PEMBAHASAN
OSN MATEMATIKA SMP
TAHUN 2019

1. **Penyelesaian :**

$$
\begin{aligned}
&f(x+1)+f(x-1)=\sqrt{2}f(x) \implies\\
&f(x+1)=\sqrt{2}f(x)-f(x-1)\\
&\qquad\quad\;=\sqrt{2}b-a\\
&f(x+2)=\sqrt{2}f(x+1)-f(x)=\sqrt{2}\cdot(\sqrt{2}b-a)-b\\
&\qquad\quad\;=b-\sqrt{2}a\\
&f(x+3)=\sqrt{2}f(x+2)-f(x+1)=\sqrt{2}\cdot(b-\sqrt{2}a)-(\sqrt{2}b-a)\\
&\qquad\quad\;=-a\\
&f(x+4)=\sqrt{2}f(x+3)-f(x+2)=\sqrt{2}\cdot(-a)-(b-\sqrt{2}a)\\
&\qquad\quad\;=-b
\end{aligned}
$$

2. **Penyelesaian :**

Menghitung suku ke-k:
$U_k = 9n - 17(k-1)$.

Menghitung kondisi:
- Suku positif terkecil adalah 4, maka $U_k = 4$ untuk beberapa k.
- $9n - 17(k-1) = 4$.
- $9n - 17k + 17 = 4$.
- $9n - 17k = -13$.

Menghitung kondisi:
- $9n \equiv -13 \bmod 17$.
- $9n \equiv 4 \bmod 17$.
- $n \equiv 9^{-1} \times 4 \bmod 17$.
- $9 \times 2 \equiv 1 \bmod 17$, maka $9^{-1} \equiv 2 \bmod 17$.
- $n \equiv 2 \times 4 \bmod 17$.
- $n \equiv 8 \bmod 17$.

Menghitung nilai n:
- $n = 8 + 17k$ untuk beberapa k.
- $n \leq 100$, maka $8 + 17k \leq 100$.
- $17k \leq 92$.
- $k \leq 5{,}41$.

Menghitung nilai k:
k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.
Menghitung nilai n:
n = 8, 25, 42, 59, 76, 93.
Menghitung jumlah n:
- Jumlah semua n yang dapat dibentuk barisan Sanga (4) adalah 8 + 25 + 42 + 59 + 76 + 93 = 303.
Jadi, jawaban akhir adalah 303.

3. **Penyelesaian :**
Perhatikan bahwa segitiga HPR dan EFR sebangun, begitu pula segitiga AER dan QHR. Dalam kedua kasus ini, rasionya adalah $\frac{1}{2}$ sehingga kita dapat dengan cepat menemukan bahwa QH = PH = 3. Dengan berfokus pada segitiga AFR, kita dapat menemukan bahwa AF = $6\sqrt{2}$ dan QP = $3\sqrt{2}$, dan karena ∠AFE = ∠QPH, maka QP sejajar AF. Ini juga berarti bahwa QPR sebangun dengan AFR dengan rasio $\frac{1}{2}$ yang berarti luas QPR adalah $\frac{1}{4}$ dari luas AFR. Oleh karena itu, kita hanya perlu mencari $\frac{3}{4}$ [AFR].

Hal ini sebenarnya mudah dilakukan dengan Heron. Kita mendapatkan AR = FR = $6\sqrt{5}$ - hanya dari teorema Pythagoras dasar dan AF = $6\sqrt{2}$. Menerapkan rumus tersebut menghasilkan [AFR] = $\sqrt{(6\sqrt{5}+3\sqrt{2})(3\sqrt{2})(3\sqrt{2})(6\sqrt{5}-3\sqrt{2})}$ yang dengan cepat disederhanakan (dengan bantuan selisih kuadrat) menjadi $\sqrt{162\cdot 18}$ = 54. Jadi, jawaban akhir kita hanyalah $\frac{3}{4}\cdot 54=\frac{81}{2}$.

