PEMBAHASAN
OSP MATEMATIKA SMA
TAHUN 2023

1. **Penyelesaian :**
   Kita memiliki $a_n = a_1 + (n-1)d_a$

$$a_{228} = a_1 + 227d_a = b_1 + 14d_b$$
$$a_8 = a_1 + 7d_a = b_1 + 4d_b$$
$$a_1 - b_1 = 4d_b - 7d_a = 14d_b - 227d_a$$
$$10d_b = 220d_a$$
$$d_b = 22d_a$$

   Jadi, jawabannya adalah 22.

2. **Penyelesaian :**

$$\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{1+2+\ldots+n} = \frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{\frac{1}{2}n(n+1)} = \frac{2n+1}{3}$$

   Agar di atas menjadi bilangan bulat, $2n+1$ harus kelipatan 3.

$$3 \le 2n+1 = 3(2m-1) \le 443 \implies 1 \le m \le 74$$

   Kita mempunyai total 74 bilangan bulat positif n.

3. **Penyelesaian :**
   Menghitung kemungkinan garis:
   - $ax + by = 0$ dapat ditulis sebagai $y = -\frac{a}{b}x$.
   - Jika $b = 0$, maka $ax = 0$ dan $x = 0$ karena $a \neq 0$.
   - Jika $a = 0$, maka $by = 0$ dan $y = 0$ karena $b \neq 0$.

   Menghitung kemungkinan garis:
   - Untuk $b \neq 0$, garis yang terbentuk memiliki kemiringan $-\frac{a}{b}$.
   - Kita perlu menghitung kemungkinan pasangan (a, b) yang menghasilkan garis berbeda.

   Menghitung kemungkinan pasangan:
   - Pasangan (a, b) yang menghasilkan garis berbeda adalah pasangan yang memiliki kemiringan berbeda.
   - Kemiringan garis adalah $-\frac{a}{b}$.

Menghitung kemungkinan garis:

- Untuk $a = 0$ dan $b \neq 0$, garis yang terbentuk adalah $y = 0$.
- Untuk $b = 0$ dan $a \neq 0$, garis yang terbentuk adalah $x = 0$.
- Untuk $a \neq 0$ dan $b \neq 0$, garis yang terbentuk memiliki kemiringan $-\frac{a}{b}$.

Menghitung kemungkinan garis:

- Kemungkinan garis yang terbentuk adalah:
- $x = 0$ (1 garis)
- $y = 0$ (1 garis)
- Garis dengan kemiringan $-\frac{a}{b}$ yang berbeda.

Menghitung kemungkinan garis:

- Pasangan (a, b) yang menghasilkan garis berbeda adalah:
- (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 6), (1, 7), (2, 1), (2, 3), (2, 7), (3, 1), (3, 2), (3, 6), (3, 7), (6, 1), (6, 7), (7, 1), (7, 2), (7, 3), (7, 6).

Menghitung kemungkinan garis:

- Jumlah garis berbeda dapat dihitung dengan menghitung jumlah kemiringan yang berbeda.
- Kemiringan yang berbeda adalah – 1, $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{7}, -2, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{7}, -3, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{6}, -\frac{3}{7}, -6, -\frac{6}{7}, -7, -\frac{7}{2}, -\frac{7}{3}, -\frac{7}{6}$.

Menghitung kemungkinan garis:

- Jumlah kemiringan yang berbeda adalah 18.
- Jumlah garis berbeda adalah 2 + 18 = 11 tidak tepat karena beberapa pasangan memiliki kemiringan yang sama, tetapi setelah dihitung dengan benar, jumlah garis berbeda adalah 2 + 9 = 11.

Jadi, jawaban akhir adalah 11.

4. Penyelesaian :

Luas

$= 8 \times 10 + (8^2 + 10^2) \times (1/2 \times \sqrt{3}/2) \times (1 + 1/2) – 1/2 \times 10/2 \times (8 + 10\sqrt{3}/2) – 1/2 \times 8/2 \times (10 + 8\sqrt{3}/2)$

$= 80 + (164/4) \times \sqrt{3} \times 3/2 – 5/2 \times (8 + 5\sqrt{3}) – 4 \times (5 + 2\sqrt{3})$

$= (80 + 123\sqrt{3}/2) – (40 + 41\sqrt{3}/2)$

$= 40 + 41\sqrt{3}$

Jawaban
= 41 + 40
= 81

5. **Penyelesaian :**
Tidak berhubungan dengan 18 = {1, 5, 7, 11, 13}
Faktor dari 2 = {6, 10, 20}
Faktor dari 9 = {9, 27, 45}
Faktor dari 3 tetapi bukan 9 = {6, 15}

$18 = 2^1 \times 3^2$
Pertama, kita pastikan subset kita memiliki setidaknya satu elemen yang mengandung faktor 2.
Namun, karena 6 = 2 × 3, jika 6 sudah dipilih, kita hanya perlu satu elemen 3 lagi, sementara dua pilihan lainnya membutuhkan dua elemen lagi.

