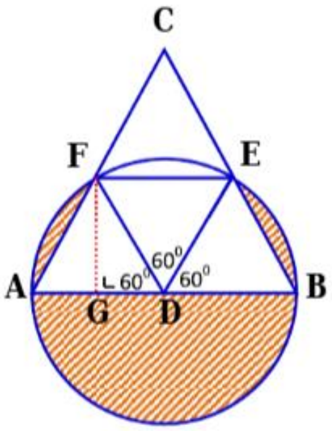
PEMBAHASAN
OSP MATEMATIKA SMP
TAHUN 2013

1. **Penyelesaian:**
Perhatikan gambar berikut!



Diketahui △ABC sama sisi dengan panjang sisi 10 cm¸ maka
AB = BC = AC = 10 cm
Segitiga tersebut membagi tiga segitiga kecil yang sama besar dan sebangun, yaitu △ADF, △DEF, △BDE, dan △ECF. Sedangkan lingkaran yang berpusat di titik D mempunyai jari-jari = 5 cm, dimana Panjang AD = BD = BE = CE = CF = AF = EF
Perhatikan △ADF!: panjang AG = $\frac{5}{2}$ cm
Dengan Pythagoras didapat:
Panjang GF = $\sqrt{AF^2 - AG^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{75}{4}} = \frac{5}{2}\sqrt{3}$
Perhatikan daerah yang diarsir! Daerah yang diarsir merupakan daerah didalam lingkaran akan tetapi daerah diluar segitiga, sehingga didapat:
Luas Arsiran = Luas Lingkaran – (2 × Luas △ADF + Luas Juring DEF)
$= \pi r^2 - (2 \times \frac{1}{2} AD \times GF + \frac{60^o}{360^o}\pi r^2)$
$= \pi(5)^2 - (5 \times \frac{5}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{6}\pi \times 5^2)$
$= 25\pi - (\frac{25}{2}\sqrt{3} + \frac{25}{6}\pi)$
$= \frac{125}{6}\pi - \frac{25}{2}\sqrt{3}$
$= \frac{25}{2}\left(\frac{5\pi}{3} - \sqrt{3}\right)$

Jadi, luas daerah di dalam Lingkaran dan di luar segitiga adalah $\frac{25}{2}\left(\frac{5\pi}{3}-\sqrt{3}\right)$.

2. **Penyelesaian:**

Misalkan:
$\bar{x}_5$ = rata-rata nilai 5 siswa terendah
$\bar{n}_5$ = banyaknya siswa pada $\bar{x}_5$
$\bar{x}_{20}$ = rata-rata nilai 20 siswa terendah
$\bar{n}_{20}$ = banyaknya siswa pada $\bar{x}_{20}$
$\bar{x}$ = rata-rata seluruh siswa

Diketahui:
n = 25
$\bar{x}$ = 40
$\bar{n}_5$ = 5
$\bar{n}_{20}$ = 20
$\bar{x}_{20} - \bar{x}_5$ = 25 $\Rightarrow \bar{x}_{20} = 5 + \bar{x}_5$
$\bar{x} = \frac{n_5 \cdot \bar{x}_5 + n_{20} \cdot \bar{x}_{20}}{n_5 + n_{20}}$

$$\Rightarrow 40 = \frac{5.\bar{x}_5 + 20\,.\,(5+\bar{x}_5)}{5+20}$$
$$\Rightarrow 40 = \frac{5.\bar{x}_5 + 200 + 20\bar{x}_5}{25}$$
$$\Rightarrow 40\,.\,25 = 25\bar{x}_5 + 500$$
$$\Rightarrow 1000 = 25\bar{x}_5 + 500$$
$$\Rightarrow 1000 - 500 = 25\bar{x}_5$$
$$\Rightarrow \frac{500}{25} = \bar{x}_5$$
$$\Rightarrow \bar{x}_5 = 20$$

Jadi, nilai rata-rata 5 siswa terendah adalah 20.

