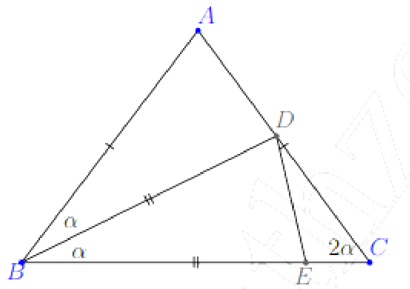
PEMBAHASAN

OSP MATEMATIKA SMA

TAHUN 2011

1. **Penyelesaian:**

Perhatikan gambar berikut!



Karena AD garis bagi $\angle ABC$ diperoleh

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD} \Leftrightarrow \frac{BC}{CD} = \frac{AB}{AD}$$

Selain itu karena $BC = BD + AD$ dan $BD = BE$ maka $AD = CE$. Ingat juga bahwa $AB = AC$ sehingga diperoleh $AB \cdot CE = AC \cdot AD$ yang equivalen dengan

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{CE}$$

Sehingga

$$\frac{BC}{CD} = \frac{AC}{CE}$$

Dengan kata lain ΔCED sebangun dengan ΔABC. Jadi, ΔCED sama kaki dengan $CE = DE$. Karena $\angle CDE = \angle DCE = 2\alpha$ maka $\angle CED = 180^o - 4\alpha$. Perhatikan pula pada ΔBDE, besar $\angle BED = \frac{180^o - \alpha}{2}$. Karena $\angle BED + \angle CED = 180^o$, maka diperoleh

$$\frac{180^\circ - \alpha}{2} + 180^\circ - 4\alpha = 180^\circ$$
$$\frac{180^\circ - \alpha}{2} = 4\alpha$$
$$8\alpha = 180 - \alpha$$
$$\alpha = 20^\circ$$

Jadi, $\angle CAB = \angle CED = 180^o - 4\alpha = 100^o$.

2. **Penyelesaian:**

Misalkan, $N = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{n}$ maka diperoleh

$$N = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{n} = \frac{31}{30} - \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{30} - \frac{1}{n}$$

Karena $0 < \frac{1}{n} \leq 1$ maka $-\frac{29}{30} \leq \frac{1}{30} - \frac{1}{n} < \frac{1}{30}$ sehingga agar N bulat haruslah $\frac{1}{30} - \frac{1}{n} = 0$.
Dengan kata lain, $n = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Sehingga banyak pembagi positif dari n adalah $(1+1)(1+1)(1+1) = 2.2.2 = 8$.
Jadi, ada 8 faktor positif dari n.

3. **Penyelesaian:**
Dengan memanfaatkan sifat-sifat fungsi logaritma diperoleh,

$$\begin{aligned} {}^{a}\log\left(\frac{a}{b}\right) + {}^{b}\log\left(\frac{b}{a}\right) &= {}^{a}\log a - {}^{a}\log b + {}^{b}\log b - {}^{b}\log a \\ &= 2 - ({}^{a}\log b - {}^{b}\log a) \\ &= 2 - ({}^{a}\log b + \frac{1}{{}^{a}\log b}) \end{aligned}$$

Karena $\forall x \in \mathbb{R}^{+}$ berlaku $x + \frac{1}{x} \geq 2$ maka berakibat

$${}^{a}\log(\frac{a}{b}) + {}^{b}\log(\frac{b}{a}) = 2 - ({}^{a}\log b + \frac{1}{{}^{a}\log b}) \leq 2 - 2 = 0$$

Jadi, nilai maksimum dari ${}^{a}\log\left(\frac{a}{b}\right) + {}^{b}\log\left(\frac{b}{a}\right)$ adalah 0 yaitu diperoleh saat $a = b$.

4. **Penyelesaian:**

	A	B	C	D
$A = C$	6	1	5	5
$A \neq C$	6	5	4	4

Sehingga total = $6 \times 1 \times 5 \times 5 + 6 \times 5 \times 4 \times 4 = 150 + 480 = 630$
Jadi, ada 630 cara.

5. **Penyelesaian:**
Langkah 1: Menentukan Domain dan Range
Domain (daerah asal) dari fungsi $f(x) = \sqrt{ax^2 + x}$ adalah himpunan semua nilai x yang membuat ekspresi di dalam akar tidak negatif, yaitu $ax^2 + x \geq 0$.
Range (daerah hasil) dari fungsi akar kuadrat, secara umum, adalah $[0, \infty)$. Namun, jika domainnya terbatas pada suatu interval tertutup, maka range-nya juga bisa terbatas.

