



## PEMBAHASAN

### OSN MATEMATIKA SMP

### TAHUN 2023

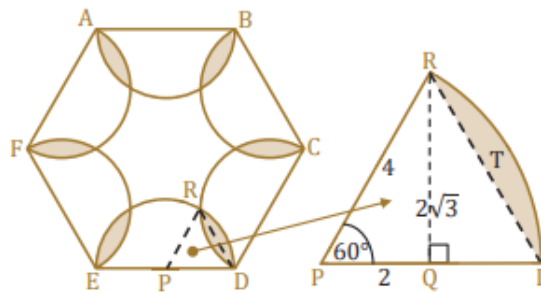
#### 1. Penyelesaian:

Panjang sisi segienam  $ABCDEF$  adalah 8 cm, sehingga Panjang jari-jari setengah lingkaran adalah  $r = 4$  cm. Besar tiap sudut pada segienam beraturan adalah  $120^\circ$ .

$$\angle PDC = 120^\circ$$

$$\angle PDR = 60^\circ$$

Panjang  $PD = PR$ , maka  $\angle PDR = \angle PRD = 60^\circ$ , sehingga didapat segitiga  $PDR$  adalah segitiga samasisi.



Terapkan phytagoras pada  $\Delta PQR$

$$\begin{aligned} QR &= \sqrt{PR^2 - PQ^2} \\ &= \sqrt{4^2 - 2^2} \\ &= \sqrt{4(4 - 1)} \\ &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

Luas satu tembereng adalah

$$\begin{aligned} T &= L_{\text{VPRD}} - L_{\Delta PRD} \\ &= \frac{1}{6}\pi \times 4^2 - \frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{3} \\ &= \frac{8}{3}\pi + 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

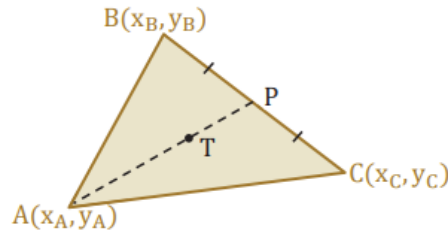
Perhatikan bahwa luas daerah berwarna terdiri atas 12 tembereng. Jadi luas seluruh daerah berwarna adalah

$$\begin{aligned} L &= 12T \\ &= 12 \times \left( \frac{8}{3}\pi + 4\sqrt{3} \right) \\ &= 32\pi + 48\sqrt{3} \end{aligned}$$



## 2. Penyelesaian:

Misalkan koordinat titik  $A, B, C$  pada segitiga  $ABC$  adalah  $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$  dan  $C(x_C, y_C)$ .



Titik berat  $T$  akan membagi garis berat  $AP$  dengan perbandingan 2:1. Absis titik  $T$  adalah

$$\begin{aligned} x_T &= x_A + \frac{2}{3}(x_P - x_A) \\ &= \frac{3}{3}x_A + \frac{2}{3}\left(\frac{x_B + x_C}{2}\right) - \frac{2}{3}x_A \\ &= \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \end{aligned}$$

Dengan cara serupa, didapat ordinat  $T$  adalah

$$y_T = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

Koordinat titik berat  $\triangle ABC$  adalah

$$T\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$$

Misalkan sisa absis dan ordinat titik letis jika dibagi 3 berturut-turut adalah  $a$  dan  $b$ . Maka kombinasi nilai  $a$  dan  $b$  ada 9 kelompok.

	$k_1$	$k_2$	$k_3$	$k_4$	$k_5$	$k_6$	$k_7$	$k_8$	$k_9$
$a$	0	0	0	1	1	1	2	2	2
$b$	0	1	2	0	1	2	0	1	2

Agar tidak ada segitiga dengan titik beratnya merupakan titik letis, maka tiga titik yang dapat dipasangkan adalah dapat diambil dari

$k_1$	$k_1$	$k_2$	$k_2$	$k_4$	$k_4$	$k_5$	$k_5$
0	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	1	0	0	1	1

Perhatikan bahwa:

- Saat sudah dipilih 2 titik pada kelompok  $k_1$ , maka tidak boleh ada titik pada kelompok  $k_1$  lagi (karena akan terbentuk segitiga  $PAS$ ).
- Saat ditambah 2 titik pada kelompok  $k_2$ , maka tidak boleh ada titik pada kelompok  $k_2$  lagi maupun  $k_3$ .



