



# JELAJAH NALAR

## Analisa Isi Kepala Tanpa Suara

### PEMBAHASAN

### OSN MATEMATIKA SMP

### TAHUN 2018

#### 1. Penyelesaian :

##### a) Penentuan Bilangan $k$ Terkecil

Persamaan  $10n - 9m = 7$  dapat diubah menjadi  $10n = 9m + 7$ .

Nilai  $\frac{18m}{n}$  dapat diekspresikan sebagai  $\frac{18m}{\frac{9m+7}{10}} = \frac{180m}{9m+7}$ .

Substitusi ke dalam ekspresi  $k$ :  $k = 20 - \frac{180m}{9m+7}$ .

Penyederhanaan ekspresi  $k$ :  $k = \frac{20(9m+7)-180m}{9m+7} = \frac{180m+140-180m}{9m+7} = \frac{140}{9m+7}$ .

Agar  $k$  menjadi pecahan sederhana, pembilang dan penyebut harus koprime.

Karena  $m$  adalah bilangan bulat positif dan  $m \leq 2018$ , nilai  $9m + 7$  akan meningkat seiring dengan peningkatan  $m$ .

Untuk mendapatkan nilai  $k$  terkecil, penyebut  $9m + 7$  harus dimaksimalkan.

Nilai maksimum  $m$  adalah 2018, sehingga  $9m + 7 = 9(2018) + 7 = 18162 + 7 = 18169$ .

Nilai  $k$  terkecil yang mungkin adalah  $k = \frac{140}{18169}$ .

Untuk memastikan  $k$  adalah pecahan sederhana, perlu diperiksa apakah 140 dan 18169 koprime.

Factor-faktor prima dari 140 adalah 2, 5, 7.

18169 tidak habis dibagi 2 atau 5.

$18169 \div 7 = 2595.57\dots$ , sehingga 18169 tidak habis dibagi 7.

Karena tidak ada faktor prima yang sama, 140 dan 18169 adalah koprime, sehingga  $k = \frac{140}{18169}$  adalah pecahan sederhana.

##### b) Penentuan Faktor Positif dari $N$

Penyebut bilangan  $k$  terkecil adalah  $N = 18169$ .

Factor-faktor positif dari  $N = 18169$  perlu ditentukan.

18169 adalah bilangan prima.

Ini dapat diverifikasi dengan mencoba membagi dengan bilangan prima hingga  $\sqrt{18169} \approx 134.8$ .

Karena 18169 adalah bilangan prima, faktor-faktornya adalah 1 dan 18169.

##### c) Peluang Terambilnya Faktor Kelipatan 4

Himpunan faktor positif dari  $N$  adalah  $\{1, 18169\}$ .





# JELAJAH NALAR

## Analisa Isi Kepala Tanpa Suara



Jumlah total faktor adalah 2.

Factor-faktor kelipatan 4 dalam himpunan tersebut perlu diidentifikasi.

Tidak ada faktor dalam himpunan  $\{1, 18169\}$  yang merupakan kelipatan 4.

Jumlah faktor kelipatan 4 adalah 0.

Peluang terambilnya satu faktor kelipatan 4 adalah

$$\frac{\text{Jumlah faktor kelipatan } 4}{\text{Jumlah total faktor}} = \frac{0}{2} = 0$$

Jadi, a) Bilangan  $k$  terkecil yang mungkin adalah  $k = \frac{140}{18169}$ . b) Semua faktor positif dari  $N$  adalah 1 dan 18169. c) Peluang terambilnya satu faktor kelipatan 4 adalah 0.

### 2. Penyelesaian :

a) Gambarlah Grafik Fungsi  $g \circ f$

Langkah 1: Menentukan fungsi  $f(x)$  dan  $g(x)$  dari grafik

Dari grafik fungsi  $f$ :

- Untuk  $x \leq 0$ ,  $f(x) = x^2$
- Untuk  $x > 0$ ,  $f(x) = 4$

Dari grafik fungsi  $g$ :

- Untuk  $x \leq 2$ ,  $g(x) = x$
- Untuk  $x > 0$ ,  $g(x) = 4$

Langkah 2: Menentukan fungsi komposisi  $g \circ f(x) = g(f(x))$

Kita perlu menganalisis kasus berdasarkan nilai  $f(x)$  dan domain dari  $g(x)$ .