3. **Penyelesaian:**

Diketahui sebuah kotak terdapat beberapa bola dengan empat macam warna yakni: biru, merah, kuning dan putih. Paling sedikit terdapat 10 bola untuk masing-masing warna.
Permasalahan ini dapat menggunakan Prinsip Sangkar Burung (Pigeon Hole Principle), yaitu: Jika ada n burung merpati menempati m sangkar dan m < n, maka paling sedikit satu sangkar akan berisi 2 merpati atau lebih.
Paling sedikit terdapat 10 bola untuk masing-masing warna, hal ini memang sangat dimungkinkan untuk memperoleh 6 bola sewarna. Dimana bola tersebut diambil satu demi satu dari dalam sebuah kotak secara acak tanpa pengembalian, sehingga apabila salah satu warna bola sudah terambil, maka kemungkinan terambilnya untuk 3 warna yang lainnya adalah [(6 – 1) = 5].
Dengan demikian, banyak pengambilan yang harus dilakukan untuk memastikan mendapatkan 6 bola dengan warna sama adalah 6 + 3.5 = 21 bola.

Jadi, banyak pengambilan yang harus dilakukan untuk memastikan mendapatkan 6 bola dengan warna sama adalah 21.

4. Penyelesaian:

Dari soal diketahui:

$$\frac{x^3+3x^2y}{x+3y}-\frac{27y^3+9xy^2}{3y+x}=x+3y$$

$$\Rightarrow \frac{x^2(x\ +3xy)}{x+3y}-\frac{9y^2+(3y+x)}{3y+x}=x+3y$$
$$\Rightarrow x^2-9y^2=x+3y$$
$$\Rightarrow (x-3y)(x+3y)=x+3y$$
$$\Rightarrow (x-3y)=\frac{x+3y}{x+3y}$$
$$\Rightarrow x-3y=1$$
$$\Rightarrow x=1+3y$$

Jadi, nilai $x=1+3y$

5. Penyelesaian:

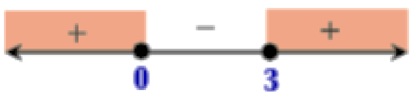
Pertidaksamaan ini mempunyai syarat sebagai berikut:

Syarat I:

$x^2-1\neq 0$, sehingga $(x+1)(x-1)\neq 0$, artinya adalah $x\neq -1$ atau $x\neq 1$

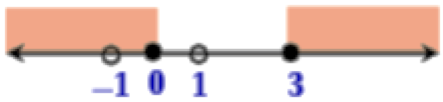
Syarat II:

$$\frac{x^4-2x^3-2x^2-1}{x^2-1}\geq 1 \qquad \Rightarrow \frac{x^4-2x^3-2x^2-1}{(x+1)(x-1)}\geq 1$$
$$\Rightarrow \frac{(x+1)(x^3-3x^2+x-1)}{(x+1)(x-1)}\geq 1$$
$$\Rightarrow \frac{(x^3-3x^2+x-1)}{(x-1)}\geq 1$$
$$\Rightarrow x^3-3x^2+x-1\geq x-1$$
$$\Rightarrow x^3-3x^2\geq 0$$
$$\Rightarrow x^2(x-3)\geq 0 \qquad \Rightarrow x^2(x-3)=0$$
$$x=0 \text{ atau } x=3$$



HP = $\{x|x\leq 0 \text{ atau } x\geq 3\}$

Pertidaksamaan $\frac{x^4-2x^3-2x^2-1}{x^2-1}\geq 1$ harus memenuhi syarat I dan syarat II, sehingga:



Jadi, himpunan penyelesaiannya adalah $\{x|x \leq 0$ atau $x \geq 3$ dan $x \neq -1\}$.