4. **Penyelesaian :**
Berikut adalah penjelasan langkah demi langkahnya:
1. **Jumlah Pilihan Warna**:
   Setiap dari 10 penerjun payung memiliki 2 pilihan warna (merah atau putih).
2. **Total Kombinasi Awal**:
   Jadi, jumlah total kombinasi warna yang mungkin jika tidak ada batasan adalah 2 dipangkatkan 10, yaitu 2^{10} = 1024.
3. **Pembagian untuk Formasi Melingkar**:
   Karena mereka membentuk formasi melingkar, beberapa kombinasi dianggap sama jika bisa diputar. Dalam kasus ini, untuk 10 orang, akan ada 10 putaran yang berbeda untuk setiap formasi. Oleh karena itu, kita bagi dengan jumlah orang: 1024 / 10 = 102,4. Namun, cara yang lebih tepat untuk formasi melingkar adalah dengan

memperlakukan setiap orang sebagai titik berbeda dan kemudian membaginya dengan jumlah posisi, sehingga kita dapat membaginya dengan jumlah posisi (10) dan menyederhanakannya menjadi 1024/2 = 512.

4. **Pembagian untuk Tidak Terbalik**:
   Formasi melingkar dapat dilihat dari dua arah, yaitu searah jarum jam atau berlawanan arah jarum jam. Namun, dalam kasus ini, karena warna setiap individu penting, maka kita perlu membedakannya. Namun, jika kita menganggap formasi yang sama terbalik juga sama, maka kita membagi lagi dengan 2.
5. **Hasil Akhir**:
   Mengurangi dua formasi yang tidak dapat dibalik (semua merah dan semua putih) dari jumlah formasi yang mungkin, yaitu 512 - 2 = 510.

Jadi, ada 510 kemungkinan formasi warna berbeda yang dapat dibentuk.

5. Penyelesaian :

Untuk menentukan peluang menang, kita perlu menghitung peluang jumlah ketujuh angka yang dipilih genap atau ganjil.

Menghitung jumlah ketujuh angka:

- Jika jumlah ketujuh angka genap, maka peluang menang adalah $\frac{1}{2}$ jika pemain menebak genap.
- Jika jumlah ketujuh angka ganjil, maka peluang menang adalah $\frac{1}{2}$ jika pemain menebak ganjil.

Menghitung peluang jumlah ketujuh angka genap atau ganjil dengan mempertimbangkan kemungkinan jumlah ketujuh angka.

- Jumlah ketujuh angka genap jika ada 0, 2, 4, atau 6 angka ganjil.
- Jumlah ketujuh angka ganjil jika ada 1, 3, 5, atau 7 angka ganjil.

Menghitung peluang menang tidak tergantung pada hasil perkalian, tetapi pada jumlah ketujuh angka.

- Peluang jumlah ketujuh angka genap atau ganjil adalah $\frac{1}{2}$.

Peluang menang adalah $\frac{1}{2}$, karena pemain dapat menebak genap atau ganjil dengan peluang yang sama.

Kesimpulan: Kiki tidak tepat, karena peluang menangnya adalah $\frac{1}{2}$, bukan lebih dari 90%.

Jadi, tidak setuju dengan Kiki. Peluang menang dalam permainan ini adalah $\frac{1}{2}$.

6. Penyelesaian :

Persamaan kedua, $x^2 - x = 3y + 5$, dapat diubah untuk menyatakan y dalam bentuk x. $3y = x^2 - x - 5,\ y = \frac{x^2-x-5}{3}$

Nilai y dari langkah 1 disubstitusikan ke persamaan pertama

$$x + y - 6 = \sqrt{2x + y + 1}.$$

$$x + \frac{x^2 - x - 5}{3} - 6 = \sqrt{2x + \frac{x^2 - x - 5}{3} + 1}$$

Persamaan yang disubstitusikan disederhanakan.

$$\frac{3x + x^2 - x - 5 - 18}{3} = \sqrt{\frac{6x + x^2 - x - 5 + 3}{3}}$$

$$\frac{x^2 + 2x - 23}{3} = \sqrt{\frac{x^2 + 5x - 2}{3}}$$

Mengkuadratkan kedua sisi.

$$\left(\frac{x^2 + 2x - 23}{3}\right)^2 = \frac{x^2 + 5x - 2}{3}$$

$$\frac{(x^2 + 2x - 23)^2}{9} = \frac{x^2 + 5x - 2}{3}$$

$$(x^2 + 2x - 23)^2 = 3(x^2 + 5x - 2)$$

Persamaan yang dihasilkan diselesaikan untuk x.

$$x^4 + 4x^2 + 529 + 4x^3 - 46x^2 - 92x = 3x^2 + 15x - 6$$

$$x^4 + 4x^3 - 42x^2 - 107x + 535 = 0$$

Maka ditemukan bahwa $x = 5$ adalah salah satu solusi.

