 2x_2 = 13 + mx_2^2 + x_2 - mx_2 - 1 \quad mx_2^2$$

$$2mx_2^2 + 2x_2 = 12 + 2mx_2^2 + x_2 - mx_2$$

$$mx_2 + x_2 = 12$$

$$(m + 1)x_2 = 12 \dots \dots \dots (2)$$

Berdasarkan persamaan (2) dan (1), didapat sebagai berikut

$$(m + 1)x_2 = 12 \text{ dan } x_2 = m + 2 \Rightarrow (m + 1)(m + 2) = 12$$

$$\Rightarrow m^2 + 3m + 2 = 12$$

$$\Rightarrow m^2 + 3m - 10 = 0$$

$$\Rightarrow (m + 5)(m - 2) = 0$$

$$m = -5 \text{ atau } m = 2$$

Diketahui $m > 0$, maka yang memenuhi adalah $m = 2$

Jadi, nilai m adalah 2.



7. Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
 \text{Diketahui, persamaan } (x - 3y)^2 + 203(x - 3)(y - 1) - 191xy &= 9 \\
 (x - 3y)^2 + 203(x - 3)(y - 1) - 191xy &= 9 \\
 x^2 - 6xy + 9y^2 + 203(xy - x - 3y + 3) - 191xy &= 9 \\
 x^2 - 6xy + 9y^2 + 203xy - 191xy - 203(x + 3y - 3) &= 9 \\
 x^2 + 6xy + 9y^2 - 203(x + 3y - 3) &= 9 \\
 (x + 3y)^2 - 203(x + 3y - 3) &= 9 \\
 (x + 3y)^2 - 9 &= 203(x + 3y - 3) \\
 (x + 3y)^2 - 3^2 &= 203(x + 3y - 3) \\
 (x + 3y + 3)(x + 3y - 3) &= 203(x + 3y - 3) \\
 (x + 3y + 3) &= 203 \\
 x + 3y &= 200
 \end{aligned}$$

Dengan demikian, nilai $y_{maksimal} = 66$ yang mengakibatkan nilai $x_{minimal} = 2$

Dan nilai $y_{minimal} = 1$ yang mengakibatkan nilai $x_{maksimal} = 197$

Sehingga barisan nilai x nya adalah $2 + 5 + 8 + \dots + 191 + 194 + 197 = S_{66}$

$$S_{66} = \frac{66}{2} [2 \times 2 + (65)3]$$

$$= 33(4 + 195)$$

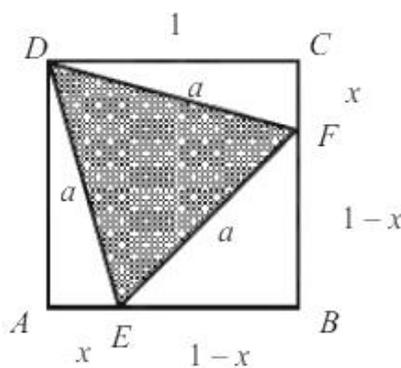
$$= 33(199)$$

$$S_{66} = 6567$$

Jadi, jumlah dari semua nilai x yang mungkin adalah 6567.

8. Penyelesaian:

Perhatikan gambar berikut.



Perhatikan $\triangle EBF$ dan $\triangle FCD$.

$$a^2 = 2(1 - x)^2 \text{ dan } a^2 = x^2 + 1^2 \Rightarrow 2(1 - x)^2 = x^2 + 1^2$$

$$\Rightarrow 2 - 4x + 2x^2 = x^2 + 1$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3} \text{ yang memenuhi } x = 2 - \sqrt{3}$$



Kemudian perhatikan $\triangle EFD$.

$$\begin{aligned} \text{Luas } \triangle EFD &= \frac{1}{4}a^2\sqrt{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}(x^2 + 1) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}[(2 - \sqrt{3})^2 + 1] \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}(4 - 4\sqrt{3} + 3 + 1) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}(8 - 4\sqrt{3}) \\ &= \sqrt{3}(2 - \sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$\text{Luas } \triangle EFD = 2\sqrt{3} - 3$$

$$\begin{aligned} \text{Dengan demikian, } \frac{\text{Luas } \triangle EFD}{\text{Luas persegi } ABCD} &= \frac{2\sqrt{3}-3}{1} \\ &= \frac{2\sqrt{3}-3}{1} \times \frac{2\sqrt{3}+3}{2\sqrt{3}+3} \\ &= \frac{4(3)-9}{2\sqrt{3}+3} \\ &= \frac{3}{2\sqrt{3}+3} \end{aligned}$$

Jadi, perbandingan luas segitiga dan persegi adalah $3 : (2\sqrt{3} + 3)$.