Langkah 2: Memeriksa kasus $a = 0$
Jika $a = 0$, fungsi menjadi $f(x) = \sqrt{x}$.
Domainnya ditentukan oleh $x \geq 0$, yaitu $[0, \infty)$.
Range-nya adalah $[0, \infty)$.
Karena domain dan range-nya sama, maka $a = 0$ adalah salah satu solusi.

Langkah 3: Memeriksa kasus $a > 0$
Jika $a > 0$, maka $ax^2 + x \geq 0 \Longrightarrow x(ax + 1) \geq 0$.
Akar-akarnya adalah $x = 0$ dan $x = -1/a$. Karena $a > 0$, maka $-1/a < 0$.
Parabola $ax^2 + x$ terbuka ke atas, sehingga $ax^2 + x \geq 0$ jika $x \leq -1/a$ atau $x \geq 0$.
Domainnya adalah $(-\infty, -1/a] \cup [0, \infty)$.
Range-nya adalah $[0, \infty)$ karena nilai minimum dari $ax^2 + x$ adalah negatif dan nilai-nilai lainnya tak terbatas ke atas.
Domain ini tidak sama dengan range, sehingga tidak ada solusi untuk $a > 0$.

Langkah 4: Memeriksa kasus $a < 0$
Jika $a < 0$, maka $ax^2 + x \geq 0 \Longrightarrow x(ax + 1) \geq 0$.
Akar-akarnya adalah $x = 0$ dan $x = -1/a$. Karena $a < 0$, maka $-1/a > 0$.
Parabola $ax^2 + x$ terbuka ke bawah. Ketidaksetaraan $x(ax + 1) \geq 0$ berlaku untuk nilai x di antara akar-akarnya.
Domainnya adalah $[0, -1/a]$.
Sekarang kita perlu menentukan range fungsi pada domain ini.
Nilai maksimum dari $ax^2 + x$ terjadi di sumbu simetri $x = -1/(2a)$. Nilai ini berada dalam domain $[0, -1/a]$.
Nilai maksimumnya adalah
$a(-1/(2a))^2 + (-1/(2a)) = a/(4a^2) - 1/(2a) = 1/(4a) - 2/(4a) = -1/(4a)$.
Nilai minimumnya adalah 0 (terjadi di $x = 0$ dan $x = -1/a$.
Jadi, range dari $ax^2 + x$ pada domainnya adalah $[0, -1/(4a)]$.
Range dari $f(x) = \sqrt{ax^2 + x}$ adalah $[0, \sqrt{-1/(4a)}]$.

Agar domain dan range sama, maka:
$[0, -1/a] = [0, \sqrt{-1/(4a)}]$
Ini berarti:
$-1/a = \sqrt{-1/(4a)}$
Kuadratkan kedua sisi:
$(-1/a)^2 = -1/(4a)$
$1/a^2 = -1/(4a)$
$4a = -a^2$
$a^2 + 4a = 0$
$a(a + 4) = 0$
$a = 0$ atau $a = -4$
Karena kita berada dalam kasus $a < 0$, maka solusi yang memenuhi adalah $a = -4$.
Jadi, Nilai-nilai a yang mungkin adalah 0 dan -4.

6. **Penyelesaian:**
Dalam soal ini saya menganggap susunan 1 + 4 = 2 + 3, 1 + 4 = 3 + 2, 4 + 1 = 2 + 3, 4 + 1 = 3 + 2, 2 + 3 = 1 + 4, 2 + 3 = 4 + 1, 3 + 2 = 1 + 4, 3 + 2 = 4 + 1 sebagai 8 susunan yang berbeda.
Misalkan $a + b = k$ dengan $a < b$ maka diperoleh $3 \leq k \leq 17$. Kita cek semua kemungkinan untuk nilai k. (Dikuli).