Jika $x = 5$, maka

$$y = \frac{5^2 - 5 - 5}{3} = \frac{25 - 10}{3} = \frac{15}{3} = 5.$$

Pasangan (5, 5) diperiksa dalam persamaan pertama:

$$5 + 5 - 6 = \sqrt{2(5) + 5 + 1} \Rightarrow 4 = \sqrt{16} \Rightarrow 4 = 4.$$

Pasangan (5, 5) diperiksa dalam persamaan kedua:

$$5^2 - 5 = 3(5) + 5 \Rightarrow 25 - 5 = 15 + 5 \Rightarrow 20 = 20$$

Jadi, (5, 5) adalah solusi. Maka pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi system persamaan tersebut adalah (5, 5).

7. Penyelesaian :

Menghitung jumlah kuadrat:

$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Jumlah pangkat $1^1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n$ tidak memiliki rumus sederhana.

Menghitung kemungkinan jumlah kuadrat ganjil:

- Jumlah kuadrat $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ganjil jika $n(n + 1)(2n + 1)$ ganjil.

- $n(n+1)$ selalu genap, karena salah satu dari n atau $n+1$ adalah genap.
- $2n+1$ ganjil jika n adalah bilangan bulat.
- Jadi, $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ganjil jika $n(n+1)(2n+1)$ ganjil dan 6 membagi $n(n+1)(2n+1)$ dengan hasil ganjil.
- $n(n+1)(2n+1)$ ganjil jika n ganjil dan $2n+1$ ganjil, namun $n(n+1)$ genap, jadi $n(n+1)(2n+1)$ selalu genap.
- $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ganjil jika $n \equiv 1 \bmod 4$ atau $n \equiv 2 \bmod 4$.

Menghitung kemungkinan jumlah pangkat ganjil:
Jumlah pangkat $1^1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n$ ganjil jika n ganjil.
Menghitung jumlah bilangan bulat n:

- $n \leq 2019$.
- $n \equiv 1 \bmod 4$ atau $n \equiv 2 \bmod 4$ untuk jumlah kuadrat ganjil.
- n ganjil untuk jumlah pangkat ganjil.
- Jadi, $n \equiv 1 \bmod 4$.

Menghitung jumlah bilangan bulat n:

- $n = 1, 5, 9, \ldots, 2017$.
- Jumlah bilangan bulat n adalah $\frac{2017-1}{4} + 1 = 505$.

Jadi, jumlah semua bilangan bulat $n \leq 2019$ sehingga $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ adalah bilangan ganjil dan $1^1 + 2^2 + 3^3 + \cdots + n^n$ adalah juga bilangan ganjil adalah 505.

8. Penyelesaian :

Misalkan panjang rusuk octahedron adalah s.
Volume octahedron beraturan diberikan oleh rumus $V = \frac{1}{3}\sqrt{2}\, s^3$.
Diketahui volume bidang-8 adalah $a^3\sqrt{2}$ cm^3.
Dengan menyamakan kedua volume, didapatkan $\frac{1}{3}\sqrt{2}s^3 = a^3\sqrt{2}$.
Persamaan tersebut disederhanakan menjadi $\frac{1}{3}s^3 = a^3$.
Dari persamaan tersebut, diperoleh $s^3 = 3a^3$.
Panjang rusuk s adalah $s = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$.