6. **Penyelesaian:**
100B = $100^2 + 99^2 - 98^2 - 97^2 + 96^2 + 95^2 - 94^2 - 93^2 + ... + 4^2 + 3^2 - 2^2 - 1^2$ (sebanyak 100 suku)
Operasi bilangan diatas berpola: 2 bilangan pertama selalu positif dan 2 bilangan berikutnya selalu negatif
100B = $100^2 + 99^2 - 98^2 - 97^2 + 96^2 + 95^2 - 94^2 - 93^2 + ... + 8^2 + 7^2 - 6^2 - 5^2 + 4^2 + 3^2 - 2^2 - 1^2$
100B = $(100^2 - 98^2) + (99^2 - 97^2) + (96^2 - 94^2) + (95^2 - 93^2) + ... + (8^2 - 6^2) + (7^2 - 5^2) + (4^2 - 2^2) + (3^2 - 1^2)$
Dengan menggunakan formula $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, maka dapat disederhanakan menjadi:
100B = (100 – 98)(100 + 98) + (99 – 97)(99 + 97) + (96 – 94)(96 + 94) + (95 – 93)(95 + 93) + ... + (8 – 6)(8 + 6) + (7 – 5)(7 + 5) + (4 – 2)(4 + 2) + (3 – 1)(3 + 1) (sebanyak 50 suku)
100B = 2(198) + 2(196) + 2(190) + 2(188) + ... 2(14) + 2(12) + 2(6) + 2(4)
100B = 2(198 + 196 + 190 + 188 + ... + 14 + 12 + 6 + 4)
$\frac{100}{2}$ B = 198 + 196 + 190 + 188 + ... + 14 + 12 + 6 + 4
50B = 198 + 196 + 190 + 188 + ... + 14 + 12 + 6 + 4
Dengan cara Gauss dapat disederhanakan menjadi:
50B = (198 + 4) + (196 + 6) + (190 + 12) + (188 + 14) + ...
50B = 202 + 202 + 202 + 202 + ... (sebanyak 25 suku)
Sehingga didapat:
50B = 202(25)
B = $\frac{5050}{50}$
B = 101
Jadi, nilai B adalah 101.

7. **Penyelesaian:**
Misalkan:
Jari-jari tabung = r = 70 cm
Ketinggian air = t_a = 40 cm
Penambahan tinggi air = t_t = 8 cm
Tebal ubin keramik = t_u

Volume 110 ubin = Volume ketinggian air
$110\,(40 \times 40 \times t_u) = \pi \times r^2 \times t_t$
$110 \times 40 \times 40 \times t_u = \frac{22}{7} \times 70^2 \times 8$
$11 \times 10 \times 40 \times 40 \times t_u = \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 100 \times 8$
$11 \times 10 \times 4 \times 4 \times t_u = 22 \times 7 \times 8$
$10 \times 4 \times 4 \times t_u = 2 \times 7 \times 8$
$t_u = \frac{2.7.8}{10.4.4}$
$t_u = \frac{7}{10}$
$t_u = 0{,}7$ cm atau $t_u = 7$ mm
Jadi, tebal ubin keramik tersebut adalah 7 mm.

8. Penyelesaian:
Misalkan n memiliki bilangan pembentuk xyz.
Maka didapat: xyz + x + y + z = 313
100x + 10y + z + x + y + z = 313
101x + 11y + 2z = 313
Kemudian mencari nilai x, y, z yang memenuhi dari persamaan diatas
Nilai x yang mungkin hanyalah 2 atau 3, padahal 313 adalah ganjil
Menurut aturan penjumlahan dan perkalian, maka berlaku:
Sehingga jika x = 2 (genap), maka 11y harus bernilai ganjil, dikarenakan 2z bernilai genap
Sedangkan jika x = 3 (ganjil), maka 11y harus bernilai genap, dikarenakan 2z bernilai genap

Kita buat tabel kemungkinannya:

x	y	z	101x + 11y + 2z	Nilai
2	1	–	–	–
2	3	–	–	–
2	5	–	–	–
2	7	8	295	Bernilai Salah
2	9	8	317	Bernilai Salah
2	**9**	**6**	**313**	**Bernilai Benar**
3	0	1	305	Bernilai Salah
3	0	3	309	Bernilai Salah
3	**0**	**5**	**313**	**Bernilai Benar**
3	0	7	317	Bernilai Salah

Jadi, semua nilai n yang mungkin adalah 296 dan 305.

9. Penyelesaian:

A – B = {(x, y)|(x, y) ∈ A dan (x, y) ∉ A∩B}

Mencari anggota A:

A = {(x, y|1987 ≤ y < x ≤ 2013 dengan x dan y bilangan bulat}

Banyaknya bilangan mulai dari 1987 sampai dengan 2013 ada sebanyak 27 bilangan Kemudian bilangan-bilangan tersebut disusun dengan mengambil 2 bilangan (x, y) atau (y, x).

