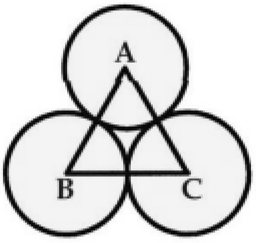
PEMBAHASAN
OSP MATEMATIKA SMA
TAHUN 2013

1. **Penyelesaian:**
ABC adalah segitiga sama sisi dengan panjang sisi 4.



Luas daerah = $3 \cdot \frac{300}{360} \cdot \pi \cdot 2^2 + \frac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot \sin 60^O = 10\pi + 4\sqrt{3}$

$\therefore$ Jadi, luas dari ketiga lingkaran berikut daerah yang dibatasi sama dengan $10\pi + 4\sqrt{3}$.

2. **Penyelesaian:**
Masing-masing lampu akan ditekan sebanyak faktor positifnya.
Bilangan kuadrat sempurna akan memiliki faktor sebanyak ganjil sedangkan bilangan bukan kuadrat sempurna memiliki faktor positif sebanyak genap.
Karena kondisi lampu awalnya mati. Maka lampu akan hidup jika ditekan sebanyak ganjil. Maka banyaknya lampu yang hidup sama dengan banyaknya bilangan kuadrat sempurna ≤ 2013.
Mengingat $44^2 = 1936$ dan $45^2 = 2025$ maka bilangan kuadrat sempurna ≤ 2013 ada sebanyak 44.
$\therefore$ Jadi, banyaknya lampu dalam kondisi hidup setelah operasi pada hari ke-2013 ada 44.

3. **Penyelesaian:**
$f(x) = \frac{cx}{2x-3}, \quad x \neq \frac{3}{2}$
$f(f(x)) = x$
$$\frac{c\left(\frac{cx}{2x-3}\right)}{2\left(\frac{cx}{2x-3}\right) - 3} = x$$
$c^2 = 2cx - 3(2x-3)$
$(c-3)(c-2x+3) = 0$
$c = 3$ atau $c = 2x - 3$
Karena c adalah konstanta maka $c = 3$.

$f(x) = \frac{3x}{2x-3}, \quad x \neq \frac{3}{2}$
$f(2013) = \frac{3(2013)}{2(2013)-3} = \frac{671}{447}$
∴ Jadi, nilai $f(2013)$ adalah $\frac{671}{447}$.

4. **Penyelesaian:**
Misalkan $\frac{xy^2}{x+y} = p$ dengan p adalah bilangan prima.
$xy^2 = p(x+y)$ ⋯⋯⋯⋯⋯⋯⋯ (1)
Maka $p|x$ atau $p|y$.
Jika $p|y$ maka $y = bp$ dengan $b \in \mathrm{N}$.
$xb^2p = x + bp$
Maka $p|x$
Jadi, didapat fakta bahwa $p|x$
Misalkan $x = ap$ dengan $a \in \mathrm{N}$.
$ay^2 = ap + y$
Maka $a|y$.
$y(ay-1) = ap$
Karena $a|y$ maka $(ay-1)|p$
Karena p adalah bilangan prima maka $ay - 1 = 1$ atau p.

- Jika $ay - 1 = 1$
  $ay = 2$.
  Karena $a|y$ maka $a = 1$ dan $y = 2$.
  $(2)((1)(2) - 1) = (1)(p)$
  $p = 2$
  Subtitusikan ke persamaan (1) didapat
  $x(2)^2 = 2(x+2)$
  $x = 2$
  Jadi, pasangan (x, y) yang memenuhi adalah (2, 2).
- Jika $ay - 1 = p$
  Maka $a = y$
  $p = y^2 - 1 = (y+1)(y-1)$
  Karena p adalah bilangan prima maka nilai y yang memenuhi adalah $y = 2$ sehingga $p = 3$.
  Subtitusikan ke persamaan (1) didapat
  $x(2)^2 = 3(x+2)$
  $x = 6$
  Jadi, pasangan (x, y) yang memenuhi adalah (6, 2).