- $k = 3$, diperoleh solusi (a, b) yaitu (1, 2).
Banyaknya penyelesaian dari $a + b = c + d$ yaitu 0 (sebab keempat bilangan harus berbeda)
- $k = 4$, diperoleh solusi (a, b) yaitu (1, 3).
Banyaknya penyelesaian dari $a + b = c + d$ yaitu 0 (sebab keempat bilangan harus berbeda)
- $k = 5$, diperoleh solusi (a, b) yaitu (1, 4), (2, 3).
Banyaknya penyelesaian dari $a + b = c + d$ yaitu $\binom{2}{2} \cdot 8 = 8$
- $k = 6$, diperoleh solusi (a, b) yaitu (2, 4), (1, 5).
Banyaknya penyelesaian dari $a + b = c + d$ yaitu $\binom{2}{2} \cdot 8 = 8$
- $k = 7$, diperoleh solusi (a, b) yaitu (1, 6), (2, 5), (3, 4).
Banyaknya penyelesaian dari $a + b = c + d$ yaitu $\binom{3}{2} \cdot 8 = 24$
- $k = 8$, diperoleh solusi (a, b) yaitu (1, 7), (2, 6), (3, 5).
Banyaknya penyelesaian dari $a + b = c + d$ yaitu $\binom{3}{2} \cdot 8 = 24$
- $k = 9$, diperoleh solusi (a, b) yaitu (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5).
Banyaknya penyelesaian dari $a + b = c + d$ yaitu $\binom{4}{2} \cdot 8 = 48$
- $k = 10$, diperoleh solusi (a, b) yaitu (1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6).
Banyaknya penyelesaian dari $a + b = c + d$ yaitu $\binom{4}{2} \cdot 8 = 48$
- $k = 11$, diperoleh solusi (a, b) yaitu (2, 9), (3, 8), (4, 7), (5, 6).
Banyaknya penyelesaian dari $a + b = c + d$ yaitu $\binom{4}{2} \cdot 8 = 48$
- $k = 12$, diperoleh solusi (a, b) yaitu (3, 9), (4, 8), (5, 7).
Banyaknya penyelesaian dari $a + b = c + d$ yaitu $\binom{3}{2} \cdot 8 = 24$
- $k = 13$, diperoleh solusi (a, b) yaitu (4, 9), (5, 8), (6, 7).
Banyaknya penyelesaian dari $a + b = c + d$ yaitu $\binom{3}{2} \cdot 8 = 24$
- $k = 14$, diperoleh solusi (a, b) yaitu (5, 9), (6, 8).
Banyaknya penyelesaian dari $a + b = c + d$ yaitu $\binom{2}{2} \cdot 8 = 8$
- $k = 15$, diperoleh solusi (a, b) yaitu (6, 9), (7, 8).
Banyaknya penyelesaian dari $a + b = c + d$ yaitu $\binom{2}{2} \cdot 8 = 8$
- $k = 16$, diperoleh solusi (a, b) yaitu (7, 9).

Banyaknya penyelesaian dari $a+b=c+d$ yaitu 0 (sebab keempat bilangan harus berbeda)

- $k=17$, diperoleh solusi (a,b) yaitu (8, 9).
  Banyaknya penyelesaian dari $a+b=c+d$ yaitu 0 (sebab keempat bilangan harus berbeda)

Jadi, total ada 8 + 8 + 24 + 24 + 48 + 48 + 48 + 24 + 24 + 8 + 8 = 272 penyelesaian.

7. Penyelesaian:

Misalkan kedua akar persamaan tersebut adalah a dan b dan $a<b$. Kita peroleh

$$a+b=2013 \quad \text{dan} \quad ab=k$$

Karena $a+b$ ganjil maka salah satu dari a atau b adalah ganjil dan satunya genap. Tetapi karena a,b prima berakibat $a=2$ sehingga $b=2011$. Oleh karena itu, $k=ab=2\cdot 2011=4022$.