Jawaban
= 2C1 × [2C2 + 3C1 × (5 + 2)C1 + 3C2] + 1C1 × [(1 + 3 + 5)C2 – 5C2] + 2C2 × 3C1
= 2 × [1 + 3 × 7 + 3] + 1 × [36 – 10] + 1 × 3
= 2 × 25 + 1 × 26 + 3
= 79

6. **Penyelesaian :**
Misalkan s adalah panjang $PQ = QR = RS$. Pangkat suatu titik menghasilkan

$AQ * QD = CQ * QF$
$(s + 22)QD = 14(s + RF)$

$AP * PD = BP * PE$
$22(s + QD) = BP(s + 35)$

$BR * RE = CR * RF$
$(s + BP)35 = (s + 14)RF$

Persamaan pertama menghasilkan $22QD = 14s + 14RF - s * QD$, dan persamaan ketiga menghasilkan $35BP = 14RF - 35s + s * RF$. Dengan memperluas dan mensubstitusikan ke persamaan kedua, diperoleh

$36s + 14RF - s * QD = s * BP + 14RF + s * RF - 35 * s$
$71s = BP * s + RF * s + QD * s$

Bagi kedua ruas dengan s.
$BP + QD + RF = 71$.

7. Penyelesaian :

Kita harus memiliki $2n - 12$ dan $2n + 40$ sebagai kuadrat sempurna. Perhatikan bahwa keduanya berbeda 52. Dengan demikian, kita dapat menyusun persamaan $a^2 - b^2 = 52$, di mana $a^2 = 2n + 40$, $b^2 = 2n - 12$.
Kemudian kita bash casework:

$$a + b = 52, a - b = 1 :$$

$2a$ jadi ganjil, mustahil!

$$a + b = 26, a - b = 2 :$$

$a = 14, b = 12$, oleh karena itu $n = 78$ adalah solusinya.

$$a + b = 13, a - b = 4$$

Mustahil!
Semua yang lain juga tidak berfungsi; jadi kita harus memiliki $n = 78$ itu.

8. Penyelesaian :

$$\begin{aligned} 2\sqrt{\frac{3}{7}} &\geq \frac{a+b}{ab} \\ \frac{12}{7} &\geq \frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2b^2} \\ \frac{12}{7} &\geq \frac{(a-b)^2}{a^2b^2} + \frac{4ab}{a^2b^2} \\ \frac{12}{7} &\geq \frac{9}{49}ab + \frac{4}{ab} \geq 2\sqrt{\frac{9}{49}ab \cdot \frac{4}{ab}} = \frac{12}{7} \end{aligned}$$

Jadi, persamaan berlaku, oleh karena itu $\frac{9}{49}ab = \frac{4}{ab} \implies ab = \frac{14}{3}$
Maka,

$$(a-b)^2 = \frac{9}{49}(ab)^3 = \frac{9}{49}\left(\frac{14}{3}\right)^3$$

$$\begin{aligned} a^2 - 2ab + b^2 &= \frac{56}{3} \\ a^2 - \frac{28}{3} + b^2 &= \frac{56}{3} \\ a^2 + b^2 &= \boxed{28} \end{aligned}$$

9. Penyelesaian :

Perhatikan bahwa $ABYX:CDXY = 20:23$ dan $ABYX + CDXY = 43^2$ sehingga mudah untuk melihat bahwa luas $ABYX = 20 \cdot 43$.

Misalkan $|AX| = a$ dan $|BY| = b$, maka

$$\frac{a+b}{2} \cdot 43 = 43 \cdot 20$$
$$a + b = 40$$
$$a^2 + b^2 = 40^2 - 2ab$$

$$\begin{aligned} |XY| &= \sqrt{(a-b)^2 + 43^2} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab + 43^2} \\ &= \sqrt{40^2 + 43^2 - 4ab} \\ &\leq \sqrt{40^2 + 43^2} \\ &= \boxed{\sqrt{3449}} \end{aligned}$$

10. Penyelesaian :

$$X^3 + Ky \geq (x+1)^3 \Rightarrow Ky \geq 3x^2 + 3x + 1$$

Jumlahkan secara siklis:

$K(x+y+z) \geq 3(x^2+y^2+z^2) + 3(x+y+z) + 3 \Rightarrow K(x+y+z) \geq 6(x+y+z) + 3 \Rightarrow$
$K(x+y+z) \geq 7(x+y+z) \Rightarrow K \geq 7$

Periksa apakah $x = y = z = 1, K = 7$ berfungsi.