∴ Jadi,pasangan (x, y) yang memenuhi adalah (2, 2) dan (6, 2).

5. **Penyelesaian:**
$|x| + x + y = 10$ dan $x + |y| - y = 12$
- Jika x dan y di kuadran I maka $|x| = x$ dan $|y| = y$
$2x + y = 10$ dan $x = 12$ sehingga $y = -14$ (tidak memenuhi (x, y) di kuadran I)
- Jika x dan y di kuadran II maka $|x| = -x$ dan $|y| = y$
$y = 10$ dan $x = 12$ (tidak memenuhi (x, y) di kuadran II)
- Jika x dan y di kuadran III maka $|x| = -x$ dan $|y| = -y$
$y = 10$ dan $x - 2y = 12$ sehingga $x = 32$ (tidak memenuhi (x, y) di kuadran III)
- Jika x dan y di kuadran IV maka $|x| = x$ dan $|y| = -y$
$2x + y = 10$ dan $x - 2y = 12$
Nilai (x, y) yang memenuhi adalah $\left(\frac{32}{5}, -\frac{14}{5}\right)$ (memenuhi (x, y) di kuadran IV)

$x + y = \frac{32}{5} - \frac{14}{5} = \frac{18}{5}$
∴ Jadi, $x + y = \frac{18}{5}$.

6. **Penyelesaian:**
$n^2 - 600 = m^2$ untuk suatu bilangan bulat positif m, n.
$(n + m)(n - m) = 660 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$
Jelas bahwa $n + m > n - m$
$n + m$ dan $n - m$ keduanya memiliki paritas yang sama. Maka keduanya merupakan bilangan genap.
Banyaknya faktor $3 \cdot 5 \cdot 11$ ada 8 maka banyaknya pasangan (n, m) yang memenuhi ada 4.
∴ Jadi, banyaknya pasangan (n, m) yang memenuhi ada 4.

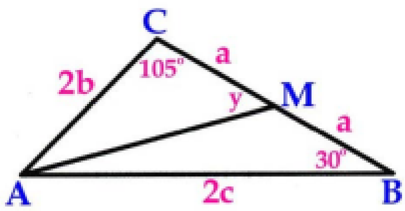
7. **Penyelesaian:**
Barisan itu akan membentuk kelompok bilangan ganjil, diikuti kelompok bilangan genap, lalu diikuti kelompok bilangan ganjil dan diakhiri kelompok bilangan genap.
Misalkan a adalah banyaknya bilangan ganjil pada bagian paling kiri, b menyatakan banyaknya bilangan genap di sebelah kanan kelompok bilangan ganjil, c menyatakan banyaknya bilangan ganjil di sebelah kanan kelompok bilangan genap dan d menyatakan banyaknya bilangan ganjil di bagian paling kanan.
Maka $0 \le a \le 4$; $1 \le b \le 5$; $1 \le c \le 5$; $0 \le d \le 4$ serta $a + c = 4$ atau 5
Karena ada 4 bilangan ganjil dan 5 genap atau 5 bilangan ganjil dan 4 genap, maka masing-masing susunan 9 bilangan ada $4! \cdot 5! = 2880$ kemungkinan.
Untuk mencari banyaknya tupel (a, b, c, d) yang memenuhi maka dapat dibagi 2 kasus:

- Kasus 1, jika a + c = 4
  Maka b + d = 5
  Banyaknya cara memilih 4 bilangan ganjil = ${}_5C_4 = 5$.
  Banyaknya nilai a yang memenuhi ada 4 sebab $c \geq 1$.
  Karena b + d = 5 maka banyaknya nilai b yang memenuhi ada 5.
  Jadi, banyaknya tupel (a, b, c, d) yang memenuhi ada $5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 = 100$.
- Kasus 2, jika a + c = 5
  Maka b + d = 4
  Banyaknya cara memilih 4 bilangan genap = ${}_5C_4 = 5$.
  Banyaknya nilai a yang memenuhi ada 5 sebab $c \geq 1$.
  Karena b + d = 4 maka banyaknya nilai b yang memenuhi ada 4.
  Jadi, banyaknya tupel (a, b, c, d) yang memenuhi ada $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 1 = 100$.