8. **Penyelesaian:**

Dari identitas

$$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

Diperoleh

$$\rightarrow 1-\tan^2 x=\frac{2\tan x}{\tan 2x}$$

Sehingga

$$\begin{aligned}\left(1-\tan^2\frac{x}{2^{2011}}\right)\left(1-\tan^2\frac{x}{2^{2010}}\right)\cdots\left(1-\tan^2\frac{x}{2}\right)&=2^{2011}\sqrt{3}\tan\frac{x}{2^{2011}}\\ \frac{2\cdot\tan\frac{x}{2^{2011}}}{\tan\frac{x}{2^{2010}}}\cdot\frac{2\cdot\tan\frac{x}{2^{2010}}}{\tan\frac{x}{2^{2009}}}\cdots\frac{2\cdot\tan\frac{x}{2}}{\tan x}&=2^{2011}\sqrt{3}\tan\frac{x}{2^{2011}}\\ \frac{2^{2011}\cdot\tan\frac{x}{2^{2011}}}{\tan x}&=2^{2011}\sqrt{3}\tan\frac{x}{2^{2011}}\\ \tan x&=\frac{1}{3}\sqrt{3}\end{aligned}$$

Oleh karena itu, $\sin x=\frac{1}{2}$ dan $\cos x=\frac{1}{2}\sqrt{3}$. Sehingga $\sin 2x=2\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

9. Penyelesaian:

Jika salah satu bukan bilangan bulat, maka ada tak hingga cara, sehingga ketiganya harus bulat.
Untuk x,y,z semuanya bulat, maka
Searah $x\rightarrow 2$ ke $20\rightarrow$ ada 18 langkah
Searah $y\rightarrow 0$ ke $1\rightarrow$ ada 1 langkah

Searah $z \to 11$ ke $1 \to$ ada 10 langkah +
29 langkah

Jadi, banyak cara = $\frac{29!}{18! \times 1! \times 10!}$ = 380.570.190 cara.

10. Penyelesaian:

Dengan AM-GM diperoleh

$$x + 2y \geq 2\sqrt{2xy}$$
$$y + 2z \geq 2\sqrt{2yz}$$
$$xz + 1 \geq 2\sqrt{xz}$$

sehingga

$$(x + 2y)(y + 2z)(xz + 1) \geq 16\sqrt{x^2y^2z^2} = 16xyz = 16$$

Oleh karena itu nilai terkecil dari $(x + 2y)(y + 2z)(xz + 1)$ adalah 16 yaitu saat $x = 2, y = 1$ dan $z = \frac{1}{2}$ sehingga diperoleh $x + y + z = 3\frac{1}{2}$.

11. Penyelesaian:

Menelaus : E, F, B :

$\frac{EF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CA}{AE} = 1$

$$\frac{EF}{FB} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{x + y}{x} = 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{EF}{FB} = \frac{2x}{x + y} \Rightarrow \frac{FB}{FE} = \frac{x + y}{2x}$$

12. Penyelesaian:

Misal : $n = \overline{abc}$ $\quad a \neq b \neq c, \quad a \neq 0,$

$$a + b = c \cdots\cdots (i)$$
$$c = 3 \to (a, b) = \{(1, 2), (2, 1)\} \to 2$$
$$c = 4 \to (a, b) = \{(1, 3), (3, 1)\} \to 2$$
$$c = 5 \to (a, b) = \{(1, 4), (4, 1), (2, 3), (3, 2)\} \to 4$$
$$\vdots$$
$$c = 9 \to (a, b) = \{(1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (7, 2), (8, 1)\} \to 8$$

Sehingga total = 2 + 2 + 4 + 4 + 6 + 6 + 8 = 32.

13. Penyelesaian:

Kita memiliki $a_2 = \dfrac{a_1 - 1}{a_1 + 1}$

$$a_3 = \frac{a_2 - 1}{a_2 + 1} = \frac{\frac{a_1 - 1}{a_1 + 1} - 1}{\frac{a_1 - 1}{a_1 + 1} + 1} = \frac{-1}{a_1}$$

$$a_4 = \frac{a_3 - 1}{a_3 + 1} = \frac{\frac{-1}{a_1} - 1}{\frac{-1}{a_1} + 1} = -\frac{a_1 + 1}{a_1 - 1}$$