- Saat ditambah 2 titik pada kelompok  $k_4$ , maka tidak boleh ada titik pada kelompok  $k_4$  lagi,  $k_7$  maupun  $k_9$ .
- Saat ditambah 2 titik pada kelompok  $k_5$ , maka tidak boleh ada titik pada kelompok  $k_5$  lagi maupun  $k_8$ .

Perhatikan bahwa jika ditambahkan satu titik lagi maka dari 8 titik tersebut, maka pasti akan terbentuk segitiga *PAS*.

Catatan: Jika susunan tersebut ditulis sebagai

$$\overline{2k_1 2k_2 2k_4 2k_5},$$

Maka susunan yang mungkin adalah.

$$\overline{2k_1 2k_2 2k_4 2k_5}, \overline{2k_1 2k_2 2k_4 2k_6}, \overline{2k_1 2k_2 2k_5 2k_6}, \dots, \overline{2k_5 2k_6 2k_7 2k_9}, \overline{2k_5 2k_6 2k_8 2k_9}.$$

Yaitu ada sebanyak  $3 \times 3 \times 3 = 27$  cara.

Jadi nilai  $k$  terkecil agar pasti terdapat tiga titik yang membentuk segitiga *PAS* (Dengan Pigeonhole Principle) (PHP) adalah  $8 + 1 = 9$ .

### 3. Penyelesaian:

Diketahui  $f_1 = 2, f_2 = 5$  dan

$$f_n = \frac{1}{2}(f_{n-1} + f_{n-2}) \quad \dots (\times 2)$$

$$2f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \quad \dots (\times f_{n-1})$$

$$f_{n-1} + 2f_n = f_{n-2} + 2f_{n-1}$$

Sehingga untuk setiap  $n \geq 3$ , maka

$$\begin{aligned} f_{n-1} + 2f_n &= f_1 + 2f_2 \\ &= 2 + 2(5) \\ &= 12 \end{aligned}$$

Jadi  $n = 2024$ , didapat

$$f_{2023} + 2f_{2024} = 12$$

Catatan: Jika ingin dijabarkan, akan didapat

$$n = 3 \Rightarrow f_2 + 2f_3 = f_1 + 2f_2$$

$$\begin{aligned} n = 4 \Rightarrow f_3 + 2f_4 &= f_2 + 2f_3 \\ &= f_1 + 2f_2 \end{aligned}$$

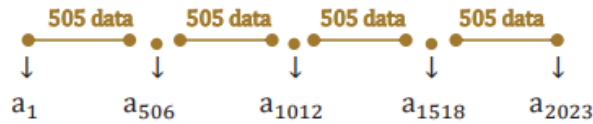
$$\begin{aligned} n = 5 \Rightarrow f_4 + 2f_5 &= f_3 + 2f_4 \\ &= f_1 + 2f_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n = 2024 \Rightarrow f_{2023} + 2f_{2024} &= f_1 + 2f_2 \\ &= 2 + 2(5) \\ &= 12 \end{aligned}$$



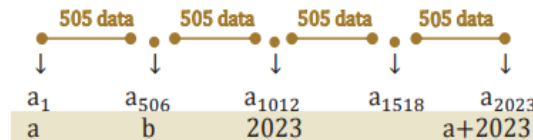
## 4. Penyelesaian:

Perhatikan ilustrasi pembagian 2023 bilangan pada kelompok pertama



Diketahui

- Bilangan pertama:  $a_1 = a$ ,
- Kuartil pertama:  $a_{506} = b = 289k$ , dengan  $k$  bilangan asli dan  $0 \leq 289k \leq 2023$ ,
- Median:  $a_{2012} = 2023$ ,
- Kuartil ketiga:  $a_{1518} = c$
- Jangkauan 2023:  $a_{2023} = a + 2023$ .



Perhatikan bahwa nilai rata-rata akan terbesar saat

$a_1$	bernilai $a$ ,
$a_2$ sampai $a_{506}$	bernilai $b$ ,
$a_{507}$ sampai $a_{1012}$	bernilai 2023,
$a_{1013}$ sampai $a_{1518}$	bernilai $c$ ,
$a_{1519}$ sampai $a_{2023}$	bernilai $a + 2023$ .