Kasus 1:  $f(x) \leq 2$

- Jika  $x \leq 0$ , maka  $f(x) = x^2$ . Agar  $x^2 \leq 2$ , maka  $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$ . Karena  $x \leq 0$ , maka  $-\sqrt{2} \leq x \leq 0$ . Dalam rentang ini,  $g(f(x)) = g(x^2) = x^2$ .
- Jika  $x > 0$ , maka  $f(x) = 4$ . Karena  $4 > 2$ , kasus ini tidak memenuhi  $f(x) \leq 2$ .

Kasus 2:  $f(x) > 2$

- Jika  $x \leq 0$ , maka  $f(x) = x^2$ . Agar  $x^2 > 2$ , maka  $x < -\sqrt{2}$  atau  $x > \sqrt{2}$ . Karena  $x \leq 0$ , maka  $x < -\sqrt{2}$ . Dalam rentang ini,  $g(f(x)) = g(x^2) = 4$ .
- Jika  $x > 0$ , maka  $f(x) = 4$ . Karena  $4 > 2$ , maka  $g(f(x)) = g(4) = 4$ .

Menggabungkan semua kasus, kita peroleh:

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 4 & \text{untuk } x < -\sqrt{2} \\ x^2 & \text{untuk } -\sqrt{2} \leq x \leq 0 \\ 4 & \text{untuk } x > 0 \end{cases}$$





# JELAJAH NALAR

## Analisa Isi Kepala Tanpa Suara



Langkah 3: Menggambar grafik  $g \circ f$

Grafik akan terdiri dari tiga bagian:

- Garis horizontal  $y = 4$  untuk  $x < -\sqrt{2}$
- Parabola  $y = x^2$  untuk  $-\sqrt{2} \leq x \leq 0$
- Garis horizontal  $y = 4$  untuk  $x > 0$

Grafik akan terlihat seperti parabola  $y = x^2$  yang “terpotong” di  $x = -\sqrt{2}$  dan  $x = 0$ , di mana nilai fungsi menjadi 4 di luar interval tersebut.

b) Tentukan semua bilangan  $x$  agar  $-\frac{1}{2} \leq (g \circ f)(x) \leq 6$

Langkah 1: Menganalisis ketaksamaan berdasarkan definisi  $(g \circ f)(x)$

Kita perlu menyelesaikan  $-\frac{1}{2} \leq (g \circ f)(x) \leq 6$  untuk setiap kasus dari  $(g \circ f)(x)$ .

Kasus 1:  $x < -\sqrt{2}$

$$(g \circ f)(x) = 4$$

Maka  $-\frac{1}{2} \leq 4 \leq 6$ . Ketaksamaan ini benar. Jadi, semua  $x < -\sqrt{2}$  adalah solusi.

Kasus 2:  $-\sqrt{2} \leq x \leq 0$

$$(g \circ f)(x) = x^2$$

Maka  $-\frac{1}{2} \leq x^2 \leq 6$ . Karena  $x^2 \geq 0$ , maka  $-\frac{1}{2} \leq x^2$  selalu benar. Kita hanya perlu menyelesaikan  $x^2 \leq 6$ , yang berarti  $-\sqrt{6} \leq x \leq \sqrt{6}$ . Menggabungkan dengan interval  $-\sqrt{2} \leq x \leq 0$ , kita dapatkan  $-\sqrt{2} \leq x \leq 0$ .

Kasus 3:  $x > 0$

$$(g \circ f)(x) = 4$$

Maka  $-\frac{1}{2} \leq 4 \leq 6$ . Ketaksamaan ini benar. Jadi, semua  $x > 0$  adalah solusi.

Langkah 2: Menggabungkan solusi dari semua kasus

Menggabungkan solusi dari ketiga kasus:

- $x < -\sqrt{2}$
- $-\sqrt{2} \leq x \leq 0$
- $x > 0$

Ketika digabungkan, ini mencakup semua bilangan real  $x$ .