Permasalahan ini sesuai dengan aturan kombinasi bahwa terdapat 27 bilangan yang akan disusun menjadi 2 bilangan, yaitu

$$_{27}C_2 = \frac{27!}{(27-2)!.2!} = \frac{27!}{25!.2!} = 27 \times 13 = 351$$

Dengan demikian n(A) = 351

Selanjutnya mencari anggota A∩B

A $\Rightarrow 1987 \leq y < x \leq 2013$

A = {(1987, 1988), …, (1987, 2013), …, (2012, 2013)}

B $\Rightarrow y \leq 2013 - x$

$y + x \leq 2013$

Untuk nilai x dan y bilangan bulat positif pada B, maka dapat susunan sebagai berikut:

B = {(0, 2013), (1, 2012), ..., (1005, 1008), (1006, 1007), ..., (2012, 1), (2013, 0)}

Sehingga dapat disumpulkan bahwa: A∩B = {} sehingga n(A∩B) = 0

Dengan demikian, diperoleh:

A – B = {(x, y)|(x, y) ∈ A dan (x, y) ∉ A∩B}

A – B = A

n(A – B) = n(A)

n(A – B) = 351

Jadi, banyak anggota himpunan A – B adalah 351.

10. Penyelesaian:

Diketahui 25 orang masing-masing kaosnya diberikan nomor bebeda, yaitu {1, 2, 3, …, 24, 25}. Kemudian akan dipilih 3 pemain dimana jumlah nomor kaosnya harus habis dibagi 3. Hal ini kita bisa menggunakan prinsip hasil habis dibagi suatu bilangan, yaitu suatu bilangan bila dibagi 3 mempunyai sisa pembagi sebanyak 3, yaitu 0, 1, dan 2. Karena sisa pembaginya sebanyak 3, maka kemugkinan banyaknya jumlah 3 bilangan habis dibagi 3 mempunyai sebanyak 3 kemungkinan sisa pembagi, yaitu sebagai berikut

Kemungkinan I: sisa pembaginya 0

Bilangan-bilangan yang termasuk mempunyai sisa pembagi 0 adalah {3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24} ada sebanyak 8 bilangan.

Sehingga, untuk mengetahui banyaknya jumlah 3 bilangan berbeda habis dibagi 3, sama halnya dengan menyusun 3 bilangan berbeda dari 8 bilangan yang tersedia, yaitu ${}_8C_3 = \frac{8!}{5!.3!} = 56$

Kemungkinan II: sisa pembaginya 1
Bilangan-bilangan yang termasuk mempunyai sisa pembagi 1 adalah {1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25} ada sebanyak 9 bilangan.
Sehingga, banyaknya jumlah 3 bilangan berbeda habis dibagi 3 adalah ${}_9C_3 = \frac{9!}{6!.3!} = 84$

Kemungkinan III: sisa pembaginya 2
Bilangan-bilangan yang termasuk mempunyai sisa pembagi 2 adalah {2, 6, 8, 11, 14, 17, 20, 23} ada sebanyak 8 bilangan.
Sehingga, banyaknya jumlah 3 bilangan berbeda habis dibagi 3 adalah ${}_8C_3 = \frac{8!}{5!.3!} = 56$

Selanjutnya, untuk penjumlahan 3 bilangan yang didapat dari masing-masing kemungkinan I, II, dan III. Ternyata hasil penjumlahannyapun dapat habis dibagi 3. Sehingga, banyaknya cara menyusun 3 bilangan tersebut habis dibagi 3 adalah ${}_8C_1 \cdot {}_9C_1 \cdot {}_8C_1$ = 8 · 9 · 8 = 576
Dengan demikian, total banyaknya cara selurunya adalah 56 + 84 + 56 + 576 = 772
Jadi, banyak cara memilih tiga pemain secara acak dengan syarat jumlah nomor kaos mereka habis dibagi tiga adalah 772.

Pembahasan Uraian!

11. Penyelesaian:

Step 1: Membangun Persamaan Berdasarkan Informasi yang Diberikan

Misalkan banyak buku yang diterima sekolah A, B, C, dan D masing-masing adalah A,B,C, dan D.

Dari soal, kita dapat membentuk persamaan-persamaan berikut:

- Total buku: $A + B + C + D = 144$
- Selisih buku A dan B: $B - A = 16$ (karena A menerima paling sedikit, maka B lebih banyak dari A) $\Rightarrow B = A + 16$
- Selisih buku B dan C: $B - C = 12 \Rightarrow C = B - 12$
- Selisih buku C dan D: $C - D = 8 \Rightarrow D = C - 8$
- Hubungan buku A dan D: $D = 2A$

Step 2: Substitusi dan Sederhanakan Persamaan

Kita akan substitusikan persamaan-persamaan untuk B, C, dan D ke dalam persamaan total buku untuk menemukan nilai A.