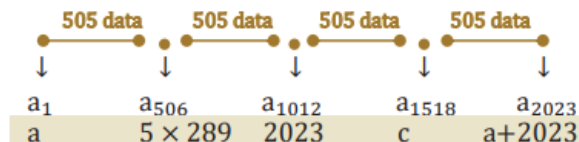
Yaitu  $2383\frac{5}{7}$ , maka

$$2383\frac{5}{7} =$$

$$\frac{a+b(505)+2023(506)+c(506)+(a+2023)(505)}{2023}$$

$$= \frac{506a+505b+506c+2023(506)+2023(505)}{2023}$$

Untuk 2023 bilangan pada kelompok kedua,



Nilai rata-rata akan terkecil adalah saat

$a_1$ sampai $a_{505}$	bernilai $a$ ,
$a_{506}$ sampai $a_{1011}$	bernilai $5 \times 289$ ,
$a_{1012}$ sampai $a_{1517}$	bernilai 2023,
$a_{1518}$ sampai $a_{2022}$	bernilai $c$ ,
$a_{2023}$	bernilai $a + 2023$ ,

Yaitu  $d$ , maka



$$\begin{aligned}d &= \frac{a(505)+b(506)+2023(506)+c(505)+(a+2023)}{2023} \\&= \frac{506a+506b+505c+2023(506)+2023}{2023}\end{aligned}$$

Selisih rata-rata kelompok pertama dan kedua adalah

$$\begin{aligned}2383\frac{5}{7} - d &= \frac{(c-b) + 2023(504)}{2023} \\2383 - d + \frac{5}{7} &= \frac{c - 289k}{7 \times 289} + 504 \\1879 - d + \frac{5}{7} &= \frac{c - 289k}{7 \times 289} \dots (1)\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa  $d$  adalah bilangan bulat sehingga  $c$  pasti kelipatan 289. Misalkan  $c = 289p$ , untuk suatu  $p$  bilangan asli.

$$\frac{289p - 289k}{7 \times 289} = \frac{p - k}{7}$$

Jelas bahwa  $(p - k)$  bersisa 5 jika dibagi 7.

$$\begin{aligned}c - b &\leq \text{jangkauan} \\289p - 289k &\leq 2023 \\289(p - k) &\leq 289 \times 7 \\p - k &\leq 7\end{aligned}$$

Sehingga didapat

$$p - k = 5 \Rightarrow k = p - 5 \dots (2)$$

Substitusi  $p - k = 5$  ke Persamaan (1),

$$\begin{aligned}1879 - d + \frac{5}{7} &= \frac{5}{7} \\d &= 1879\end{aligned}$$

Dari persamaan rata-rata terkecil kelompok kedua adalah  $d$  didapat

$$\begin{aligned}d &= \frac{506a + 506b + 505c + 2023(507)}{2023} \\1879 &= \frac{506a + 506(289k) + 505(289p)}{7 \times 289} + 507\end{aligned}$$

Karena  $d$  bilangan bulat dan 506 relatif prima dengan 289, maka  $a$  pasti kelipatan 289. Misal  $a = 289q$ , untuk suatu  $q$  bilangan cacah.

$$\begin{aligned}1372 &= \frac{506(289q) + 506(289k) + 505(289p)}{7 \times 289} \\504 &= 7 \times 72 \\1372 &= \frac{(504 + 2)q + (502 + 2)k + (502 + 1)p}{7} \\1372 &= 72(q + p + r) + \frac{2q + 2k + p}{7}\end{aligned}$$





Perhatikan hubungan pertidaksamaan berikut  $a \leq b \leq 2023$  dan  $c \leq a + 2023 \leq 2(2023)$

$$\begin{aligned} 2a + 2b + c &\leq (2 + 2 + 2)2023 \\ 289(2q + 2k + p) &\leq 6(7 \times 289) \\ 2q + 2k + p &\leq 6 \times 7 \\ \frac{2q + 2k + p}{7} &\leq 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1372 - 6 &= 1366 \leq 72(q + k + p) \leq 1372 \\ \left\lfloor \frac{1372}{72} \right\rfloor &= 19 \\ 72(q + k + p) &= 72 \times 19 \\ q + k + p = 19 &\Rightarrow q + k = 19 - p \dots (3) \\ 72(q + k + p) &= 1368 \end{aligned}$$

Sehingga didapat

$$\begin{aligned} 72(q + k + p) + \frac{2q + 2k + p}{7} &= 1372 \\ 1368 + \frac{2q + 2k + p}{7} &= 1372 \\ \frac{2q + 2k + p}{7} &= 4 \dots (\times 7) \\ 2(q + k) + p &= 28 \end{aligned}$$

Substitusi persamaan (3)

$$\begin{aligned} 2(q + k) + p &= 28 \\ 2(19 - p) + p &= 28 \\ 38 - 2p + p &= 28 \\ -p &= -10 \\ p &= 10 \end{aligned}$$