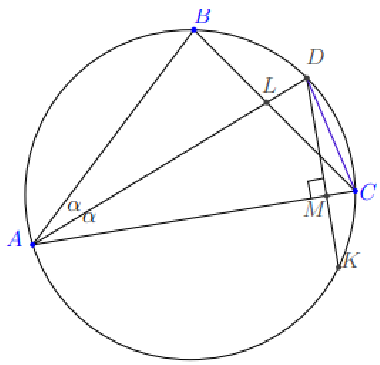
$$a_5 = \frac{a_4 - 1}{a_4 + 1} = \frac{-\frac{a_1 + 1}{a_1 - 1} - 1}{-\frac{a_1 + 1}{a_1 - 1} - 1} = a_1$$

$$\Rightarrow a_n = \begin{cases} \dfrac{a_1 - 1}{a_1 + 1} = \dfrac{1}{3} \text{ if } n = 4k + 2m\,(m = 2t + 1; m, k, t \in \mathbb{N}^*) \\ -\dfrac{1}{a_1} = -\dfrac{1}{2} \text{ if } n = 4k + 2m + 1\,(m = 2t + 1; m, k, t \in \mathbb{N}^*) \\ -\dfrac{a_1 + 1}{a_1 - 1} = -3 \text{ if } n = 4k\,(k \in \mathbb{N}^*) \\ a_1 = 2 \text{ if } n = 4k + 1\,(k \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$$

Maka, $a_{2011} = a_{4\times 502+2+1} = -\dfrac{1}{2}$

14. Penyelesaian:

Perhatikan gambar berikut.



Karena AD adalah garis bagi $\angle BAC$ maka $\frac{AB}{AC} = \frac{BL}{LC} = \frac{1}{2}$. Misalkan Panjang $AB = x$ maka $AC = 2x$. Perhatikan bahwa $\Delta CDL \sim \Delta ACD$ maka diperoleh

$$\frac{DC}{AD} = \frac{DL}{DC} \Leftrightarrow DC^2 = AD \cdot DL$$

Selain itu, $\Delta ABL \sim \Delta ACD$ sehingga diperoleh

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AL}{AC} \Leftrightarrow AD \cdot AL = AB \cdot AC = 2x^2$$

Karena ΔAMD dan ΔCMD keduanya adalah segitiga siku-siku, dengan dalil phytagoras kita peroleh

$$\begin{aligned} AD^2 - AM^2 = DC^2 - MC^2 &\Leftrightarrow AD^2 - DC^2 = AM^2 - MC^2 \\ &\Leftrightarrow AD^2 - AD \cdot AL = (AM + MC)(AM - MC) \\ &\Leftrightarrow AD(AD - AL) = 2x(AM - MC) \\ &\Leftrightarrow AD \cdot DL = 2x(AM - MC) \\ &\Leftrightarrow 2x^2 = 2x(AM - MC) \\ &\Leftrightarrow AM - MC = x \end{aligned}$$

Karena $AM - MC = x$ dam $AM + MC = 2x$ maka didapat $2AM = 3x$ dan $2MC = x$ sehingga

$$\frac{AM}{MC} = \frac{2AM}{2MC} = \frac{3x}{x} = 3$$

15. Penyelesaian:

Ada 12 nomor, dipilih 6 nomor untuk salah satu dadu, dan sisa otomatis untuk dadu lainnya.

Ada $C_6^{12} = 924$ cara pendistribusian.

Misal, Dadu I berisi $\rightarrow$ 1, 2, 3, 4, 5, 6

Dadu II berisi $\rightarrow 1^1, 2^1, 3^1, 4^1, 5^1, 6^1$

Jumlah $7 \rightarrow (1, 6^1), (6, 1^1), (2, 5^1), (5, 2^1), (3, 4^1), (4, 3^1)$ dengan masing-masing memiliki peluang yang sama.

WLOG, kita hitung peluang untuk $(1, 6^1), (6, 1^1)$.

Bagi kasus berdasarkan distribusi $1, 1^1, 6, 6^1$ yang menghasilkan jumlah 7.

- Kasus I: Dadu I memiliki salah satu dari $1, 1^1, 6, 6^1$

  Banyak cara distribusi $= C_1^4 \times C_5^8 = 224$ cara

  Peluang jumlah $7 \rightarrow = \frac{2}{36}$

  $P(k_1) = \frac{2}{36} \times \frac{224}{924} = \frac{4}{297}$
- Kasus II: Dadu I memiliki dua dari $1, 1^1, 6, 6^1$
  - Untuk keduanya $\rightarrow (1, 6), (1, 6^1), (1^1, 6), (1^1, 6^1)$

    Distribusi = $4 \times C_4^8 = 280$ cara

    Peluang jumlah $7 \rightarrow \frac{2}{36}$

    $P(sk_2) = \frac{280}{924} \cdot \frac{2}{36} = \frac{5}{297}$
  - Untuk keduanya $(1, 1^1), (6, 6^1)$