Dari $B = A + 16$, kita substitusikan ke $C = B - 12$:

$C = (A + 16) - 12 = A + 4$

Kemudian, substitusikan C ke $D = C - 8$:

$D = (A + 4) - 8 = A - 4$

Namun, kita juga memiliki informasi $D = 2A$. Ini berarti:

$A - 4 = 2A$

$2A - A = -4$

$A = -4$

Nilai $A = -4$ ini tidak masuk akal karena jumlah buku tidak mungkin negatif. Hal ini menunjukkan bahwa asumsi awal tentang selisih buku (misalnya, $B - C =12$ atau $C - D = 8$) mungkin perlu disesuaikan berdasarkan kondisi "Sekolah A menerima buku paling sedikit dibandingkan dengan yang diterima sekolah lain".

Mari kita perbaiki asumsi tentang hubungan selisih:

- $B = A + 16$ (B lebih banyak dari A)
- $C = A + 4$ (C lebih banyak dari A)
- $D = A + 12$ (karena $D = 2A$ dan A paling sedikit, maka D pasti lebih banyak dari A)
- Dari $C = B - 12$ dan $B = A + 16$, maka $C = (A + 16) - 12 = A + 4$.

- Dari $D = C - 8$ dan $C = A + 4$, maka $D = (A + 4) - 8 = A - 4$. Ini masih menghasilkan $A = -4$.

Terjadi kontradiksi dalam pernyataan soal mengenai selisih buku dan kondisi "Sekolah A menerima buku paling sedikit" serta "Sekolah D menerima buku 2 kali lebih banyak daripada buku yang diterima sekolah A".

Mari kita tinjau ulang persamaan selisih dengan mempertimbangkan \(A\) adalah yang paling sedikit.

- $A + B + C + D = 144$
- Selisih A dan B adalah 16. Karena A paling sedikit, maka $B = A + 16$.
- Selisih B dan C adalah 12. Ini bisa berarti $C = B - 12$ atau $C = B + 12$.
- Selisih C dan D adalah 8. Ini bisa berarti $D = C - 8$ atau $D = C + 8$.
- $D = 2A$.

Dari $B = A + 16$, jika $C = B - 12$, maka $C = (A + 16) - 12 = A + 4$.
Dari $C = A + 4$, jika $D = C - 8$, maka $D = (A + 4) - 8 = A - 4$.
Jika $D = A - 4$ dan $D = 2A$, maka $A - 4 = 2A \Rightarrow A = -4$, yang tidak mungkin.

Ini berarti asumsi $D = C - 8$ atau $C = B - 12$ (atau keduanya) mungkin salah dalam konteks bahwa A adalah yang paling sedikit.

Coba kita pertimbangkan urutan banyaknya buku: $A < B$, $A < C$, $A < D$.

- $B = A + 16$
- Karena A paling sedikit, C harus lebih besar dari A. Jadi $C = B \pm 12$.
  Jika $C = B - 12 = (A + 16) - 12 = A + 4$. Ini valid ($C > A$).
- Karena A paling sedikit, D harus lebih besar dari A. Jadi $D = C \pm 8$.
  Kita juga tahu $D = 2A$.
  Jika $D = C - 8$, maka $2A = (A + 4) - 8 \Rightarrow 2A = A - 4 \Rightarrow A = -4$. Ini tidak mungkin.
  Jadi, pastinya $D = C + 8$.
  Maka $2A = (A + 4) + 8 \Rightarrow 2A = A + 12 \Rightarrow A = 12$.

Sekarang kita punya nilai A. Mari kita cari nilai B, C, D:

- $A = 12$
- $B = A + 16 = 12 + 16 = 28$
- $C = A + 4 = 12 + 4 = 16$
- $D = 2A = 2 \times 12 = 24$

Mari kita cek semua kondisi:

Total buku: $A + B + C + D = 12 + 28 + 16 + 24 = 80$. Ini tidak sama dengan 144.

Berarti ada lagi yang perlu diperbaiki. Asumsi tentang arah selisih mungkin bukan hanya berdasarkan A paling kecil, tetapi juga urutan B, C, D relatif satu sama lain.