Substitusi ke persamaan (2)

$$\begin{aligned} k &= p - 5 \\ &= 10 - 5 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Substitusi  $k = 5$  dan  $p = 10$  persamaan (3)

$$\begin{aligned} q + k &= 19 - p \\ q + 5 &= 19 - 10 \\ q &= 4 \end{aligned}$$

Jadi, nilai  $a, b, c$  dan  $d$  adalah

$$\begin{aligned} a &= 289q = 289 \times 4 = 1156, \\ b &= 289k = 289 \times 5 = 1445, \\ c &= 289p = 289 \times 10 = 2890, \end{aligned}$$



$$d = 1879.$$

## 5. Penyelesaian:

Diketahui

$$g(x) = \frac{x}{1 - 2^x} - \frac{x}{2}$$

$$g(x) = x \left( \frac{1}{1 - 2^x} - \frac{1}{2} \right)$$

Dengan mengganti  $x$  menjadi  $-x$ , didapat

$$g(-x) = (-x) \left( \frac{1}{1 - 2^{-x}} - \frac{1}{2} \right)$$

$$\frac{1}{1 - 2^{-x}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^x}} = \frac{2^x}{2^x - 1}$$

$$= -x \left( \frac{2^x}{2^x - 1} - \frac{1}{2} \right)$$

$$= -x \left( \frac{2(2^x) - (2^x - 1)}{2(2^x - 1)} \right)$$

$$= -x \left( \frac{2^x + 1}{2(2^x - 1)} \right)$$

$$= x \left( \frac{2 - (1 - 2^x)}{2(1 - 2^x)} \right)$$

$$= x \left( \frac{1}{1 - 2^x} - \frac{1}{2} \right)$$

$$g(-x) = g(x)$$

Nilai  $g(23) \neq 0$ , jadi

$$\frac{g(-x) - g(x)}{g(23)} = \frac{0}{g(23)} = 0$$

## 6. Penyelesaian:

Diketahui

$$\frac{(10^3 - 1)(11^3 - 1)(12^3 - 1) \dots (2023^3 - 1)}{(10^3 + 1)(11^3 + 1)(12^3 + 1) \dots (2023^3 + 1)}$$

$$= \frac{P(Q + 1)}{(P + 1)Q}$$

Ingat!

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b) + (a^2 - ab + b^2)$$

Perhatikan penjabaran berikut



$$\frac{n^3 - 1^3}{n^3 + 1^3} = \frac{n-1}{n+1} \times \frac{n^2 + n + 1}{n^2 - n + 1}$$

$$\frac{(n+1)^3 - 1^3}{(n+1)^3 + 1^3} = \frac{n((n+1)^2 + (n+1) + 1)}{(n+2)((n+1)^2 - (n+1) + 1)}$$

$$\frac{(n+1)^2 - (n+1) + 1 = n^2 + 2n + 1 - n - 1 + 1}{= n^2 + n + 1}$$

$$= \frac{n}{n+2} \times \frac{(n+1)^2 + (n+1) + 1}{n^2 + n + 1}$$

$$\frac{(n+2)^3 - 1^3}{(n+2)^3 + 1^3} = \frac{n+1}{n+3} \times \frac{(n+2)^2 + (n+2) + 1}{(n+2)^2 - (n+2) + 1}$$

Bagian yang diberi warna akan saling menghilangkan jika dikali.

$$\frac{n-1}{n+1} \times \frac{n+1}{n+3} = \frac{n-1}{n+3}$$

$$\frac{n^2 + n + 1}{n^2 - n + 1} \times \frac{(n+1)^2 + (n+1) + 1}{n^2 + n + 1} = \frac{(n+1)^2 + (n+1) + 1}{n^2 - n + 1}$$

Dengan pola tersebut, didapat

$$\frac{(10^3 - 1)(11^3 - 1)(12^3 - 1) \dots (2023^3 - 1)}{(10^3 + 1)(11^3 + 1)(12^3 + 1) \dots (2023^3 + 1)}$$

$$= \frac{10-1}{10+1} \times \frac{12-1}{12+1} \times \frac{14-1}{14+1} \times \dots \times \frac{2022-1}{2022+1}$$

$$\times \frac{11-1}{11+1} \times \frac{13-1}{13+1} \times \frac{15-1}{15+1} \times \dots \times \frac{2023-1}{2023+1}$$

$$\times \frac{2023^2 + 2023 + 1}{10^2 - 10 + 1}$$

$$= \frac{9}{11} \times \frac{11}{13} \times \frac{13}{15} \times \dots \times \frac{2021}{2023}$$

$$\times \frac{10}{12} \times \frac{12}{14} \times \frac{14}{16} \times \dots \times \frac{2022}{2024}$$

$$\times \frac{2023(2023+1) + 1}{100 - 10 + 1}$$

$$= \frac{9}{2023} \times \frac{10}{2024} \times \frac{2023 \times 2024 + 1}{91}$$

$$= \frac{90 \times ((2023 \times 2024) + 1)}{(90 + 1) \times (2023 \times 2024)}$$