9. Penyelesaian:

Misalkan rata-rata nilai sampai ulangan ke-6 adalah a

Nilai ulangan ke-7 adalah b

Nilai ulangan ke-8 adalah c

Diketahui

(1) catatan Dito menunjukkan bahwa rata-rata nilai setelah ulangan ke-7 naik 2 poin dibandingkan rata-rata nilai sampai ulangan ke-6.

$$\text{Rata-rata nilai setelah ulangan ke-7: } \frac{6a+b}{7} = (a + 2)$$

(2) Sedangkan rata-rata nilai sampai ulangan ke-8 juga naik 2 poin dibanding rata-rata nilai sampai ulangan ke-7.

$$\text{Rata-rata nilai sampai ulangan ke-8: } \frac{7(a+2)+c}{8} = (a + 4)$$

Dari pernyataan (1) dan (2) didapat

$$(1) \frac{6a+b}{7} = (a + 2) \quad \Rightarrow 6a + b = 7(a + 2)$$

$$\Rightarrow b = a + 14$$

$$(2) \frac{7(a+2)+c}{8} = (a + 4) \quad \Rightarrow 7a + 14 + c = 8a + 32$$

$$\Rightarrow c = a + 18$$

Dengan demikian, $c - b = (a + 18) - (a + 14) = 4$

Jadi, selisih nilai ulangan ke-8 dan ke-7 adalah 4 poin.



10. Penyelesaian:

Diketahui $U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$ dengan n genap

$$U_n - a = 34$$

$$a + (n - 1)b - a = 34$$

$$(n - 1)b = 34$$

$$bn - b = 34$$

$$b = bn - 34 \dots\dots (1)$$

Kemudian

$$U_2 + U_4 + U_6 + \dots + U_n = 50$$

$$U_1 + U_3 + U_5 + \dots + U_{n-1} = 32$$

$$(U_2 - U_1) + \dots + (U_n - U_{n-1}) = 18$$

$$b + b + b + \dots + b = 18$$

$$\frac{n}{2}(b) = 18$$

$$bn = 36 \dots\dots (2)$$

Berdasarkan persamaan (1) dan (2) didapat:

$$b = bn - 34 \text{ dan } bn = 36 \Rightarrow b = 36 - 34$$

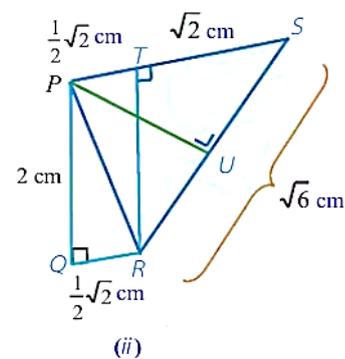
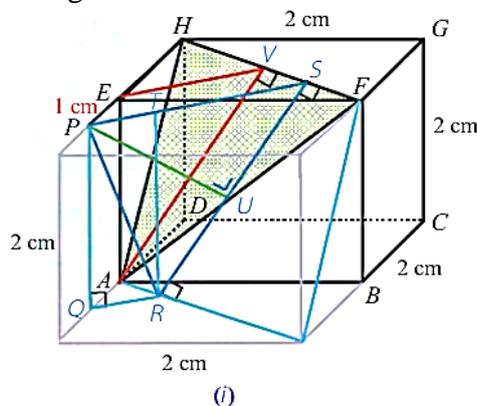
$$\Rightarrow b = 2 \quad \text{sehingga } n = 18$$

Jadi, banyak suku pada barisan tersebut adalah 18 suku.

URAIAN

1. Penyelesaian:

Perhatikan gambar berikut.



Karena Panjang $PE = 1$, maka Panjang $VS = SF = PT = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ cm. Sehingga Panjang

$PS = \frac{3}{2}\sqrt{2}$. Perhatikan ΔAVF pada gambar (i) didapat

$$AV^2 = AF^2 - FV^2 \Rightarrow AV^2 = (2\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^2$$



$$\Rightarrow AV = \sqrt{6} \quad [\text{lihat pada gambar (ii)}]$$

Selanjutnya perhatikan segiempat $ARSV$! Panjang $AV = RS$, sehingga Panjang $RS = \sqrt{6}$ cm. Kemudian perhatikan ΔPRS pada gambar (ii) didapat

$$\text{Luas } \Delta PRS = \frac{1}{2} \times RS \times PU$$

$$\frac{1}{2} \times PS \times TR = \frac{1}{2} \times RS \times PU$$

$$\frac{3}{2} \sqrt{2} \times 2 = \sqrt{6} \times PU$$

$$PU = 3 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$$

$$PU = \sqrt{3}$$

Jadi, jarak titik P ke bidang yang memuat segitiga AHF adalah $\sqrt{3}$ cm.

2. Penyelesaian:

Misalkan Porsi makanan nasi goreng adalah g
 Porsi makanan nasi pecel adalah p
 Porsi makanan nasi rawon adalah r

 Minuman jus alpukat adalah a

 Minuman jeruk panas adalah j

 Minuman jus sirsak adalah k

Mencari pola untuk mengetahui komposisi makanan dan minuman

Pertama mencari komposisi makanan, komposisi makanan ada 3 kemungkinan berikut.