    Distribusi = $2 \times C_4^8 = 140$ cara

    Peluang jumlah $7 \rightarrow \frac{4}{36}$

    $P(sk_2) = \frac{140}{924} \cdot \frac{4}{36} = \frac{5}{297}$

Sehingga $P(k_{II}) = \frac{5}{297} + \frac{5}{297} = \frac{10}{297}$

- Kasus III: Dadu I memuat tiga dari $1, 1^1, 6, 6^1$
  Distribusi = $C_3^4 \times C_3^8 = 224$
  Peluang jumlah 7 $\rightarrow \frac{2}{36}$
  $P(k_{III}) = \frac{2}{36} \cdot \frac{224}{924} = \frac{4}{297}$

Maka, $P(total) = \frac{4}{297} + \frac{10}{297} + \frac{4}{297} = \frac{18}{297}$
Analog untuk $2, 2^1, 5, 5^1$ dan $3, 3^1, 4\,, 4^1$
$P(total) = 3 \times \left(\frac{18}{297}\right) = \frac{54}{297}$.

16. Penyelesaian:

Jika $n = 1$ maka diperoleh persamaan garis $x + y = 1$ yang jelas tidak memiliki koordinat berupa bilangan asli. Oleh karena itu haruslah $n \geq 2$. Perhatikan bahwa titik $(1,\ n - 1)$ merupakan koordinat bilangan asli yang terletak pada garis $x + y = n$ sehingga diperoleh

$$1^2 + (n - 1)^2 = p^2$$

Dengan p adalah bilangan prima.
Lebih jauh diperoleh $1 = p^2 - (n - 1)^2$. Padahal kita ketahui bahwa dua bilangan kuadrat yang berselisih 1 hanya 0^2 dan 1^2 yang keduanya, baik 0 ataupun 1 bukan bilangan prima. Jadi, tidak ada bilangan asli n yang memenuhi kondisi pada soal.

17. Penyelesaian:

Ingat kembali bahwa untuk setiap bilangan asli n berlaku

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Dan jika a, b adalah bilangan bulat, dapat kita katakan $a^n - b^n$ habis dibagi $(a - b)$. Selanjutnya perhatikan, $-2004 - 1900 = -3904$ sehingga $(-2004)^n - 1900^n$ habis dibagi -3904 tetapi karena $-3904 = -244 \cdot 16$ berakibat $(-2004)^n - 1900^n$ habis dibagi 16. Demikian dengan cara yang sama diperoleh $25^n - 121^n$ habis dibagi 16 karena 25 – 121 = $-96 = -6 \cdot 16$. Oleh karena itu, $(-2004)^n - 1900^n + 25^n - 121^n$ habis dibagi 16. Selain itu, $(-2004)^n - 121^n$ habis dibagi 125 karena $-2004 - 121 = -2125 = -17 \cdot 125$ serta $25^n - 1900^n$ juga habis dibagi 125 sebab 25 – 1900 = $-1875 = -15 \cdot 125$. Jadi, sekali lagi diperoleh $(-2004)^n - 1900^n + 25^n - 121^n$ habis dibagi 125. Akan tetapi, karena 16 dan 125 keduanya saling prima berakibat $(-2004)^n - 1900^n + 25^n - 121^n$ habis dibagi $16 \cdot 125 = 2000$ untuk setiap bilangan asli n.

18. Penyelesaian:

Misalkan susunan duduk semula adalah 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Selanjutnya kita bagi menjadi dua kelompok yaitu kelompok I = 1, 2, 3, 4, 5 dan kelompok II = 6, 7, 8, 9, 10. Banyaknya cara kelompok I duduk kembali pada kursinya ada 8 cara yaitu 12345, 21345, 12435, 21435, 12354, 21354, 13245, 13254. Demikian pula banyaknya cara kelompok II duduk kembali pada kursi ada 8 cara (kedua kelompok pada dasarnya sama hanya beda nomor saja tetapi karakteristiknya sama). Jadi, jika kelompok I dan kelompok II saling lepas maka banyaknya cara kedua kelompok tersebut duduk kembali pada kursinya ada $8 \times 8 = 64$ cara.