Jadi, banyaknya tupel (a, b, c, d) yang memenuhi = 100 + 100 = 200.
Jadi, banyaknya susunan = $200 \cdot 2880 = 576000$.
∴ Jadi, banyaknya susunan 576000.

8. Penyelesaian:
Jika abc adalah bilangan cantik maka cba juga bilangan cantik.
Maka cukup dengan membuat daftar bilangan cantik dengan a < b.
Bilangan-bilangan cantik dengan a < b adalah 123, 1234, 12345, 123456, 1234567, 12345678, 123456789, 124, 1248, 135, 1357, 13579, 139, 147, 159, 234, 2345, 23456, 234567, 2345678, 23456789, 246, 2468, 248, 258, 345, 3456, 34567, 345678, 3456789, 357, 3579, 369, 456, 4567, 45678, 456789, 468, 469, 567, 5678, 56789, 579, 678, 6789, 789 yang banyaknya ada 46.
∴ Jadi, banyaknya bilangan canti ada 92.

9. Penyelesaian:
Diketahui $\angle BAC = 45^o$ dan $\angle ABC = 30^o$. Misalkan panjang BC = 2a ; AC = 2b dan AB = 2c.



Dengan dalil sinus pada ΔABC didapat
$\frac{a}{b} = \frac{\sin 45^o}{\sin 30^o} = \sqrt{2}$
Misalkan $\angle AMC = y$ maka $\angle CAM = 75^o - y$
Dengan dalil sinus pada ΔAMC didapat

$\frac{a}{2b} = \frac{\sin(75^o - y)}{\sin y}$

$\sqrt{2}\sin y = 2\sin(75^o - y) = 2\sin 75^o \cos y - 2\cos 75^o \sin y$

$$\tan y = \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{2\sin 75^o}{\sqrt{2} + 2\cos 75^o} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} = 1$$

∴ Jadi, nilai dari tan $\angle AMC$ = 1.

10. Penyelesaian:

a + b = kp dengan k ∈ N dan k tidak habis dibagi p serta p adalah bilangan prima.

b = kp − a

$a^{2013} + b^{2013} = a^{2013} + (kp - a)^{2013}$

$a^{2013} + b^{2013} = (kp)^{2013} + 2013(kp)^{2012}a + {}_{2013}C_2(kp)^{2011}a^2 + \cdots$
$+ {}_{2013}C_2\,(kp)^2a^{2011} + 2013(kp)a^{2012}$

Karena $a^{2013} + b^{2013}$ habis dibagi p^2 sedangkan p > 2013 tidak membagi k maka a habis dibagi p.

Karena p | a dan p | (a + b) maka p | b.

Maka $a^{2013} + b^{2013}$ habis dibagi p^{2013}.

∴ Jadi, banyak bilangan asli n ≤ 2013 yang memenuhi ada 2013.

11. Penyelesaian:

Keenam anak TK akan dibagi dalam beberapa kelompok yang pertukaran hadiah dalam kelompok akan membentuk suatu lingkaran.

Berdasarkan pembagian maka ada 4 kasus :

- Kasus 1, keenam anak TK terbagi dalam 3 kelompok masing-masing 2 orang.
  Pada masing-masing kelompok banyaknya cara = (2 − 1)! = 1.
  Maka banyaknya cara seluruh = $\frac{\binom{6}{2}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{3!} \cdot (2-1)! \cdot (2-1)! \cdot (2-1)! = 15$.
- Kasus 2, keenam anak TK terbagi dalam 2 kelompok, 1 kelompok 2 orang dan kelompok lain 4 orang.
  Pada kelompok terdiri dari 4 orang, orang pertama akan memberikan ke orang kedua dengan 3 cara, orang kedua akan memberikan ke orang ketiga dengan 2 cara, orang ketiga akan memberikan ke orang keempat dengan 1 cara dan orang keempat akan memberikan ke orang pertama dengan 1 cara. Banyaknya cara = (4 − 1)!.
  Maka banyaknya cara seluruh = $\binom{6}{2} \cdot (2-1)! \cdot (4-1)! = 90$.
- Kasus 3, keenam anak TK terbagi dalam 2 kelompok masing-masing 3 orang.
  Banyaknya cara = $\frac{\binom{6}{3}\binom{3}{3}}{2!} \cdot (3-1)! \cdot (3-1)! = 40$.
- Kasus 4, keenam anak TK terbagi dalam 1 kelompok terdiri dari 6 orang.
  Banyaknya cara = (6 − 1)! = 120