- (1) 4 porsi untuk satu jenis makanan: dalam kasus ini hanya p dan r , karena g hanya tersedia 3 porsi, sehingga ada 2 cara.
- (2) 4 porsi untuk dua jenis makanan: dalam kasus ini ketiga jenis makanan terpenuhi dengan masing-masing dua pasangan, yakni $g + p$, $g + r$ dan $p + r$. Sehingga ada 2 cara.
- (3) 4 porsi untuk ketiga jenis makanan: dalam kasus ini ketiga jenis makanan yang ada terpenuhi, yakni $g + p + r$. Sehingga ada $3 \times 3 = 9$ cara.

Sehingga seluruhnya untuk komposisi makanan ada sebanyak $2 + 3 + 9 = 14$ cara.

Kedua mencari komposisi minuman, komposisi minuman juga ada 3 kemungkinan berikut.

- (1) 3 gelas untuk satu jenis minuman: dalam kasus ini ketiga jenis minuman terpenuhi untuk a, j dan k , sehingga ada 3 cara.
- (2) 3 gelas untuk dua jenis minuman: dalam kasus ini ketiga jenis minuman terpenuhi dengan masing-masing dua pasangan, yakni $a + j$, $a + k$ dan $j + k$. Sehingga ada $2 \times 3 = 6$ cara.
- (3) 3 gelas untuk ketiga jenis minuman: dalam kasus ini ketiga jenis minuman yang ada terpenuhi, yakni $a + j + k$. Sehingga ada 1 cara.



Sehingga seluruhnya untuk komposisi minuman ada sebanyak $3 + 6 + 1 = 10$ cara
Sengan demikian, komposisi makanan dan minuman yang mungkin adalah $14 \times 10 = 140$ cara.

Jadi, banyak pilihan komposisi makanan dan minuman yang mungkin mereka pesan ada sebanyak 140 cara.

3. Penyelesaian:

Diketahui $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n-1) + f(n) = n^2 f(n)$

Mencari pola untuk mengetahui nilai dari masing-masing fungsi, yakni sebagai berikut.

$$\begin{aligned} f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n-1) + f(n) &= n^2 f(n) \\ f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n-1) &= (n-1)^2 f(n-1) \\ \hline f(n) &= n^2 f(n) - (n-1)^2 f(n-1) \\ n^2 f(n) - f(n) &= (n-1)^2 f(n-1) \\ (n^2 - 1)f(n) &= (n-1)^2 f(n-1) \\ f(n) &= \frac{(n-1)^2}{(n^2 - 1)} f(n-1) \\ f(n) &= \frac{(n-1)(n-1)}{(n+1)(n-1)} f(n-1) \\ f(n) &= \frac{(n-1)}{(n+1)} f(n-1) \end{aligned}$$

Diketahui $f(1) = 2016 \qquad \Rightarrow f(1) = \frac{2016}{1}$

Untuk $n = 2 \Rightarrow f(2) = \frac{(2-1)}{(2+1)} f(2-1) \Rightarrow f(2) = \frac{1}{3} f(1) \Rightarrow f(2) = \frac{2016}{3}$

Untuk $n = 3 \Rightarrow f(3) = \frac{(3-1)}{(3+1)} f(3-1) \Rightarrow f(3) = \frac{2}{4} f(2) \Rightarrow f(3) = \frac{2016}{6}$

Untuk $n = 4 \Rightarrow f(4) = \frac{(4-1)}{(4+1)} f(4-1) \Rightarrow f(4) = \frac{3}{5} f(3) \Rightarrow f(4) = \frac{2016}{10}$

Untuk $n = 5 \qquad \qquad \qquad \Rightarrow f(5) = \frac{4}{6} f(4) \Rightarrow f(5) = \frac{2016}{15}$

Untuk $n = 6 \qquad \qquad \qquad \Rightarrow f(6) = \frac{5}{7} f(5) \Rightarrow f(6) = \frac{2016}{21}$

.....
.....

Untuk $n \qquad \Rightarrow f(n) = \frac{(n-1)}{(n+1)} f(n-1) \qquad \Rightarrow f(n) = \frac{2016}{U_n}$

Perhatikan penyebut dari masing-masing nilai fungsi, yakni beberapa barisan-barisan segitiga seperti berikut.

1, 3, 6, 10, 15, 21, ..., U_n

Sedangkan untuk rumus suku ke- n barisan segitiga tersebut adalah $U_n = \frac{n}{2}(n+1)$

Sehingga untuk fungsi f didapat sebagai berikut.



$$f(n) = \frac{2016}{u_n} \Rightarrow f(n) = \frac{2016}{\frac{n}{2}(n+1)} \Rightarrow f(n) = 2016 \left[\frac{2}{n(n+1)} \right]$$

Dengan demikian, untuk $f(2016)$ didapat sebagai berikut.

$$f(n) = 2016 \left[\frac{2}{n(n+1)} \right] \Rightarrow f(2016) = 2016 \left[\frac{2}{2016(2017)} \right]$$
$$\Rightarrow f(2016) = \frac{2}{2017}$$

Jadi, nilai $f(2016)$ adalah $\frac{2}{2017}$.