Jadi, semua bilangan  $x$  agar  $-\frac{1}{2} \leq (g \circ f)(x) \leq 6$  adalah semua bilangan real  $x \in \mathbb{R}$ .

### 3. Penyelesaian :

Luas segiempat ABCD dapat dihitung dengan membagi segiempat menjadi dua segitiga, yaitu  $\triangle ABC$  dan  $\triangle ADC$ .

Langkah 1: Menentukan Jenis Segitiga





# JELAJAH NALAR

## Analisa Isi Kepala Tanpa Suara



Karena  $AB = BC = 4\sqrt{3}$  cm dan  $CD = DA = 4$  cm, maka  $\triangle ABC$  adalah segitiga sama kaki dan  $\triangle ADC$  adalah segitiga sama kaki.

Langkah 2: Menghitung Panjang Diagonal AC

Karena segiempat ABCD adalah segiempat tali busur (semua titik sudut terletak pada lingkaran), maka berlaku sifat segiempat tali busur. Diagonal AC adalah sisi bersama untuk kedua segitiga. Misalkan  $\angle ABC = \beta$  dan  $\angle ADC = \delta$ .

Karena ABCD adalah segiempat tali busur, maka  $\beta + \delta = 180^\circ$ .

Menggunakan Aturan Kosinus pada  $\triangle ABC$ :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \beta$$

$$AC^2 = (4\sqrt{3})^2 + (4\sqrt{3})^2 - 2 \cdot (4\sqrt{3}) \cdot (4\sqrt{3}) \cdot \cos \beta \quad AC^2 = 48 + 48 - 2 \cdot 48 \cdot \cos \beta$$

$$AC^2 = 96 - 96 \cos \beta$$

Menggunakan Aturan Kosinus pada  $\triangle ADC$ :

$$AC^2 = DA^2 + CD^2 - 2 \cdot DA \cdot CD \cdot \cos \delta \quad AC^2 = 4^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos \delta$$

$$AC^2 = 16 + 16 - 32 \cos \delta \quad AC^2 = 32 - 32 \cos \delta$$

Karena  $\delta = 180^\circ - \beta$ , maka  $\cos \delta = \cos(180^\circ - \beta) = -\cos \beta$ .  $AC^2 = 32 - 32(-\cos \beta)$

$$AC^2 = 32 + 32 \cos \beta$$

Menyamakan kedua persamaan untuk  $AC^2$ :  $96 - 96 \cos \beta = 32 + 32 \cos \beta$

$$64 = 128 \cos \beta \quad \cos \beta = \frac{64}{128} = \frac{1}{2}$$

Maka  $\beta = 60^\circ$ . Substitusikan nilai  $\cos \beta$  ke salah satu persamaan  $AC^2$ :

$$AC^2 = 96 - 96 \cdot \frac{1}{2} = 96 - 48 = 48 \quad AC = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \text{ cm}$$

Langkah 3: Menghitung Luas Segitiga ABC

$$\text{Luas } \triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin \beta \quad \text{Luas } \triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot (4\sqrt{3}) \cdot (4\sqrt{3}) \cdot \sin 60^\circ \quad \text{Luas } \triangle$$

$$ABC = \frac{1}{2} \cdot 48 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{Luas } \triangle ABC = 12\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Langkah 4: Menghitung Luas Segitiga ADC

$$\text{Karena } \delta = 180^\circ - \beta = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ. \quad \text{Luas } \triangle ADC = \frac{1}{2} \cdot DA \cdot CD \cdot \sin \delta \quad \text{Luas } \triangle$$

$$ADC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 120^\circ \quad \text{Luas } \triangle ADC = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{Luas } \triangle ADC = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Langkah 5: Menghitung Luas Segiempat ABCD

$$\text{Luas segiempat ABCD} = \text{Luas } \triangle ABC + \text{Luas } \triangle ADC \quad \text{Luas Segiempat ABCD} = 12\sqrt{3} + 4\sqrt{3} \quad \text{Luas Segiempat ABCD} = 16\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

Jadi, Luas daerah segiempat ABCD adalah  $16\sqrt{3}$  cm<sup>2</sup>.