Mungkin interpretasi selisih buku adalah nilai mutlak:

- $|A - B| = 16$
- $|B - C| = 12$
- $|C - D| = 8$

Namun, dengan tambahan kondisi A paling sedikit dan $D = 2A$.
Jika A paling sedikit, maka $B = A + 16$.
Jika $D = 2A$, maka D juga lebih besar dari A.

Mari kita coba dengan kondisi ini:
$A = x$
$B = x + 16$ (karena A paling sedikit, $B > A$)
$D = 2x$ (karena D dua kali A)
Sekarang hubungkan C.
$|B - C| = 12 \Rightarrow |(x + 16) - C| = 12 \Rightarrow (x + 16) - C = 12$ atau $(x + 16) - C = -12$.
Kasus 1: $C = x + 16 - 12 = x + 4$.
Kasus 2: $C = x + 16 + 12 = x + 28$.

$|C - D| = 8 \Rightarrow |C - 2x| = 8$.
Kasus 1: $C = x + 4$
Maka $|(x + 4) - 2x| = 8 \Rightarrow |-x + 4| = 8$.
Ini berarti $-x + 4 = 8$ atau $-x + 4 = -8$.
Jika $-x + 4 = 8 \Rightarrow -x = 4 \Rightarrow x = -4$. (Tidak mungkin)
Jika $-x + 4 = -8 \Rightarrow -x = -12 \Rightarrow x = 12$.

Jika $x = 12$:
$A = 12$
$B = 12 + 16 = 28$
$C = 12 + 4 = 16$
$D = 2 \times 12 = 24$
Cek total: $12 + 28 + 16 + 24 = 80$. Masih tidak 144.

Kasus 2: $C = x + 28$
Maka $|(x + 28) - 2x| = 8 \Rightarrow |-x + 28| = 8$.
Ini berarti $-x + 28 = 8$ atau $-x + 28 = -8$.
Jika $-x + 28 = 8 \Rightarrow \Rightarrow -x = -20 \Rightarrow x = 20$.
Jika $-x + 28 = -8 \Rightarrow -x = -36 \Rightarrow x = 36$.

Jika $x = 20$:

A = 20
B = 20 + 16 = 36
C = 20 + 28 = 48
D = 2 × 20 = 40
Cek total: 20 + 36 + 48 + 40 = 144. Ini benar!

Jika x = 36:
A = 36
B = 36 + 16 = 52
C = 36 + 28 = 64
D = 2 × 36 = 72
Cek total: 36 + 52 + 64 + 72 = 224. Ini tidak sama dengan 144.
Jadi, solusi yang benar adalah dari x = 20.

Step 3: Verifikasi Kondisi
Mari kita verifikasi semua kondisi dengan A = 20, B = 36, C = 48, D = 40:
Jumlah total buku: 20 + 36 + 48 + 40 = 144. (Benar)
Selisih buku A dan B adalah 16: B – A = 36 – 20 = 16. (Benar)
Selisih buku B dan C adalah 12: C – B = 48 – 36 = 12. (Benar)
Selisih buku C dan D adalah 8: C – D = 48 – 40 = 8. (Benar)
Sekolah A menerima buku paling sedikit dibandingkan dengan yang diterima sekolah lain: A = 20. B = 36, C = 48, D = 40. Ya, A paling sedikit. (Benar)
Sekolah D menerima buku 2 kali lebih banyak daripada buku yang diterima sekolah A: D = 40, A = 20. 40 = 2 × 20. (Benar)
Semua kondisi terpenuhi.

Jadi, Banyak buku yang diterima masing-masing sekolah adalah sebagai berikut:
Sekolah A: 20 buku
Sekolah B: 36 buku
Sekolah C: 48 buku
Sekolah D: 40 buku

12. Penyelesaian:
Langkah 1: Menentukan Ruang Sampel
Jumlah total cara mengambil 5 kartu dari 52 kartu adalah kombinasi C(52,5).

$$C(52,5) = \frac{52!}{5!(52-5)!} = \frac{52 \times 51 \times 50 \times 49 \times 48}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 2.598.960.$$

Langkah 2: Menentukan Jumlah Cara Terambilnya 1 Kartu King

Terdapat 4 kartu King dalam satu set kartu. Jumlah cara memilih 1 kartu King dari 4 kartu King adalah C(4,1) = 4.