Jadi, banyaknya cara pertukaran hadiah = 15 + 90 + 40 + 120 = 265
∴ Jadi, banyaknya cara melakukan hal tersebut adalah 265.

12. Penyelesaian:

$y = x^2 - a$ dan $x = y^2 - b$
$x = (x^2 - a)^2 - b = x^4 - 2ax^2 + a^2 - b$
$x^4 - 2ax^2 - x + a^2 - b = 0$ memiliki akar-akar x_1, x_2, x_3 dan x_4. Maka
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$
$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x4 = 1$
$(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4) = x_1^2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4$
$(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4) = 1$
∴ Jadi, nilai $(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4)$ adalah 1.

13. Penyelesaian:

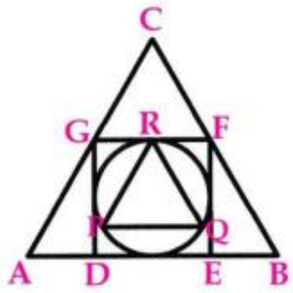
$x + y + z = a$ dan $x^2 + y^2 + z^2 = b$ dengan $1 \leq a, b \leq 6$ serta $a, b \in N$.
$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = a^2$
$xy + xz + yz = \frac{a^2-b}{2}$
Berdasarkan ketaksamaan AM-GM didapat
$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$
$2b \geq a^2 - b$
$3b \geq a^2$

- Jika a = 1 maka nilai b yang memenuhi adalah 1, 2, 3, 4, 5, 6.
- Jika a = 2 maka nilai b yang memenuhi adalah 2, 3, 4, 5, 6.
- Jika a = 3 maka nilai b yang memenuhi adalah 3, 4, 5, 6.
- Jika a = 4 maka nilai b yang memenuhi adalah 5, 6.
- Jika a = 5 atau 6 maka tidak ada nilai b yang memenuhi.

Jadi, banyaknya pasangan (a, b) yang memenuhi ada 17.
∴ Jadi, besarnya peluang terdapat bilangan real x, y, z yang memenuhi adalah $\frac{17}{36}$.

14. Penyelesaian:

Misalkan ABC adalah segitiga sama sisi dengan panjang sisi k. DEFG adalah persegi dengan keempat titik sudutnya terletak pada sisi ABC dengan D, E terletak pada sisi AB. Lingkaran O adalah lingkaran dalam persegi DEFG. Segitiga PQR adalah segitiga sama sisi yang ketiga titik sudutnya terletak pada lingkaran O.



Misalkan panjang sisi persegi DEFG sama dengan m.
CGF adalah segitiga sama sisi maka panjang $CG = m$.
Panjang $AG = k - m$.
$DG = AG \sin 60^o$
$m = (k - m) \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}$
$m = \frac{k\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$
Jari-jari lingkaran $O = R = \frac{k\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}$.
Misalkan Panjang sisi ΔPQR sama dengan p.
$[PQR] = \frac{1}{2} \cdot p^2 \cdot \sin 60^o = \frac{p^3}{4R} = \frac{p^3(4+2\sqrt{3})}{4k\sqrt{3}}$
$p = \frac{3k}{4+2\sqrt{3}}$
Maka Panjang sisi $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots$ berturut-turut adalah 1, $\frac{3}{4+2\sqrt{3}}, \left(\frac{3}{4+2\sqrt{3}}\right)^2, \dots$ yang membentuk suatu barisan geometri dengan rasio $\frac{3}{4+2\sqrt{3}}$.
$\therefore$ Jadi, Panjang sisi dari Δ_{2013} adalah $\left(\frac{3}{4+2\sqrt{3}}\right)^{2012}$.