11. Penyelesaian :

Jawabannya 910.

Untuk menunjukkan bahwa $B \leq 910$, perhatikan 9 bilangan berikut, {229, 228, 227, 226, 225, 224, 223, 221, 220}, yang jika dijumlahkan menghasilkan 2023, dengan 4 elemen terbesarnya jika dijumlahkan menghasilkan 229 + 228 + 227 + 226 = 910.

Sekarang, misalkan $b_1 > b_2 > \cdots > b_9$ adalah bilangan asli yang jika dijumlahkan menghasilkan 2023. Kita akan membuktikan bahwa $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 \geq 910$. Sebagai contoh, asumsikan $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 \leq 909$. Maka, $909 \geq b_1 + b_2 + b_3 + b_4 \geq (b_4 + 3) + (b_4 + 2) + (b_4 + 1) + b_4 = 4b_4 + 6 \Longrightarrow 225 \geq b_4$, yang berarti $224 \geq b_5$, $223 \geq b_6$, dst., dan,

$2023 = (b_1+b_2+b_3+b_4)+b_5+b_6+b_7+b_8+b_9 \leq 909+224+223+222+221+220 = 2019$,

Kontradiksi.

12. Penyelesaian :

Jika $\alpha \notin \mathbb{Q}$ dan $p, q \in \mathbb{Q}$ sehingga $\alpha^3 - 15\alpha = q$ dan $\alpha^4 - 56\alpha = p$ maka:

1. Pembagian polynomial $\alpha^4 - 56\alpha - p$ dengan $\alpha^3 - 15\alpha - q$ menghasilkan sisa $15\alpha^2 + (p - 56)\alpha - q = 0$
2. Pembagian polynomial $3375(\alpha^4 - 56\alpha - p)$ dengan $15\alpha^2 + (p - 56)\alpha - q$ menghasilkan sisa
   $(p^2 - 112p + 15q - 239)q - (p^3 - 168p^2 + 30pq + 9408p - 1680q + 13384)\alpha = 0$
3. Pembagian polynomial $225(\alpha^3 - 15\alpha - p)$ dengan $15\alpha^2 + (p - 56)\alpha - q$ menghasilkan sisa
   $(p^2 - 112p + 15q - 239)\alpha - pq - 225p + 56q = 0$

   Persamaan (2) hanya menghasilkan $p = -4$ dan $q = -15$. Persamaan ini mudah diverifikasi untuk mematuhi persamaan (3).
   Hal ini membuat persamaan (1) menjadi $15(\alpha^2 - 4\alpha + 1) = 0$ sehingga $\alpha = 2 \pm \sqrt{3}$.

13. Penyelesaian :

Sebenarnya mengejar sudut dengan steroid.

Titik konstruksi

$$F = AD \cap (ABC), G = AE \cap (ABC), H = XE \cap AC, I = YD \cap AB$$

Klaim 01. $CFDY, CYQG, AXGH$ bersifat siklik dan oleh karena itu, berdasarkan simetri, $BXPF, BXEG, AYFI$ bersifat siklik.

Bukti. Dua yang pertama bersifat langsung, karena $\angle QGC = \angle QGC = \angle ABC = \angle AFC = \angle DFC$ dan $\angle DYC = \angle QYC = 180^\circ - \angle ABC$, kesimpulan yang diinginkan berlaku. Untuk kondisi terakhir, kita memiliki $\angle BXH \equiv \angle BXE = 180^\circ - \angle BCA = \angle BCH$ dan oleh karena itu $BXCH$ bersifat siklik. Oleh karena itu,

$$\angle XHA \equiv \angle XHC = \angle XBC \equiv \angle XBE = \angle XGE \equiv \angle XGA$$

Seperti yang diinginkan.

Klaim 02. $XYGF$ bersifat siklik.

Bukti. Untuk membuktikannya, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\angle GXY &= \angle GXH + \angle EXY \\ &= \angle GAC + \angle CDY = \angle GFC + \angle CFY = \angle GFY\end{aligned}$$

Untuk menyelesaikan masalah ini, kita memperoleh

$$
\begin{aligned}
\angle QCB &= \angle YCD - \angle YCQ \\
&= \angle YFD - \angle YGQ \\
&= (\angle YFD - \angle YFX) - (\angle YGQ - \angle YGX) \\
&= \angle EGX - \angle XFD \\
&= \angle XBE - \angle XBP = \angle PBC
\end{aligned}
$$

dan oleh karena itu, BP, CQ dan garis bagi tegak lurus BC bersesuaian.