Langkah 3: Menentukan Jumlah Cara Terambilnya 4 Kartu Non-King
Sisa kartu yang bukan King adalah 52 – 4 = 48 kartu. Jumlah cara memilih 4 kartu non-King dari 48 kartu non-King adalah

$$C(48, 4) = \frac{48!}{4!(48-4)!} = \frac{48 \times 47 \times 46 \times 45}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 194.580.$$

Langkah 4: Menentukan Jumlah Cara Terambilnya 2 Kartu Merah dan 3 Kartu Hitam dengan Tepat 1 King
Kasus ini dibagi menjadi dua sub-kasus:
Sub-kasus 1: King yang Terambil Berwarna Merah
Dipilih 1 King merah dari 2 King merah: C(2,1) = 2.
Dipilih 1 kartu merah non-King dari 24 kartu merah non-King: C(24,1) = 24.
Dipilih 3 kartu hitam non-King dari 24 kartu hitam non-King:

$$C(24, 3) = \frac{24 \times 23 \times 22}{3 \times 2 \times 1} = 2.024.$$

Jumlah cara untuk sub-kasus ini adalah 2 × 24 × 2.024 = 97.152.
Sub-kasus 2: King yang Terambil Berwarna Hitam
Dipilih 1 King hitam dari 2 King hitam: C(2,1) = 2.
Dipilih 2 kartu merah non-King dari 24 kartu merah non-King:

$$C(24, 2) = \frac{24 \times 23}{2 \times 1} = 276.$$

Dipilih 2 kartu hitam non-King dari 24 kartu hitam non-King:

$$C(24, 2) = \frac{24 \times 23}{2 \times 1} = 276.$$

Jumlah cara untuk sub-kasus ini adalah 2 × 276 × 276 = 152.352.
Jumlah total cara terambilnya 2 kartu merah dan 3 kartu hitam dengan tepat 1 King adalah 97.152 + 152.352 = 249.504.

Langkah 5: Menghitung Peluang
Peluang dihitung dengan membagi jumlah cara yang diinginkan dengan total ruang sampel. Peluang = $\frac{249504}{2598960}$.

Jadi, Peluang terambilnya 2 kartu warna merah dan 3 kartu warna hitam, yang di antaranya terdapat tepat 1 kartu King, adalah $\frac{249504}{2598960}$.

13. Penyelesaian:

Step 1: Menganalisis Susunan Lingkaran Kecil

Gambar menunjukkan 10 lingkaran kecil dengan jari-jari r = 1 cm yang tersusun di dalam sebuah lingkaran besar berjari-jari R. Susunan ini terdiri dari dua kolom vertikal, masing-masing berisi 5 lingkaran kecil.

Step 2: Menentukan Diameter Lingkaran Besar secara Vertikal

Jika kita melihat susunan lingkaran kecil secara vertikal, ada 5 lingkaran kecil yang tersusun tumpang tindih. Diameter setiap lingkaran kecil adalah 2r = 2 × 1 cm = 2 cm. Jadi, tinggi total susunan 5 lingkaran kecil adalah 5 × 2 cm = 10 cm. Ini berarti diameter lingkaran besar secara vertikal adalah 10 cm. Maka, 2R = 10 cm, sehingga R = 5 cm.

Step 3: Menentukan Diameter Lingkaran Besar secara Horizontal

Jika kita melihat susunan lingkaran kecil secara horizontal, ada 2 lingkaran kecil yang tersusun berdampingan. Diameter setiap lingkaran kecil adalah 2r = 2 cm. Jadi, lebar total susunan 2 lingkaran kecil adalah 2 × 2 cm = 4 cm. Ini berarti diameter lingkaran besar secara horizontal adalah 4 cm. Maka, 2R = 4 cm, sehingga R = 2 cm.

Step 4: Menentukan Nilai R yang Benar

Karena lingkaran besar harus menampung seluruh susunan lingkaran kecil, maka jari-jari R harus cukup besar untuk menampung baik susunan vertikal maupun horizontal. Dalam kasus ini, nilai R yang ditentukan dari susunan vertikal (5 cm) lebih besar daripada nilai R yang ditentukan dari susunan horizontal (2 cm). Oleh karena itu, untuk menampung seluruh lingkaran kecil, jari-jari lingkaran besar R haruslah yang terbesar dari kedua nilai tersebut.