Perhatikan jika kelompok I dan II tidak saling lepas. Dalam hal ini satu-satunya terjadi overlapping jika dan hanya jika siswa yang duduk pada posisi 5 dan 6 saling bergantian. Oleh karena itu diperoleh kelompok I yang baru yaitu 1, 2, 3, 4, 6 dan kelompok II yang baru yaitu 5, 7, 8, 9, 10. Selanjutnya mudah dilihat bahwa banyaknya cara kelompok I yang baru duduk kembali pada kursinya ada 5 cara yaitu 12346, 21346, 12436, 21436, 13246. Demikian pula banyaknya cara kelompok II yang baru duduk kembali pada kursinya juga ada 5 cara. Sehingga jika kelompok I dan kelompok II tidak saling lepas maka banyaknya cara kedua kelompok tersebut duduk kembali pada kursinya ada $5 \times 5 = 25$ cara.

Jadi, total banyaknya cara semua siswa tersebut duduk kembali pada baris tadi ada sebanyak 64 + 25 = 89 cara.

19. Penyelesaian:

Perhatikan bahwa $S(N) \equiv N \bmod 9$, dimana $S(N)$ adalah jumlah semua digit dari N. Tetapi ingat pula bahwa untuk sebarang N kita peroleh $N^2 \equiv 0, 1, 4, 7 \bmod 9$.

Berdasarkan dua fakta ini, kita peroleh

$$\begin{aligned} n &\equiv x^2 \quad \bmod 9 \\ &\equiv 0, 1, 4, 7 \quad \bmod 9 \end{aligned}$$

Karena $123456 \equiv 3 \bmod 9$, $123455 \equiv 2 \bmod 9$ dan $123454 \equiv 1 \bmod 9$ maka $n \leq 123454$.

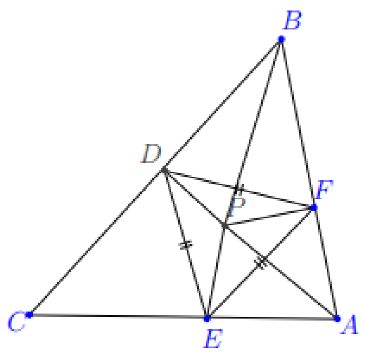
Tetapi kita juga punya,

$$\begin{aligned} \Big(\underbrace{9999999\cdots9}_{9 \text{ sebanyak } 13716}8\Big)^2 &= \left(10^{13717} - 2\right)^2 \\ &= 10^{27434} - 4 \cdot 10^{13717} + 4 \\ &= \underbrace{9999999\cdots9}_{9 \text{ sebanyak } 13716}6\underbrace{0000000\cdots0}_{0 \text{ sebanyak } 13716}4 \end{aligned}$$

Dan jumlah digit dari $\underbrace{9999999\ldots9}_{9\text{ sebanyak }13716}6\underbrace{0000000\ldots0}_{0\text{ sebanyak }13717}4$ adalah $9\cdot 13716+6+4=123454$. Jadi, nilai n terbesar adalah $n=123454$ dengan nilai x yang bersesuaian adalah $x=\underbrace{9999999\ldots9}_{9\text{ sebanyak }13716}8$.

20. Penyelesaian:

Perhatikan gambar berikut!



Pada ΔABP berlaku

$$\begin{aligned}\angle FAP+\angle FPB &= 180^o-\angle APB\\ &= 180^o-70^o\\ &= 110^o\end{aligned}$$

Perhatikan pula, $\angle AEP=\angle AFP=\angle BFP=\angle BDP=90^o$. Dengan demikian segiempat $AEPF$ dan segiempat $BDPF$ keduanya adalah segiempat talibusur. Sehingga diperoleh

$$\angle DBP=\angle DFP \quad \text{dan} \quad \angle EAP=\angle EFP$$

Ingat pula, $\angle DFP+\angle EFP=60^o$. Oleh karena itu, diperoleh

$$\begin{aligned}\angle ACB &= 180^\circ-(\angle CAB+\angle CBA)\\ &= 180^\circ-(\angle EAP+\angle FAP+\angle DBP+\angle FBP)\\ &= 180^\circ-(\angle EFP+\angle DFP+110^\circ)\\ &= 180^\circ-(60^\circ+110^\circ)\\ &= 10^\circ\end{aligned}$$