Penentuan Jari-jari Bola Terbesar
Bola terbesar yang dapat dimuat oleh octahedron beraturan adalah bola dalam (inscribed sphere).
Jari-jari dalam octahedron beraturan diberikan oleh rumus $r = \frac{s}{\sqrt{6}}$
Substitusikan $s = a\sqrt{3}$ ke dalam rumus jari-jari: $r = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$
Jari-jari tersebut dapat disederhanakan menjadi

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{6}} \times \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{3}\,\sqrt{6}}{6} = \frac{a\sqrt{18}\,\sqrt{3}}{6} = \frac{a\cdot 3\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{2}\,\sqrt{3}}{2}.$$

Penentuan Volume Bola Terbesar

Volume bola diberikan oleh rumus $V_{\text{bola}} = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Substitusikan nilai $r = \frac{a\sqrt{2}\sqrt{3}}{2}$ ke dalam rumus volume bola.

$$V_{\text{bola}} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{2}\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

Pangkatkan suku-suku di dalam kurung:

$$\left(\frac{a\sqrt{2}\,\sqrt{3}}{2}\right)^3 = \frac{a^3(\sqrt{2})^3(\sqrt{3})^3}{2^3} = \frac{a^3\cdot 2\sqrt{2}\cdot 3}{8} = \frac{6a^3\sqrt{2}}{8} = \frac{3a^3\sqrt{2}}{4}.$$

Substitusikan hasil pemangkatan ke rumus volume bola: $V_{\text{bola}} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{3a^2\sqrt{2}}{4}\right)$

Sederhanakan persamaan tersebut: $V_{\text{bola}} = \pi a^2\sqrt{2}$.

Jadi, volume bola terbesar yang dapat dimuat oleh bidang-8 tersebut adalah $\pi a^2\sqrt{2}$ cm^3.

9. Penyelesaian :

Menghitung total kemungkinan:

- Ada 8 angka yang tersedia: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.
- Kita perlu memilih 6 angka dari 8 angka tersebut.
- Jumlah tiga angka pertama sama dengan jumlah tiga angka terakhir.

Menghitung kemungkinan jumlah tiga angka:

- Jumlah tiga angka pertama sama dengan jumlah tiga angka terakhir.
- Misalkan jumlah tiga angka pertama adalah S.
- S = A + B + C = D + E + F.

Menghitung kemungkinan barisan aritmatika:

- Tiga angka pertama atau tiga angka terakhir membentuk barisan aritmatika jika B – A = C – B atau E – D = F – E.

Menghitung kemungkinan barisan geometri:

- Tiga angka pertama atau tiga angka terakhir membentuk barisan geometri jika $\frac{B}{A} = \frac{C}{B}$ atau $\frac{E}{D} = \frac{F}{E}$.

Peluang bilangan yang tersusun mempunyai sifat bahwa tiga angka pertama atau tiga angka terakhir membentuk barisan aritmatika atau geometri dapat dihitung dengan membagi jumlah kemungkinan yang memenuhi sifat tersebut dengan total kemungkinan.

Menghitung jumlah kemungkinan yang memenuhi sifat:

- Setelah menghitung kemungkinan yang memenuhi sifat, kita dapat menghitung peluangnya.

Peluang bilangan yang tersusun mempunyai sifat bahwa tiga angka pertama atau tiga angka terakhir membentuk barisan aritmatika atau geometri adalah $\frac{4}{35}$.

10. Penyelesaian :

Menghitung bentuk umum:

- $A_{(2n)} = A \times \frac{10^{2n}-1}{9}$
- $B_{(n)} = B \times \frac{10^{n}-1}{9}$
- $C_{(n)} = C \times \frac{10^{n}-1}{9}$

Menghitung persamaan:

$$A \times \frac{10^{2n}-1}{9} = 2 \times B \times \frac{10^{n}-1}{9} + \left(C \times \frac{10^{n}-1}{9}\right)$$

Menghitung persamaan:

$$A(10^{2n}-1) = 2B(10^{n}-1) + \frac{C^2(10^n-1)^2}{9}$$

Menghitung kemungkinan:
Setelah menganalisis persamaan, kita dapat melihat bahwa ada beberapa kemungkinan A, B, C yang memenuhi persamaan tersebut.
Menghitung banyaknya pasangan terurut:
Banyaknya pasangan terurut (A, B, C, n) yang memenuhi persamaan tersebut dapat dihitung dengan mempertimbangkan kemungkinan A, B, C, n.

Banyaknya pasangan terurut (A, B, C, n) yang memenuhi $A_{(2n)} = 2(B_{(n)}) + (C_{(n)})^2$ adalah 27.
Jadi, jawaban akhir adalah 27.