Dengan menyamakan bentuk, didapat

$$\frac{p(q+1)}{(p+1)q} = \frac{90 \times ((2023 \times 2024) + 1)}{(90 + 1) \times (2023 \times 2024)}$$

Atau





$$\frac{p(q+1)}{(p+1)q} = \frac{-(2023 \times 2024) - 1}{-(2023 \times 2024) - 1 + 1} \times \frac{-91 + 1}{-91}$$

Jadi nilai

$$p = 90 \text{ dan } q = 2023 \times 2024 = 4.094.552$$

Atau

$$p = -4.094.553 \text{ dan } q = -91$$

## 7. Penyelesaian:

Perhatikan penjabaran berikut

$$yz = 2 - x \quad \dots (1)$$

$$xz = \sqrt{2} - \frac{1}{2}y \quad \dots (2)$$

$$xy = -1 - \frac{1}{4}z \quad \dots (3)$$

Kalikan persamaan (1) dengan  $x$ , persamaan (2) dengan  $y$  dan persamaan (3) dengan  $z$ .

$$xyz = 2x - x^2 \quad \dots (4)$$

$$xyz = \sqrt{2}y - \frac{1}{2}y^2 \quad \dots (5)$$

$$xyz = -z - \frac{1}{4}z^2 \quad \dots (6)$$

Modifikasi bentuk persamaan (4), (5) dan (6) menjadi

$$1 - 1 + 2x - x^2 = 1 - (x - 1)^2 = xyz \quad \dots (7)$$

$$1 - 1 + \sqrt{2}y - \frac{1}{2}y^2 = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}y - 1\right)^2 = xyz \quad \dots (8)$$

$$1 - 1 - z - \frac{1}{4}z^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}z + 1\right)^2 = xyz \quad \dots (9)$$

Samakan persamaan (7) dan (8)

$$1 - (x - 1)^2 = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}y - 1\right)^2$$

$$(x - 1)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}y - 1\right)^2$$

$$x - 1 = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}}y - 1\right)$$

$$x - 1 = \frac{1}{\sqrt{2}}y - 1$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}y \Rightarrow y = \sqrt{2}x \quad \dots (10)$$



$$x - 1 = -\left(\frac{1}{\sqrt{2}}y - 1\right)$$

$$x - 2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}y \Rightarrow y = 2\sqrt{2} - \sqrt{2}x \quad \dots (11)$$

Samakan persamaan (7) dan (9)

$$1 - (x - 1)^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}z + 1\right)^2$$

$$(x - 1)^2 = \left(\frac{1}{2}z + 1\right)^2$$

$$x - 1 = \pm \left(\frac{1}{2}z + 1\right)$$

$$x - 1 = \frac{1}{2}z + 1$$

$$x - 2 = \frac{1}{2}z \Rightarrow z = 2x - 4 \quad \dots (12)$$

$$x - 1 = -\left(\frac{1}{2}z + 1\right)$$

$$x = -\frac{1}{2}z \Rightarrow z = -2x \quad \dots (13)$$

Kombinasi yang mungkin adalah

Substitusi persamaan (10) dan (12) ke persamaan (1)

$$yz = (\sqrt{2}x)(2x - 4)$$

$$2 - x = 2\sqrt{2}x^2 - 4\sqrt{2}x$$

$$0 = 2\sqrt{2}x^2 - (4\sqrt{2} - 1)x - 2$$

$$0 = (2\sqrt{2}x + 1)(x - 2)$$

$$x = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{4}\sqrt{2} \vee x = 2 \quad (TM)$$

$$y = \sqrt{2}x$$

$$= \sqrt{2}\left(-\frac{1}{4}\sqrt{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}$$

$$z = 2x - 4$$

$$= 2\left(-\frac{1}{4}\sqrt{2}\right) - 4$$

$$= -\frac{1}{2}\sqrt{2} - 4$$



Didapat penyelesaian

$$\left(-\frac{1}{4}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{2} - 4\right)$$

Catatan:

1. Untuk menentukan nilai  $x$  juga dapat menggunakan rumus  $ABC$

Jika diskriminan persamaan kuadrat

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Bernilai tak negative

$$(D \geq 0, D = b^2 - 4ac)$$

Maka akar-akarnya dapat ditentukan dengan

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2. Nilai  $x = 2$  tidak memenuhi karena akan menyebabkan terjadi kontradiksi pada persamaan (1), (2) dan (3).