# JELAJAH NALAR

## Analisa Isi Kepala Tanpa Suara



### 4. Penyelesaian :

Untuk memenuhi semua persyaratan,  $x$  harus menjadi faktor dari  $777 = 3 \times 7 \times 37$ .

Untuk  $x = 37$ , kita akan memiliki

$$\begin{aligned}y &= \frac{p}{21} \implies 21|p \implies 3|p = \overline{A5B} \implies A+B \in \{1, 4, 7, 10, 13, 16\} \\y &= \frac{p}{21} \implies 21|p \implies 7|p = \overline{A5B} \implies 2A+B+1 \in \{7, 14, 21\} \\&\qquad \implies (A, B) \in \{(2, 2), (3, 7), (6, 1), (7, 6)\} \\&\qquad \implies p \in \{252, 357, 651, 756\}, y \in \{12, 17, 31, 36\}\end{aligned}$$

Untuk  $x = 21$ , kita peroleh

$$y = \frac{p}{37} \implies 37|p = \overline{A5B} \implies p \in \{259, 555, 851\}, y \in \{7, 15, 23\}$$

Untuk  $x = 7$ , kita peroleh

$$y = \frac{p}{111} \implies p = 555, y = 5$$

Untuk  $x = 3$ , kita peroleh

$$y = \frac{p}{259} \implies p = 259, y = 1$$

Secara total, kita memiliki 6 kemungkinan nilai  $y \in \{12, 15, 17, 23, 31, 36\}$ .

### 5. Penyelesaian :

Jumlah total bilangan 8 digit  $\overline{abcdefg}$  dengan digit dari himpunan  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  adalah  $8! = 40320$

Untuk  $a + c + e + g = b + d + f + h$ , kita peroleh  $a + c + e + g = 18$

Kita peroleh

$(a, c, e, g) \in \{(8, 7, 2, 1), (8, 6, 3, 1), (8, 5, 4, 1), (8, 5, 3, 2), (7, 6, 4, 1), (7, 6, 3, 2), (7, 5, 4, 2), (6, 5, 4, 3)\}$   
atau permutasinya.

Kita memiliki  $8 \times 4!4! = 4608$  bilangan tersebut.

Untuk bilangan 8 digit sisanya,  $\frac{40320 - 4608}{2} = 17856$  akan memenuhi  $a + c + e + g > b + d + f + h$ .

Dengan demikian, banyaknya bilangan 8 digit  $\overline{abcdefg}$  yang memenuhi  $a + c + e + g \geq b + d + f + h$  adalah  $4608 + 17856 = 22464$ .





# JELAJAH NALAR

## Analisa Isi Kepala Tanpa Suara



### 6. Penyelesaian :

Menghitung Jumlah Digit Bilangan Y

Langkah 1: Memahami pola bilangan Y

Bilangan Y didefinisikan sebagai penjumlahan berulang dari angka 2018 dengan penambahan angka 0 di tengahnya. Polanya adalah sebagai berikut:

$$Y = 2018 + 20118 + 201018 + 2010018 + \dots + 201\underbrace{00\dots0}_{100 \text{ digit}} 18$$

Langkah 2: Menentukan jumlah suku dalam penjumlahan

Pola penambahan angka 0 dimulai dari satu angka 0 (pada 20118) hingga 100 angka 0.

Ini berarti ada 100 suku dalam deret penjumlahan tersebut.

Langkah 3: Menghitung jumlah digit dari setiap suku

Setiap suku dalam penjumlahan memiliki digit yang sama, yaitu 2, 0, 1 dan 8, ditambah dengan sejumlah digit 0 di antaranya. Jumlah digit dari 2018 adalah  $2 + 0 + 1 + 8 = 11$ . Setiap suku berikutnya juga akan memiliki jumlah digit  $2 + 0 + 1 + 8 = 11$ , karena penambahan angka 0 di tengah tidak mengubah jumlah digit selain 0.

Langkah 4: Menghitung total jumlah digit dari bilangan Y

Karena ada 100 suku dalam penjumlahan dan setiap suku memiliki jumlah digit 11 (tidak termasuk angka 0 di tengah), maka total jumlah digit dari bilangan Y adalah 100 kali jumlah digit dari satu suku. Total jumlah digit =  $100 \times 11 = 1100$ .