Jadi, Jari-jari lingkaran besar R adalah 5 cm.

14. Penyelesaian:

Soal ini tidak dapat diselesaikan secara langsung karena adanya inkonsistensi dan informasi yang tidak memadai:

- Konflik Bilangan Prima: Soal meminta untuk menggunakan delapan bilangan prima yang kurang dari 25, sementara persegi ajaib yang diberikan sudah berisi bilangan prima yang lebih dari 25 (29, 31, 37, 41, 47, 53, 59, 61).
- Konstanta Ajaib Tidak Diketahui: Untuk melengkapi persegi ajaib, kita perlu mengetahui konstanta ajaib (jumlah total setiap baris dan kolom). Namun, tidak ada baris atau kolom yang terisi penuh, sehingga konstanta ajaib tidak dapat dihitung dari informasi yang ada.

- Pilihan Bilangan Prima: Ada 9 bilangan prima kurang dari 25 (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23), tetapi kita diminta menggunakan 8. Tanpa kriteria lebih lanjut, pemilihan 8 bilangan ini menjadi ambigu.

Kesimpulan: Dengan informasi yang diberikan, soal ini tidak dapat dijawab untuk menghasilkan persegi ajaib yang valid dengan jumlah baris dan kolom yang sama, sambil memenuhi semua persyaratan yang disebutkan. Diperlukan klarifikasi lebih lanjut mengenai maksud soal atau koreksi pada data yang diberikan.

15. Penyelesaian:

Step 1: Memahami definisi fungsi bilangan bulat terbesar

Fungsi bilangan bulat terbesar, dilambangkan dengan $[x]$, adalah bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x. Ini juga dikenal sebagai fungsi floor. Misalnya, $\left[\frac{5}{2}\right] = [2.5] = 2$ karena $2 \leq 2.5 < 3$.

Step 2: Menentukan batasan untuk x dari $\left[\sqrt{x}\right] = 10$

Diketahui $\left[\sqrt{x}\right] = 10$. Berdasarkan definisi fungsi bilangan bulat terbesar, ini berarti:

$10 \leq \sqrt{x} < 11$

Mengkuadratkan semua bagian ketidaksamaan:

$10^2 \leq (\sqrt{x})^2 < 11^2$

$100 \leq x < 121$

Step 3: Menentukan batasan untuk y dari $\left[\frac{1}{4}\sqrt{y}\right] = 8$

Diketahui $\left[\frac{1}{4}\sqrt{y}\right] = 8$. Berdasarkan definisi fungsi bilangan bulat terbesar:

$8 \leq \frac{1}{4}\sqrt{y} < 9$

Mengalikan semua bagian ketidaksamaan dengan 4:

$8 \times 4 \leq \sqrt{y} < 9 \times 4$

$32 \leq \sqrt{y} < 36$

Mengkuadratkan semua bagian ketidaksamaan:

$32^2 \leq (\sqrt{y})^2 < 36^2$

$1024 \leq y < 1296$

Step 4: Menentukan batasan untuk $x + y$

Kita memiliki batasan untuk x dan y:

$100 \leq x < 121$

$1024 \leq y < 1296$

Menjumlahkan ketidaksamaan ini untuk mendapatkan batasan $x + y$:

$100 + 1024 \leq x + y < 121 + 1296$
$1124 \leq x + y < 1417$

Step 5: Menentukan batasan untuk $\sqrt{x+y}$
Mengambil akar kuadrat dari semua bagian ketidaksamaan untuk $x + y$:
$\sqrt{1124} \leq \sqrt{x+y} < \sqrt{1417}$
Menghitung nilai perkiraan akar kuadrat:
$\sqrt{1124} \approx 33.52$
$\sqrt{1417} \approx 37.64$
Jadi, $33.52 \leq \sqrt{x+y} < 37.64$.

Step 6: Menentukan nilai dari $[\sqrt{x+y}]$
Berdasarkan definisi fungsi bilangan bulat terbesar, $[\sqrt{x+y}]$ adalah bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan $\sqrt{x+y}$. Dari batasan yang ditemukan, nilai bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan $\sqrt{x+y}$ adalah 33.

Jadi, Nilai dari $\sqrt{x+y}$ adalah 33.