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{2}x \\ &= \sqrt{2}(2) \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= 2x - 4 \\ &= 2(2) - 4 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Jika disubstitusi ke persamaan (3) didapat

$$\begin{aligned} xy &= -1 - \frac{1}{4}z \\ (2)(2\sqrt{2}) &= -1 - \frac{1}{4}(0) \\ 4\sqrt{2} &= 1 \quad (\text{TM}) \end{aligned}$$

Substitusi persamaan (10) dan (13) ke persamaan (1)

$$\begin{aligned} yz &= (\sqrt{2}x)(-2x) \\ 2 - x &= -2\sqrt{2}x^2 \\ 2\sqrt{2}x^2 - x + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Nilai diskriminan persamaan kuadrat tersebut adalah

$$\begin{aligned} D &= b^2 - 4ac \\ &= (-1)^2 - 4(2\sqrt{2})(2) \\ &= 1 - 16\sqrt{2} < 0 \end{aligned}$$

Karena  $D < 0$ , maka persamaan kuadrat tersebut tidak memiliki penyelesaian ril.

Substitusi persamaan (11) dan (12) ke persamaan (1)



$$\begin{aligned}
 yz &= (2\sqrt{2} - \sqrt{2}x)(2x - 4) \\
 2 - x &= -2\sqrt{2}x^2 + 8\sqrt{2}x - 8\sqrt{2} \\
 2\sqrt{2}x^2 - (8\sqrt{2} + 1)x + 8\sqrt{2} + 2 &= 0 \\
 (2\sqrt{2}x - (4\sqrt{2} + 1))(x - 2) &= 0 \\
 \Downarrow \qquad \qquad \qquad \Downarrow \\
 x = \frac{4\sqrt{2} + 1}{2\sqrt{2}} = 2 + \frac{1}{4}\sqrt{2} \quad \vee \quad x = 2 \text{ (TM)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y &= 2\sqrt{2} - \sqrt{2}x \\
 &= 2\sqrt{2} - \sqrt{2}\left(2 + \frac{1}{4}\sqrt{2}\right) \\
 &= -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z &= 2x - 4 \\
 &= 2\left(2 + \frac{1}{4}\sqrt{2}\right) \\
 &= \frac{1}{2}\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

Didapat penyelesaian

$$\left(2 + \frac{1}{4}\sqrt{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$

Substitusi persamaan (11) dan (13) ke persamaan (1)

$$\begin{aligned}
 yz &= (2\sqrt{2} - \sqrt{2}x)(-2x) \\
 2 - x &= -4\sqrt{2}x^2 + 2\sqrt{2}x \\
 4\sqrt{2}x^2 - (2\sqrt{2} + 1)x + 2 &= 0 \\
 (2\sqrt{2}x + 1)(x - 2) &= 0 \\
 \Downarrow \qquad \qquad \qquad \Downarrow \\
 x = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{4}\sqrt{2} \quad \vee \quad x = 2 \text{ (TM)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y &= 2\sqrt{2} - \sqrt{2}x \\
 &= 2\sqrt{2} - \sqrt{2}\left(-\frac{1}{4}\sqrt{2}\right) \\
 &= 2\sqrt{2} + \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} z &= -2x \\ &= -2\left(-\frac{1}{4}\sqrt{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{aligned}$$

Didapat penyelesaian

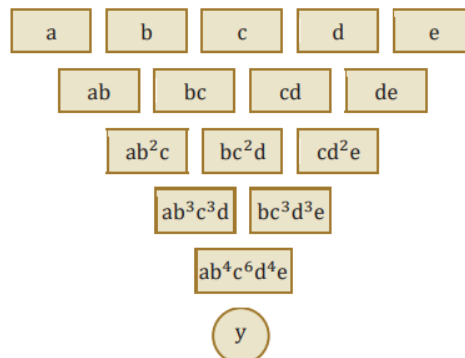
$$\left(-\frac{1}{4}\sqrt{2}, 2\sqrt{2} + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$

Jadi semua ada 3 bilangan  $x, y$ , dan  $z$  yang memenuhi, yaitu

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{4}\sqrt{2}, & y &= -\frac{1}{2}, & z &= -\frac{1}{2}\sqrt{2} - 4, & \text{atau} \\ x &= \frac{1}{4}\sqrt{2} + 2, & y &= -\frac{1}{2}, & z &= \frac{1}{2}\sqrt{2}, & \text{atau} \\ x &= -\frac{1}{4}\sqrt{2}, & y &= \frac{1}{2} + 2\sqrt{2}, & z &= \frac{1}{2}\sqrt{2}. \end{aligned}$$

## 8. Penyelesaian:

Misalkan bilangan paling atas dari kiri ke kanan adalah  $a, b, c, d$  dan  $e$ .