Jadi, jumlah dari semua digit pada bilangan Y tersebut adalah 1100.

### 7. Penyelesaian :

Step 1: Memahami Masalah

Tiga kelompok garis membagi sebuah bidang menjadi  $D$  daerah. Masing-masing garis dalam satu kelompok adalah sejajar. Kita perlu menentukan jumlah garis minimum yang dibutuhkan sehingga terdapat lebih dari 2018 daerah.

Step 2: Menghitung Jumlah Daerah

Jumlah daerah  $D$  yang dibentuk oleh  $x$  garis sejajar dari kelompok 1,  $y$  garis sejajar dari kelompok 2, dan  $z$  garis sejajar dari kelompok 3 dapat dihitung menggunakan rumus  $D = (x + 1)(y + 1) + z(x + y)$ .

Step 3: Menentukan Jumlah Garis Minimum

Kita perlu menemukan  $x, y, z$  minimum sehingga  $D > 2018$ . Kita dapat mencoba kombinasi  $x, y, z$  yang memenuhi  $(x + 1)(y + 1) + z(x + y) > 2018$ .





# JELAJAH NALAR

## Analisa Isi Kepala Tanpa Suara



Step 4: Mencoba Kombinasi

Misalkan  $z = 0$ , maka  $(x + 1)(y + 1) > 2018$ . Kita dapat memilih  $x = 44$  dan  $y = 45$  karena  $45 \times 46 = 2070 > 2018$ .

Step 5: Menghitung Jumlah Garis Total

Jumlah garis total adalah  $x + y + z = 44 + 45 + 0 = 89$ .

### 8. Penyelesaian :

Limas  $M.EFGH$  adalah limas dengan puncak  $M$  dan alas persegi  $EFGH$ . Limas  $N.ABCD$  adalah limas dengan puncak  $N$  dan alas persegi  $ABCD$ .

Perhitungan Volume Irisan

Langkah 1: Menentukan tinggi limas  $M.EFGH$  dan  $N.ABCD$

Tinggi limas  $M.EFGH$  adalah jarak dari titik  $M$  ke bidang  $EFGH$ , yaitu  $3t$ . Tinggi limas  $N.ABCD$  adalah jarak dari titik  $N$  ke bidang  $ABCD$ , yaitu  $3t$ .

Langkah 2: Menentukan volume limas  $M.EFGH$

Volume limas  $M.EFGH$  dihitung menggunakan rumus volume limas:

$$V = \frac{1}{3} \times \text{Luas Alas} \times \text{Tinggi}. \text{ Luas alas } EFGH \text{ adalah } (3a)^2 = 9a^2. \text{ Volume limas } M.EFGH \text{ adalah } V_{M.EFGH} = \frac{1}{3} \times 9a^2 \times 3t = 9a^2t.$$

Langkah 3: Menentukan volume limas  $N.ABCD$

Volume limas  $N.ABCD$  dihitung menggunakan rumus volume limas:

$$V = \frac{1}{3} \times \text{Luas Alas} \times \text{Tinggi}. \text{ Luas alas } ABCD \text{ adalah } (6a)^2 = 36a^2. \text{ Volume limas } N.ABCD \text{ adalah } V_{N.ABCD} = \frac{1}{3} \times 36a^2 \times 3t = 36a^2t.$$

Langkah 4: Menentukan bangun ruang irisan

Bangun ruang irisan antara limas  $N.ABCD$  dan  $M.EFGH$  adalah sebuah limas terpancung dengan alas  $EFGH$  dan puncak yang merupakan perpotongan rusuk-rusuk tegak limas  $N.ABCD$  dengan bidang  $EFGH$ . Namun, karena  $MN$  tegak lurus bidang  $EFGH$ , irisan tersebut adalah sebuah limas dengan alas  $EFGH$  dan puncak  $N$ .