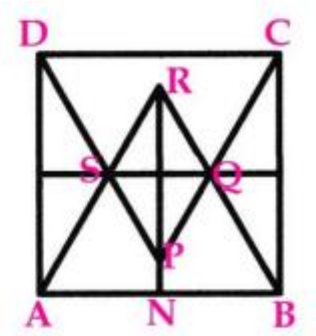
15. Penyelesaian:

$x_1 = 2$
$x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) x_n + \frac{2}{n}$
$x_2 = 6$
$x_3 = 10$
$x_4 = 14$
Jika diambil $x_n = 4n - 2$ maka
$x_{n+1} = 4(n + 1) - 2 = 4n + 2$
$\left(1 + \frac{1}{n}\right) x_n + \frac{2}{n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)(4n - 2) + \frac{2}{n} = 4n + 2$
Maka $x_n = 4n - 2$
$x_{2013} = 4(2013) - 2 = 8050$
$\therefore$ Jadi, nilai x_{2013} adalah 8050

16. Penyelesaian:

Misalkan $ABCD$ adalah persegi dengan panjang $2\sqrt{3}$.

$PQRS$ adalah rhombus (belah ketupat) dimaksud dengan titik P terletak di dalam ΔARB.



RSQ juga merupakan segitiga sama sisi.

Misalkan perpotongan SQ dan PR adalah titik K dan pertengahan AB adalah N.

$RN = AN \tan 60^o = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$

$RK = RN - KN = 3 - \sqrt{3}$

$\frac{RK}{RN} = \frac{RS}{AR}$

$\frac{3-\sqrt{3}}{3} = \frac{RS}{2\sqrt{3}}$

$RS = 2\sqrt{3} - 2$

Luas rhombus $= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(2\sqrt{3} - 2\right)^2 \cdot \sin 60^o = 8\sqrt{3} - 12$

$\therefore$ Jadi, luas rhombus = $\mathbf{8}\sqrt{3} - \mathbf{12}$.

17. Penyelesaian:

$\frac{a}{b} + \frac{25b}{21a} = k$ dengan a, b, $k \in N$ dan $FPB(a, b) = 1$.

$21a^2 + 25b^2 = 21abk$

Karena $FPB(a, b) = 1$ maka $a|25$ dan $b|21$.

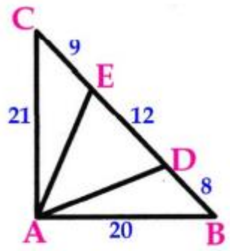
Maka kemungkinan pasangan (a, b) yang mungkin memenuhi adalah (1,1), (1,3), (1,7), (1,21), (5,1), (5,3), (5,7), (5,21), (25,1), (25,3), (25,7), (25,21).

Melalui pengujian ke persamaan semula didapat fakta bahwa tidak ada pasangan (a, b) yang memenuhi.

$\therefore$ Jadi, bilangan bulat positif a dan b yang memenuhi ada sebanyak 0.

18. Penyelesaian:

Karena $20^2 + 21^2 = 29^2$ maka ΔABC siku-siku di A.



Pada ΔADB berlaku:

$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2 \cdot AB \cdot BD \cdot \cos\angle ABC$

$AD^2 = 20^2 + 8^2 - 2 \cdot 20 \cdot 8 \cdot \frac{20}{29} = \frac{7056}{29}$

Pada ΔACE berlaku:

$AE^2 = AC^2 + EC^2 - 2 \cdot AC \cdot EC \cdot \cos\angle ACB$

$AE^2 = 21^2 + 9^2 - 2 \cdot 21 \cdot 9 \cdot \frac{21}{29} = \frac{7200}{29}$

Pada ΔADE berlaku :

$DE^2 = AD^2 + AE^2 - 2 \cdot AD \cdot AE \cdot \cos\angle DAE$

$12^2 = \frac{7056}{29} + \frac{7200}{29} - 2 \cdot \sqrt{\frac{7056}{29}} \cdot \sqrt{\frac{7200}{29}} \cdot \cos\angle DAE$

$\frac{10080}{29} = \frac{10080\sqrt{2}}{29} \cdot \cos\angle DAE$

$\cos\angle DAE = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

∴ Jadi, besarnya $\angle DAE = 45^o$.