Faktorisasi dari 576 adalah

$$576 = 2^6 \times 3^2$$

Diketahui bilangan terbawah adalah  $x$  dan bilangan pada lingkaran adalah  $y$ .

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{\frac{x}{3} \times 10^{-4}} \\ 2^6 \times 3^2 &= \sqrt{\frac{ab^4c^6d^4e}{3} \times 10^{-4}} \\ 2^{12} \times 3^4 &= \frac{ab^4c^6d^4e}{3 \times 2^4 \times 5^4} \\ 2^{16} \times 3^5 \times 5^4 &= ab^4c^6d^4e \end{aligned}$$

Nilai  $c$  yang mungkin adalah

$$\begin{aligned} c^6 &= 2^6 \Rightarrow c = 2, \text{ atau} \\ c^6 &= 2^{12} \Rightarrow c = 4. \end{aligned}$$



Perlu diingat bahwa

$$\{a, b, c, d, e\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

$$\text{dan } a \neq b \neq c \neq d \neq e.$$

Untuk  $c = 2$ , maka

$$ab^4c^6d^4e = 2^{16} \times 3^5 \times 5^4$$

$$ab^4(2^6)d^4e = 2^{16} \times 3^5 \times 5^4 \dots (: 2^6)$$

$$ab^4d^4e = 2^{10} \times 3^5 \times 5^4$$

Perhatikan bahwa nilai maksimum dari  $b^4d^4$  adalah  $(2^2)^4 \times 5^4$ . Berarti nilai minimum dari  $ae$  adalah

$$ab^4d^4e = 2^{10} \times 3^5 \times 5^4$$

$$a(2^8 \times 5^4)e = 2^{10} \times 3^5 \times 5^4 \dots : (2^8 \times 5^4)$$

$$ae = 2 \times 3^5$$

Nilai maksimum dari  $ae$ , untuk

$$a, e \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

Adalah  $ae = 7 \times 8 = 56$ .

Sehingga dapat disimpulkan bahwa tidak ada nilai  $a, e \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  yang memenuhi.

Untuk  $c = 4 = 2^2$ , maka

$$ab^4(2^2)^6d^4e = 2^{16} \times 3^5 \times 5^4 \dots (: 2^{12})$$

$$ab^4d^4e = 2^4 \times 3^5 \times 5^4$$

Perhatikan  $b$  dan  $d$  akan dipangkatkan 4. Nilai  $\{b, d\}$  yang mungkin adalah  $\{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 5\}, \{2, 3 \times 5\}, \{5, 2 \times 3\}$ .

$\{b, d\}$	$ae$	$\{a, e\}$
$\{2, 3\}$	$3 \times 5^4$	—
$\{2, 5\}$	$3^5$	—
$\{3, 5\}$	$2^4 \times 3$	$\{6, 8\}$
$\{5, 6\}$	3	$\{1, 3\}$

Posisi  $a$  dan  $e$  dapat bertukar, demikian pula dengan posisi  $b$  dan  $d$ . Sehingga susunan  $a, b, c, d, e$  yang menghasilkan  $y = 576$  ada  $2 \times 2 \times 2 = 8$ .

Banyak cara menyusun permutasi 5 angka dari 8 angka yang tersedia adalah

$$P_5^8 = \frac{8!}{(8-5)!}$$

$$= 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4$$

Jadi peluang  $y = 576$  adalah

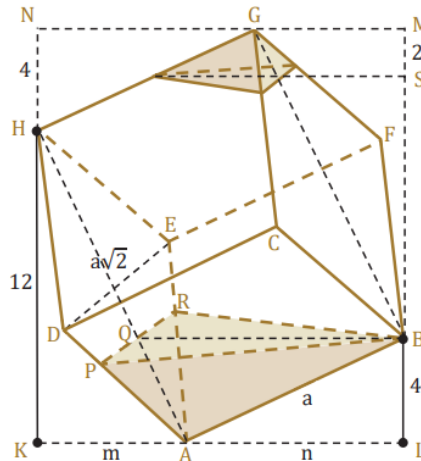
$$P(y = 576) = \frac{8}{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}$$

$$= \frac{1}{840}$$



## 9. Penyelesaian:

Misalkan Panjang rusuk kubus adalah  $a$ , maka Panjang diagonal sisi kubus adalah  $AH = a\sqrt{2}$ .