Langkah 5: Menghitung volume irisan

Volume irisan adalah volume limas  $N.EFGH$ . Tinggi limas  $N.EFGH$  adalah  $3t$ . Luas alas  $EFGH$  adalah  $(3a)^2 = 9a^2$ . Volume irisan adalah

$$V_{\text{irisan}} = \frac{1}{3} \times 9a^2 \times 3t = 9a^2t.$$





# JELAJAH NALAR

## Analisa Isi Kepala Tanpa Suara



Jadi, volume bangun ruang yang merupakan irisan antara limas  $N.ABCD$  dan  $M.EFGH$  adalah  $9a^2t$ .

### 9. Penyelesaian :

- Menentukan Posisi Bilangan 2018

Step 1: Memahami pola bilangan

Bilangan-bilangan pada tabel disusun berdasarkan pola tertentu. Kita bisa melihat pola pada diagonal-diagonalnya. Diagonal ke-1: 1 Diagonal ke-2: 2, 3 Diagonal ke-3: 4, 5, 6 Diagonal ke-n: jumlah elemennya adalah n. Jumlah bilangan hingga diagonal ke-n adalah  $\frac{n(n+1)}{2}$ .

Step 2: Menentukan diagonal bilangan 2018

Kita perlu mencari n sedemikian rupa sehingga  $\frac{n(n+1)}{2}$  mendekati 2018. Jika n = 63, maka  $\frac{63 \times 64}{2} = 63 \times 32 = 2016$ . Jadi, bilangan 2016 adalah bilangan terakhir pada diagonal ke-63. Bilangan 2018 akan terletak pada diagonal ke-64.

Step 3: Menentukan posisi dalam diagonal

Bilangan pertama pada diagonal ke-64 adalah 2017 (yaitu 2016+1). Bilangan kedua pada diagonal ke-64 adalah 2018. Dalam suatu diagonal, posisi bilangan ditentukan oleh (kolom, baris). Untuk diagonal ke-k, bilangan pertama adalah (1, k), bilangan kedua adalah (2, k-1) dan seterusnya. Jadi, untuk bilangan 2018 yang merupakan bilangan kedua pada diagonal ke-64, posisinya adalah (kolom 2, baris 63).

Jadi, posisi bilangan 2018 adalah baris ke-63, kolom ke-2 dan diagonal ke-64.

- Menentukan Rata-Rata Barisan Bilangan Pada Diagonal Utama

Step 1: Mengidentifikasi pola bilangan pada diagonal utama

Barisan bilangan pada diagonal utama adalah 1, 5, 13, 25, ... Kita bisa mencari selisih antar suku:

$$5 - 1 = 4$$

$$13 - 5 = 8$$

$$25 - 13 = 12$$

Selisihnya membentuk barisan aritmetika: 4, 8, 12, ... dengan beda 4. Ini menunjukkan bahwa barisan bilangan pada diagonal utama adalah barisan kuadrat dengan penyesuaiannya atau barisan tingkat dua. Rumus suku ke-n ( $U_n$ ) dari barisan ini dapat ditemukan dengan  $U_n = 2n^2 - 2n + 1$ . Mari kita cek:

$$U_1 = 2(1)^2 - 2(1) + 1 = 2 - 2 + 1 = 1$$

$$U_2 = 2(2)^2 - 2(2) + 1 = 8 - 4 + 1 = 5$$





# JELAJAH NALAR

## Analisa Isi Kepala Tanpa Suara



$$U_3 = 2(3)^2 - 2(3) + 1 = 18 - 6 + 1 = 13$$

$$U_4 = 2(4)^2 - 2(4) + 1 = 32 - 8 + 1 = 25$$

Rumus ini benar.

Step 2: Menentukan suku terakhir yang kurang dari atau sama dengan 2018

Kita perlu mencari nilai n terbesar sehingga  $U_n \leq 2018$ .

$$2n^2 - 2n + 1 \leq 2018$$

$$2n^2 - 2n - 2017 \leq 0$$

Kita bisa menggunakan rumus ABC atau mencoba nilai n. Jika n = 32:

$$2(32)^2 - 2(32) + 1 = 2(1024) - 64 + 1 = 2048 - 64 + 1 = 1985$$

Jika n = 33:

$$2(33)^2 - 2(33) + 1 = 2(1089) - 66 + 1 = 2178 - 66 + 1 = 2113$$

Jadi, suku terakhir yang kurang dari atau sama dengan 2018 adalah  $U_{32} = 1985$ .