19. Penyelesaian:

Dalam satu pertandingan satu tim akan menang dan satu tim lagi akan kalah.

Karena jumlah tim ada 20 sedangkan tim yang juara tidak pernah kalah maka jumlah kekalahan ada $2 \times 19 = 38$.

Maka jumlah pertandingan ada 38.

∴ Jadi, banyaknya pertandingan yang dilangsungkan pada kompetisi tersebut adalah 38.

20. Penyelesaian:

${}^2\log(x^2 - 4x - 1) = $ m untuk suatu bilangan bulat m.

$(x-2)^2 - 5 = 2m$

$(x-2)^2 = 5 + 2m$

Jika $m < 0$ maka ruas kanan merupakan pecahan. Tidak ada x bulat yang memenuhi.

Jika $m = 0$ maka $(x-2)^2 = 6$. Tidak ada x bulat yang memenuhi.

Jadi, $m > 0$.

Alternatif 1 :

- Jika m ganjil

Angka satuan 2^m berulang dengan periode 4. Jika m atau 8 sehingga angka satuan $5 + 2^m$ adalah 7 atau 3 untuk m ganjil. Bilangan kuadrat tidak mungkin memiliki angka satuan 3 atau 7 sehingga tidak mungkin ada x bulat yang memenuhi.

- Jika m genap
  Misalkan $m = 2n$ maka
  $(x - 2)^2 - (2^n)^2 = 5$
  $(x - 2 + 2_n)\ (x - 2 - 2^n) = 5$
  Karena $x - 2 + 2^n > x - 2 - 2^n$ maka ada 2 kasus
  - Kasus 1, $x - 2 + 2^n = 5$ dan $x - 2 - 2^n = 1$
    Maka didapat $x - 2 = 3$ dan $2^n = 2$ sehingga $x = 5$ dan $m = 2n = 2$
  - Kasus 2, $x - 2 + 2^n = -1$ dan $x - 2 - 2^n = -5$
    Maka didapat $x - 2 = -3$ dan $2^n = 2$ sehingga $x = -1$ dan $m = 2n = 2$

Maka jumlah semua bilangan x yang memenuhi = 5 − 1 = 4.
∴ Jadi, jumlah semua bilangan x yang memenuhi = 4.

Alternatif 2 :
Jika $m \geq 3$ maka ruas kanan dibagi 8 akan bersisa 5. Bilangan kuadrat jika dibagi 8 akan bersisa
0, 1 atau 4. Jadi, tidak akan ada x bulat yang memenuhi. Maka $1 \leq m \leq 2$.
Jika $m = 1$ maka $(x - 2)^2 = 7$ sehingga tidak ada x bulat yang memenuhi.
Jika $m = 2$ maka $(x - 2)^2 = 9$. Nilai x yang memenuhi adalah $x = 5$ atau $x = -1$.
Maka jumlah semua bilangan x yang memenuhi = 5 − 1 = 4.
∴ Jadi, jumlah semua bilangan x yang memenuhi = 4.

21. Penyelesaian:

Akan ada 5 kasus:

- Kasus 1, jika salah satu gelas kosong setelah pengambilan ke-5.
  Peluang = $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$.
- Kasus 2, jika salah satu gelas kosong setelah pengambilan ke-6.
  Pengambilan bola ke-6 harus dari gelas A.
  Banyaknya urutan pengambilan bola dari gelas B = $\binom{5}{1} = 5$.
  Peluang terambilnya satu bola merah dari gelas B = $\frac{4}{5}$
  Peluang = $\left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \binom{5}{1} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{16}$
- Kasus 3, jika salah satu gelas kosong setelah pengambilan ke-7.
  Pengambilan bola ke-7 harus dari gelas A.
  Banyaknya urutan pengambilan 2 bola dari gelas B = $\binom{6}{2} = 15$.