$BAH$  siku-siku dan  $\Delta HKA$  sebangun dengan  $\Delta ALB$

$\frac{AK}{AH} = \frac{BL}{BA}$	$\frac{AL}{AB} = \frac{HK}{HA}$
$\frac{m}{a\sqrt{2}} = \frac{4}{a}$	$\frac{n}{a} = \frac{12}{a\sqrt{2}}$
$m = 4\sqrt{2}$	$n = 6\sqrt{2}$

Terapkan dalil Phytagoras pada  $\Delta ABL$

$$a = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 + 4^2}$$

$$= \sqrt{72 + 16}$$

$$= \sqrt{88}$$

Perhatikan jarak  $P, Q, R$  dan  $B$  ke alas adalah 4.

$$\frac{AQ}{AH} = \frac{4}{12}$$

$$\frac{AQ}{(2\sqrt{22})\sqrt{2}} = \frac{1}{3}$$

$$AQ = \frac{4}{3}\sqrt{11} \Rightarrow PQ = QR = \frac{4}{3}\sqrt{11}$$

Volume limas bawah adalah

$$V_B = [B.APR]$$

$$= \frac{1}{3} \times \left( \frac{1}{2} \times PR \times AQ \right) \times AB$$

$$= \frac{1}{6} \times \frac{8}{3}\sqrt{11} \times \frac{4}{3}\sqrt{11} \times 2\sqrt{22}$$

$$= \frac{352}{26}\sqrt{22}$$



Ingat!

Perbandingan volume bangun ruang yang sebangun sama dengan perbandingan pangkat tiga dari Panjang “rusuk” yang bersesuaian.

Perhatikan bahwa limas atas dan limas bawah adalah sebangun. Maka volume limas atas adalah

$$\begin{aligned}\frac{V_A}{V_B} &= \left(\frac{MS}{BL}\right)^3 \\ \frac{V_A}{\frac{352}{27}\sqrt{2}} &= \left(\frac{2}{4}\right)^3 \\ V_A &= \frac{1}{8} \times \frac{352}{27}\sqrt{22} \\ V_A &= \frac{44}{27}\sqrt{22}\end{aligned}$$

Volume bagian tengah dapat ditentukan dengan mengurangi volume kubus dengan kedua limas.

$$\begin{aligned}V_T &= V_{\text{kubus}} - V_B - V_A \\ &= (2\sqrt{22})^3 - \frac{352}{27}\sqrt{22} - \frac{44}{27}\sqrt{22} \\ &= 176\sqrt{22} - \frac{44}{3}\sqrt{22} = 176\sqrt{22} - 14\frac{2}{3}\sqrt{22} \\ &= 161\frac{2}{3}\sqrt{22}\end{aligned}$$

Jadi, bagian terbesar dari ketiga bagian tersebut adalah yang bagian tengah dengan volume

$$V_T = 161\frac{2}{3}\sqrt{22}$$

## 10. Penyelesaian:

Perhatikan tabel penjumlahan 2 mata dadu berikut ini.

+		D a d u 2					
		1	2	3	4	5	6
D a d u  1	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12





Dari poin (b), orang tersebut akan kalah hanya jika jumlah mata dadu pada pelemparan pertama bernilai 2, 3 atau 12. Peluang orang tersebut kalah pada lemparan pertama adalah

$$P(K_1) = \frac{1 + 2 + 1}{6 \times 6} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

Jika pada pelemparan pertama orang tersebut tidak kalah, maka kemungkinan dia menang atau seri. Jika seri, poin (d) akan dilakukan berulang sampai orang tersebut menang. Hal ini berarti tidak akan terjadi kekalahan untuk pelemparan kedua dan seterusnya. Hal ini berarti peluang orang tersebut kalah adalah

$$P(K) = P(K_1) = \frac{1}{9}$$

Dengan menggunakan komplemen kejadian, didapat peluang orang tersebut memenangkan permainan adalah

$$\begin{aligned} P(M) &= 1 - P(K) \\ &= 1 - \frac{1}{9} \\ &= \frac{8}{9} \end{aligned}$$