Barisan bilangan yang akan dihitung rata-ratanya adalah 1, 5, 13, 25, ..., 1985.

Ada 32 suku.

Step 3: Menghitung rata-rata

Untuk menghitung rata-rata, kita perlu menjumlahkan semua suku dan membaginya dengan banyaknya suku. Jumlah n suku pertama dari barisan  $U_n = 2n^2 - 2n + 1$  adalah

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n (2k^2 - 2k + 1). \\ & \sum_{k=1}^n (2k^2 - 2k + 1) = 2 \sum_{k=1}^n k^2 - 2 \sum_{k=1}^n k + \sum_{k=1}^n 1 \\ & = 2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2 \frac{n(n+1)}{2} + n \\ & = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - n(n+1) + n \end{aligned}$$

Untuk n = 32: Jumlah =

$$\frac{32(33)(65)}{3} - 32(33) + 32$$

$$= 32(11)(65) - 1056 + 32$$

$$= 22880 - 1056 + 32 = 21856$$

$$\text{Rata-rata} = \frac{\text{Jumlah}}{\text{Banyaknya suku}} = \frac{21856}{32}$$

Jadi, rata-rata dari barisan bilangan tersebut adalah 683.

### 10. Penyelesaian :

Menentukan Peluang Bilangan Gadang





# JELAJAH NALAR

## Analisa Isi Kepala Tanpa Suara



Peluang untuk mendapatkan bilangan gadang dapat ditentukan dengan mengikuti langkah-langkah berikut:

Langkah 1: Menentukan Jumlah Anggota Himpunan A

Himpunan A adalah himpunan bilangan bulat tiga digit yang memuat angka nol.

Digit pertama dapat dipilih dari 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, sehingga terdapat 9 pilihan.

Digit kedua dapat dipilih dari 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, sehingga terdapat 9 pilihan.

Digit ketiga dapat dipilih dari 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, sehingga terdapat 9 pilihan.

Jumlah total anggota himpunan A adalah  $9 \times 9 \times 9 = 729$ .

Langkah 2: Menentukan Kriteria Bilangan Gadang

Digitnya berbeda.

Penyusunnya bukan bilangan prima.

Bilangan prima adalah 2, 3, 5, 7. Jadi, digit yang diizinkan adalah 1, 4, 6, 8, 9.

Memberi sisa 5 jika dibagi 7.

Langkah 3: Mencari Bilangan Gadang

Digit yang tersedia adalah 1, 4, 6, 8, 9.

Bilangan gadang harus memiliki tiga digit berbeda dari himpunan {1, 4, 6, 8, 9}.

Bilangan-bilangan yang memenuhi kriteria ini dan memberikan sisa 5 jika dibagi 7 adalah:

$$194 \pmod{7} = 5 \text{ (Bilangan gadang pertama)}$$

$$418 \pmod{7} = 5 \text{ (Bilangan gadang kedua)}$$

$$481 \pmod{7} = 5 \text{ (Bilangan gadang ketiga)}$$

$$614 \pmod{7} = 5 \text{ (Bilangan gadang keempat)}$$

$$648 \pmod{7} = 5 \text{ (Bilangan gadang kelima)}$$

$$896 \pmod{7} = 5 \text{ (Bilangan gadang keenam)}$$

$$914 \pmod{7} = 5 \text{ (Bilangan gadang ketujuh)}$$

$$981 \pmod{7} = 5 \text{ (Bilangan gadang kedelapan)}$$

Jumlah bilangan gadang adalah 8.

Langkah 4: menghitung peluang

Peluang dihitung dengan membagi jumlah bilangan gadang dengan jumlah total anggota himpunan A.

$$\text{Peluang} = \frac{\text{Jumlah bilangan gadang}}{\text{Jumlah anggota himpunan A}} = \frac{8}{729}.$$

Jadi, peluang untuk mendapatkan bilangan gadang adalah  $\frac{8}{729}$ .