Peluang terambilnya dua bola merah dari gelas B = $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$

Peluang $= \left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdot \binom{6}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{128}$

- Kasus 4, jika salah satu gelas kosong setelah pengambilan ke-8.
  Pengambilan bola ke-8 harus dari gelas A.
  Banyaknya urutan pengambilan 3 bola dari gelas B = $\binom{7}{3}$ = 35.
  Peluang terambilnya dua bola merah dari gelas B = $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$
  Peluang = $\left(\frac{1}{2}\right)^8 \cdot \binom{7}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{7}{128}$
- Kasus 5, jika salah satu gelas kosong setelah pengambilan ke-9.
  Pengambilan bola ke-9 harus dari gelas A.
  Banyaknya urutan pengambilan 4 bola dari gelas B = $\binom{8}{4} = 70$.
  Peluang terambilnya dua bola merah dari gelas B = $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$
  Peluang = $\left(\frac{1}{2}\right)^9 \cdot \binom{8}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{7}{256}$

Maka probabilitas bahwa bola putih tidak terambil = $\frac{1}{32} + \frac{1}{16} + \frac{9}{128} + \frac{7}{128} + \frac{7}{256} = \frac{63}{256}$

∴ Jadi, probabilitas bahwa bola putih tidak terambil = $\frac{63}{256}$.

22. Penyelesaian:

$\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor < \frac{1}{2013}$ dengan $n \in N$ dan $n \leq 1.000.000$.

Misalkan $n = k^2 + m$ untuk suatu m bulat tak negative dengan $m \leq 2k$ dan $k \in N$ serta $k \leq 1000$.

Maka $\lfloor\sqrt{n}\rfloor = k$

$\sqrt{k^2 + m} - k < \frac{1}{2013}$

$k^2 + m < \left(k + \frac{1}{2013}\right)^2 = k^2 + \frac{2k}{2013} + \left(\frac{1}{2013}\right)^2$

Mengingat bahwa jika $k \leq 1000$ maka $m < \frac{2k}{2013} + \left(\frac{1}{2013}\right)^2 < 1$ untuk semua nilai $k \in N$.

Nilai m yang memenuhi hanya $m = 0$.

Jadi, $n = k^2$ yang memenuhi $\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor = 0 < \frac{1}{2013}$ untuk semua nilai k.

Karena banyaknya nilai k ada 1000 maka banyaknya nilai n yang memenuhi juga ada 1000.

Jadi, banyaknya bilangan asli $n \leq 1.000.000$ yang memenuhi ada 1000.

23. Penyelesaian:

$1 + 2 + 3 + \cdots + m = \frac{m(m+1)}{2}$

a. Jika $n = 2013$.

Jelas bahwa $k^{2013} + (m-k)^{2013}$ untuk suatu $k \in N$ habis dibagi m

- Jika m genap

  Maka $\left(\frac{m}{2}\right)^{2013}$ dan m^{2013} tidak memiliki pasangan. Tetapi kedua bilangan tersebut habis dibagi m.
- Jika m ganjil

  Maka m^{2013} tidak memiliki pasangan. Tetapi m^{2013} habis dibagi m.

Terbukti bahwa $1^{2013} + 2^{2013} + 3^{2013} + \cdots + m^{2013}$ habis dibagi m untuk semua $m \in N$.

Jelas bahwa $k^{2013} + (m+1-k)_{2013}$ untuk suatu $k \in N$ habis dibagi $m+1$.

- Jika m genap

  Maka semua bilangan memiliki pasangannya.
- Jika m ganjil

  Maka $\left(\frac{m+1}{2}\right)^{2013}$ tidak memiliki pasangan. Tetapi $\left(\frac{m+1}{2}\right)^{2013}$ habis dibagi $m+1$.

Terbukti bahwa $1^{2013} + 2^{2013} + 3^{2013} + \cdots + m^{2013}$ habis dibagi $m+1$ untuk semua $m \in N$.

Jadi, terbukti bahwa $1^{2013} + 2^{2013} + 3^{2013} + \cdots + m^{2013}$ habis dibagi m dan $m+1$ yang artinya habis dibagi $\frac{m(m+1)}{2}$ untuk semua $m \in N$.

∴ Jadi, terbukti bahwa 2013 valid.

Ambil $n = 2k$ dan $m = 2$.

$1^{2k} + 2^{2k} = 2(1^{2k-1} + 2^{2k-1}) - 1$

Karena $(1+2) \mid (1^{2k-1} + 2^{2k-1})$ maka $(1+2)$ tidak membagi $1^{2k} + 2^{2k}$.

Maka $n = 2k$ tidak valid untuk $m = 2$.

Jadi, $2k$ tidak valid.

Ada tak hingga banyaknya bilangan berbentuk $2k$.

∴ Jadi, terbukti bahwa ada tak hingga banyak bilangan yang tidak valid.

24. Penyelesaian:

Berdasarkan ketaksamaan AM-HM maka

$$\frac{\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c}}{3} \geq \frac{3}{2a+2b+2c}$$
$$\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{2c} \geq \frac{9}{2a+2b+2c} = \frac{3}{4}$$

Berdasarkan ketaksamaan AM-HM maka

$$\frac{\frac{1}{2a+8}+\frac{1}{2b+8}+\frac{1}{2c+8}}{3} \geq \frac{3}{(2a+8)+(2b+8)+(2c+8)}$$

$$\frac{1}{2a+8}+\frac{1}{2b+8}+\frac{1}{2c+8} \geq \frac{9}{2(a+b+c)+24} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

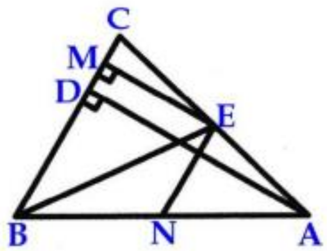
Mengingat bahwa $\frac{1}{2x}+\frac{1}{2x+8}=\frac{x+2}{x(x+4)}$ maka

$$\frac{a+2}{a(a+4)}+\frac{b+2}{b(b+4)}+\frac{c+2}{c(c+4)} \geq 1$$

∴ Jadi, terbukti bahwa $\frac{a+2}{a(a+4)}+\frac{b+2}{b(b+4)}+\frac{c+2}{c(c+4)} \geq 1$.

25. Penyelesaian:

Misalkan garis tinggi dari titik A memotong tegak lurus sisi BC di titik D dan garis median dari B memotong sisi AC di titik E.



Dari titik E dibuat garis memotong tegak lurus sisi BC di M.

Karena ΔCEM dan ΔCAD sebangun dengan E pertengahan AC maka EM = $\frac{1}{2}$AD.

Karena BE = AD = 2 EM maka ∠EBM = 30°.

Misalkan titik N merupakan pertengahan AB.

Karena E dan N berturut-turut pertengahan AC dan AB maka EN akan sejajar BC.

Karena EN sejajar CB maka ∠BEN = ∠EBM = 30°.

Karena luas segitiga = $\frac{1}{2}$alas · tinggi dan AD adalah sisi terpanjang maka BC adalah sisi terpendek dari segitiga ABC.

$\frac{1}{2}BC \leq \frac{1}{2}AB$

EN ≤ BN

Sisi yang lebih panjang dari suatu segitiga akan menghadap sudut yang lebih besar.

Karena EN ≤ BN maka pada ΔBEN akan berlaku ∠EBN ≤ ∠BEN = 30°.

Maka ∠ABC = ∠EBM + ∠EBN ≤ 30° + 30° = 60°.

Jadi, ∠ABC ≤ 60°.

∴ Jadi, terbukti bahwa ∠ABC ≤ 60°.